J. L. Bell

ΑΠΟ ΤΑ ΑΠΟΛΥΤΑ

ΣΤΑ ΤΟΠΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ[1]

Μετάφραση: Κώστα Αθ. Δρόσου[2]

Στην παρούσα εργασία (πού είναι συνέχεια της [1][3]) προτείνω μία «***τοπική»*** (local) ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών**,** η οποία βασίζεται σε έννοιες πού προέρχονται από τη ***Θεωρία Κατηγοριών (category theory).***

Ή θεμελιώδης ιδέα έγκειται στην εγκατάλειψη του μοναδικού απόλυτου σύμπαντος συνόλων**,** κάτι που είναι κεντρικό στην ορθόδοξη συνολοθεωρητική θεώρηση των θεμελίων των μαθηματικών**,** και στην αντικατάσταση του από μία πλειονότητα τοπικών μαθηματικών πλαισίων, (frameworks) — ***στοιχειώδεις τόποι (elementary toposes)*** — τα όποια ορίζονται με κατηγοριο-θεωρητικούς όρους. Αυτά τα πλαίσια θα χρησιμεύσουν ως τοπικά υποκατάστατα του κλασικού σύμπαντος των συνόλων**.** Ειδικότερα θα κατέχουν επαρκώς πλούσια εσωτερική δομή, ώστε να καθιστούν δυνατή την ερμηνεία σ' αυτά, μαθηματικών εννοιών και ισχυρισμών. Με την εγκατάλειψη του απόλυτου σύμπαντος συνόλων, οι μαθηματικές έννοιες, γενικά, δεν θα κατέχουν πια απόλυτο **νόημα,** ούτε οι μαθηματικοί ισχυρισμοί απόλυτες τιμές αλήθειας, αλλά αντίθετα θα κατέχουν τέτοια νοήματα ή τιμές αλήθειας μόνο ***τοπικά,*** δηλαδή σε ***σχέση*** με κάποια τοπικά πλαίσια. Υπάρχει μία προφανής παραλληλία ως προς την ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών μεταξύ αυτής της προσέγγισης και της ερμηνείας των

---

[1] Δημοσιεύτηκε στο περιοδικό ***Synthese*** **69** (1986), 409-426, D. Reidel Publishing Co., με τον τίτλο ***"From Absolute to Local Mathematics".***

[2] Η μετάφραση αυτή έγινε για τις ανάγκες του μαθήματος του 4^ου^ έτους «Θεμέλια των Μαθηματικών». Υπάρχει και μια μετάφραση του άρθρου αυτού στο περιοδικό «ΔΕΥΚΑΛΙΩΝ» αλλά δυστυχώς η μετάφραση είναι πολύ κακή.

[3] Βλέπε τη Βιβλιογραφία στο τέλος του άρθρου.

φυσικών εννοιών στη ***Θεωρία της Σχετικότητας***· αυτό θα το συζητήσουμε στην Ενότητα 2. Ή Ενότητα 3 εξετάζει τη διαδικασία περάσματος από ένα τοπικό πλαίσιο σε ένα άλλο, παρατηρώντας ότι αυτή είναι μία στιγμή της διαλεκτικής διαδικασίας της ***άρνησης της σταθερότητας*** **(negating constancy).** Ειδικότερα, θα δείξουμε ***(ακολουθώντας τον F. W. Lawvere)*** με ποιο τρόπο, η κατασκευή μοντέλων ή προτύπων της μη - Συμβατικής Ανάλυσης του A. Robinson[4] και οι αποδείξεις ανεξαρτησίας του **Cohen** στη Θεωρία Συνόλων, μπορούν να θεωρηθούν ως στιγμές αυτής της διαδικασίας.

1. *ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΛΑΙΣΙΑ.*

Η Θεωρία *Κατηγοριών* (βλ. [2] ή [14][5]) παρέχει ένα γενικό μηχανισμό για την διαπραγμάτευση μαθηματικών δομών, και τις αμοιβαίες τους σχέσεις και μετασχηματισμούς. Εισήχθηκε από τους Eilenberg και Mac Lane το 1940, και αναδείχθηκε ως ένας κλάδος της άλγεβρας δια μέσου της τοπολογίας, αλλά γρήγορα υπερέβη τις απαρχές της. Μπορεί κανείς να ισχυρισθεί ότι η σχέση της Θεωρίας των Κατηγοριών με την Αφηρημένη Άλγεβρα είναι ίδια με τη σχέση της τελευταίας με τη Στοιχειώδη Άλγεβρα. Γιατί η Στοιχειώδης Άλγεβρα είναι αποτέλεσμα της αντικατάστασης ***σταθερών ποσοτήτων*** (δηλαδή των αριθμών) από ***μεταβλητές,*** διατηρώντας τις πράξεις σ' αυτές τις ποσότητες σταθερές. Η Αφηρημένη Άλγεβρα, με τη σειρά της, τα μεταφέρει αυτά ένα βήμα πιο πέρα, επιτρέποντας στις πράξεις να μεταβάλλονται, ενώ ταυτόχρονα διασφαλίζεται ότι οι προκύπτουσες μαθηματικές δομές διατηρούν μία προκαθορισμένη ***μορφή*** (ομάδες, δακτύλιοι ή οτιδήποτε έχετε). Τελικώς, η Θεωρία Κατηγοριών επιτρέπει ακόμη και τη μορφή των δομών να μεταβάλλονται, παρέχοντας έτσι μία γενική Θεωρία Μαθηματικών Δομών ή Μορφών[6]. Έτσι, η γένεση της θεωρίας των κατηγοριών είναι μία στιγμή της

---

[4] (ΣτΜ) Βλ. Το Κεφ. 3 του Βιβλίου του Κώστα Α. Δρόσου: ***Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη, τομ. 1: Μαθηματικές Περιηγήσεις***. Πάτρα 2000.

[5] (ΣτΜ) Εκτός αυτών των πηγών, υπάρχουν πλέον και τα ακόλουθα: B. Peirce. ***Basic Category Theory for Computer Scientists***. The MIT Press 1993. M. Barr, C. Wells. ***Category Theory for Computing Science***, Prentice Hall, 1990, C. McLarty. ***Elementary Categories, Elementary Toposes***. Oxford Univ. Press, 1995. S. Mac Lane, I. Moerdijk: ***Sheaves in Geometry and Logic: A Fisrs Introduction to Topos Theory***. J. L. Bell: ***Toposes and Local Set Theories: An Introduction.*** Oxford, 1988, και το εγκυκλοπαιδικό: F. Borceux: ***Handbook of Categorical Algebra, Vol I, II, III.*** Cambridge 1994,

[6] (ΣτΜ) Θα μπορούσε κανείς να ισχυρισθεί ότι η «έννοια της μαθηματικής δομής

διαλεκτικής διαδικασίας αντικατάστασης του σταθερού από το μεταβαλλόμενο, ένα θέμα πού θα παίξει σημαντικό ρόλο σε ό,τι πρέπει να πούμε εδώ.

Στη Θεωρία Κατηγοριών οι μετασχηματισμοί (που ονομάζονται ***βέλη***) μεταξύ δομών (που ονομάζονται ***αντικείμενα***) παίζουν έναν αυτόνομο ρόλο, ο όποιος δεν είναι, έπ' ουδενί λόγω, υποδεέστερος από αυτόν πού παίζεται από τις ίδιες τις δομές. (Έτσι η Θεωρία Κατηγοριών είναι παρόμοια με μία γλώσσα στην οποία τα ρήματα τίθενται σε ίση σπουδαιότητα με τα ουσιαστικά). Από αυτήν την άποψη η Θεωρία Κατηγοριών διαφέρει καίρια από τη ***Θεωρία Συνόλων***, όπου η αντίστοιχη ιδέα της συνάρτησης ανάγεται στην έννοια του ***σημειοσυνόλου***. Έτσι, η ιδέα του μετασχηματισμού στη Θεωρία Κατηγοριών είναι πολύ πιο γενική από τη συνολοθεωρητική ιδέα της συνάρτησης. Ειδικότερα, η έννοια για παράδειγμα, του μετασχηματισμού στη Θεωρία Κατηγοριών θα επιδέχεται ερμηνείες στις όποιες η μία μεταβαλλόμενη ποσότητα εξαρτάται συναρτησιακά από μία άλλη, αλλά όπου η αντίστοιχη «συνάρτηση» δεν είναι περιγράψιμη ως ένα σύνολο (διατεταγμένων ζευγών) «σημείων» (για παράδειγμα, όταν η συναρτησιακή εξάρτηση προκύπτει από τη φαινομενολογική περιγραφή της κίνησης ενός σώματος).

Η γενικότητα της Θεωρίας Κατηγοριών, την κατέστησε δυνατή να παίξει έναν όλο και πιο σημαντικό ρόλο στα ***Θεμέλια των Μαθηματικών.*** Η ανάδυσή της είχε ως συνέπεια μια λεπτή υπονόμευση του επικρατούντος δόγματος ότι *όλες οι μαθηματικές έννοιες οφείλουν να αναφέρονται σε ένα σταθερό απόλυτο σύμπαν συνόλων*. Η Θεωρία Κατηγοριών, αντίθετα, προτείνει πώς οι μαθηματικές έννοιες και οι μαθηματικοί ισχυρισμοί, θα πρέπει να θεωρηθούν ότι κατέχουν νόημα μόνο ***σε σχέση*** προς μία ποικιλία, περισσότερο ή λιγότερο ***τοπικών*** πλαισίων. Για να δείξω τι εννοώ, ας ακολουθήσουμε τον Mac Lane [14] στην εξέταση της κατηγοριο-θεωρητικής ερμηνείας της εννοίας «ομάδα». Από συνολοθεωρητική σκοπιά, ο ορός «ομάδα» σημαίνει ένα σύνολο (εφοδιασμένο με ένα ζεύγος πράξεων), το όποιο ικανοποιεί κάποια στοιχειώδη αξιώματα, πού εκφράζονται με όρους των στοιχείων του συνόλου. Έτσι, η συνολοθεωρητική ερμηνεία αυτής της εννοίας αναφέρεται πάντα ***στο ίδιο*** πλαίσιο, ***το σύμπαν των συνόλων***. Ας θεωρήσουμε τώρα από κατηγοριοθεωρητική σκοπιά, την έννοια της «ομάδας». Εδώ λοιπόν, κάθε αναφορά σε «στοιχεία» της ομάδας αντικαθίσταται με μία έκφραση που χρησιμοποιεί «μόνον βέλη», καθιστώντας, έτσι, ερμηνεύσιμη την έννοια, όχι απλώς στο

είναι η έκφραση μιας διαισθητικά δοσμένης «γεωμετρικής μορφής».

σύμπαν (κατηγορία) των συνόλων, άλλα ουσιαστικά σε κάθε κατηγορία. Η δυνατότητα μεταβολής του πλαισίου ερμηνείας πού παρέχεται από τη Θεωρία Κατηγοριών προσδίδει στην έννοια ομάδα μία πρωτεϊκή γενικότητα. Όντως, η ερμηνεία του ορού «ομάδα» στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων είναι η ***τοπολογική ομάδα***, στην κατηγορία των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων (ή πολυπτυγμάτων) είναι μια ***ομάδα Lie*** και στην κατηγορία των δραγμάτων (sheaves), επί ενός τοπολογικού χώρου, είναι ένα ***δράγμα ομάδων***.

Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι το κατηγοριο-θεωρητικό νόημα μιας μαθηματικής έννοιας, όπως αυτό της ***ομάδας***, προσδιορίζεται τώρα αποκλειστικά ***σε σχέση*** με μία περιβάλλουσα (ambient) κατηγορία, και αυτή η περιβάλλουσα κατηγορία μπορεί να μεταβάλλεται. Έτσι, η συνέπεια της κατηγορικής έκφρασης μιας μαθηματικής έννοιας, είναι ότι παρέχεται ***πρόσθετη αμφισημία αναφοράς*** στην έννοια.

Σε κάποια έκταση αυτή η αμφισημία αναφοράς των μαθηματικών εννοιών είναι ήδη παρούσα και στην κλασική Θεωρία Συνόλων, εφ' όσον τα αξιώματά της διατυπώνονται με ορούς *πρώτης τάξης* και επομένως επιδέχονται πολλές, ουσιωδώς *διαφορετικές*, ερμηνείες. Πράγματι, από το 1922, ο Skolem [15] παρατήρησε ότι γι' αυτό τον λόγο οι συνολοθεωρητικές ιδέες — και ειδικότερα οι άπειροι πληθάριθμοι (cardinalities) — είναι σχετικοί. Συμπέρανε, δε, ότι η αξιωματικοποιημένη Θεωρία Συνόλων «δεν ήταν μία ικανοποιητική τελική θεμελίωση για τα μαθηματικά». Οι δομές του Skolem σε μεγάλο βαθμό αγνοήθηκαν από τους μαθηματικούς, αλλά μία νέα πρόκληση, για την απολυτότητα του συνολοθεωρητικού πλαισίου, προέκυψε το 1963 όταν ο Paul Cohen κατασκεύασε πρότυπα της Θεωρίας Συνόλων (δηλαδή της Θεωρίας Συνόλων Zermelo-Fraenkel, ZF), όπου αξιόλογες μαθηματικές ***προτάσεις***, όπως η Υπόθεση του Συνεχούς και το Αξίωμα Επιλογής, διαψεύδονται (ο Gödel είχε ήδη δημιουργήσει, από τα τέλη της δεκαετίας του 1930, πρότυπα όπου οι προτάσεις αυτές επικυρώνονται). Η αμφισημία πού προκύπτει, όσον άφορα στις ***τιμές αλήθειας*** των μαθηματικών προτάσεων, θεωρήθηκε, από πολλούς συνολοθεωρητικούς (και από πιο «ορθόδοξους» μαθηματικούς), ως ένα πολύ πιο σοβαρό ζήτημα από την «απλή» αμφισημία αναφοράς των μαθηματικών εννοιών, πού είχε ήδη καταδειχθεί από τον Skolem. Στην πραγματικότητα, οι τεχνικές του Cohen και των διαδόχων του, οδήγησαν σε μία τεράστια εξάπλωση των μοντέλων της Θεωρίας Συνόλων με ουσιωδώς διαφορετικές μαθηματικές ιδιότητες, τα οποία με τη σειρά τους έχουν προκαλέσει μία ανησυχητική αβεβαιότητα στα μυαλά των συνολοθεωρητικών ως προς την ταυτότητα του «πραγματικού» σύμπαντος συνόλων, η τουλάχιστον ως προς το ποιες ακριβώς μαθηματικές ιδιότητες πρέπει αυτό να κατέχει. Το αποκορύφωμα είναι ότι η έννοια σύνολο — στον βαθμό πού μπορεί να συλληφθεί από αξιώματα πρώτης τάξης — κατέληξε να είναι ***ριζοσπαστικά απροσδιόριστη***. Όπως είπε ο Mostowski το 1965, σχολιάζοντας τις ανακαλύψεις του Cohen[7]:

«Πιθανώς θα έχουμε στο μέλλον βασικώς διαφορετικές διαισθητικές έννοιες συνόλων, όπως ακριβώς έχουμε διαφορετικές έννοιες χώρου, και θα βασίσουμε τις συζητήσεις μας για τα σύνολα σε αξιώματα τα οποία θα αντιστοιχούν στο είδος των συνόλων που θέλουμε να μελετήσουμε.»

Προτείνω, λοιπόν, ***να αποδεχθούμε*** την ριζοσπαστικά απροσδιόριστη φύση της έννοιας σύνολο και ***να εγκαταλείψουμε*** την αναζήτηση του απόλυτου σύμπαντος συνόλων, στη μορφή πού προτάθηκε από την κλασική Θεωρία Συνόλων. Θα πρέπει να τονισθεί ότι αυτό ***δεν*** απαιτεί αναγκαστικά την υιοθέτηση της ακραίας φορμαλιστικής / περατοκρατικής άποψης (ή του ευαγγελίου της απόγνωσης) ότι οι συνολοθεωρητικές έννοιες (ή εν πάση περιπτώσει αυτές πού εμπλέκουν το άπειρο σε κάποιο βαθμό) δεν έχουν νόημα. Όχι, νομίζω ότι η απάντηση βρίσκεται στην αναγνώριση ότι το νόημα (ή αναφορά) αυτών των εννοιών προσδιορίζεται μόνο ***σχετικά*** προς τα πρότυπα της ZF, η πιο γενικά, ως προς τα τοπικά πλαίσια ερμηνείας πού θα εισαχθούν σε λίγο. Σ' αυτήν την περίπτωση, ένας ισχυρισμός, όπως η Υπόθεση του Συνεχούς, δεν θα πρέπει πλέον να θεωρείται ως κατέχουσα μία απόλυτη αλλά άγνωστη τιμή αλήθειας, γιατί το μοναδικό σύμπαν συνόλων το οποίο θεωρήθηκε ότι προμηθεύει τη συγκεκριμένη τιμή αλήθειας δεν υπάρχει πια. Σημειώστε, ωστόσο, ότι παρ' όλο ότι, η έννοια της απόλυτης αλήθειας, συνολοθεωρητικών ισχυρισμών θα εξαφανισθεί από τη σκηνή, στη θέση της θα εμφανισθεί η πιο ραφιναρισμένη ***έννοια του αναλλοιώτου***, πού σημαίνει ***εγκυρότητα σε όλα τα τοπικά πλαίσια***. Έτσι, για παράδειγμα, εκεί όπου τα θεωρήματα της Κατασκευαστικής Αριθμητικής ***θα*** καταλήξουν να κατέχουν την ιδιότητα του «αναλλοιώτου», οι συνολοθεωρητικοί ισχυρισμοί, όπως το Αξίωμα της Επιλογής ή η Υπόθεση του Συνεχούς, δεν θα κατέχουν αυτήν την

[7] (ΣτΜ) Το απόσπασμα αυτό αναφέρεται ως συμπλήρωμα στο Βιβλίο του J. L. Bell: ***Toposes and Local Set Theories: An Introduction.*** Oxford, 1988, σελ. 238, όπου υπάρχει μια ανασκευή του άρθρου που μεταφράζουμε εδώ.

ιδιότητα, επειδή σε κάποια τοπικά πλαίσια θα ισχύουν και σε κάποια άλλα όχι.

Έχοντας φθάσει στο σημείο όπου τα μοντέλα της Θεωρίας Συνόλων αντιμετωπίζονται ως τοπικά πλαίσια ερμηνείας των μαθηματικών εννοιών, ή με άλλες λέξεις, έχοντας αντικαταστήσει την έννοια του μοναδικού σύμπαντος συνόλων με την έννοια του μεταβαλλόμενου πλαισίου ερμηνείας, είναι φυσιολογικό να επιχειρήσουμε να διατυπώσουμε αυτές τις ιδέες σε μία εννοιολογική γλώσσα καλύτερα εξοπλισμένη όσον αφορά στην αντιμετώπιση μεταβολών: τη γλώσσα της ***Θεωρίας Κατηγοριών***. Έτσι, το πρώτο πράγμα πού απαιτούμε είναι μία κατηγοριο-θεωρητική διατύπωση της ιδέας «μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων». Αυτό το βρίσκουμε στην ***έννοια του (στοιχειώδους) τόπου*** των Lawvere και Tierney (βλ., για παράδειγμα, [3], [9], [10]).

Για να φθάσουμε στην έννοια του ***τόπου***, ξεκινούμε από την οικεία κατηγορία ***S*** των συνόλων, στην οποία αντικείμενα είναι όλα τα σύνολα (σε ένα δεδομένο μοντέλου Μ της θεωρίας συνόλων) και βέλη είναι όλες οι συναρτήσεις (στο Μ) μεταξύ συνόλων του Μ. Παρατηρούμε ότι η ***S*** έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Υπάρχει ένα τελικό, «τερματικό» αντικείμενο 1, τέτοιο ώστε, για κάθε αντικείμενο *X*, υπάρχει ένα μοναδικό βέλος $X \to 1$ (ως 1 μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε μονοσύνολο, ή πιο συγκεκριμένα το $\{0\}$).

(ii) Κάθε ζεύγος αντικειμένων *A, B* έχει ένα καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$.

(iii) Για κάθε ζεύγος αντικειμένων *A, B* μπορεί να σχηματισθεί το «εκθετικό» αντικείμενο B^A όλων των συναρτήσεων $A \to B$.

(iv) Υπάρχει ένα «αντικείμενο τιμών αλήθειας» Ω τέτοιο ώστε, για κάθε αντικείμενο *X* υπάρχει μία φυσική αντιστοιχία μεταξύ υποαντικειμένων (υποσυνόλων) του *X* και βελών $X \to \Omega$. (Για *Ω* μπορούμε να πάρουμε το σύνολο $\{0, 1\}$· τα βέλη $X \to \Omega$ θα είναι τότε ***χαρακτηριστικές συναρτήσεις*** στο *X*, και το εκθετικό αντικείμενο Ω^X αντιστοιχεί στο ***δυναμοσύνολο*** $\mathcal{P}(X)$ του *X*).

Και οι τέσσαρες προηγούμενες συνθήκες είναι δυνατόν να διατυπωθούν σε καθαρά κατηγοριο-θεωρητική (χρήση μόνον βελών) γλώσσα: *μία (μικρή) κατηγορία πού ικανοποιεί αυτά τα αξιώματα λέγεται* ***τόπος***.

Η έννοια του τόπου είναι στην πραγματικότητα πολύ πιο γενική από την έννοια (της κατηγορίας συνόλων σε ένα) μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων με την αρχική σημασία. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι, επιπρόσθετα προς το ***S***, όλα όσα ακολουθούν είναι τόποι:

(1) Η κατηγορία $V^{(B)}$ των συνόλων με τιμές σε μια άλγεβρα Boole και των απεικονίσεων σε μία κατά Boole επέκταση (βλ. [1]) ενός μοντέλου της Θεωρίας Συνόλων.

(2) Η κατηγορία των δραγμάτων (sheaves) (ή προδραγμάτων — presheaves) των συνόλων επί ενός τοπολογικού χώρου.

(3) Η κατηγορία όλων των διαγραμμάτων των απεικονίσεων των συνόλων,

$$X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots$$

Προφανώς τα αντικείμενα της κάθε μιας από αυτές τις κατηγορίες μπορεί να θεωρηθούν ως σύνολα τα οποία μεταβάλλονται με κάποιον τρόπο: στην περίπτωση (1) η μεταβολή γίνεται επί μίας ***άλγεβρας Boole***, στην περίπτωση (2) επί ενός ***τοπολογικού χώρου*** και στην περίπτωση (3) σε ***διακριτό χρόνο***. (Έτσι, σ' αύτη τη διάλεκτο, η κατηγορία ***S*** καθ' αύτη είναι η κατηγορία συνόλων πού μεταβάλλονται πάνω σε ένα μονοσύνολο 1[8]). Αυτά τα παραδείγματα μας οδηγούν στην ιδέα ότι ένας τόπος μπορεί να νοείται ως η κατηγορία ***των μεταβαλλόμενων συνόλων***: η οικεία κατηγορία ***S*** με την οποία αρχίσαμε είναι η «οριακή» περίπτωση στην οποία οι μεταβολές των αντικειμένων έχουν περιοριστεί στο μηδέν. Για αυτόν τον λόγο, η ***S*** καλείται ***τόπος σταθερών συνόλων***. Έτσι, η κατηγοριο-θεωρητική έκφραση της έννοιας σύνολο — η ιδέα τόπος — καταλήγει να είναι, όπως η ιδέα της κατηγορίας καθ' αυτής, ένα άλλο παρεπόμενο της διαλεκτικής διαδικασίας αντικατάστασης του ***σταθερού*** από το ***μεταβαλλόμενο***.

Σε κάθε μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων έχει κανείς τις φυσικές «λογικές πράξεις» $\wedge$ (σύζευξης), $\vee$ (διάζευξης), $\neg$ (άρνησης), και $\to$ (συνεπαγωγής), οριζόμενες στο αντικείμενο τιμών αλήθειας 2 = {0,1}, πού αντιστοιχούν στο σύνολο των συνολοθεωρητικών πράξεων «$\cap, \cup, -, \Rightarrow$» της τομής, ένωσης, συμπληρώματος (complementation) και υπολειμματικότητας (residuation). Ο πλούτος της εσωτερικής δομής ενός τόπου επιτρέπει την μεταφορά αυτής της αντιστοίχισης και σ' αυτόν. Έτσι, σε κάθε τόπο **E** παίρνουμε φυσικά βέλη πού ορίζονται στο αντικείμενο των τιμών αλήθειας $\Omega_{\boldsymbol{E}}$, τα οποία μπορεί να

[8] (ΣτΜ) Είναι δηλαδή σταθερά και δεν μεταβάλλονται καθόλου.

νοηθούν ως εσωτερικά οριζόμενες «λογικές πράξεις» του **E**. Επειδή αυτές οι λογικές πράξεις ορίζονται εξ ολοκλήρου με ορούς της εσωτερικής μαθηματικής δομής του **E**, ένας τόπος μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μηχανισμός για τη ανασύνθεση ***της λογικής*** από τα ***μαθηματικά***[9]. Το αξιοσημείωτο είναι ότι η λογική πού επιτυγχάνεται είναι, γενικώς, ***ιντουϊσιονιστική*** με άλλες λέξεις, η λογική άλγεβρα $\boldsymbol{\Omega_E}$ = $(\Omega_E, \wedge, \vee, \sim, \Rightarrow)$ είναι μια ***άλγεβρα Heyting*** (βλ. [9]). Για παράδειγμα, όταν το **E** είναι ο τόπος **Shv**(X) των δραγμάτων σε έναν τοπολογικό χώρο *X, Ω* είναι η άλγεβρα Heyting των ανοιχτών υποσυνόλων του *X*. Από την άλλη μεριά, όταν το **E** είναι μία επέκταση Boole $V^{(B)}$, η Ω_E είναι η άλγεβρα Boole *B*, έτσι σ' αυτήν την περίπτωση η εσωτερική λογική του **E** είναι κλασική.

Το γεγονός ότι η προτασιακή λογική είναι ερμηνεύσιμη σε κάθε τόπο **E** είναι πράγματι μόνο η αρχή. Γιατί με τη χρήση της «εσωτερικής πληρότητας» των τιμών αληθείας του αντικειμένου **Ω** μπορεί να δοθούν ερμηνείες των ποσοδεικτών $\forall$ και $\exists$ και έτσι να καταστεί δυνατόν να ερμηνευθούν στο **E** προτάσεις της λογικής πρώτης τάξης. Επί πλέον, εκμεταλλευόμενοι την παρουσία, για κάθε αντικείμενο *A* του **E**, των εκθετικών Ω^A, Ω^{Ω^A}, κτλ., πού μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστούν τις συλλογές ιδιοτήτων, ιδιότητες ιδιοτήτων, κ.λπ., ορισμένες στο A, βρίσκουμε ότι καθίστανται ερμηνεύσιμες στο **E** αποφάνσεις λογικής υψηλότερης τάξης, όπως ακριβώς σε ένα συνηθισμένο μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων. (Και τότε το αντικείμενο τιμών αλήθειας Ω του **E** αναπαριστά την πεδίο των δυνατών «τιμών αλήθειας» τέτοιου είδους αποφάνσεων του **E**). Στην πραγματικότητα, μπορεί να δειχθεί (βλ. [7]) ότι οι τόποι είναι ακριβώς τα μοντέλα για θεωρίες που σχηματίζονται μέσα σε μία φυσική τυποποιημένη υψηλότερης τάξης γλώσσα, βασισμένη στην ιντουϊσιονιστική λογική. Κάθε τόπος **E** συσχετίζεται με μία τέτοια γλώσσα, της οποίας οι τύποι αντιστοιχούν στα αντικείμενα του **E** και της οποίας τα σύμβολα συναρτήσεων αντιστοιχούν με τα βέλη του **E**. Μία θεωρία σε μία τέτοια γλώσσα είναι ένα σύνολο προτάσεων κλειστών κάτω από ιντουϊσιονιστικά έγκυρες παραγωγές. Δοθείσης μιας τέτοιας θεωρίας **T,** μπορεί να κατασκευασθεί ένας τόπος $\mathbf{E_T}$, πού θα είναι ένα μοντέλο της **T**, και αντίστροφα, δοθέντος ενός τόπου **E** μπορούμε να σχηματίσουμε μία θεωρία $\mathbf{T_E}$ (το σύνολο των «αληθών» προτάσεων στο **E**), της οποίας ο συσχετισμένος

[9] (ΣτΜ) Σε αντίθεση με το σύνθημα του Λογικισμού ότι τα Μαθηματικά είναι εφαρμοσμένη Λογική.

τόπος $\boldsymbol{E}_{T_E}$, είναι κατηγορικά ισοδύναμος με τον **E**.

Έτσι οι υψηλότερης τάξης τυποποιημένες ιντουϊσιονιστικές θεωρίες (τις όποιες θα ονομάζουμε απλά «θεωρίες») και οι τόποι είναι ουσιαστικά ισοδύναμα. Κάθε τόπος **E** μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ***τυπικά περιγράψιμος*** από τη συσχετισμένη θεωρία $\mathbf{T_E}$ και ότι κάθε θεωρία **T** πραγματώνεται συγκεκριμένα ή ενσωματώνεται, στον συσχετισμένο τόπο $\mathbf{E_T}$. Μία θεωρία **T** μπορεί να θεωρηθεί ως ***γενικευμένη συνολοθεωρία*** και ένας τόπος πού είναι ένα μοντέλο της **T** ως ένα ***τοπικό σύμπαν διαπραγμάτευσης*** (discourse), μέσα στο οποίο οι μαθηματικοί ισχυρισμοί της **T** είναι αληθείς και οι κατασκευές πού επικυρώνονται στην **T** είναι δυνατόν να κατασκευασθούν.

Δύο κατασκευές τεράστιας σημασίας για τα μαθηματικά είναι αυτές των *φυσικών* και των *πραγματικών αριθμών*. Στη θεωρία των συνόλων η κατασκευή του συνόλου των φυσικών αριθμών επικυρώνεται από το αξίωμα του απείρου, και τότε το σύνολο των πραγματικών επιτυγχάνεται ουσιαστικά ως το δυναμοσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών. Η διαδικασία στη θεωρία των τόπων είναι όμοια, με την εξαίρεση ότι το αξίωμα του απείρου αντικαθίσταται από το λεγόμενο αξίωμα Peano - Lawvere (βλ. [9]), το οποίο αποδέχεται την ύπαρξη ενός *αντικειμένου φυσικών αριθμών* πού χαρακτηρίζεται από την καθολική δυνατότητα ορισμού έπ' αυτού, συναρτήσεων με αναδρομή (recursion). Δοθέντος ενός τέτοιου αντικειμένου N (το όποιο μπορεί να δειχθεί ότι είναι μοναδικό κατά μέτρο ισομορφισμών) σε έναν τόπο Ε, το αντικείμενο των πραγματικών αριθμών (το αντίστοιχο στο Ε του συνόλου των πραγματικών) μπορεί τότε να ορισθεί με όρους του εκθετικού αντικειμένου Ω^N, ακολουθώντας τις συνήθεις κλασικές διαδικασίες (δηλαδή, τις ακολουθίες Cauchy ή τις τομές Dedekind: αλλά σημειώστε ότι, σε αντίθεση προς την κλασική περίπτωση, σε ένα γενικό τόπο αυτές οι τεχνικές μπορεί να οδηγούν σε μη ισομορφικά αποτελέσματα!). Από εδώ και στο έξης θα χρησιμοποιώ τον ορό *τοπικά (μαθηματικά) πλαίσια για τόπους με αντικείμενο φυσικών αριθμών.* Αυτά τα τοπικά πλαίσια γίνονται τώρα τα γενικευμένα μοντέλα της Θεωρίας Συνόλων ή τοπικών συμπάντων διαπραγμάτευσης στα οποία οι μαθηματικές έννοιες οφείλουν να αναφέρονται: έτσι προκύπτει ***η τοπική ερμηνεία*** των μαθηματικών εννοιών. Ανάλογα, οι θεωρίες πού συσχετίζονται με αυτά τα τοπικά πλαίσια είναι οι γενικευμένες συνολοθεωρίες, στις οποίες πρέπει να κωδικοποιηθούν οι μαθηματικές κατασκευές και οι ισχυρισμοί.

Ας γυρίσουμε για λίγο στην περίπτωση του τόπου (τώρα ένα τοπικό πλαίσιο) **Shv***(X)* των δραγμάτων πάνω σε έναν τοπολογικό χώρο *X*. Ας θεωρήσουμε την άλγεβρα Heyting *O(X)* των ανοιχτών συνόλων ως ένα πεδίο τιμών αλήθειας, είναι φυσικό τότε να θεωρήσουμε το **Shv***(X)* ως το γενικευμένο μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων πού «παράγεται» από αυτό το πεδίο τιμών αλήθειας. (Όταν το *X* είναι ο χώρος του ενός σημείου 1, *O(X)* είναι ουσιαστικά το δισύνολο *{0,1}*, έτσι, επειδή **Shv***(1)* είναι ένας τόπος ***S*** σταθερών συνόλων, το τελευταίο είναι, όπως θα μπορούσε κάποιος να αναμένει με σιγουριά, το μοντέλο της Θεωρίας Συνόλων πού παράγεται από την περιοχή των κλασικών τιμών αλήθειας *{0,1}*). Είναι επίσης υποδηλωτικό (και αυτό είναι σύμφωνο με την έννοια του τόπου) να θεωρήσουμε τον **Shv***(X)* ως τον ***γενικευμένο τοπολογικό χώρο*** πού παίρνεται από τον *X* με το να χτίσουμε μια συνολοθεωρητική δομή πάνω στα ανοιχτά σύνολα του *X*. Με αυτή την ιδέα στον νου, κάθε τόπος (τοπικό πλαίσιο!) μπορεί επίσης να κατανοηθεί ως ένας ***γενικευμένος χώρος***, όπως επίσης ως ένα γενικευμένο μοντέλου της Θεωρίας των Συνόλων. (Αυτή η οπτική γωνία υποδεικνύεται από την Αλγεβρική Γεωμετρία: Η αρχική πηγή της έννοιας του τόπου). Η αλληλεπίδραση που προκύπτει μεταξύ τοπολογικών και συνολοθεωρητικών εννοιών είναι το κλειδί πού χαρακτηρίζει τη Θεωρία των Τόπων.

Έχω τονίσει ότι είναι στο πνεύμα της Θεωρίας Κατηγοριών να μη θεωρείται κανένα τοπικό πλαίσιο απόλυτο. Αυτή η τάση πραγματώνεται από τη δυνατότητα μετακίνησης από τη μία κατηγορία στην άλλη μέσω της έννοιας του συναρτητή (functor). Ένας συναρτητής μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός μεταξύ κατηγοριών πού διατηρεί τη βασική κατηγορική δομή τους. Όταν τώρα οι κατηγορίες πού μελετώνται είναι τοπικά πλαίσια (τόποι!), υπάρχει διαθέσιμη μια ισχυρότερη έννοια μετασχηματισμού, τον όποίο ονομάζουμε αποδεκτό (admissible) ή συνεχή μετασχηματισμό. Τυπικά, ένας αποδεκτός μετασχηματισμός ,

$$f : \mathrm{E} \to \boldsymbol{F}$$

μεταξύ ενός τοπικού πλαισίου **E** και ενός τοπικού πλαισίου **F** είναι ένα ζεύγος συναρτητών,

$$f^* : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}, \quad f_* : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{E}$$

όπου f_* είναι ο δεξιός συζυγής του f^*, ο οποίος με σειρά του είναι αριστερά ακριβής (left exact). (Οι τοποθεωρητικοί θα παρατηρήσουν ότι αυτό είναι το αντίθετο του γεωμετρικού μορφισμού). Στη «γεωμετρική» περίπτωση όπου οι

E και **F** είναι οι τόποι δραγμάτων πάνω στους τοπολογικούς χώρους *X* και *Y* και σκεφτόμαστε τους **E** και **F** ως γενικευμένους ***χώρους***, οι αποδεκτοί μετασχηματισμοί μεταξύ **E** και **F** αντιστοιχούν ακριβώς στις ***συνεχείς*** απεικονίσεις από το *Y* στο *X*: αυτή είναι η πηγή του ορού «συνεχής μετασχηματισμός». Οι συναρτητές f^*, f_* καλούνται συνιστώσες του *f*. Εάν υπάρχει ένας αποδεκτός μετασχηματισμός μεταξύ ενός πλαισίου **E** και ενός πλαισίου **F**, τότε το **F** λέγεται ότι ***ορίζεται*** πάνω στο **E.** Αυτή η ορολογία υποδεικνύεται από το γεγονός ότι, εάν το ***S*** είναι ένα πλαίσιο σταθερών συνόλων και $f : \boldsymbol{S} \to \boldsymbol{F}$ είναι ένας αποδεκτός μετασχηματισμός σε ένα πλαίσιο **F**, τότε οι συνιστώσες του *f* δίνονται από (για *I, X* αντικείμενα του ***S*,** **F** αντίστοιχα):

$f^*(I)$ = *I*-πλή συνδύναμη (I-fold copower) (ξένη ένωση) του 1 στο **F**·

$f_*(X)$ = το σύνολο στο ***S*** των «στοιχείων» του *X*, δηλαδή βελών, $1 \to X$ στο **F**.

Το όποιο σημαίνει ότι μπορούμε να σκεφθούμε το $f^*(I)$ ως τον «αντιπρόσωπο» στο **F** του σταθερού συνόλου I και το $f_*(X)$ ως την «έκταση» ή την «προβολή» στο ***S*** του «μεταβαλλόμενου» συνόλου *X*.

Ή δυνατότητα μετάβασης μέσω αποδεκτών μετασχηματισμών από ένα τοπικό πλαίσιο σε ένα άλλο είναι κεντρική στην ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών πού προτείνεται εδώ, και δείχνει τον ουσιαστικά κινητικό[10] και σχεσιακό χαρακτήρα της. Σχετικό μ' αυτό, εντυπωσιάζεται κανείς από την εμφανή αναλογία με τη φυσικο-γεωμετρική έννοια της ***αλλαγής του συστήματος συντεταγμένων.*** Και πράγματι, ακριβώς όπως στην αστρονομία για να απλοποιήσει κάποιος την κίνηση ενός πλανήτη επιφέρει μία αλλαγή στο σύστημα συντεταγμένων, έτσι και εδώ αποδεικνύεται ότι είναι δυνατόν επιφέροντας μία μετατόπιση του τοπικού μαθηματικού πλαισίου να απλοποιηθεί η διατύπωση μιας μαθηματικής έννοιας. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την έννοια «συνεχής συνάρτηση με πραγματικές τιμές επί ενός τοπολογικού χώρου *X*» (ερμηνευμένη σε έναν τόπο ***S*** σταθερών συνόλων). Κάθε τέτοια συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας πραγματικός αριθμός (ή ποσότητα) πού ***μεταβάλλεται συνεχώς*** επί του *X*. Ας θεωρήσουμε τώρα τον τόπο **Shv***(X)*

[10] (ΣτΜ) Ίσως «δυναμικό» θα ήταν καλλίτερο από το «κινητικό», αλλά το κείμενο χρησιμοποιεί τη ελληνική λέξη "kinetic".

των δραγμάτων πάνω στο *X*. Εδώ ***τα πάντα*** μεταβάλλονται (συνεχώς) επί του *X*, έτσι η μετατόπιση στο **Shv**(X) από το ***S*** ουσιαστικά ισοδυναμεί με την ενσωμάτωση κάποιου σε ένα πλαίσιο το όποιο είναι, σαν να λέμε, αυτό το ίδιο «μετακινούμενο μαζί» με τη μεταβολή πάνω στο *X* των δοσμένων μεταβαλλόμενων πραγματικών αριθμών. Αυτό έχει ως συνέπεια να μην «παρατηρείται» η μεταβολή κάθε μεταβαλλόμενου πραγματικού αριθμού στο **Shv**(X)· επομένως θεωρείται εκεί, ότι είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Με αυτό τον τρόπο η έννοια «πραγματική συνάρτηση συνεχής επί του *X*» μετασχηματίζεται στην έννοια «πραγματικός αριθμός» όταν ερμηνεύεται στο **Shv***(X)*. (Για να είμαστε ακριβείς, τα αντικείμενα στο **Shv***(X)* πού ικανοποιούν τη συνθήκη να είναι (Dedekind) πραγματικοί αριθμοί, αντιστοιχούν, μέσω του γεωμετρικού μετασχηματισμού $\boldsymbol{S} \to \mathbf{Shv}(X)$, στις πραγματικές συναρτήσεις που είναι συνεχείς επί του *X*). Αντίστροφα, η έννοια «πραγματικός αριθμός» ερμηνευμένη στον **Shv***(X),* αντιστοιχεί στην έννοια «πραγματική συνάρτηση, συνεχής επί του *X*» ερμηνευμένη στο ***S***. Αυτή η παρατήρηση παρέχει τη βάση για διάφορες αποδείξεις ανεξαρτησίας στην ιντουϊσιονιστική ανάλυση (ανάλυση ερμηνευμένη στον **Shv**(X): βλ. [8]).

Δίνουμε άλλα δύο παραδείγματα αυτής της διαδικασίας.

Έστω ***B*** μία πλήρης άλγεβρα Boole άντιμεταθετικών προβολών σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε οι πραγματικοί αριθμοί στο $V^{(B)}$, την κατά Boole επέκταση του *V* στο $V^{(B)}$, αντιστοιχούν σε εκείνους τους ***αυτοσυζυγείς τελεστές*** στο H πού οι φασματικές συνιστώσες τους βρίσκονται στο ***B*** (βλ. [16]). Αυτό παρέχει τη βάση των προσεγγίσεων των Takeuti, Davis, για τα θεμέλια της κβαντομηχανικής, όπου προτείνουν ότι η «κβάντιση» μιας απόφανσης της κλασικής φυσικής ισοδυναμεί με την ερμηνεία της στο $V^{(B)}$. Τελικώς, εάν **B** είναι μια μετροάλγεβρα που παράγεται από το χώρου μέτρου $Z:=(X, \mathcal{A}, \mu),$ τότε οι πραγματικοί αριθμοί στο $V^{(B)}$, αντιστοιχούν στις μετρήσιμες συναρτήσεις στο Z. Αυτό μας δίνει την κατά Boole Ανάλυση του Takeuti σύμφωνα με την οποία η πραγματική ανάλυση ερμηνευμένη στο $V^{(B)}$, αντιστοιχεί στην θεωρία των μετρήσιμων συναρτήσεων στο ***S***[11] (βλ. [16]).

---

[11] Στα μη-συμβατικά μαθηματικά, όπως είναι η Ανάλυση του Boole, του Takeuti, καθώς και η Απειροστική Ανάλυση του Robinson, συναντάμε δύο βασικά φαινόμενα: **Η Ανάλυση μετατρέπεται σε Άλγεβρα** όπως στην Απειροστική Ανάλυση, ***η δε Συναρτησιακή Ανάλυση, στην ουσία είναι Πραγματική Ανάλυση ερμηνευμένη στο μη-συμβατικό πλαίσιο.*** Έχει δε κανείς την εντύπωση ότι ερμηνεύοντας τους «πραγματικούς αριθμούς» στην πληθώρα των τοπικών πλαισίων, παίρνει σχεδόν

Βλέπουμε, τότε, ότι μεταβάλλοντας τα τοπικά πλαίσια ερμηνείας, μετασχηματίζεται η έννοια «πραγματικός αριθμός» στις έννοιες «συνεχής συνάρτηση», «μετρήσιμη συνάρτηση» η ακόμη και στην έννοια «αυτοσυζυγής τελεστής». Αυτό παρέχει χτυπητή μαρτυρία για το ότι, *κάτω από την τοπική ερμηνεία, μία μαθηματική έννοια πού κατέχει μία* ***σταθερή σημασία*** *τώρα αναπόφευκτα έχει μία* ***μεταβαλλόμενη αναφορά***. Πράγματι, μπορούμε να σκεφθούμε πώς η σημασία της έννοιας «το σώμα των πραγματικών αριθμών» (δηλαδή, το συνεχές) σταθεροποιείται από τους ορισμούς της σε μία κατάλληλη θεωρία, ενώ, όπως είδαμε, η αναφορά της διαφοροποιείται ανάλογα με το τοπικό πλαίσιο ερμηνείας. Αυτό επιλύει, η μάλλον εξαφανίζει, το δίλημμα της κλασικής Θεωρίας Συνόλων στην οποία μία έννοια όπως «το σώμα των πραγματικών αριθμών», αν και σαφώς αποσκοπεί στην κατοχή μιας μοναδικής αναφοράς, στην πραγματικότητα, λόγω της τυποποίησης πρώτης τάξης του ορισμού της μέσα στη γλώσσα της θεωρίας των συνόλων, δεν μπορεί να το πετύχει αυτό. *Η τοπική ερμηνεία όχι μόνο δέχεται αυτήν τη μεταβλητότητα της αναφοράς αλλά την καλωσορίζει και της αποδίδει κεντρική θέση***.**

2. ΚΑΠΟΙΕΣ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ ΜΕ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.

Ή τοπική ερμηνεία των μαθηματικών εννοιών, βασισμένη όπως είναι στη Θεωρία Κατηγοριών, έχει έναν ουσιαστικά ***σχεσιακό*** χαρακτήρα. *Σύμφωνα με την τοπική ερμηνεία, η αναφορά μιας μαθηματικής εννοίας, στον βαθμό πού μπορεί να θεωρηθεί (construed) ως μία* ***οντότητα*** *(entity), δεν πρέπει πια να εκλαμβάνεται ως ένα πράγμα καθεαυτό, του οποίου η φύση είναι ανεξάρτητη από άλλα πράγματα, και του οποίου οι χαρακτηριστικές ιδιότητες είναι ολοκληρωτικά εγγενείς (intrinsic).* Αντιθέτως, *οι ιδιότητες μιας μαθηματικής οντότητας, καθορίζονται τώρα από, και πράγματι έχουν νόημα μόνο σε σχέση, με την ολότητα των συσχετίσεών της με άλλες οντότητες.*

Συχνά στην ιστορία της σκέψης έχει αναγνωρισθεί ότι ιδιότητες πού αρχικά θεωρήθηκαν πώς είναι εγγενείς πρέπει αντίθετα να πραγματεύονται ως σχεσιακές. Για παράδειγμα, ο Leibniz αναγνώρισε ότι μία κατάσταση ηρεμίας ή κίνησης ενός υλικού σώματος δεν είναι μία εγγενής κατάσταση του

όλα τα Μαθηματικά! Δηλαδή φαίνεται ότι ***το μόνο που υπάρχει είναι ένα είδος Πρωτεϊκής Θεωρίας των Πραγματικών αριθμών***, σώματος αλλά έχει νόημα μόνο σε σχέση με άλλα σώματα. Μία από τις εμβριθέστερες περιπτώσεις αυτού του φαινομένου αναδείχθηκε κατά τη μετάβαση από την ***κλασική*** (Νευτώνεια) στη ***σχετικιστική φυσική***, όταν φυσικές έννοιες, όπως το ταυτόχρονο των συμβάντων και της μάζας ενός σώματος, που προηγουμένως τους είχε αποδοθεί ένα απόλυτο νόημα, κατόπιν αναγνωρίσθηκε ότι κατέχουν νόημα μόνο σε σχέση με ***τοπικά συστήματα συντεταγμένων***.

Υπάρχει μία προφανής ***αναλογία*** μεταξύ τοπικών μαθηματικών πλαισίων και τοπικών συστημάτων συντεταγμένων της θεωρίας της σχετικότητας: η κάθε μία χρησιμεύει ως τα κατάλληλα ***πλαίσια αναφοράς (reference frames)*** για τον προσδιορισμό του νοήματος των μαθηματικών ή των φυσικών εννοιών αντίστοιχα. (Και έχουμε ήδη αναφέρει την αναλογία μεταξύ των αποδεκτών μετασχηματισμών των πλαισίων και των αλλαγών του συστήματος συντεταγμένων). Συνεχίζοντας αυτήν την αναλογία, υποδεικνύονται κάποιοι περαιτέρω παραλληλισμοί.

Έτσι για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε, την έννοια του ***αναλλοιώτου***. Στη σχετικιστική φυσική ***οι αναλλοίωτοι φυσικοί νόμοι*** είναι δηλώσεις της μαθηματικής φυσικής (για παράδειγμα οι εξισώσεις του Maxwell), οι όποιες, κατάλληλα διατυπωμένες, ισχύουν ***καθολικά***, δηλαδή σε κάθε τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Ανάλογα, ***οι αναλλοίωτοι μαθηματικοί νόμοι,*** είναι μαθηματικοί ισχυρισμοί οι όποιοι ισχύουν πάλι καθολικά, δηλαδή σε κάθε τοπικό μαθηματικό πλαίσιο. Αυτοί, στην πραγματικότητα, είναι με τη σειρά τους τα θεωρήματα υψηλότερης τάξης της ιντουϊσιονιστικής λογικής με ένα σύστημα φυσικών αριθμών, το όποιο περιλαμβάνει, για παράδειγμα, τα θεωρήματα της ιντουϊσιονιστικής αριθμητικής, αλλά όχι το Αξίωμα της Επιλογής ή τον Νόμο της του Μέσου Αποκλίσεως. Έτσι οι αναλλοίωτοι μαθηματικοί νόμοι είναι αυτοί οι όποιοι είναι αποδείξιμοι ***κατασκευαστικά:*** αυτό δείχνει τη σημαντικότητα του κατασκευαστικού λογισμού για την τοπική ερμηνεία. Σημειώστε σχετικά ότι, ένα θεώρημα της κλασικής λογικής το όποιο δεν είναι κατάσκευαστικά αποδείξιμο, (για παράδειγμα ο Νόμος του Αποκλειομένου Μέσου) δεν θα ισχύει καθολικά μέχρι να μετασχηματισθεί στο ιντουϊσιονιστικό του αντίστοιχο (το οποίο, για παράδειγμα, στην περίπτωση του αποκλειομένου μέσου $\omega \vee \neg\omega$ είναι $\neg\neg(\omega \vee \neg\omega)$). Η διαδικασία μετάφρασης της κλασικής σε ιντουϊσιονιστική λογική (βλ., για παράδειγμα [5]) είναι επομένως το λογικό ανάλογο της έκφρασης ενός φυσικού νόμου σε αναλλοίωτη μορφή.

Ή φυσική έννοια του ***αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων*** έχει επίσης το αντίστοιχό της ως προς την τοπική ερμηνεία των μαθηματικών πλαισίων. Ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων είναι αυτό στο οποίο μη-διαταραγμένα σώματα δεν υφίστανται καμία επιτάχυνση, δηλαδή όπου ισχύει ο πρώτος- νόμος κίνησης τον Νεύτωνα. 'Ετσι τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων δρουν ως υποκατάστατα του απόλυτου Νευτώνειου χώρου. Ανάλογα, ένα ***κλασικό*** τοπικό μαθηματικό πλαίσιο είναι ένα πλαίσιο στο όποιο τα αντικείμενα δεν υφίστανται καμία μεταβολή (δηλαδή είναι σταθερά), με άλλα λόγια, αυτό μοιάζει με το κλασικό σύμπαν των σταθερών συνόλων, στο μεγαλύτερο δυνατό βαθμό. Αυτή η ομοιότητα μπορεί να βεβαιωθεί από την ικανοποίηση του ***Αξιώματος Επιλογής*** κατάλληλα διατυπωμένου σε μία Ισχυρή κατηγορική μορφή (βλ., για παράδειγμα [3]). Γιατί από την αλήθεια του (ισχυρού) Αξιώματος Επιλογής σε ένα πλαίσιο **E** δεν συνεπάγεται μόνο ότι η εσωτερική λογική του **E** είναι κλασική και δίτιμη (δηλαδή υπάρχουν μόνο δύο τιμές αλήθειας «αληθές» και «ψευδές»), αλλά επίσης ότι είναι και εκτασιακό (extentional), δηλ. τα βέλη του **E** μοιάζουν με συνολοθεωρητικές απεικονίσεις, με το ότι προσδιορίζονται από τη δράση τους πάνω στα «σημεία» του πεδίου ορισμού τους. Αυτά τα χαρακτηριστικά μπορούν να θεωρηθούν ότι διακρίνουν τους τόπους των σταθερών συνόλων, μεταξύ αυθαιρέτων τόπων ή πλαισίων. Εφ' όσον το Αξίωμα Επιλογής μας εξασφαλίζει την παρουσία αυτών των γνωρισμάτων, μπορούμε να ***ορίσουμε*** έναν σταθερό τόπο ή ένα κλασικό μαθηματικό πλαίσιο ως εκείνο στο οποίο ικανοποιείται το αξίωμα αυτό, ενώ την ίδια στιγμή παρατηρείται ότι είναι μία αποδεκτή αρχή της κλασικής Θεωρίας των Συνόλων. Κατά συνέπεια, ***τα κλασικά σταθερά μαθηματικά τοπικά πλαίσια αντιστοιχούν στα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων και το Αξίωμα της Επιλογής στον πρώτο νόμο κίνησης τον Νεύτωνα.***

Αυτές οι παρατηρήσεις μας οδηγούν στην ιδέα ότι η σχέση της τοποθεωρητικής ερμηνείας των μαθηματικών εννοιών προς την κλασική θεωρία των συνόλων είναι ίδια με τη σχέση της Θεωρίας της Σχετικότητας προς την Κλασική Φυσική

3. Ή Άρνηση της Σταθεροτητας.

Παρατηρήσαμε ότι η μετάβαση από την έννοια του μοντέλου της Θεωρίας

Συνόλων στην έννοια του τόπου (τοπικό πλαίσιο) είναι μία στιγμή της διαλεκτικής διαδικασίας αντικατάστασης του ***σταθερού*** από το ***μεταβαλλόμενο***. Μία ιδιαίτερα εντυπωσιακή μορφή αυτής της διαδικασίας προκύπτει όταν η μετάβαση γίνεται με έναν αποδεκτό μετασχηματισμό. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα κλασικό τοπικό πλαίσιο ***S*** (δηλαδή κάποιο πού ικανοποιεί το Αξίωμα της Επιλογής: τα αντικείμενα του ***S*** μπορούν τότε να θεωρηθούν ότι είναι σταθερά), και ένα τοπικό πλαίσιο **E** πού ορίζεται πάνω στο ***S***, δηλαδή για το οποίο υπάρχει ένας αποδεκτός μετασχηματισμός $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{E}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε το **E** ως ένα πλαίσιο πού προκύπτει όταν τα αντικείμενα του ***S*** επιτρέπεται να μεταβάλλονται με κάποιον τρόπο. (Για παράδειγμα, όταν το **E** είναι το **Shv***(X)*, τα αντικείμενα του **E** είναι αυτά πού μεταβάλλονται συνεχώς επί του *X*). Έτσι, το πέρασμα από το ***S*** στο **E** είναι στην ουσία η διαλεκτική άρνηση της «σταθερότητας» των αντικειμένων στο ***S***, και η οποία εισάγει τη «μεταβολή» ή «αλλαγή» στα νέα αντικείμενα του **E**. Εν συντομία, περνώντας από ένα κλασικό πλαίσιο σε ένα πλαίσιο πού ορίζεται πάνω σ' αυτό αρνούμαστε τη σταθερότητα.

Τώρα σε κάποιες αξιόλογες περιπτώσεις μπορούμε να προχωρήσουμε στη διαλεκτική άρνηση της «μεταβολής» στο **E** για να πετύχουμε ένα νέο κλασικό πλαίσιο ***S*****, στο οποίο η σταθερότητα ξανά αποκαθίσταται[12]. Το ***S***** μπορεί να θεωρηθεί ως προκύπτον από το ***S*** μέσα από τη ***διαλεκτική διαδικασία της άρνησης της άρνησης***. Πιο γενικά, το ***S***** δεν είναι ισοδύναμο προς το ***S*** και επομένως, σύμφωνα με ένα ευρέως γνωστό συμπέρασμα της θεωρίας των τόπων (βλ. [4] ή [10]), δεν ορίζεται πάνω στο ***S***, έτσι ώστε η δεύτερη «άρνηση», δηλαδή το πέρασμα από το **E** στο ***S*****, δεν μπορεί να είναι ένας αποδεκτός μετασχηματισμός (αλλά είναι ένας συναρτητής, στην πραγματικότητα ένας «λογικός» συναρτητής). Έτσι, με αυτήν την έννοια, η πράξη της άρνησης της άρνησης υπερβαίνει την αποδεκτικότητα (admissibility). Αυτό ακριβώς είναι το τίμημα της επαναφοράς της σταθερότητας με το πέρασμα στο ***S*****.

Για την υποστήριξη της σπουδαιότητας αυτής της διαδικασίας της άρνησης της άρνησης αποδεικνύουμε ότι αποτελεί τη βάση δύο κλειδιών ανά-

[12](ΣτΜ) Το Κεφ. 3 του Βιβλίου του Κώστα Α. Δρόσου: ***Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη, τομ. 1: Μαθηματικές Περιηγήσεις***. Πάτρα 2000, αποτελεί ένα λεπτομερές παράδειγμα αυτής της διαλεκτικής σχέσης του σταθερού-μεταβαλλόμενου. Μάλιστα το Κεφάλαιο αυτό γράφτηκε με διαλεκτικό τρόπο, με αφορμή το άρθρο αυτό, και σαν λεπτομερές παράδειγμα της διαλεκτικής που περιγράφεται εδώ.

πτυξης στα Θεμέλια των Μαθηματικών: ***της μη Συμβατικής Ανάλυσης του Robinson*** και ***των αποδείξεων ανεξαρτησίας του Cohen στη θεωρία των συνόλων***. (Ή συζήτηση οφείλει πολλά στο γονιμοποιό άρθρο [12] του Lawvere).

Ας σταθεροποιήσουμε ένα κλασικό πλαίσιο ***S***, το οποίο θα θεωρούμε ότι αποτελείται από σταθερά σύνολα: θα κρατήσουμε τον όρο «σύνολα» για το «αντικείμενα του ***S***».

Δοθέντος ενός συνόλου *I* κάθε στοιχείο $i \in I$ μπορεί να ταυτισθεί με το κύριο (principal) υπερφίλτρο $U_i := \{A \subseteq I : i \in A\}$ επί του *I*. Αυτή η ταυτοποίηση μας προτρέπει να σκεφθούμε τα αυθαίρετα υπερφίλτρα πάνω στο *I* ως ***«γενικευμένα σημεία»*** του *I*. Ή συλλογή των γενικευμένων σημείων του *I* σχηματίζει ένα νέο σύνολο *βI* (συμπαγοποίηση κατά Stone-Cech του *I*). Στοιχεία του *I* (τώρα ταυτοποιείται ως ένα υποσύνολο του βI) ονομάζονται ***συμβατικά σημεία του I***, και τα στοιχεία του $\beta I - I$ ***ιδεώδη σημεία του I***. Εάν το *I* είναι άπειρο, θα υπάρχουν πάντα ιδεώδη σημεία.

Ας εξετάσουμε τώρα το τοπικό πλαίσιο **E** = $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}}$ των συνόλων πού μεταβάλλονται πάνω στο *I*. Αντικείμενα του $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}}$ (τα οποία θα ονομάζουμε μεταβαλλόμενα σύνολα) είναι *I*-οικογένειες συνόλων $X =< X_i : i \in I >$. Ένα στοιχείο ενός μεταβαλλόμενου συνόλου *X* είναι μία *I*-οικογένεια,

$$x =< x_i : i \in I >,$$

τέτοια ώστε $x_i \in X_i$, για $i \in I$, δηλαδή μία «συνάρτηση επιλογής» επί του X. Έτσι το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$, είναι το σύνολο των «στοιχείων» του μεταβαλλόμενου συνόλου *X*.

Κάθε (σταθερό) σύνολο *A* συναρτάται με το μεταβαλλόμενο σύνολο $\widehat{\mathrm{A}}$ που δίδεται από τη σταθερή συνάρτηση με τιμή *A*. Το σύνολο «στοιχείων» του μεταβαλλόμενου συνόλου $\hat{\mathrm{A}}$ είναι τότε το A^I.

Το πλαίσιο $\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}}$ ορίζεται πάνω στο ***S*** μέσω του αποδεκτού μετασχηματισμού $\mu : S \to S^I$ πού δίδεται από τις συνιστώσες: $\mu^*(\mathrm{A}) = \hat{\mathrm{A}}$, $\mu_*(x) = \prod_{i \in I} X_i$. - Δοθέντος ενός στοιχείου $i_0 \in I$, μπορούμε να συλλάβουμε τη μεταβολή κάθε μεταβαλλόμενου συνόλου *X* με το να υπολογίσουμε το *X* στο i_0, δηλαδή με το να θεωρήσουμε το X_{i_0}. Εάν το εφαρμόσουμε αυτό συγκεκριμένα στο σύνολο A^I των «στοιχείων» του μεταβαλλόμενου συνόλου $\hat{\mathrm{A}}$, πού σημαίνει, εάν υπολογίσουμε κάθε τέτοιο «στοιχείο» στο i_0, παίρνουμε ξανά ακριβώς το *A*.

Έτσι στην περίπτωση αυτή, εάν αρνηθούμε τη σταθερότητα του A (των στοιχείων του), με το πέρασμα στο σύνολο A^I των (μεταβαλλόμενων) «στοιχείων» του A, και τότε αρνηθούμε τη μεταβολή αυτών των «στοιχείων» με τον υπολογισμό σε ένα ***συμβατικό*** σημείο του I, κάνουμε ένα πλήρη κύκλο. Αυτή η περίπτωση «άρνησης της άρνησης» είναι, επομένως, ***τετριμμένη***. Ή κατάσταση, ωστόσο, είναι εντελώς διαφορετική όταν ο υπολογισμός γίνεται σε ένα ιδεώδες σημείο του I.

Δοθέντος ενός ιδεώδους σημείου U του I, δηλαδή ένα μη κύριο υπερφίλτρο πάνω στο I, πώς θα «υπολογίσουμε» συναρτήσεις του A^I στο U; Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα του υπολογισμού σε ένα σταθερό σημείο i_0 του I είναι ουσιαστικά το ίδιο με το να ταυτοποιούμε συναρτήσεις στο A^I, εφ' όσον οι τιμές τους στο i_0 συμπίπτουν, δηλαδή, συμφωνούμε ότι για $f, g \in A^I$,

$$\begin{aligned} f \sim_{i_0} g &\leftrightarrow f(i_0) = g(i_0) \\ &\leftrightarrow \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U_{i_0} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε αυτήν την τελευταία ισοδυναμία ως βάση για τον υπολογισμό συναρτήσεων στο A^I σε ένα ιδεώδες σημείο U του I. Δηλαδή, ορίζουμε,

$$f \sim_U g \leftrightarrow \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U$$

Τότε το αποτέλεσμα του «υπολογισμού» όλων των στοιχείων του A^I στο U είναι το σύνολο A^* των κλάσεων ισοδυναμιών του A^I ως προς της σχέση ισοδυναμίας $\sim_U$. (Επομένως το A^* είναι η υπερδύναμη $A^I/\sim_U$). Εάν το I είναι άπειρο (και το U ένα ιδεώδες σημείο του I), τότε εύκολα προκύπτει πώς το A^* δεν θα είναι ποτέ το ίδιο με το A. Πιο συγκεκριμένα εάν, για παράδειγμα, το A είναι η πραγματική ευθεία R, τότε η R^* θα έχει τις ίδιες στοιχειώδεις ιδιότητες όπως η R αλλά επιπρόσθετα θα περιέχει νέα «απειροστικά» στοιχεία. Έτσι η R^* θα είναι ένα μη-συμβατικό μοντέλο της πραγματικής ευθείας. Αυτή είναι ουσιαστικά η βάση της μη-συμβατικής ανάλυσης του Robinson.

Συνοπτικά, παίρνουμε τα απειροστά του Robinson με τη διαλεκτική διαδικασία πρώτα της άρνησης της σταθερότητας της κλασικής πραγματικής ευθείας, και μετά της άρνησης της προκύπτουσας μεταβολής, με τη σύλληψή της σε ένα ιδεώδες σημείο.

Εάν συλλάβουμε τη μεταβολή όλων των αντικειμένων του $\boldsymbol{S}^I$ ***ταυτόχρονα*** σε ένα ιδεώδες σημείο του I επιτυγχάνουμε ένα νέο κλασικό πλαίσιο $\boldsymbol{S}^*$ (μία υπερδύναμη ή στοιχειώδη επέκταση (enlargement) του $\boldsymbol{S}$) το όποιο έχει τις ίδιες στοιχειώδεις ιδιότητες με το ***S***. Έτσι αυτή η περίπτωση της άρνησης της άρνησης οδηγεί σε ένα κλασικό πλαίσιο το όποιο, αν και διαφορετικό, είναι παρ' όλα αυτά ***εσωτερικά αδιάκριτο*** (indistinguishable) από το αρχικό κλασικό πλαίσιο. Ό τελικός σκοπός της κατά Cohen μεθόδου εξαναγκασμού (forcing) στη θεωρία των συνόλων είναι να αποφέρει νέα κλασικά πλαίσια, τα όποία είναι εσωτερικώς αδιάκριτα από τα αρχικά. Θα περιγράψουμε τώρα αυτή τη διαδικασία, τονίζοντας το διαλεκτικό της χαρακτήρα.

Έστω *P* ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο στο ***S***: σκέψου τα στοιχεία του *P* ως καταστάσεις γνώσης και ότι η σχέση $p \leq q$, σημαίνει ότι το q είναι μία βαθύτερη (ή ύστερη) κατάσταση γνώσης από την p. Ένα μεταβαλλόμενο επί του *P* σύνολο, είναι μία απεικόνιση *X* η οποία αντιστοιχεί σε κάθε $p \in P$ ένα σύνολο *X(p)* και σε κάθε ζεύγος $p, q \in P$ τέτοιο ώστε $p \leq q$ μία απεικόνιση $X_{pq} : X(p) \to X(q)$ τέτοια πού $\mathrm{X}_{\mathrm{pr}} = X_{qr} \circ X_{pq}$, οποτεδήποτε έχουμε $p \leq q \leq r$. Έστω ότι το **E** είναι το πλαίσιο πού ορίζεται επί του ***S*** του οποίου τα αντικείμενα είναι όλα τα σύνολα πού μεταβάλλονται επί του *P* (και στα οποία ένα βέλος $f : X \to Y$ είναι μία συλλογή απεικονίσεων $f_q : X(p) \to Y(p)$ τέτοιων ώστε, $f_q \circ X_{pq} = Y_{pq} \circ f_p$, για $p \leq q$).

Στα πλαίσια του Ε, θεωρούμε αντικείμενα *A* για τα όποια $X(p) \subseteq X(q)$ και X_{pq} είναι η απεικόνιση του περιέχεσθαι για $p \leq q$. Ένα τέτοιο αντικείμενο θα ονομάζεται σταθερώς ***μεταβαλλόμενο*** σύνολο πάνω στο *P*. Εάν σκεφθούμε το *X(p)* ως τη συλλογή των στοιχείων του μεταβαλλόμενου συνόλου Χ πού σταθεροποιείται (secured) στην κατάσταση *p*, τότε η συνθήκη «σταθερόητας» (steadiness) σημαίνει ότι κανένα σταθερό (secured) σημείο δεν είχε ποτέ χαθεί. Για $p \in P$ και σύνολα *X, Y* πού μεταβάλλονται σταθερά πάνω στο *P* γράφουμε,

$$p \Vdash X \subseteqq Y$$

αντί για

$$\forall q \geq p \, \forall x \in X(q) \exists r \geq p \, [x \in Y(r)]$$

πού σημαίνει, δοθείσης της κατάστασης *p*, το *X* ***τελικά περιέχεται*** στο *Y*. Γράφουμε

$$p \Vdash X = Y$$

αντί για

$$p \Vdash X \subseteq Y \quad \text{και} \quad p \Vdash Y \subseteq X,$$

δηλ., δοθείσης της κατάστασης p, το X ***τελικά ταυτίζεται*** με το Y.

Δύο στοιχεία $p, q \in P$ είναι ***αμοιβαία συνεπή*** εάν,

$$\exists r \in P[p \leq r \,\&\, q \leq r]$$

Ένα σύνολο αμοιβαία συνεπών στοιχείων του P ονομάζεται ***σώμα γνώσης***. Ένα σώμα γνώσης K λέγεται ότι είναι ***πλήρες*** εάν οποτεδήποτε $p \in P$ είναι αμοιβαία συνεπές με κάθε στοιχείο του K, τότε το p ανήκει στο K.

Δοθέντος ενός πλήρους σώματος γνώσης K, ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim_K$ επί της συλλογής των σταθερά μεταβαλλόμενων συνόλων επί του P ως εξής,

$$X \sim_K Y \leftrightarrow \exists p \in K \ [p \Vdash X = Y]$$

Έτσι $X \sim_K Y$ σημαίνει ότι το σώμα γνώσης Κ έχει σαν συνέπεια τον ισχυρισμό ότι τα X και Y τελικά συμπίπτουν. Η συλλογή ***S**** των κλάσεων ισοδυναμίας $\sim_T$ των σταθερά μεταβαλλόμενων συνόλων, σχηματίζει ένα ***νέο*** κλασικό πλαίσιο, γενικά εσωτερικά διακρίσιμο από το ***S,*** με την έννοια ότι δεν έχει όλες τις στοιχειώδεις ιδιότητες του ***S***: Το ***S**** είναι στην πραγματικότητα μία (πιθανά μη-συμβατική) ***επέκταση του Cohen*** του ***S***.

Ανακεφαλαιώνοντας: το πλαίσιο **E** το πήραμε με την άρνηση της σταθερότητας, επιτρέποντας τη μεταβολή («ανάπτυξη») πάνω σε καταστάσεις γνώσης, και η επέκταση Cohen ***S**** επιτυγχάνεται από (τα σταθερά μεταβαλλόμενα αντικείμενα στο) ***E*** με τη χρήση ενός πλήρους σώματος γνώσεων για τον καθορισμό των «τελικών» ταυτοτήτων ανάμεσα στα μεταβαλλόμενα σύνολα, με άλλα λόγια, την άρνηση της μεταβολής τους.

Στην περίπτωση της «επέκτασης του Cohen» το πέρασμα από το S στο ***S**** (άρνηση της άρνησης) διατηρεί κάποιες από τις αρχές πού σχετίζονται με τη σταθερότητα των συνόλων (π .χ. το Αξίωμα Επιλογής, την Κλασική Λογική) αλλά, όπως έδειξε ο Cohen, το P μπορεί να επιλεχθεί με τέτοιο τρόπο – που τώρα είναι οικείος σε κάθε συνολοθεωρητικό - έτσι πού να μας εξασφαλίζει ότι κάποιες άλλες αρχές (π.χ. το Αξίωμα Κατασκευασιμότητας, η Υπόθεση του Συνεχούς) να παραβιάζονται σε αυτό το πέρασμα. Κατά το πέρασμα από το **S** στο **E** (άρνηση της σταθερότητας) η κλασική δίτιμη λογική του **S** αντικαθίσταται από την ιντουϊσιονιστική λογική του **E**. Και το πέρασμα από το **E** στο **S*** (άρνηση της άρνησης) αποκαθιστά την κλασική λογική και σταθερότητα, αλλά, όπως έχουμε παρατηρήσει, όχι όλες οι αρχές που σχετίζονται με σταθερότητα.

Τώρα, θα μπορούμε να είχαμε ***αποφύγουμε*** την επάνοδο στη σταθερότητα (δηλαδή τη δεύτερη «άρνηση») και άντ' αυτού να είχαμε παραμείνουμε στο πλαίσιο **E** των μεταβλητών συνόλων. Οι συνολοθεωρητικές αποδείξεις ανεξαρτησίας μπορούν να επιτευχθούν με τη λεπτομερή εξέταση των εσωτερικών ιδιοτήτων του **E** (πιο σωστά, με τη χρήση της μεθόδου Scott-Solovay αντικατάστασης του **E** από το σχετικό πλαίσιο με τιμές σε μια πλήρη άλγεβρα Boole). Εάν συμφωνήσουμε, πιο γενικά, να αποφεύγουμε να επιστρέφουμε στη σταθερότητα, τότε κάποιες εκπληκτικές δυνατότητες αρχίζουν να αναδύονται. Για παράδειγμα, σε κάποιες πιο ριζοσπαστικές επιλογές του πλαισίου **E** μεταβαλλόμενων συνόλων (όπου τα «σύνολα» μεταβάλλονται επί μίας κατηγορίας δακτυλίων με φυσικό τρόπο), η «πραγματική ευθεία» στο **E** θα περιέχει μη τετριμμένα μηδενοτετράγωνα απειροστά (square zero infinitesimals), δηλαδή πραγματικούς αριθμούς $\varepsilon \neq 0$ τέτοιους ώστε $\varepsilon^2 = 0$. Σε τέτοια πλαίσια (βλ. [11] η [13]) κάθε συνάρτηση οριζόμενη στην πραγματική ευθεία είναι απειροστικά γραμμική, επομένως ομαλή, και επομένως αντιστοιχεί στην κίνηση ενός κλασικού σώματος. Σ' αυτές τις καταστάσεις μπορεί κάποιος να προχωρήσει τότε στην ανάπτυξη του Απειροστικού λογισμού, ακολουθώντας τους Fermat και Newton, χωρίς καμιά αναφορά στις άπειρες διαδικασίες η όρια. Αλλά για να είναι δυνατό αυτό πρέπει να παραμείνουμε μέσα σε ένα πλαίσιο μεταβαλλόμενων συνόλων, υιοθετώντας αποφασιστικά μία τοπική οπτική γωνία, σύμφωνα με την οποία η σταθερότητα και η κλασική λογική δεν θα κυριαρχούν πια.

4. ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.

Η πρότασή μου, λοιπόν, είναι να εγκαταλειφθεί το απόλυτο σύμπαν των συνόλων προς όφελος μιας πλειονότητας τοπικών μαθηματικών πλαισίων. Τα μαθηματικά ερμηνευμένα σε ένα οποιοδήποτε τέτοιο πλαίσιο ονομάζονται προσφυώς τοπικά μαθηματικά· ένας αποδεκτός μετασχηματισμός μεταξύ πλαισίων ισοδυναμεί με μία (ορίσιμη) ***αλλαγή των τοπικών μαθηματικών***. Η αναφορά κάθε μαθηματικής εννοίας ανάλογα δεν είναι αμετάβλητη, αλλά ***αλλάζει*** μαζί με την επιλογή των τοπικών μαθηματικών.

Ή ***κατασκευαστική αποδειξιμότητα*** μιας μαθηματικής απόφανσης σημαίνει τώρα ότι είναι ***αναλλοίωτη*** ή έγκυρη ***σε όλα*** τα τοπικά μαθηματικά.

Έτσι, από αυτήν την οπτική, η χρήση των διαδικασιών των κατασκευαστικών αποδείξεων, πέρα από το να μην εμποδίζει τη μαθηματική δραστηριότητα όπως οι (κλασικοί) μαθηματικοί θέλουν να ισχυρίζονται, έχει άντ' αυτού την αντίθετη συνέπεια της επέκτασης της εγκυρότητας του μαθηματικού συλλογισμού στο ευρύτερο δυνατό φάσμα γενικών πλαισίων, συμπεριλαμβανομένων και αυτών στα οποία λαμβάνει χώρα «μεταβολή». Ό ρόλος του αξιώματος της επιλογής είναι να απαλείψει αυτή τη «μεταβολή» όσο είναι δυνατόν, εξασφαλίζοντας ότι κάθε πλαίσιο στο οποίο αυτό ικανοποιείται είναι επαρκώς όμοιο προς το κλασικό σύμπαν των «σταθερών» συνόλων, ώστε να επιτρέπει να καταστεί εκεί έγκυρος ο ***κλασικός*** μαθηματικός (δηλαδή συνολοθεωρητικός) συλλογισμός.

Ή αντικατάσταση του απόλυτου από τα τοπικά μαθηματικά αποτελέσματα, κατά την άποψη μου, έχει ως αποτέλεσμα ένα σημαντικό κέρδος όσον αφορά στην ***προσαρμοστικότητα*** (flexi- bility) ***των εφαρμογών*** των μαθηματικών ιδεών, και έτσι προσφέρει τη δυνατότητα παροχής μιας εξήγησης της «παράλογης αποτελεσματικότητάς» τους (βλ. [17]). Στο εξής, αντί να είμαστε υποχρεωμένοι να στριμώξουμε μία εποπτικά δοσμένη έννοια στο Προκρούστειο κρεβάτι των απόλυτων μαθηματικών, με τη συνεπακόλουθη παραμόρφωση του νοήματος, είμαστε ελεύθεροι να ***επιλέξουμε*** τα τοπικά μαθηματικά πού με φυσικό τρόπο είναι προσαρμοσμένα στο να εκφράζουν και να αναπτύσσουν αυτή την έννοια. Στο βαθμό πού η δοσμένη έννοια ενσωματώνει πλευρές (της εμπειρίας μας) του αντικειμενικού κόσμου, το ίδιο επίσης θα κάνουν και τα τοπικά μαθηματικά· η «αποτελεσματικότητα» των τελευταίων, δηλαδή η ικανότητα προσαρμογής τους στον αντικειμενικό κόσμο, χάνει έτσι το «παράλογό» της και αντίθετα αποδεικνύεται ότι είναι προϊόν σχεδιασμού.

Έτσι η τοπική ερμηνεία των μαθηματικών, υπονοούμενη στη Θεωρία Κατηγοριών, εναρμονίζεται στενά με τη σιωπηλή πεποίθηση πολλών μαθηματικών ότι η επιστήμη τους, σε τελική ανάλυση, μελετά τη δομή του πραγματικού κόσμου και όχι αφηρημένα σύνολα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bell, J.L. (1977). ***Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory,*** Oxford University Press.

[2] Bell, J.L. (1981). "Category Theory and the Foundations of Mathematics",

British Journal for the Philosophy of Science *32, 349-358.*

[3] Bell, J.L. (1982). "Categories, Toposes and Sets", ***Synthese*** **51, 293-337.**

[4] Bell, J. L. (1982). "Some Aspects of the Category of Subobjects of Constant Objects in a Topos", ***Journal of Pure and Applied Algebra 24, 245-259.***

[5] Bell, J. L. and M. Machover (1977). ***A Course in Mathematical Logic,*** North-Holland, Amsterdam.

[6] Davis, M. (1977). "A Relativity Principle in Quantum Mechanics", ***International Journal of Theoretical Physics 16, 867-874.***

[7] Fourman, M. P. (1977). "The Logic of Topoi", in Barwise, J. (ed.), *Handbook of Mathematical Logic,* North-Holland, Amsterdam.

[8] Fourman, M.P. and J. Hyland (1979). "Sheaf Models for Analysis", In: ***Applications of Sheaves, Lecture Notes in Mathematics*** **# 753**, Springer-Verlag, Berlin.

[9] Goldblatt, R. (1979). ***Topoi, the Categorical Analysis of Logic,*** North-Holland, Amsterdam.

[10] Johnstone, P.T. (1977). ***Topos Theory,*** Academic Press, London.

[11] Kock, A. (1981). "***Synthetic Differential Geometry***", *London Math. Soc. Lecture Notes* 51, Cambridge University Press, Cambridge, Mass.

[12] Lawvere, F.W. (1976). "Variable Quantities and Variable Structures in Topoi", ***Algebra, Topology and Category Theory****, A Collection of Papers in Honor of Samuel Eilenberg,* Academic Press.

[13] Lawvere, F.W. (1980). "Toward the Description in a Smooth Topos of the Dynamically Possible Motions and Deformations of a Continuous Body", ***Cahiers de Topologie et Geometric Differentielle*** 21, 377-392.

[14] Mac Lane, S. (1998). ***Categories for the Working Mathematician,*** Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition.

[15] Skolem, Th. (1981). "Some Remarks on Axiomatized Set Theory", μετάφραση του πρωτότυπου του 1922 στο ***From Frege to Codel,*** Harvard University Press.

[16] Takeuti, G. (1978). ***Two Applications of Logic to Mathematics, Part I: Boolean Valued Analysis,*** publications of the Math. Soc. of Japan 13, Iwanami and Princeton University Press, Tokyo and Princeton 1978.

[17] Wigner, E. P. (1960). "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", *Commun. Pure & Appl. Math.* 13, 1-14.

Τμήμα Μαθηματικών

Οικονομική Σχολή του Λονδίνου

Houghton Street

London WC2A 2AE

Αγγλία