Κώστας Α. ΔΡΟΣΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ

Τομ. 2ος: ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ & ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διαθέσιμο από:

www.math.upatras.gr/~cdrossos/Docs/SkepsisVol2.pdf

Έκδοση 5η: Σεπτέμβριος 2005

Πάτρα 2005

ISBN ....

Περιεχόμενα

1

ΘΕΜΕΛΙΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

2

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

2.1 Προσανατολισμένα Γραφήματα.

Τελευταία, η θεωρία των προσανατολισμένων (oriented) ή κατευθυνόμενων (directed) γραφημάτων (graphs), έχει καταλάβει μια κεντρικά θεμελιακή θέση για τα μαθηματικά. Αυτό κύρια οφείλεται στην ένταση που προκαλεί η ανάπτυξη της πληροφορικής κοινωνίας, έτσι ώστε από την μια μεριά να υπάρχει ανάγκη μαθηματικής διαπραγμάτευσης, προβλημάτων που θέτει αυτή η ίδια η πληροφορική αλλά και οι μη-σκληρές επιστήμες[1] (Γνωστικές Επιστήμες, Τεχνητή Νοημοσύνη, Κοινωνιολογία, κ.λπ.) και από την άλλη η ανάγκη για ουσιαστική αλλαγή και αναθεώρηση και των θεμελίων αλλά και της ουσίας των μαθηματικών. Αυτές οι ριζικές αλλαγές των μαθηματικών, κατευθύνονται μάλλον προς μια μη-Καντοριανή, τοποθεωρητική αντίληψη για τα μαθηματικά. Μια αντίληψη δηλαδή που απ' τη μία μεριά θα ενσωματώνει την μεταβολή και την δϊυκές της έννοιες, την ασάφεια και την αοριστία, σαν σύμφυτα στοιχεία των μαθηματικών και από την άλλη οι πλειότιμες λογικές θα γενικεύουν την δίτιμη λογική.

Η μεταβολή φαίνεται καθαρότερα αν θεωρήσουμε ότι τα κλασικά μαθηματικά ασχολούνται με τα αντικείμενα της **πλασματικής πραγματικότητας** της ανθρώπινης σκέψης, που τα αντιλαμβανόμαστε στην «οθόνη της ανθρώπινης φαντασίας» , ενώ τα μη-Καντοριανά μαθηματικά ασχολούνται με αντικείμενα που τα αντιλαμβανόμαστε στην «εικονική πραγματικότητα», π.χ. της οθόνης ενός υπολογιστή.

Τα προσανατολισμένα γραφήματα αποτελούν την πρωταρχική έννοια και στοιχειώδη δομή από την οποία απορρέουν και η κλασική συνολοθεωρία αλλά

[1] Με τον όρο μη-σκληρές επιστήμες αποδίδεται ο όρος 'soft sciences'. Ισως θα μπορούσε να αποδοθεί και ως 'ευέλικτες ή ήπιες επιστήμες' αλλά μάλλον όχι 'μαλακές επιστήμες'. Ο όρος 'σκληρές επιστήμες' (hard sciences) περιλαμβάνει την Φυσική, Χημεία, κ.λπ.

και η θεωρία των υπερσυνόλων (hypersets) ή μη-καλώς εδραιωμένων συνόλων (non-well -founded sets). Τα υπερσύνολα είναι μια έννοια, η εισαγωγή της οποίας επιβλήθηκε από ανάγκες της πληροφορικής βλ. [18]. Εξ άλλου τα κατευθυνόμενα γραφήματα βρίσκονται στη βάση της θεωρία κατηγοριών, τα δε υπερσύνολα περιγράφουν καλύτερα τα αντικείμενα αλλά και αυτές τις ίδιες τις κατηγορίες.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε μια μικρή εισαγωγή της Θεωρίας των Προσανατολισμένων Γραφημάτων, για να εξυπηρετήσουμε κυρίως τις παιδαγωγικές ανάγκες της εισαγωγής των κατηγορικών εννοιών, καθώς επίσης και κάποιων στοιχείων της Θεωρίας των Υπερσυνόλων.

2.1.1 Ορισμός. Ενα **προσανατολισμένο γράφημα** $\vec{G}$ είναι ένα δομημένο σύνολο, $\vec{G} = \langle G_0, R_{G_0} \rangle$ τέτοιο ώστε:

(i) G_0 είναι μια κλάση, τα στοιχεία της οποίας λέγονται **κόμβοι** (nodes) του γραφήματος και,

(ii) $R_{G_0} \subseteq G_0 \times G_0$ είναι μια διμελής σχέση στο σύνολο των κόμβων G_0, τα στοιχεία της οποίας λέγονται **ακμές** (edges) ή βέλη (arrows) του γραφήματος.

Στο εξής θα λέμε απλά γράφημα G ή $\vec{G}$ αντί προσανατολισμένο γράφημα $\vec{G}$.

Αν $(x, y) \in R_{G_0}$, συνήθως το x λέγεται **προηγούμενο** του y και το δε y **επόμενο** του x. Χρησιμοποιούμε όμως και μια πιο ανθρωπομορφική ορολογία: το x λέγεται και **γονέας** (parent) του y, το δε y **παιδί** (child) του x.

Αν υπάρχει τροχιά

$$\underset{n_k}{\bullet} \longrightarrow \underset{n_{k+1}}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{n_m}{\bullet}$$

τότε ο κόμβος n_k λέγεται **πρόγονος του** n_m, ο δε κόμβος n_m **απόγονος του** n_k.

Τα στοιχεία του G_1, συνηθίζεται να παριστάνονται γεωμετρικά ως εξής:

$$(x, y) \in R_{G_0} \iff x \bullet \longrightarrow \bullet\, y.$$

2.1.2 Σχόλιο. (i) Τα G_0 και R_{G_0} μπορούν να είναι, κενά σύνολα, απειροσύνολα αλλά και κλάσεις, όπως π.χ. η κλάση $R := \{x | x \notin x\}$ του Russell. Γενικά μια κλάση ορίζεται ως: $C := \{x | \varphi(x)\}$ όπου $\varphi(x)$ ένας τύπος της γλώσσας της συνολοθεωρίας (μια οριστική συνθήκη). Για τις κλάσεις μπορούμε να ορίσουμε πράξεις κ.λπ. όπως και στα σύνολα. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα δύο πιο γνωστά αξιωματικά συστήματα για την συνολοθεωρία είναι:

(α) Το σύστημα των Zermelo - Fraenkel, (ZF) το οποίο δέχεται σαν μοναδικό τύπο αντικειμένων τα σύνολα και

(β) Το σύστημα NGB (von Neumann - Gödel - Bernays) που δέχεται δύο τύπους αντικειμένων, τα σύνολα και τις κλάσεις. Σύνολο δε είναι η κλάση που είναι μέλος κάποιας άλλης κλάσης.

(ii) Ο Ορισμός 2.1.1, επιτρέπει ανάμεσα σε δύο κόμβους μόνον μια ακμή, μόνο μια επικοινωνία, ωστόσο και στις κατηγορίες αλλά και σε διάφορες εφαρμογές, υπάρχει ανάγκη να έχουμε γραφήματα με ζεύγη κόμβων, που συνδέονται με περισσότερα από δύο βέλη. Θα μπορούσαμε λοιπόν, αντί η σχέση R_{G_0} να είναι ένα σύνολο, οπότε θα υπάρχει το πολύ ένα βέλος μεταξύ δύο ακμών, να θεωρήσουμε την R_{G_0} σαν μια οικογένεια στοιχείων του $G_0 \times G_0$, δηλαδή σαν μια συνάρτηση $I \to G_0 \times G_0$, οπότε τότε είναι δυνατόν να έχουμε περισσότερα του ενός βέλη μεταξύ δύο κόμβων. Μάλιστα, για να μην εισάγουμε περιττά στοιχεία στον ορισμό, μπορούμε κάλλιστα να επιλέξουμε για σύνολο δεικτών αντί του I, το σύνολο των ακμών έτσι ώστε η συνάρτηση για κάθε ακμή να μας δίδει τον κόμβο της αρχής και τον κόμβο του τέλους της. Ετσι οδηγούμαστε στο γενικότερο ορισμό, γνωστόν και σαν **πλειογράφημα** (multigraph), που ωστόσο θα συνεχίσουμε να το ονομάζουμε γράφημα.

2.1.3 Ορισμός. Ενα **γράφημα** είναι μια διατεταγμένη τριάδα:

$$\vec{G} := \langle G_0, G_1, (\alpha, \tau) \rangle$$

όπου,

(i) G_0 είναι μια κλάση, τα στοιχεία της οποίας ονομάζονται **κόμβοι** του γραφήματος

(ii) G_1 είναι μια κλάση ($G_0 \cap G_1 = \emptyset$), τα στοιχεία της οποίας ονομάζονται **ακμές ή βέλη** του γραφήματος, και

(iii) (α, τ) είναι μια συνάρτηση:

$$\begin{array}{rcrcl} (\alpha(\cdot), \tau(\cdot)) & : & G_1 & \to & G_0 \times G_0 \\ & & f & \mapsto & (\alpha(f), \tau(f)) \end{array}$$

η οποία αντιστοιχεί σε κάθε ακμή $f \in G_1$ μια **αρχή ή αφετηρία** $\alpha(f)$ και ένα **τέλος ή κόμβο άφιξης** $\tau(f)$.

2.1.4 Σχόλιο. (i) Θα συνεχίσουμε να συμβολίζουμε μια ακμή με το διατεταγμένο ζεύγος κόμβων $(\alpha(f), \tau(f))$. Οταν δε το ίδιο ζεύγος κόμβων αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία ακμές, θα διαφοροποιούμε τα ζεύγη με ένα επιπρόσθετο σημάδι.

(ii) Ο συμβολισμός G_0, G_1 για την κλάση των κόμβων και των ακμών, δικαιολογείται, αφού κάθε κόμβος θεωρείται σαν μηδενικής διαστάσεως αντικείμενο, ενώ κάθε ακμή σαν μονοδιάστατο αντικείμενο.Γενικότερα θα συμβολίζουμε με $G_n(x, y)$ το σύνολο των n-τροχιών ή n-μονοπατιών, από την κορυφή $x \in G_0$ στήν κορυφή $y \in G_0$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} G_n(x,y) \quad := \quad & \{(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in G_1^n \,|\, \alpha(f_1) = x, \tau(f_n) = y \quad \text{και} \\ & \tau(f_i) = \alpha(f_{i+1}) \quad \text{για} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.\} \end{aligned}$$

2.1.5 Ορισμός. Ενα γράφημα θα λέγεται:

(i) **διακριτό** ανν $G_1 = \emptyset$

(ii) **κενό** ανν $G_0 = \emptyset$ και $G_1 = \emptyset$

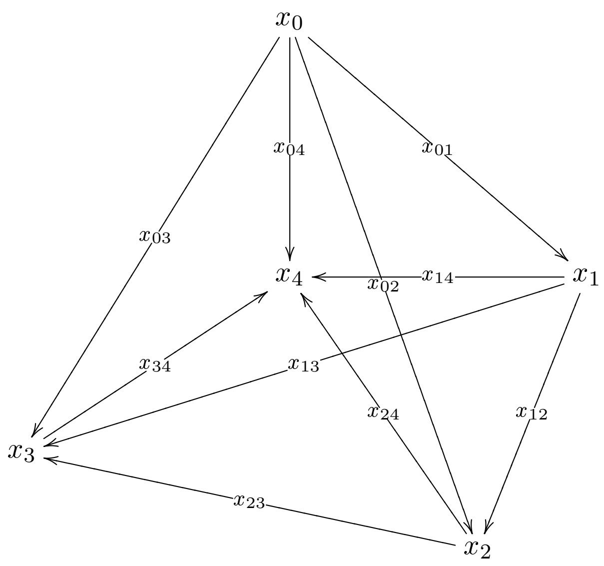
(iii) **πεπερασμένο** ανν ο αριθμός των κόμβων είναι πεπερασμένος.

2.1.6 Σχόλιο. Ενα διακριτό γράφημα στην ουσία είναι μια αφηρημένη συλλογή, και πολλές φορές θα ταυτίζουμε ένα διακριτό γράφημα με την αφηρημένη συλλογή των κόμβων του. Η έννοια της αφηρημένης συλλογής είναι πολύ κοντά στήν *έννοια του αφηρημένου συνόλου*, όπου όμως διατηρούνται τα 'εξωτερικά βέλη' ενός αιχμηρού γραφήματος (βλ., Ορισμός 2.2.14). Είναι φανερό λοιπόν ότι κάθε μη - διακριτό μη - κενό γράφημα απεικονίζει ένα δομημένο σύνολο του οποίου η γεωμετρική μορφή ή αλγεβρική δομή καθορίζεται από τα υπάρχοντα βέλη. Η μαθηματική δομή και η γεωμετρική μορφή είναι δύο δυϊκοί τρόποι έκφρασης ενός και του αυτού πράγματος. Ετσι κάθε γράφημα έχει κάποια συγκεκριμένη γεωμετρική μορφή-μαθηματική δομή. Τα διάφορα γραφήματα με απλά γεωμετρικά σχήματα θα τα χρησιμοποιούμε αργότερα για την μορφοποίηση και δόμηση των αφηρημένων συνόλων.

2.1.7 Παράδειγμα. **(1)** Παραδείγματα γραφημάτων είναι τα ακόλυθα:

$$\begin{tikzcd} \alpha \bullet \arrow[r, "e_2"] \arrow[d, "e_1"'] & \bullet \beta \arrow[d, "e_3"] \\ \gamma \bullet \arrow[ur, "e_4"] \arrow[r, "e_5"'] & \bullet \delta \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \alpha \bullet \arrow[rr, "e_1"] \arrow[dr, "e_2"'] & & \bullet \beta \arrow[dl, "e_3"] \\ & \bullet \gamma & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \bullet \alpha \arrow[loop above, "e_1"] \arrow[dl, "e_2"'] \arrow[dr, "e_3"] & \\ \beta \bullet \arrow[rr, bend left, "e_4"] & & \bullet \gamma \arrow[ll, bend left, "e_5"] \end{tikzcd}$$

Ένα περισσότερο πολύπλοκο παράδειγμα είναι το ακόλουθο:



(2) Τα γράφημα $\vec{G} = \langle G_0, G_1, (\alpha, \tau)\rangle$ όπου,

- G_0 είναι η κλάση όλων των αφηρημένων συνόλων
- G_1 είναι η κλάση όλων των συναρτήσεων
- Για κάθε $f \in G_1$,
- $\alpha(f)$ είναι το πεδίο ορισμού (domain) της f, συμβολικά $\mathrm{dom}(f)$, και,
- $\tau(f)$ είναι το πεδίο τιμών ή συν-πεδίο ορισμού (co-domain), συμβολικά $\mathrm{cod}(f)$,.

Είναι φανερό ότι τα G_0, G_1, δεν είναι σύνολα αλλά κλάσεις. Τέτοια γραφήματα θα λέγονται **μεγάλα γραφήματα**, ενώ αν G_0, G_1 είναι σύνολα θα λέγονται **μικρά γραφήματα**. Γενικότερα κάθε μαθηματική δομή της οποίας ο φορέας είναι κλάση, θα λέγεται **μεγάλη** ενώ αν είναι σύνολο θα λέγεται **μικρή**. Αξίζει ακόμα να σχολιάσουμε ότι η κλάση των αφηρημένων συνόλων ορίζεται παρακάτω (Ορισμός 2.2.14).

2.1.1 Ομομορφισμοί γραφημάτων

Οπως σημειώσαμε ήδη σε προηγούμενο σχόλιο μας, κάθε γράφημα παριστάνει μια μαθηματική δομή. Αυτό γίνεται καλύτερα κατανοητό αν σκεφθεί κανείς ότι μια μαθηματική δομή απαρτίζεται από ένα αφηρημένο σύνολο, τον φορέα της δομής, και από μια οικογένεια σχέσεων. Οι σχέσεις όπως γνωρίζουμε, παριστάνονται πάντοτε με ένα γράφημα, στο οποίο συνυπάρχουν και ο φορέας, σαν το σύνολο των κόμβων, αλλά και η δομή, σαν το σύνολο των ακμών.

Ετσι ένας ομομορφισμός μεταξύ γραφημάτων είναι μια συνάρτηση που διατηρεί την 'δομή' δηλαδή την αφηρημένη γεωμετρική μορφή του γραφήματος. Ακριβέστερα έχουμε:

2.1.8 Ορισμός. Ενας **ομομορφισμός** $h : G \longrightarrow H$, από το γράφημα $G = \langle G_0, G_1, (\alpha_G, \tau_G)\rangle$ στο γράφημα $H = \langle H_0, H_1, (\alpha_H, \tau_H)\rangle$ είναι ένα ζεύγος αντιστοιχιών.

$$h_0 : G_0 \longrightarrow H_0 \qquad h_1 : G_1 \longrightarrow H_1$$

με την ιδιότητα, αν $f : k \to \ell$ είναι ένα βέλος του G τότε $h_1(f) : h_0(k) \to h_0(\ell)$ είναι ένα βέλος του H. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι (h_0, h_1) είναι ένας ομομορφισμός ανν

$$a_H \circ h_1(f) = h_0 \circ a_G(f) \quad \text{και} \quad \tau_H \circ h_1(f) = h_0 \circ \tau_G(f)$$

για κάθε $f \in G_1$

Πολλές φορές είναι βολικό να αναφερόμαστε στην συνάρτηση h σαν ομομορφισμό χωρίς πάντοτε να αναφερόμαστε στις συνιστώσες h_0, h_1.

Αν οι συναρτήσεις h_0, h_1 είναι $1-1$ και επί τότε η h λέγεται **ισομορφισμός** των γραφημάτων G και H.

2.1.9 Παράδειγμα. (1) Έστω H ένα γράφημα και $n \in H_0$ είναι ένας τυχόν κόμβος που περιέχει ένα βρόγχο u, δηλαδή $u : n \to n$. Έστω τώρα ένα άλλο τυχόν γράφημα G. Τότε υπάρχει ένας ομομορφισμός τέτοιος ώστε να αντιστοιχεί κάθε κόμβο του G στον κόμβο $n \in H_0$, και κάθε βέλος $f \in G_1$ στο βρόγχο $u \in H_1$. Ελέγξτε ότι μια τέτοια αντιστοιχία είναι ομομορφισμός.

(2) Το γράφημα 2.1 παριστάνει την δομή των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, ορίζοντας το μηδέν και την συνάρτηση του επομένου S.

$$G : \quad \underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{N}{\bullet} \longrightarrow \underset{N}{\bullet}$$

Σχήμα 2.1: Φυσικοί αριθμοί

Συνήθως το 1 παίζει ένα σοβαρό ρόλο στη συνέχεια, και σαν σύμβολο το χρησιμοποιούμε στην συνολοθεωρία, για το σύνολο που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο.

Για να δούμε ότι το γράφημα του Σχήματος 2.1 παριστάνει πράγματι τους φυσικούς αριθμούς, θα ορίσουμε ένα ομομορφισμό από το γράφημα G στο γράφημα των συνόλων και των συναρτήσεων. Ο ομομορφισμός ορίζεται ως ακολούθως.

$$\varphi : \begin{cases} 1 & \mapsto & \{\emptyset\} \\ N & \mapsto & \mathbb{N} \\ (N \xrightarrow{\quad s \quad} N) & \mapsto & (\mathbb{N} \xrightarrow{\quad succ \quad} \mathbb{N}) \end{cases}$$

Το βέλος $1 \xrightarrow{0} N$ ερμηνεύεται μέσω του ομομορφισμού με την συνάρτηση,

$$\begin{array}{ccc} \{\emptyset\} & \to & \mathbb{N} \\ \emptyset & \mapsto & 0 \end{array}$$

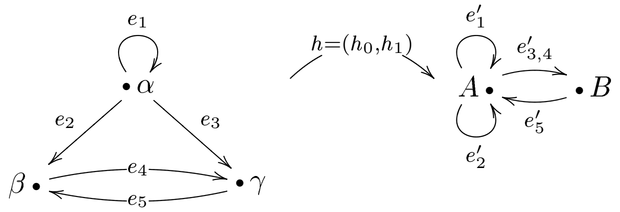
που απλά επιλέγει τον αριθμό $0 \in \mathbb{N}$.

Το βέλος $N \xrightarrow{s} N$ ερμηνεύεται με την συνάρτηση του επομένου,

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & succ(n) := n + 1 \end{array}$$

Ετσι βλέπουμε ότι ο ομομορφισμός φ αποτελεί ταυτόχρονα και μια σημασιολογική ερμηνεία του αφηρημένου γραφήματος G.

(3) Εστω τα γραφήματα που εικονίζονται στό ακόλουθο σχήμα:



τότε η ακόλουθη αντιστοιχία αποτελεί ένα ομομορφισμό.

$$\begin{array}{cclcccl} \alpha & \mapsto & h_0(\alpha) = A & \quad & e_1 & \mapsto & h_1(e_1) = e'_1 \\ \beta & \mapsto & h_0(\beta) = A & & e_2 & \mapsto & h_1(e_2) = e'_2 \\ \gamma & \mapsto & h_0(\gamma) = B & & e_3 & \mapsto & h_1(e_3) = e'_{3,4} \\ & & & & e_4 & \mapsto & h_1(e_4) = e'_{3,4} \\ & & & & e_5 & \mapsto & h_1(e_5) = e'_5 \\ & (h_0) & & & & (h_1) & \end{array}$$

2.1.10 Ασκήσεις. Να δειχτεί ότι αν $\varphi : G \to H$ και $\psi : H \to K$ είναι ομομορφισμοί των γραφημάτων G, H και H, K τότε η σύνθεση $\psi \circ \varphi : G \to K$, είναι ομομορφισμός, όπου,

$$(\psi \circ \varphi)_0 = \psi_0 \circ \varphi_0 \quad \text{και} \quad (\psi \circ \varphi)_1 = \psi_1 \circ \varphi_1$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε ένα είδος γραφημάτων που αποτελεί τη βάση για μια γραφοθεωρητική θεώρηση της έννοιας της κατηγορίας.

2.1.11 Ορισμός. Ενα **παραγωγικό σύστημα συμπερασμού** (deductive system) είναι ένα γράφημα G στο οποίο έχουμε:

(i) Για κάθε $A \in G_0$ υπάρχει αυτοβέλος $(1_A : A \to A) \in G_1$, που θα το ονομάζουμε και **ταυτοτικό βέλος** και

(ii) Για κάθε ζευγάρι βελών $f : A \to B$ και $g : B \to C$ υπάρχει η σύνθεση των δύο βελών, $g \circ f : A \to C$.

Η συνθήκη (ii) μπορεί να ερμηνευθεί 'λογικώς', από αυτήν δε την ερμηνεία προέρχεται και το όνομα 'παραγωγικό σύστημα συμπερασμού'. Θεωρούμε ότι οι κόμβοι του γραφήματος είναι 'λογικές προτάσεις' ή 'λογικοί τύποι' οι δε ακμές ή βέλη ότι είναι συμπερασμοί ή αποδείξεις. Τότε η ιδιότητα (ii) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{f : A \to B \quad g : B \to C}{g \circ f : A \to C}$$

που δεν είναι παρά ο βασικός κανόνας συμπερασμού, γνωστός σαν modus ponens. Με την ερμηνεία των βελών και ιδιαίτερα των συναρτήσεων σαν μια έννοια λογικής συνεπαγωγής, θα ασχοληθούμε και παρακάτω.

2.2 Εννοιες Συνόλου.

Στο Τμήμα αυτό δεν πρόκειται να κάνουμε μια επίσημη και πλήρη εισαγωγή στη Θεωρία Συνόλων, αλλά απλά θα θίξουμε κάποια ζητήματα που θα μας χρειασθούν στη συνέχεια. Για μια καλή εισαγωγή στη Θεωρία Συνόλων, δείτε π.χ. τα: [171, 53]. Για μεγάλους πληθάριθμους το [105] είναι ίσως το πιό πλήρες. Το [100] είναι ίσως το πιό πλήρες βιβλίο συνολοθεωρίας. Δείτε επίσης τα [137, 43, 104]. Τέλος για μια κατηγορική προσέγγιση στα σύνολα δείτε το [121].

Η πιο επικρατέστερη έννοια συνόλου, είναι αυτή που εκφράζεται μέσα από τα αξιώματα των Zernelo - Fraenkel (ZF).

Αν θέλαμε να δούμε, τη διαισθητική σημασία και το νόημα της έννοιας του συνόλου που συλλαμβάνεται και εκφράζεται από τα αξιώματα ZF, τότε οδηγούμαστε σε μια συγκεκριμένη έννοια που εκφράζεται μέσα από μια **σταδιακή επαναληπτική διαδικασία συλλόγισης**, και υλοποιείται π.χ. με το σύμπαν του von - Neumann. Το αξίωμα της θεμελίωσης παίζει πρωταρχικό ρόλο για την κατασκευή του σύμπαντος του von - Neumann. Ωστόσο τελευταία, κάτω από την πίεση για μαθηματικοποίηση των νέων αντικειμένων που εμφανίστηκαν στην πληροφορική εισήχθηκαν νέα αντικείμενα-σύνολα, τα ονομαζόμενα και υπερσύνολα ή μη-καλά θεμελιωμένα σύνολα, που ακριβώς στηρίζονται στην αμφισβήτηση του Αξιώματος της Θεμελίωσης. Ας δούμε όμως συνοπτικά τις δύο αυτές θεμελιώδεις έννοιες συνόλων.

2.2.1 Η επαναληπτική αντίληψη του συνόλου

Η επαναληπτική αντίληψη ή κατακόρυφη έννοια του συνόλου, εκφράζεται μέσα από αξιωματικά συστήματα όπως τα ZF, von Neumann - Bernays - Gödel (NBG), Morse - Kelley κ.α.

Πριν όμως περιγράψουμε την διαδικασία που στηρίζεται η επαναληπτική αντίληψη του συνόλου, είναι απαραίτητο να σχολιάσουμε κάπως την έννοια του πρωτοστοιχείου (urelement) ή ατόμου (atom). Πρωτοστοιχεία είναι κάποια δεδομένα αντικείμενα, τα οποία υποθέτουμε ότι δεν έχουν συνολοθεωρητική δομή, δεν είναι δηλαδή σύνολα, η δε ύπαρξή τους δεν εξαρτάται από συνολοθεωρητικές κατασκευές. Ετσι αν V_U είναι ένα σύμπαν συνόλων με πρωτοστοιχεία U τότε η κλασική σχέση του 'ανήκειν', '$\in$' τροποποιείται σε μια σχέση '$\in_U$' που ορίζεται ως ακολούθως: $(\forall u \in U)(\forall x \in V_U)[x \notin_U u]$, για τα σύνολα $V_U - U$ η σχέση του ανήκειν παραμένει η κλασική. Μπορούμε για παράδειγμα να θεωρούμε ότι οι φυσικοί, ή οι πραγματικοί αριθμοί, μας έχουν δοθεί εκ των προτέρων, τα δε στοιχεία τους εκλαμβάνονται σαν πρωτοστοιχεία. Πολλές φορές παρ'όλο που το κενό σύνολο είναι σύνολο, το θεωρούμε και σαν άτομο αφού ισχύει η σχέση $x \notin \emptyset$ ισχύει για κάθε x. Η έννοια του πρωτοστοιχείου δεν είναι απόλυτη, είναι μάλλον μια σύμβαση που από τη μια μεριά μας διευκολύνει και από την άλλη **εμπεριέχει έμμεσα την ύπαρξη ενός επιπέδου πραγματικότητας, όπου τα πρωτοστοιχεία παίζουν τον ρόλο των 'μακρομορίων'.** Ταυτόχρονα η ύπαρξη πρωτοστοιχείων εναρμονίζεται και με την προτροπή που εκφράζεται από το λεγόμενο, «ξυράφι του Occam» (Occam's razor): "Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem" δηλ. σε ελεύθερη μετάφραση, «Δεν πρέπει να εισάγονται οντότητες που δεν είναι αναγκαίες».

Στην συνολοθεωρία ZF, λόγω των αξιωμάτων του δυναμοσυνόλου και της αντικατάστασης (δηλ. για κάθε σύνολο A και για κάθε οριστικό τελεστή μιας μεταβλητής H, η εικόνα $H[A] := \{H(x)|x \in A\}$ είναι σύνολο) είναι δυνατός ο εξοβελισμός των πρωτοστοιχείων από την θεωρία μας. Δηλαδή η ύπαρξη των ατόμων είναι μια περιττή υπόθεση. Υπάρχουν όμως ασθενέστερα αξιωματικά συστήματα συνολοθεωρίας όπως το σύστημα Kripke - Platek (KP), βλ. π.χ. [17, 135], όπου η υπόθεση της ύπαρξης πρωτοστοιχείων είναι βασικής σημασίας.

Μια διαισθητική περιγραφή της επαναληπτικής αντίληψης είναι η ακόλουθη: **Αρχίζουμε με μια συλλογή πρωτοστοιχείων. Στη συνέχεια σχηματίζουμε σύνολα σε διαδοχικά στάδια. Σε κάθε στάδιο m έχουμε στη διάθεσή μας τα πρωτοστοιχεία και όλα τα σύνολα που έχουν ήδη δημιουργηθεί σε προηγούμενα στάδια. Στη συνέχεια σχηματίζουμε όλες τις δυνατές συλλογές αυτών των αντικειμένων, τις οποίες τις θεωρούμε σαν τα σύνολα που δημιουργήθηκαν στο στάδιο m+1. Μια συλλογή αντικειμένων θα είναι σύνολο αν και μόνον αν (ανν) έχει δη-**

μιουργηθεί σε κάποιο στάδιο, αυτής της επαναληπτικής διαδικασίας. Για μια υλοποίηση αυτής της διαδικασίας, βλ. π.χ. [157, 158]

Μεταφορικά η επαναληπτική αντίληψη του συνόλου, είναι μια σταδιακή διαδικασία συλλόγισης, που θα τη συμβολίζουμε με $\{\cdots\}$, όπου μέσα στο κουτί $\{\cdots\}$ τοποθετούμε τα αντικείμενα $a, b, \ldots$ που έχουμε ήδη κατανοήσει σαν ολότητα στο προηγούμενο βήμα, και που τελικά δίνει ένα νέο σύνολο, το $\{a, b, \cdots\}$. Υπάρχουν βεβαίως συλλογές που είναι αδύνατο να κατανοηθούν σαν τελειωμένες ολότητες, όπως π.χ. 'η συλλογή όλων των συνόλων', και οι οποίες συλλογές οδηγούν στην **έννοια της κλάσης.**

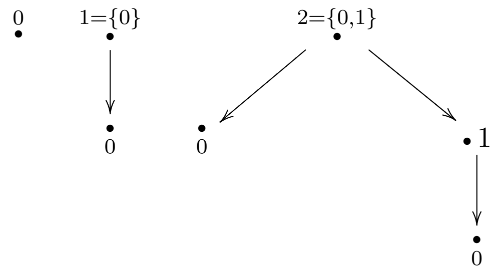
Το Αξίωμα της Θεμελίωσης (για κάθε μη-κενό σύνολο x, υπάρχει σύνολο $\alpha \in x$, τέτοιο ώστε $\alpha \cap x = \emptyset$ ή ισοδύναμα ότι η σχέση του ανήκειν, $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη) επιτρέπει σε κάθε σύνολο που έχει δημιουργηθεί σε κάποιο στάδιο της επαναληπτικής διαδικασίας να πραγματώνεται σαν ένα στοιχείο του ακόλουθου σύμπαντος, που είναι γνωστό και ως σύμπαν του von Newmann:

$$
\begin{aligned}
V_0 &:= U \quad (\text{U είναι το σύνολο των ατόμων ή πρωτοστοιχείων}) \\
V_{n+1} &:= V_n \cup \mathscr{P}(V_n), \quad n \in \mathbb{N} \\
V_a &:= \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \quad (\text{αν α είναι ένας οριακός διατακτικός αριθμός) και} \\
V_U &:= \bigcup_{a\in \mathrm{ON}} V_a \quad \text{όπου ON είναι η κλάση των διατακτικών αριθμών}
\end{aligned}
$$

Αν $U = \emptyset$, τότε το σύμπαν που προκύπτει, λέγεται σύμπαν των **καθαρών ή γνήσιων συνόλων**. Από την άλλη μεριά το Αξίωμα της Θεμελίωσης απαγορεύει την ύπαρξη βρόγχων ή κύκλων, δηλαδή συνόλων όπως π.χ. το $\Omega = \{\Omega\}$, που περιέχουν τον εαυτό τους.

Το αξίωμα της θεμελίωσης μας επιτρέπει επίσης να παριστάνουμε τα σύνολα σαν δέντρα χωρίς άπειρες τροχιές και έτσι χωρίς βρόγχους ή αυτοβέλη. Αν λοιπόν είναι σωστή η άποψη ότι «τα πάντα είναι σύνολα», άλλο τόσο σωστή είναι και η ισοδύναμη της άποψη ότι «τα πάντα είναι δέντρα».

2.2.1 Παράδειγμα. Μερικές γραφικές απεικονίσεις συνόλων, με κατωφερή δένδρα δίδονται στο ακόλουθο σχήμα:



Σημειώνουμε ότι ο συμβολισμός $a \longrightarrow b$ σημαίνει ότι, το σύνολο b είναι μέλος του συνόλου a, και ότι,

$$0 = \emptyset, \quad 2 := \{0, 1\}, \ldots, n := \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

2.2.2 Ορισμός. (i) Μια τροχιά σε ένα γράφημα είναι μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία κόμβων τέτοια ώστε, εκτός του πρώτου κόμβου όλοι οι άλλοι είναι επόμενοι κάποιου κόμβου στην τροχιά, σχηματικά:

$$\underset{n_0}{\bullet} \longrightarrow \underset{n_1}{\bullet} \longrightarrow \cdots$$

(ii) Ενα γράφημα G θα λέγεται **αιχμηρό** (pointed) ανν υπάρχει ένας μοναδικός κόμβος n_0, που ονομάζεται **αιχμή ή ρίζα ή κορυφή** του γραφήματος, έτσι ώστε όλοι οι άλλοι κόμβοι να είναι απόγονοι του n_0. Κάθε αιχμηρό γράφημα θα το συμβολίζουμε και ως: $\langle G, n_0 \rangle$, όπου $G = \langle G_0, G_1, (\alpha(\cdot), \tau(\cdot)) \rangle$.

(iii) Ενα **δέντρο** είναι ένα αιχμηρό γράφημα $\langle G, n_o \rangle$, τέτοιο ώστε για κάθε κόμβο n υπάρχει μια μοναδική τροχιά με αρχή την αιχμή n_0 και τέλος τον κόμβο n.

Συνοψίζοντας λοιπόν, τα κλασικά σύνολα μπορούν να παρασταθούν με γραφήματα που είναι καλά θεμελιωμένα, δηλαδή δεν περιέχουν άπειρες τροχιές ή βρόγχους. Ας έλθουμε τώρα στην δεύτερη βασική αντίληψη της έννοιας σύνολο.

2.2.2 Υπερσύνολα.

Για μιά πληρέστερη εισαγωγή στα υπερσύνολα δείτε τα [18, 53], τα οποία ακολουθούμε εδώ. Δείτε επίσης τα, [1, 19, 11]

Για την εισαγωγή των υπερσυνόλων, το μόνο αξίωμα το οποίο δεν υποθέτουμε ότι ισχύει, είναι το Αξίωμα της Θεμελίωσης. Επομένως η οποιαδήποτε νέα διαίσθηση προέρχεται ακριβώς από την μη - ισχύ του αξιώματος αυτού. Ολες οι άλλες ερμηνείες και σημασίες ισχύουν και στην περίπτωση των υπερσυνόλων.

Το αξίωμα της Αντιθεμελίωσης

Η έννοια του υπερσυνόλου, βασίζεται στην αντίληψη ότι ένα σύνολο θα έπρεπε να είναι προϊόν που προέρχεται από γενικότερα γραφήματα, και όχι αναγκαία από καλά εδραιωμένα. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την κατάσταση, πρέπει πρώτα να δώσουμε κάποιους ορισμούς. Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των ατόμων και έστω ότι εργαζόμαστε στο σύστημα $ZFCA^{-}$, δηλαδή το ZF με το αξίωμα της επιλογής (AC), με άτομα $\mathcal{A}$ και χωρίς το αξίωμα της θεμελίωσης.

2.2.3 Ορισμός. Έστω $\langle G, n_0 \rangle$ ένα αιχμηρό γράφημα.

(i) Μια **σήμανση** (tagging) του G, είναι μια συνάρτηση tag$(\cdot)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των κόμβων χωρίς παιδιά και τιμές στο σύνολο $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$

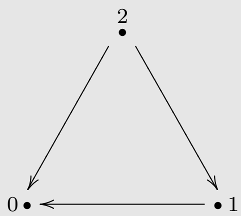
(ii) Μια **διακόσμηση ως προς την σήμανση tag** είναι μια συνάρτηση d με πεδίο ορισμού το G_0 και τέτοιο ώστε

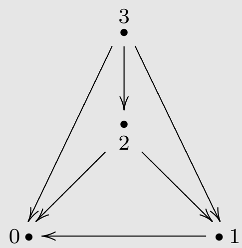
(1) αν $n \in G_0$ δεν έχει παιδιά, τότε $d(n) = tag(n)$

(2) αν $n \in G_0$ έχει παιδιά τότε,

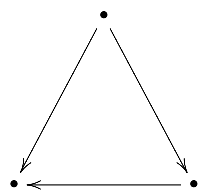
$$d(n) := \{d(n')|n \longrightarrow n'\}$$

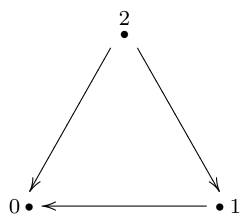
Έχουμε έσι τα ακόλουθα διακοσμημένα γραφήματα:





2.2.4 Παράδειγμα. Έστω τα ακόλουθα αιχμηρά γραφήματα,





Παρατηρούμε ότι το δεξί γράφημα αποτελεί διακόσμηση του αριστερού. Πράγματι ο κάτω αριστερός κόμβος δεν έχει καθόλου παιδιά, και τον διακοσμούμε με το κενό σύνολο $\emptyset \equiv 0$. Για τους άλλους κόμβους έχουμε:

$$\begin{array}{lcll} 1 & := & \{0\} & \text{αφού} \quad 1 \longrightarrow 0 \\ 2 & := & \{0,1\} & \text{αφού} \quad 2 \longrightarrow 0, \quad 2 \longrightarrow 1 \\ 3 & := & \{0,1,2\} & \text{αφού} \quad 3 \longrightarrow 0, \quad 3 \longrightarrow 1, \quad 3 \longrightarrow 2 \end{array}$$

2.2.5 Θεώρημα. *(Το Λήμμα Σύνθλιψης του Mostowski) Κάθε εδραιωμένο και σεσημασμένο γράφημα έχει μια μοναδική διακόσμηση στο σύμπαν των εδραιωμένων συνόλων.*

2.2.6 Παρατήρηση. Για να πάρουμε την ζητούμενη συνάρτηση, εφαρμόζουμε τον ορισμό με αναδρομή πάνω στην καλά θεμελιωμένη σχέση που συνεπάγεται κάθε εδραιωμένο γράφημα.

2.2.7 Ορισμός. Δοθέντος ενός συνόλου x, κάθε σεσημασμένο αιχμηρό γράφημα που δέχεται μια διακόσμηση τέτοια ώστε το x να είναι η αιχμή του γραφήματος, λέγεται **εικόνα του** x.

Από το Θεώρημα 2.2.5 είναι φανερό ότι κάθε εδραιωμένο γράφημα είναι εικόνα ενός μοναδικού συνόλου.

Αν ερμηνεύσουμε την σχέση του ανήκειν σε ένα σύνολο ως: $n \longrightarrow n'$ ανν $n' \in n$, βλέπουμε ότι κάθε σύνολο έχει τουλάχιστον μια εικόνα.

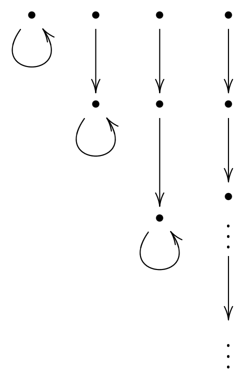
2.2.8 Λήμμα. *Κάθε σύνολο μπορεί να εικονιστεί με ένα δέντρο.*

Απόδ. Δες [53].

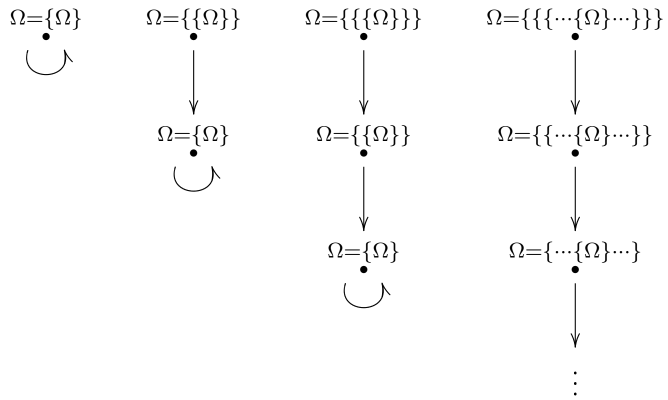
Το αξίωμα τώρα της αντιθεμελίωσης είναι απλά η γενίκευση του Λήμματος Σύνθλιψης του Mostowski, πέρα από τον περιορισμό της καλής θεμελίωσης η εδραίωσης. Ετσι αφού το Θεώρημα 2.2.5 συσχετίζει εδραιωμένα και σεσημασμένα γραφήματα με εδραιωμένα σύνολα, είναι φυσικό να εισάγουμε τη *γενίκευση που συσχετίζει γενικά γραφήματα και υπερσύνολα.*

2.2.9 . Αξίωμα της Αντιθεμελίωσης (AFA) *Κάθε σεσημασμένο γράφημα έχει μια μοναδική διακόσμηση στο σύμπαν των υπερσυνόλων.*

2.2.10 Παράδειγμα. Έστω τα ακόλουθα γραφήματα ανάπτυξης ενός βρόχου,



Είναι προφανές ότι αυτά δεν μπορούν να διακοσμηθούν με εδραιωμένα σύνολα. Χρησιμοποιώντας όμως το μη εδραιωμένο σύνολο $\Omega = \{\Omega\}$, έχουμε την διακόσμηση του πιο κάτω σχήματος,



Ισότητα δύο υπερσυνόλων

Είναι γνωστό ότι στην περίπτωση των εδραιωμένων συνόλων, δύο σύνολα είναι ίσα ανν έχουν τα ίδια στοιχεία (Αξίωμα της Εκτασης). Στην περίπτωση όμως των υπερσυνόλων, το Αξίωμα της Εκτασης πολλές φορές δεν οδηγεί πουθενά.

Έστω για παράδειγμα τα υπερσύνολα:

$$\begin{aligned} a &= \{\text{Αριστοτέλης}, a\} \\ b &= \{\text{Αριστοτέλης}, b\} \end{aligned}$$

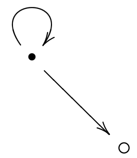
τότε το Αξίωμα της Έκτασης μας δίνει:

$$a = b \Longleftrightarrow a = b$$

Ετσι η ισότητα δύο υπερσυνόλων πρέπει να βασιστεί σε κάποια άλλη αρχή. Σκεπτόμενος αναλογικά οδηγείται κανείς στην αρχή, που επιτυχώς θα αντικαταστήσει την Αξίωμα της Εκτασης.

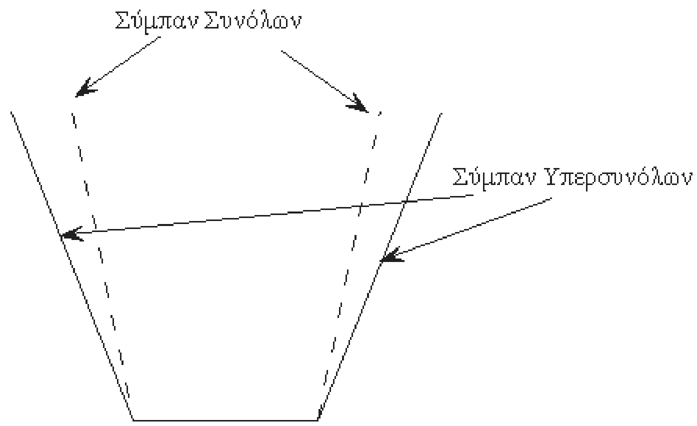
2.2.11 . Αρχή Ισότητας Υπερσυνόλων. *Δύο υπερσύνολα είναι ίσα ανν εικονίζονται με το ίδιο γράφημα.*

Επιστρέφοντας στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι το ακόλουθο γράφημα,



μπορεί να διακοσμηθεί είτε με το σύνολο a είτε με το b. Αρα τα σύνολα a και b είναι ίσα.

Μπορεί να δειχτεί ότι το σύμπαν των υπερσυνόλων είναι μια επέκταση του σύμπαντος των συνόλων.



Σχήμα 2.2: Το Σύμπαν των Υπερσυνόλων.

Το γεγονός βεβαίως ότι υπάρχουν περισσότερα του ενός γραφήματα που εικονίζουν το ίδιο σύνολο, είναι μια κάπως ενοχλητική κατάσταση. Αυτό όμως λύνεται ορίζοντας μια κατάλληλη κλάση ισοδυναμίας στην κλάση των σεσημασμένων αιχμηρών γραφημάτων, βλ. π.χ. [137, σελ.280]

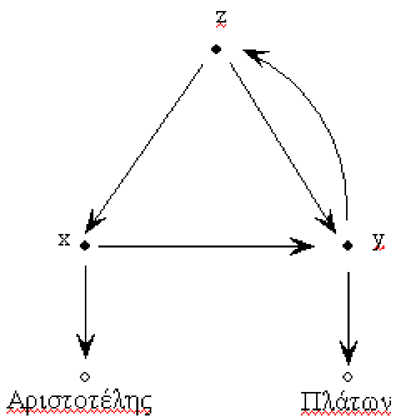
Το Λήμμα της Επίλυσης. (The Solution Lemma)

Μια από τις σπουδαιότερες επιπτώσεις του AFA είναι και η εξασφάλιση λύσης σε συστήματα εξισώσεων που περιέχουν για αγνώστους σύνολα.

Για παράδειγμα έστω ότι x, y, z παριστάνουν άγνωστα σύνολα και έστω το σύστημα:

$$\begin{aligned} x &= \{\text{Αριστοτέλης}, y\} \\ y &= \{\text{Αριστοτέλης}, z\} \\ z &= \{x, y\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Μπορούμε να παραστήσουμε το σύστημα (2.1) με ένα γράφημα:



Σχήμα 2.3: Παράσταση συστήματος.

Από το AFA, το σεσημασμένο αιχμηρό γράφημα έχει μια μοναδική διακόσμηση. Ετσι αν

$$d(x) = A, \quad d(y) = B \quad \text{και} \quad d(z) = C$$

τότε τα σύνολα A, B, C είναι λύση του συστήματος (2.1). Αν $\mathcal{X}$ είναι ένα σύνολο αγνώστων και $\mathcal{U}$ ένα σύνολο πρωτοστοιχείων, τότε ορίζουμε το σύμπαν

$$V_{\mathcal{U}}[\mathcal{X}] := V_{\mathcal{U}\cup\mathcal{X}}$$

όπου $V_{\mathcal{U}\cup\mathcal{X}}$ είναι το σύμπαν των υπερσυνόλων της θεωρίας $ZFCA^{-} + AFA$, που ορίζονται με άτομα τα $\mathcal{A} \cup \mathcal{X}$. τότε (βλ. [53]) έχουμε:

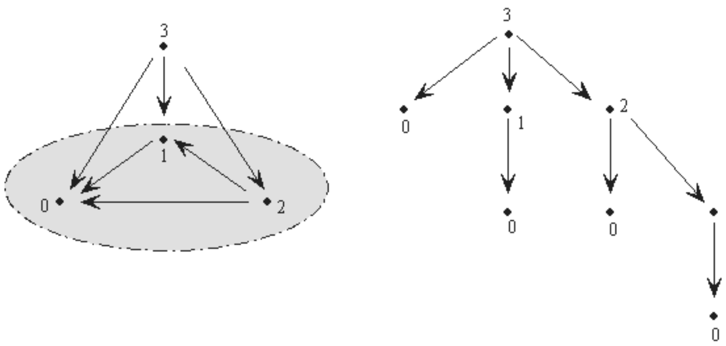
2.2.12 Θεώρημα. (Το Λήμμα της επίλυσης.) *Κάθε σύστημα εξισώσεων με αγνώστους από το $\mathcal{X}$, και συντελεστές από το σύμπαν $V_{\mathcal{U}}$ έχει μια μοναδική λύση .*

Αναδρομικοί Ορισμοί, και Επαγωγικές Αποδείξεις.

Από τη στιγμή που δεν έχουμε στη διάθεσή μας το Αξίωμα της Θεμελίωσης, είναι αδύνατο να εφαρμόζουμε επαγωγικές μεθόδους. Γενικεύουμε τις διαδικασίες αυτές μέσα από σταθερά σημεία συνεχών συνολοσυναρτήσεων, βλ. [53, σελ. 159, 169], οδηγούμαστε στο γεγονός ότι «**Ο ρόλος της αρχής της αναδρομής στην ZF, τώρα αντικαθίσταται από των συνδυασμό του Λήμματος της Επίλυσης και του Θεωρήματος συν-Επαγωγικής Κλειστότητας**» (co-Inductive Closure Theorem). Για λεπτομέρειες βλ. την προηγούμενη παραπομπή.

2.2.3 Αφηρημένα Σύνολα: Σύνολα Παραγόμενα από Γραφήματα.

Είδαμε ότι ένα εδραιωμένο σύνολο μπορεί να παρασταθεί σαν το στοιχείο από το σύμπαν του von-Neumann που διακοσμεί την αιχμή ενός εδραιωμένου αιχμηρού γραφήματος. Οπότε το εν λόγω σύνολο ή κατανοείται με έναν ολιστικό τρόπο, ως η αιχμή του γραφήματος ή με έναν αναλυτικό τρόπο ως το σύνολο των υπολοίπων κόμβων (εκτός αιχμής) μαζί με τα βέλη του γραφήματος. Για παράδειγμα από το γράφημα του Σχήματος 2.4, έχουμε το σύνολο 3 δηλ. το $\{0, 1, 2\}$ μαζί με τα βέλη του. Από τη στιγμή όμως που συμπεριλαμ-



Σχήμα 2.4: Ο αριθμός 'τρία' ως γράφημα και ως αιχμηρό δένδρο.

βάνουμε βέλη, τα σύνολα δεν είναι αδόμητες συλλογές αλλά δομές. Με τον τρόπο αυτό μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι όλα τα 'σύνολα' π.χ. που ανήκουν στο σύμπαν του von-Neumann, δεν είναι αφηρημένα σύνολα αλλά δομημένα σύνολα, **η δε θέση του συνόλου στην επαναληπτική ιεραρχία καθορίζει και τον βαθμό δόμησής του**.

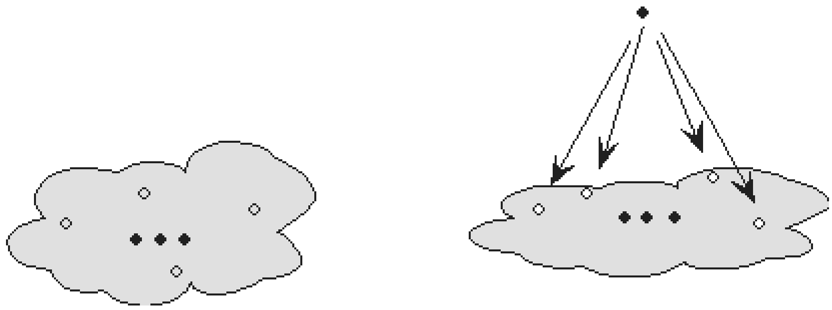
Κατά συνέπεια λοιπόν τίθεται το ερώτημα: Τι είναι ένα **αφηρημένο σύνολο;**.

Σύμφωνα με τον Lawvere[2] «Με ένα αφηρημένο σύνολο A καταλαβαίνουμε μια συλλογή στοιχείων η οποία δεν έχει εσωτερική ιδιότητα ή δομή. Ετσι η μόνη εξωτερική ιδιότητα την οποία το A έχει από μόνο του, είναι ο 'αριθμός' αυτών των στοιχείων. Ωστόσο το A έχει μια εσωτερική ιδιότητα την οποία

[2] F. W. Lawvere : Theory of Categories over a Base Topos, p.1 (Teoria delle Categorie sopra un Topos di Base, University of Perugia Lecture Notes, 1973.)

δεν έχει ένας αριθμός, συγκεκριμένα την ισότητα ή ανισότητα των στοιχείων.» Ετσι λοιπόν κάθε αφηρημένο σύνολο υποτίθεται ότι έχει στοιχεία, κάθε ένα από τα οποία δεν έχει δομή, και σαν συλλογή το A υποτίθεται ότι δεν έχει καμιά **εσωτερική δομή**, εκτός του ότι περιέχει τα στοιχεία του, που μπορούν να διακριθούν σαν ίσα ή άνισα. Επιπρόσθετα το A δεν έχει **εξωτερική δομή** (ή μορφή) εκτός το ότι μπορούμε να αποφανθούμε για τον πληθάριθμό του.

Σύμφωνα με το πιο πάνω ορισμό, εφ' όσον τα στοιχεία των αφηρημένων συνόλων δεν έχουν δομή, θα πρέπει να θεωρηθούν ότι είναι πρωτοστοιχεία ή άτομα. Ετσι ένα αφηρημένο σύνολο A μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας «νοητικός, χωρίς σχήμα σάκος» που περιέχει κόμβους ή στιγμές,



Σχήμα 2.5: Αφηρημένα σύνολα.

Αυτό παριστάνεται καλύτερα με τη χρήση αιχμηρών γραφημάτων όπως το δεξιό σχήμα.

Ετσι τα μόνα βέλη που επιτρέπονται είναι αυτά που υποδηλώνουν συμμετοχή των πρωτοστοιχείων στο αφηρημένο σύνολο A. Κάθε ύπαρξη βέλους μεταξύ των πρωτοστοιχείων, προσδίδει στο σύνολο A μια εσωτερική δομή και έτσι το A παύει να είναι αφηρημένο σύνολο.

2.2.13 Παράδειγμα. Έστω το σύνολο 3, βλ. Σχήμα 2.4.

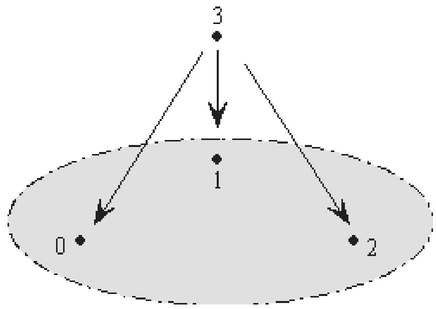
Είναι φανερό ότι το 3 είναι ένα δομημένο σύνολο, λόγω των βελών. Αν όμως 'ξεχάσουμε' τα βέλη που δίνουν στο 3 μια εσωτερική δομή και θεωρήσουμε τα $0, 1, 2$ σαν άτομα τότε οδηγούμαστε στο ακόλουθο γράφημα:

που πράγματι παριστάνει ένα αφηρημένο σύνολο.

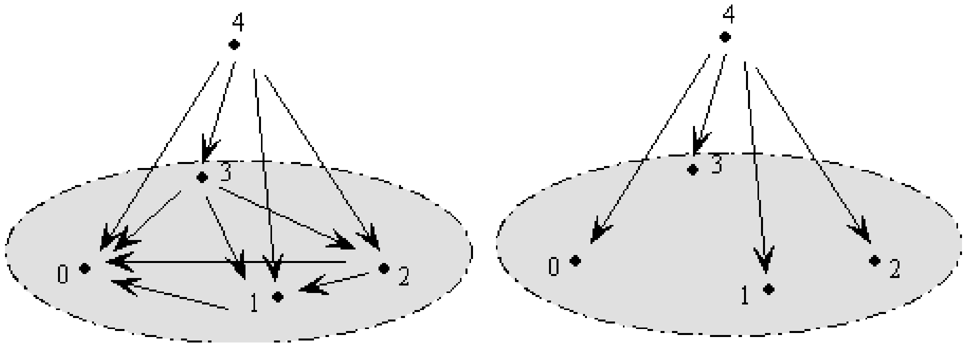
Ομοια, το 4 παριστάνεται όπως στο Σχήμα 2.7.

Ξεχνώντας τα βέλη οδηγούμαστε στο σύνολο που παριστάνει το δεξιό σχήμα, που είναι ένα αφηρημένο σύνολο. Συμπερασματικά λοιπόν, όταν το σύνολο δίδεται σαν δέντρο, τότε η θεώρηση κάποιων κόμβων σαν πρωτοστοιχεία, χωρίς εσωτερική δομή μας οδηγεί στην έννοια του αφηρημένου συνόλου. Από την άλλη μεριά, όταν το σύνολο παριστάνεται σαν αιχμηρό, προσανατολισμένο γράφημα, η παράληψη όλων των 'εσωτερικών' βελών (εκτός αυτών που έχουν σαν αφετηρία την αιχμή) οδηγούν σε ένα αφηρημένο σύνολο.

Ολα τα παραπάνω μας οδηγούνε σε μια νέα αντίληψη συνόλου, διαφορετική από αυτήν της ιεραρχικής επαναληπτικής (κατακόρυφης) αντίληψης. Η



Σχήμα 2.6: Ο αριθμός ‘τρία’ ως αφηρημένο σύνολο.



Σχήμα 2.7: Ο αριθμός ‘τεσσαρα’.

νέα αυτή αντίληψη είναι η έννοια του αφηρημένου (ή οριζόντιου) συνόλου, και προέρχεται από τα αιχμηρά και προσανατολισμένα γραφήματα, με μια επιλήσμονα διαδικασία, που ‘ξεχνά’ **τα εσωτερικά βέλη του γραφήματος**, δηλαδή όλα τα βέλη, εκτός από αυτά που έχουν αφετηρία την αιχμή του γραφήματος. Ετσι έχουμε.

2.2.14 Ορισμός. Έστω $\mathscr{G}$ η κλάση όλων των αιχμηρών προσανατολισμένων γραφημάτων. Τα στοιχεία του $\mathscr{G}$ είναι γραφήματα $\langle G, n_G\rangle \equiv \langle G_0, G_1, (\alpha, \tau); n_G\rangle$. Τότε η κλάση των αφηρημένων συνόλων είναι η εικόνα $\mathscr{F}[\mathscr{G}]$, του τελεστού.

$$\begin{array}{rccl} \mathscr{F} : & \mathscr{G} & \to & \mathscr{F}[\mathscr{G}] \\ & (G, n_G) & \mapsto & G_0 - \{n_G\} \end{array}$$

Ο τελεστής $\mathscr{F}$ λέγεται και **επιλήσμων τελεστής** (forgetfull operator) αφού 'ξεχνάει' την δομή του G, δηλαδή τα εσωτερικά βέλη του γραφήματος.

Πρέπει ακόμα να σημειώσουμε ότι αιχμηρά γραφήματα, δέντρα, κ.λπ. εμφανίζονται και αλλού εκτός των συνόλων. Δηλαδή ένα αιχμηρό γράφημα μπορεί να 'διακοσμηθεί' και με άλλα αντικείμενα, π.χ. προτάσεις λογικής, γεωμετρικά αντικείμενα κ.λπ. **οι κόμβοι σε ένα αιχμηρό γράφημα είναι μάλλον «κενές θέσεις προς κατάληψη» από οποιαδήποτε αντικείμενα τυχαίνει να μας ενδιαφέρουν. Από την άποψη αυτή το αδιακόσμητο αιχμηρό γράφημα είναι ένα είδος αφηρημένης δομής**. Η πιό πάνω άποψη θέτει στό κέντρο του ενδιαφέροντός μας, όχι την κλασική έννοια του συνόλου, αλλά μιά θεωρία αφηρημένων-δομημένων αντικειμένων.

Αυτό το είδος της αφηρημένης δομής καθώς επίσης και των αφηρημένων συνόλων θα μας απασχολήσουν σ' αυτή την εισαγωγή στη θεωρία των κατηγοριών. Αξίζει κάνεις να σημειώσει ότι η έννοια του συνόλου που εναρμονίζεται καλλίτερα με τα αντικείμενα της κατηγορίας **Set**, είναι ακριβώς η έννοια του αφηρημένου συνόλου, και λιγώτερο η επαναληπτική έννοια συνόλου.

2.3 Η Έννοια της Συνάρτησης και της Συναρτησιακής Έκφρασης.

Η έννοια της συνάρτησης είναι ίσως η πιο βασική έννοια στα μαθηματικά. Το γεγονός αυτό ενισχύεται και από το ότι η συνάρτηση είναι μια περισσότερο γενική έννοια από το ότι το σύνολο. Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι αν X είναι ένα μη-κενό σύνολο τότε,

$$\mathscr{P}(X) \cong 2^X$$

Αν τώρα θεωρήσουμε γενικότερες συναρτήσεις, από ότι οι δείκτριες συναρτήσεις $I_A : X \to 2 \equiv \{0, 1\}$, τότε είναι φανερό ότι μια γενική συνάρτηση $f : X \to B$ μπορεί να εκφράζει γενικότερες έννοιες συνόλων. Αν π.χ. το B είναι μια πλήρης άλγεβρα του Boole $\mathbb{B}$ τότε η f εκφράζει ένα **$\mathbb{B}$-σύνολο**, όπως συνήθως αποκαλούνται στα μοντέλα του Boole. Αν $B = [0, 1]$ τότε έχουμε την περίπτωση ενός **ασαφούς συνόλου** αν $B = \mathscr{P}(Y)$ και ο X είναι ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, τότε η f είναι ένα **τυχαίο σύνολο** (random set). Είναι φανερό ωστόσο ότι, π.χ. *το σύμπαν του von Newmann περιέχει* *μόνον κλασικά δίτιμα σύνολα, δεν περιέχει ούτε $\mathbb{B}$-σύνολα ούτε ασαφή σύνολα, ούτε τυχαία σύνολα. Περιέχει όμως συνολοθεωρητικές αναπαραστάσεις τέτοιων αντικειμένων π.χ. η συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ είναι ένα καλά ορισμένο συνολοθεωρητικό αντικείμενο το οποίο συνήθως ερμηνεύεται ως ασαφές σύνολο.* Επίσης στο κλασικό σύμπαν δεν υπάρχουν υπερσύνολα, λόγω του Αξιώματος της Θεμελίωσης, όμως υπάρχουν συνολοθεωρητικές αναπαραστάσεις ενός προσανατολισμένου αιχμηρού γραφήματος με βρόγχους. Οι παραπάνω φαινομενικά αντιφατικές καταστάσεις απαιτούν:

(i) Προσεκτικότερη ανάλυση της έννοιας της συνάρτησης.

(ii) Κατασκευή μη-κλασικών συμπάντων, τα στοιχεία των οποίων να είναι συνολοθεωρητικές αναπαραστάσεις, των εννοιών των οποίων η 'ερμηνεία' είναι μη-κλασική.

Ετσι για τα $\mathbb{B}$-σύνολα θα χρειαστούμε ένα σύμπαν του Boole, $V^{(\mathbb{B})}$, και γενικά **τα μη-κλασικά σύμπαντα έχουν σαν δομικό λίθο την έννοια της συνάρτησης**. Μόνο με αυτόν τον τρόπο θα εκλείψει *η φαινομενική αντίφαση μεταξύ συνολοθεωρητικής αναπαράστασης και διαισθητικής ερμηνείας.*

Ενα άλλος λόγος που επιβάλλει την ανάγκη προσεκτικής ανάλυσης της έννοιας της συνάρτησης και του σύμπαντος στο οποίο εργαζόμαστε και με βάση το οποίο αποκτούν μια σημασία οι μαθηματικές έννοιες, είναι ακριβώς αυτή η σχετικότητα των συνολοθεωρητικών εννοιών. Ετσι αν V είναι το κλασικό σύμπαν του von Newmann, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο του Boole $V^{(\mathbb{B})}$ που είναι μια καλώς ορισμένη κλάση μέσα στο V:

$$V^{(\mathbb{B})} \subseteq V$$

Αλλά από την άλλη μεριά $V \cong V^{(2)}$ και έτσι το $V^{(\mathbb{B})}$ είναι μια επέκταση του V, αφού $V^{(2)} \cong V^{(\mathbb{B})}$. Τελικά μπορούμε να έχουμε

$$V_0 \equiv V \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$$

Ετσι **η έννοια σύνολο, παρ' όλο που θεωρούμε ότι έχει μια συγκεκριμένη και οριστική έκταση, ωστόσο αυτή η έκταση εξαρτάται από το σύμπαν μέσα στο οποίο θεωρούμε το σύνολο.**

Για το παρατηρητή που είναι ενσωματωμένος στο σύμπαν V_1 ή V_1-παρατηρητή, οι κλάσεις του V_0-παρατηρητή είναι σύνολα, οι δε κλάσεις του V_1-παρατηρητή είναι σύνολα για τον V_2-παρατηρητή, κ.λπ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι έννοιες του συνόλου και της κλάσης είναι **'περιβαλλοντολογικά ευαίσθητες'** έννοιες.

Τέλος η Θεωρία των Κατηγοριών αναγνωρίζοντας την αυτόνομη ύπαρξη και σημασία της έννοιας της συνάρτησης, κάνει μια ανεξάρτητη αξιωματικοποίηση για την έννοια αυτή.

Υπάρχει λοιπόν ανάγκη για μια προσεκτική μελέτη της έννοιας της συνάρτησης.

2.3.1 Οι Δυϊκές Εννοιες της Συνάρτησης.

Η συνολοθεωρητική έννοια της συνάρτησης, έχει ένα στατικό χαρακτήρα, αφού στην ουσία ταυτίζεται με κάποιο σύνολο διαταγμένων ζευγών. Ακριβέστερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

2.3.1 Ορισμός. Μια συνάρτηση f **με πεδίο ορισμού** A και **πεδίο τιμών ή συν-πεδίο ορισμού** B είναι μια διατεταγμένη τριάδα $f = (A, G_f, B)$ τέτοια ώστε

(i) $G_f \subseteq A \times B$ και,

(ii) $(x, y_1), (x, y_2) \in G_f \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2$

Το σύνολο G_f **λέγεται γράφημα της f**, αν δε $(x, y) \in G_f$ τότε γράφουμε συνήθως $y = f(x)$. Τη συνάρτηση $f = (A, G_f, B)$ την παριστάνουμε συνήθως και ως : $f : A \to B$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν $f = (A, G_f, B)$ είναι μια συνάρτηση, τότε το γράφημά της $G_f := \{(\alpha, f(\alpha)) : \alpha \in A\} \subseteq A \times B$ καθορίζει μοναδικά το πεδίο ορισμού, αλλά το πεδίο τιμών μένει ακαθόριστο. Αυτή εξ άλλου είναι και η αιτία για τον συμβολισμό (A, G_f, B). Θα μπορούσαμε ίσως να γράφουμε και (G_f, B) αφού το A καθορίζεται μοναδικά από την G_f αλλά για λόγους συμμετρίας στον συμβολισμό, και δυϊσμού των εννοιων 'πεδίο ορισμού' και 'συν-πεδίο ορισμού' προτιμούμε τον (A, G_f, B). Για να εκτιμήσει κανείς τη διαφορά δύο συναρτήσεων (A, G_f, B_1) και (A, G_f, B_2) με $B_1 \subseteq B_2$, αρκεί προς στιγμήν να εκλάβουμε την συνάρτηση με γράφημα G_f, ότι εκφράζει μια επιλογή κάποιων αντικειμένων του πεδίου τιμών. Έτσι η επιλογή $f(x)$, $x \in A$, είναι τελείως διαφορετικό πράγμα από την ίδια επιλογή, αλλά με περισσότερες δυνατότητες επιλογής! Τελευταία, κυρίως στη Θεωρητική Πληροφορική υπάρχει η ανάγκη θεώρησης **'μερικών συναρτήσεων'** συναρτήσεων δηλαδή $f : A \longrightarrow B$ με $\mathrm{dom}(f) \subsetneqq A$.

Μπορούμε να εκφράσουμε το γεγονός ότι η $f : A \to B$ είναι συνάρτηση, πιο συμπαγώς [15] με την απαίτηση η σύνθεση $\pi_A \circ i$ να είναι ισομορφισμός, όπου

$$\begin{array}{rccc} i & : & G_f & \hookrightarrow & A \times B \\ & & (x, y) & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

είναι **η συνάρτηση του περιέχεσθαι**, και η συνάρτηση,

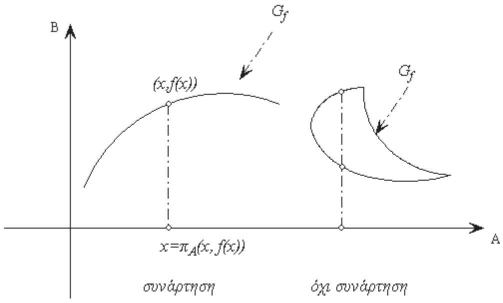
$$\begin{array}{rccc} \pi_A & : & A \times B & \to & A \\ & & (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

είναι **η συνάρτηση προβολής στο A**, με άλλα λόγια απαιτούμε ο περιορισμός της π_A στο G_f, συμβολικά $\pi_A \upharpoonright G_f := \pi_A \circ i$, να είναι 1-1 και επί. Τα παραπάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε με την απαίτηση το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & & A \\ A \arrow[r, hook, "G_f"] \arrow[urr, bend left, "1_A"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

δηλ. $G_g \equiv \langle 1_A, f\rangle$ και $\pi_A \circ G_g = 1_A \quad \& \quad \pi_B \circ G_f = f$.

Περισσότερο παραδοσιακά έχουμε το Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8: Συνάρτηση και όχι συνάρτηση.

Πρίν προχωρήσουμε στον δυϊκό ορισμό της συνάρτησης θα μελετήσουμε τη σχέση ισοδυναμίας που επάγει μια συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της, η οποία λέγεται **'πηρήνας ισοδύναμίας της f'.**(equivalence kernel)

Έστω $f : A \longrightarrow B$ μια συνάρτηση. Επί του A ορίζουμε μια διμελή σχέση ως εξής:

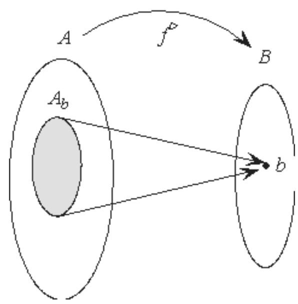
$$a_1 \approx_f a_2 \qquad \text{ανν} \qquad f(a_1) = f(a_2)$$

Η σχέση $\approx_f$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας, όπως εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει. Η σχέση ισοδυναμίας αυτή λέγεται **πηρήνας ισοδυναμίας της** f. Έστω τώρα $A_b := \{\, a \in A \,|\, f(a) = b \,\} \quad b \in B$ οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\approx_f$. Έχουμε ότι,

$$A_b \cap A_{b'} = \emptyset, \quad b \neq b' \qquad \text{και} \qquad \bigcup_{b\in B} A_b = A$$

Μια συνάρτηση λοιπόν μπορεί να εκφρασθεί ισοδύναμα και σαν μια οικογένεια $(A_b)_{b\in B}$ ινών (δηλ. $A_b \equiv f^{-1}(\{b\}), \quad b \in B$) που διαμερίζουν το A.

Η συνάρτηση $\pi : A \longrightarrow A/\approx_f$ // $a \mapsto \pi(a) := [a]$ όπου $[a] := \{\, x \in A \,|\, x \approx_f a \,\}$ και $A/\approx_f := \{\, [a] \,|\, a \in A \,\}$ είναι το σύνολο-πηλίκο, λέγεται **κανονικός μετασχηματισμός** ή **προβολή του** A **επί του** $A/\approx_f$, και είναι πάντοτε επίρριψη. Ο κανονικός μετασχηματισμός λέγεται και 'αφαίρεση' αφού τα στοιχεία κάθε κλάσης ισοδυναμίας είναι για την συνάρτηση αυτή αδιάκριτα



Σχήμα 2.9: πηρήνας ισοδυναμίας της f

στοιχεία. Μπορούμε επίσης να θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ ως ένα είδος 'παρατήρησης' του A με βάση το B, οπότε τα στοιχεία των κλάσεων ισοδυναμίας ταυτίζονται για την παρατήρηση f. Στη σύγχρονη Θεωρία Μοντέλων, οι κλάσεις ισοδυμαμίας $[a]$ λέγονται και 'φανταστικά στοιχεία' αφού για την παρατήρηση f οι κλάσεις ισοδυναμίας $[a]$ αποτελούν ακατανόητα στοιχεία!

Σχετικό με την παραπάνω ανάλυση είναι και το ακόλουθο Θεμελιώδες Θεώρημα των Συναρτήσεων:

2.3.2 Πρόταση. *Για κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ υπάρχει μια μοναδική αμφιρριπτική ($1-1$ και επί) συνάρτηση,*

$$\hat{f} : A/\approx_f \to f[A] \qquad [a] \mapsto \hat{f}([a]) := f(a)$$

τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "c"'] & B \\ A/\approx_f \arrow[r, tail, two heads, "\hat{f}"'] & f[A] \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

δήλ. $f =: i \circ \hat{f} \circ c$, όπου c είναι επίρριψη, $\hat{f}$ είναι αμφίρριψη και τέλος η i είναι ένριψη.

Είναι φανερό από το πιο πάνω θεώρημα, ότι έχουμε και την ακόλουθη **καθολική ιδιότητα**:

2.3.3 Θεώρημα. *Έστω E μια σχέση ισοδυναμίας επί του A και έστω $\pi_E : A \longrightarrow A/E$ η κανονική συνάρτηση. Τότε το ζεύγος $(\pi_E, A/E)$ είναι καθολικό, με την έννοια ότι κάθε συνάρτηση, $f : A \longrightarrow B$ με την ιδιότητα, $xEy \Rightarrow f(x) = f(y)$, παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω του A/E, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[dr, "(g\circ\pi_E=)f"'] & A/E \arrow[d, dashed, "\exists\,!\,g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

(i) Για την ένριψη (1-1) $:\rightarrowtail$ ή $\hookrightarrow$

(i) Για την επίρριψη (επί) $:\twoheadrightarrow$

(i) Για την αμφίρριψη(1-1 & επί) $:\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow$

Ας δούμε τώρα τον δυϊκό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης.

Έστω $f : A \to B$ μια συνάρτηση με την έννοια που ο Ορισμός 2.3.1 συνεπάγεται. Επί του πεδίου ορισμού μπορούμε πάντοτε να ορίζουμε την ακόλουθη διμελή σχέση:

Για κάθε $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 \approx_f a_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f(a_1) = f(a_2) \tag{$*$}$$

Το γεγονός ότι η σχέση G_f είναι συναρτησιακή, συνεπάγεται ότι η σχέση $(*)$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Ετσι η οικογένεια $(A_b)_{b\in B}$ όπου $A_b := \{a \in A | f(a) = b\} \equiv f^{-1}(\{b\})$, αποτελεί μια διαμέριση του A. Αρα η συνάρτηση $f = (A, G_f, B)$ μπορεί να εκφραστεί σαν μια οικογένεια $(A_b)_{b\in B}$ υποσυνόλων του A (μεταβαλλόμενο υποσύνολο του A με χρονοσύνολο το B) που αποτελούν μια διαμέριση του A. Δεχόμαστε ότι είναι δυνατόν μερικά από τα $A_b = \emptyset$ όταν $f^{-1}(b) = \emptyset$. Ετσι έχουμε την συνάρτηση,

$$\begin{array}{rccc} f^{\lhd} : & B & \to & \mathscr{P}(A) \\ & b & \mapsto & A(b) \end{array} \tag{$**$}$$

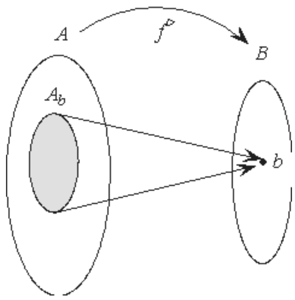
Αντίστροφα, αν έχουμε μια συνάρτηση όπως η $(**)$, τέτοια ώστε,

$$\bigcup_{b\in B} A_b = A \quad \text{και} \quad A_{b_1} \cap A_{b_2} = \emptyset, \quad b_1 \neq b_2,$$

τότε καθορίζεται μοναδικά μια σημειοσυνάρτηση

$$\begin{array}{rccc} f^{\rhd} : & A & \to & B \\ & a & \mapsto & b \end{array}$$

τέτοια ώστε $f(a) = b$ για κάθε $a \in A_b \neq \emptyset$. Η συνάρτηση (∗∗) είναι μια πραγματική συνάρτηση και δεν έχει σχέση με μια συνάρτηση $f : A \to B$ όπου σε κάθε b αντιστοιχεί πολλά στοιχεία A_b. Στη συνάρτηση (∗∗) το A_b είναι μοναδικό στοιχείο του $\mathscr{P}(A)$.



Έστω $B^A \equiv \mathrm{Hom}(A, B)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο B και,

$$B[\mathscr{P}(A)] := \{f \in \mathscr{P}(A)^B : f(b_1) \cap f(b_2) = \emptyset,\ b_1 \neq b_2 \quad \& \quad \bigcup_{b \in B} f(b) = A\}$$

δηλαδή το $B[\mathscr{P}(A)]$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων

$$f : B \to \mathscr{P}(A)$$

που διαμερίζουν το A. Τότε έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

2.3.4 Πρόταση. *(i)* $B^A \simeq B[\mathscr{P}(A)]$, *δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων* $f : A \to B$, *είναι ισόμορφο με το σύνολο των συναρτήσεων* $B[\mathscr{P}(A)]$.

(ii) $\mathscr{P}(A \times B) \simeq \mathscr{P}(A)^B$ *δηλαδή μια γενική συνάρτηση της μορφής* $h : B \to \mathscr{P}(A)$, *που δεν ανήκει αναγκαστικά στο* $B[\mathscr{P}(A)]$ *αντιστοιχεί σε μια γενική σχέση, όχι αναγκαστικά συναρτησιακή.*

Απόδ.

(i) Εστω,

$$\begin{array}{rccl} \lambda : & B^A & \to & B[\mathscr{P}(A)] \\ & f & \mapsto & \lambda(f) := f^{\triangleleft} \end{array}$$

όπου $f^{\triangleleft} : B \to \mathscr{P}(A)$ με $B \mapsto A_b$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η λ είναι 1-1 και επί. ⊣□

(ii) Παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής,

$$\varphi : B \to \mathscr{P}(A)$$

μπορεί να αντιστοιχιθεί με μια μοναδικά ορισμένη διμελή σχέση.

$$R_\varphi := \{(a,b) \in A \times B \mid a \in \varphi(b)\}$$

και αντίστροφα, αν $R \subseteq A \times B$ είναι μια διμελής σχέση, τότε ορίζουμε την συνάρτηση,

$$\begin{array}{rccl} \varphi_R : & B & \to & \mathscr{P}(A) \\ & b & \mapsto & \varphi_R(b) := \{a \in A \mid aRb\} \end{array}$$

Ετσι υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των $\mathscr{P}(A \times B)$ και $\mathscr{P}(A)^B$. ⊣▮

Το επόμενο ερώτημα είναι το κατά πόσο μπορούμε να δούμε ότι πράγματι η συνάρτηση

$$\begin{array}{rccl} f^{\triangleleft} : & B & \to & \mathscr{P}(A) \\ & b & \mapsto & A_b \end{array} \qquad (*)$$

είναι δυϊκή της συνάρτησης,

$$f : \quad A \quad \to \quad B$$

είναι γνωστό ότι το πεδίο ορισμού (domain) είναι δυϊκό με το πεδίο τιμών (co-domain)[3]. Έτσι αν θέλουμε να εκφράσουμε την συνάρτηση $f = (A, G_f, B)$ με δυϊκό τρόπο, θα πρέπει να εισάγουμε μια δυϊκή έννοια του γραφήματος, έστω G^*_f, οπότε η δυϊκή έκφραση θα δινόταν από την έκφραση (B, G^*_f, A).

Παρατηρούμε ότι σαν συνάρτηση η $(*)$ δίδεται από την έκφραση

$$(B, G_{f^{\triangleleft}}, \mathscr{P}(A)), \quad \text{όπου,} \quad G_{f^{\triangleleft}} := \{(b, A_b) : b \in B\} \qquad (**)$$

Το πρόβλημα, τώρα μετατοπίζεται στο μετασχηματισμό του $G_{f^{\triangleleft}}$ σε ένα δυϊκό του $G_f \subseteq A \times B$. Είναι επίσης γνωστό ότι η δυϊκή έννοια του καρτεσιανού γινομένου είναι αυτή της ξένης ή διαζευγμένης ένωσης. Έστω

$$A + B := (A \times \{1\}) \sqcup (B \times \{2\})$$

δηλαδή κάθε στοιχείο $a \in A$ έχει 'μαρκαριστεί' με το στοιχείο 1 ενώ κάθε στοιχείο $b \in B$ με το στοιχείο 2, κατά τρόπο ώστε και αν ακόμη τα A και B δεν ήταν ξένα μεταξύ τους, με το 'μαρκάρισμα' αυτό έχουν τελικά γίνει.

Ζητάμε τώρα να εκφράσουμε την ουσία της $(**)$. Λόγω του 'μαρκαρίσματος' δεν υπάρχει ανάγκη για τη χρήση διαταγμένων ζευγών της μορφής (b, A_b) αλλά απλά συνόλων της μορφής:

$$\{(b,2), \{(a,1)a \in A_b\}\} \equiv \{\{(a,1),(b,2)\}_{a \in A_b}\} \qquad b \in B$$

[3] Για μια διαφορετική προσέγγιση στο δυϊσμό της έννοιας της συνάρτησης, βλ. [57] or [58, ἀ2.4 Functions Redefined]

Ακολουθώντας την τακτική αυτή εκφράζουμε το γράφημα $(**)$ με τον ακόλουθο τρόπο:

Καλούμε **συν-γράφημα** G_f^* της $f = (A, G_f, B)$ το εξής σύνολο:

$$G_f^* := A + B/ \approx = \ \{\{(a,1),(b,2)\}_{a\in A_b}\}_{b\in B} \tag{2.2}$$

όπου $\approx$ είναι η γνωστή σχέση ισοδυναμίας που εισάγει στο πεδίο ορισμού της κάθε συνάρτηση, εκφρασμένη σύμφωνα με το 'μαρκάρισμα' των στοιχείων του A και B.

$$(a_1,1) \approx (a_2,1) \quad :\Leftrightarrow \quad (f(a_1),2) = (f(a_2,2) = (b,2)$$

Τα στοιχεία $\{(b,2) : b \in B\}$ κατατάσσονται στις κλάσεις ισοδυναμίας στοιχείων του A, για τα οποία αποτελούν, κωδικοποίηση. Αν $b \in B$, η σχετική κλάση ισοδυναμίας δίνεται από τον τύπο:

$$\{(a,1),(b,2)\}_{a\in A_b} \equiv \{(b,2),\{(a,1) : a \in A_b\}\}$$

Ορίζουμε επίσης την κανονική συνάρτηση,

$$\begin{array}{rccll} \gamma : & A+B & \longrightarrow & A+\ B/\approx & \\ & (a,1) & \mapsto & \{(b,2),\{(a,1) : a\in A_b\}\} & \text{αν } a \in A_b \\ & (b,2) & \mapsto & \{(b,2),\{(a,1) : a\in A_b\}\} & \end{array}$$

Τέλος η συνάρτηση $f = (A, G_f, B)$ μπορεί τώρα να εκφραστεί δυϊκά ως (B, G_f^*, A), απαιτώντας η σύνθεση $\gamma \circ i$ να είναι ισομορφισμός:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, dashed, "\gamma\circ i"] \arrow[dr, "i"'] & & G_f^* \\ & A+B \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[rr, dashed, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & \{(b,2),\{(a,1) : a \in A_b\}\} \\ & (b,2) \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

Σχήμα 2.10: $\gamma \restriction B = \gamma \circ i$ είναι 1-1 και επί

Τα παραπάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε με την απαίτηση το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, hook, "i_A"] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\ & A+B \arrow[r, two heads, "G_f^*"] & B \\ B \arrow[ur, hook, "i_B"] \arrow[urr, bend right, "1_B"'] & & \end{tikzcd}$$

δηλ. $G_f^* \equiv \begin{cases} f \\ 1_B \end{cases}$, $\quad G_f^* \circ i_A = f \quad \& \quad G_f^* \circ i_B = 1_B$, βλ. και [121].

Στην ουσία ο επιμορφισμός $A+B \overset{G_f^*}{\twoheadrightarrow} B$ στο πιο πάνω διάγραμμα εκφράζει την σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε στη σχέση (2.2).

Η δυϊκή συνάρτηση (B, G_f^*, A) εκφράζει στην ουσία την συνάρτηση $f^{\triangleleft}: B \to \mathscr{P}(A)$ με τέτοιο τρόπο, που να είναι φανερή η δυϊκότητά της με την συνάρτηση f.

2.3.5 Παράδειγμα. Έστω $f : A \to B$, όπου $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ $B = \{0,1,2\}$ και $y = f(x) := |x|$.

Τότε

$$\begin{aligned} A+B &:= (A \times \{1\}) \sqcup (B \times \{2\}) = \\ &= \{(-2,1),(-1,1),(0,1),(1,1),(2,1),(0,2),(1,2),(2,2)\} \end{aligned}$$

και

$$A_0 := \{a \in A : f(a) = 0\} = \{0\}, \quad A_1 = \{-1,1\}, \quad A_2 = \{-2,2\}$$

Ετσι το συν-γράφημα G_f^* της f δίνεται από το σύνολο:

$$G_f^* = A+B/\approx = \{G_0, G_1, G_2\}$$

με

$$\begin{aligned} G_0 &:= \{(0,2),(0,1)\} \\ G_1 &:= \{(1,2),(-1,1),(1,1)\} \\ G_2 &:= \{(2,2),(-2,1),(2,1)\} \end{aligned}$$

Η δε συνάρτηση (B, G_f^*, A) καθορίζεται από την απαίτηση η ακόλουθη σύνθεση να είναι 1-1 και επί:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, dashed, "\gamma\circ i"] \arrow[dr, "i"'] & & G_f^* \\ & A+B \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[rr, mapsto, dashed] \arrow[dr, mapsto] & & \{(b,2),\{(a,1) : a \in A_b\}\} \\ & (b,2) \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

Δηλαδή η συνάρτηση,

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto (0,2) \mapsto G_0 \\ 1 &\mapsto (1,2) \mapsto G_1 \\ 2 &\mapsto (2,2) \mapsto G_2 \end{aligned}$$

να είναι 1-1 και επί, που προφανώς συμβαίνει. ⊣

Τελικά οι συναρτήσεις $f^{\triangleright}: A \to B$ και $f^{\triangleleft}: B \to \mathscr{P}(A)$ μπορούν να θεωρηθούν σαν διαφορετικές δυϊκές παραλλαγές του ιδίου αντικειμένου f. Οπως θα δούμε στη συνέχεια έχουμε επίσης δυο ενδιαφέρουσες ερμηνείες αντίστοιχα για τις δυο αυτές παραλλαγές.

2.3.2 Μεταβαλλόμενα ή γενικευμένα στοιχεία και γενικευμένες ιδιότητες.

Η έννοια της συνάρτησης είναι κεντρική στην ανάλυση και μελέτη της μεταβλητότητας.

Εστω,

$$f : T \to A$$

Σε μια συνάρτηση το πεδίο ορισμού T, θεωρείται σαν το πεδίο μεταβολής, του μεταβαλλόμενου στοιχείου $f(t) \in A,\ t \in T$. Το πεδίο μεταβολής ή τύπος του μεταβαλλόμενου στοιχείου, μπορεί να είναι ένα διακριτό, συνεχές, βαθμωτό, διανυσματικό, τελεστικό κ.λπ. αντικείμενο.

Η χαρακτηριστική ορίζουσα ιδιότητα της συνάρτησης, στην ουσία σημαίνει ότι ένα μεταβαλλόμενο (ή κινητό) στοιχείο δεν είναι δυνατόν να βρίσκεται σε δύο διαφορετικές 'θέσεις' την ίδια στιγμή, δηλαδή : $(t, \alpha_1), (t, \alpha_2) \in G_f \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

Μεταβαλλομενα Στοιχεια

Θεωρούμε ότι το πεδίο μεταβολής T απαρτίζεται από 'σημεία' (σημεία του χώρου, στιγμές χρόνου, σωμάτια ενός σώματος, κ.λπ.) και είναι δυνατόν να είναι ένα δομημένο σύνολο (π.χ. ένα μετρήσιμος χώρος ή χώρος πιθανότητας, μια Αλγεβρα του Boole, μια άλγεβρα Heyting, ένα δικτυωτό κ.λπ.).

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση $f : T \to A$ σαν μια οικογένεια των θέσεων του μεταβαλλόμενου στοιχείου στον χρόνο T, δηλαδή

$$f = (f(t))_{t \in T}$$

Πολλές φορές γράφουμε και $f \in^T A$, για να υπογραμμίσουμε ότι το f είναι ένα μεταβαλλόμενο ή γενικευμένο στοιχείο του A με πεδίο μεταβολής το T. Δηλαδή, ο συμβολισμός $f = (f(t))_{t \in T}$ είναι ισοδύναμος με τον $f : T \to A$. Αν $T = 1 := \{\emptyset\}$, τότε δεν υπάρχει μεταβολή και επομένως συναρτήσεις της μορφής $1 \to A$ ταυτίζονται με τα συνηθισμένα στοιχεία του Α. Συνακόλουθα, **η συνηθισμένη έννοια του στοιχείου συμπίπτει με μια ειδική μορφή συναρτήσεων**.

Έστω τώρα μια συνάρτηση,

$$F : A \to B$$

Η τιμή της F στο $a \in A$ μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση συναρτήσεων και μόνον:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, dashed, "F \circ a \equiv F(a)"] & \\ A \arrow[rr, "F"'] & & B \end{tikzcd}$$

Ομοίως και με τα γενικευμένα στοιχεία,

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, dashed, "F\circ x \equiv F(x)"] & \\ A \arrow[rr, "F"'] & & B \end{tikzcd}$$

Ετσι για κάθε $x \in^T A$ υπάρχει ένα μοναδικό $F \circ x \equiv F(x) \in^T B$.

2.3.6 Ορισμός. Κάθε συνάρτηση με πεδίο τιμών το A και πεδίο ορισμού το T λέγεται **γενικευμένο στοιχείο** του A με πεδίο μεταβολής ή στάδιο ορισμού T.

Τα γενικευμένα ή μεταβαλλόμενα στοιχεία, χρησιμοποιούνται ευρέως στην καθημερινή μας ζωή: Λέμε συνήθως, **η** οικονομία της Ελλάδας το 1994 ή **η** θερμοκρασία τον μήνα Αυγουστο κ.λπ. παρ' όλο δηλαδή που έχουμε μεταβαλλόμενα στοιχεία, επιμένουμε να τα αντιλαμβανόμαστε με ένα ολιστικό τρόπο, δηλ. σαν μια τελειωμένη ολότητα.

Γενικευμένες Ιδιότητες

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.4 κάθε μεταβαλλόμενο στοιχείο $f^{\triangleright} = (f^{\triangleright}(t))_{t\in T}$ μπορεί να ερμηνευθεί δυϊκά και σαν μια γενικευμένη ιδιότητα, ή ένα μεταβαλλόμενο υποσύνολο του T,

$$\begin{array}{rccc} f^{\triangleleft}: & A & \to & \mathscr{P}(T) \\ & a & \mapsto & T_a \end{array} \tag{$*$}$$

δηλαδή, $f^{\triangleleft} = (f^{\triangleleft}(a))_{a\in A}$ όπου κάθε $f^{\triangleleft}(a) \equiv T_a$ παριστάνει το συνολικό χρόνο που το σύστημά μας $f^{\triangleright}$ παρέμεινε στην κατάσταση $a \in A$.

Η συνάρτηση $(*)$ είναι φανερό ότι αποτελεί μια γενικευμένη ιδιότητα, αφού μια οριστική ιδιότητα είναι στην ουσία μια δείκτρια ή χαρακτηριστική συνάρτηση,

$$I_B : A \to 2 \equiv \{0, 1\}$$

και κάθε άλγεβρα Boole $\mathscr{P}(T)$ ή $\mathbb{B}$, καθώς επίσης και κάθε σύνολο με περισσότερα των δύο στοιχεία, το οποίο περιέχει την τετριμένη άλγεβρα Boole **2**, μπορεί να θεωρηθεί σαν γενίκευση αυτής της τετριμμένης άλγεβρας του Boole **2**. Γενικότερα όμως **κάθε συνάρτηση που έχει σαν αφετηρία το A αναφέρεται σε κάποια ιδιότητα των στοιχείων του A.**

2.3.7 Ορισμός. Κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και τιμές σε ένα οποιοδήποτε σύνολο που περιέχει το 2 μπορεί να θεωρηθεί σαν μια **γενικευμένη ιδιότητα**.

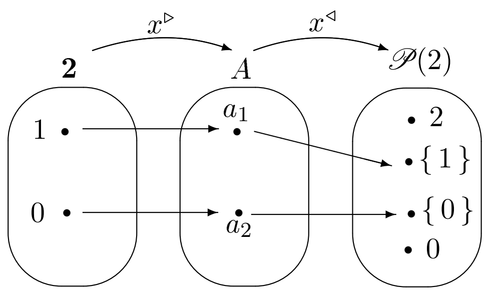
2.3.8 Παράδειγμα. 1) Σύμφωνα με την Πρόταση 2.3.4 κάθε ολικό στοιχείο $a^{\triangleright} : 1 \to A$ εκφράζεται δυϊκά με την συνάρτηση

$$\begin{array}{cccl} a^{\triangleleft} & : & A & \to & 2 \\ & & x & \mapsto & a^{\triangleleft}(x) := \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x = a, \\ 0, & \text{αν} \quad x \neq a, \end{cases} \end{array}$$

Σημειώνεται ότι $2 = \mathscr{P}(1) = \mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Δηλαδή

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{a^{\triangleright}} & A & \xrightarrow{a^{\triangleleft}} & 2 \\ 0 & \mapsto & a & \mapsto & a^{\triangleleft}(x) \end{array}$$

2) Εστω, το γενικευμένο στοιχείο $2 \xrightarrow{x^{\triangleright}} A$ του Σχήματος 2.11.



Σχήμα 2.11: Η συνάρτηση $2 \xrightarrow{x^{\triangleright}} A$ vs. $A \xrightarrow{x^{\triangleleft}} \mathscr{P}(2)$

Το γενικευμένο λοιπόν στοιχείο $x^{\triangleright}$, επιλέγει δύο στοιχεία του A, αποτελεί δηλαδή μια λίστα δύο στοιχείων του A, και έτσι είναι ένα **εκτασιακό χαρακτηριστικό του** A. Δυϊκά έχουμε τη γενικευμένη ιδιότητα $A \xrightarrow{x^{\triangleleft}} \mathscr{P}(2)$,

με

$$x^{\triangleleft}(y) := \begin{cases} \{1\}, & \text{αν} \quad y = a_1, \\ \{0\}, & \text{αν} \quad y = a_2 \end{cases}$$

3) Έστω $T_{\Omega} = (\Omega, \mathscr{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας, και

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

μια διακριτική τυχαία μεταβλητή, με τιμές $x_1, x_2, \ldots$ Εκφράζουμε τον T_{Ω} με έναν 'ελεύθερο σημείων' τρόπο:

Για κάθε $A, B \in \mathscr{A}$, ορίζουμε

$$A \approx B \quad \text{ανν} \quad P(A \vartriangle B) = 0$$

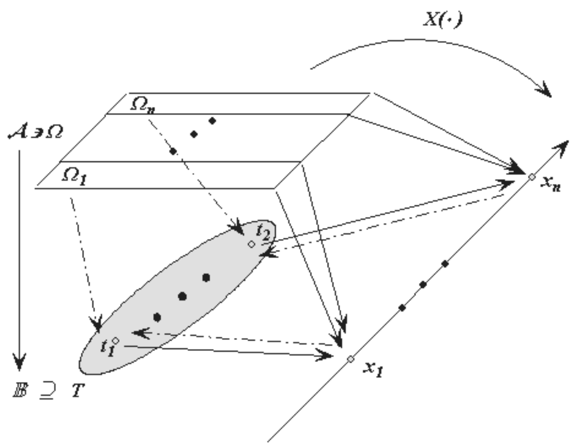
Έστω $\mathbb{B} := \mathscr{A}/\approx$ και

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathscr{A} & \to & \mathbb{B} \\ & A & \mapsto & a := A/\approx \end{array}$$

ο κανονικός μετασχηματισμός. Επειδή η κλάση των P-μηδενικών ενδεχομένων $\mathscr{N}_0$ είναι ένα σ-ιδεώδες, δηλαδή :

$$\begin{array}{lllll} \text{(i)} & A \in \mathscr{N}_0 & \& \quad B \subseteq A & \Rightarrow & B \in \mathscr{N}_0 \\ \text{(ii)} & A_i \in \mathscr{N}_0 & i = 1, 2 & \Rightarrow & \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{N}_0 \end{array}$$

έχουμε ότι η σχέση $\approx$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας ο δε κανονικός μετασχηματισμός είναι ένας σ-ομομορφισμός.



Σχήμα 2.12: Διαμερίσεις στο Ω και στην $\mathbb{B}$

Ετσι η διαμέριση $\Omega_i := \{\omega \in \Omega \mid x(\omega) = x_i\}$, $i = 1, 2 \ldots$ του Ω επάγει μια διαμέριση της μονάδας $1_{\mathbb{B}} := \gamma(\Omega)$, $t_i := \gamma \in (\Omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ βλ. Σχήμα 2.12, δηλαδή:

$$t_i \wedge t_j = 0_{\mathbb{B}} := \gamma(\emptyset) \quad i \neq j \quad \text{και} \quad \bigvee_{i=1}^{\infty} t_i = 1_{\mathbb{B}}$$

και έτσι η τ.μ $X : \Omega \to \mathbb{R}$ έχει μια ελεύθερη σημείων αναπαράσταση,

$$\begin{array}{rccc} x : & T & \to & \mathbb{R} \\ & t_i & \mapsto & x_i \end{array}$$

όπου $T = \{t_i : i \geq 1\}$. Είναι φανερό ότι από τον τρόπο κατασκευής, υπάρχει και η αντίστροφη συνάρτηση,

$$\begin{array}{rcl} x^{\triangleleft} : \; \mathbb{R} & \to & T \subseteq \mathbb{B} \\ y & \mapsto & x^{\triangleleft} := \left\{ \begin{array}{ll} t_i, & \text{αν} \quad y = x_i, \quad i \geq 1 \\ 0_{\mathbb{B}}, & \text{διαφορετικά.} \end{array} \right. \end{array}$$

Ο στοιχειώδης στοχαστικός χώρος,

$$\mathscr{E} := \{x \mid x : T \to \mathbb{R},\ T \in \mathscr{T}(\mathbb{B})\}$$

όπου $\mathscr{T}(\mathbb{B})$ είναι το σύνολο όλων των διαμερίσεων της μονάδας της $\mathbb{B}$, περιλαμβάνει όλα τα εκτασιακά χαρακτηριστικά του $\mathbb{R}$ αναφορικά με χρόνους $T \in \mathscr{T}(\mathbb{B})$. Οι δε αντίστροφες συναρτήσεις $x^{\triangleleft}$ δηλ. τα εντασιακά χαρακτηριστικά ή οι γενικευμένες ιδιότητες του $\mathbb{R}$, περιλαμβάνονται στο σύνολο, που θα το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}[\mathbb{B}]$ και το οποίο ορίζεται ως:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[\mathbb{B}] & := & \{f \in \mathbb{B}^{\mathbb{R}} \mid (\forall x, y \in \mathbb{R})[x \neq y \to f(x) \wedge f(y) = 0_{\mathbb{B}}] \\ & & \qquad \& \bigvee_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1_{\mathbb{B}}\} \end{array}$$

και λέγεται **δύναμη του Boole** του $\mathbb{R}$. Ενας πληρέστερος ορισμός θα απαιτούσε και τον ορισμό των πράξεων επί των $\mathbb{R}[\mathbb{B}]$ καθώς επίσης και της σχετικής συντακτικής δομής.

Μπορεί κανείς να δείξει, βλ. [60], ότι :

$$\mathscr{E} \cong \mathbb{R}[\mathbb{B}] \tag{$*$}$$

Η $(*)$ αποτελεί μια γενίκευση της σχέσης στήν Πρόταση 2.3.4(i), και αποτελεί μιά ακόμη χαρακτηριστική στιγμή, του βασικού φαινομένου της Θεωρίας Κατηγοριών (βλ. τη συνέχεια), «της αντιστροφής των βελών» το οποίο εκφράζει την **αρχή του δυϊσμού: έκταση-ένταση**. Σύμφωνα με την αρχή αυτή **αντιστρέφοντας τα βέλη σε μιά κατηγορία, κάθε εκτασιακό χαρακτηριστικό μετατρέπεται σε εντασιακό και αντιστόφως**.Περισσότερα όμως επ' αυτού στο Κεφάλαιο για τις Κατηγορίες.

3

ΣΥΝΟΛΑ

4

ΔΟΜΕΣ

5

ΛΟΓΙΚΗ

6

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

6.1 Εισαγωγή

Η εισαγωγή και ανάπτυξη των τυπικών ή φορμαλιστικών γλωσσών (formal languages), είχε σαν κίνητρο τη 'δυτική' αντίληψη ότι επιστημονικό είναι μόνον το ακριβές και αυτό που μπορεί να μετρηθεί. Για να αποφευχθούν λοιπόν η ασάφειες και ανακρίβειες της φυσικής γλώσσας εισήχθηκαν και αναπτύχθηκαν οι τυπικές γλώσσες. Υπάρχει όμως και εδώ ένα είδος εντροπίας. 'Οτι κανείς κερδίζει σε ακρίβεια το χάνει σε εκφραστική ικανότητα. Οι φορμαλιστικές γλώσσες εξυπηρέτησαν σε πολύ μεγάλο βαθμό τα απόλυτα ή Καντοριανά μαθηματικά. Τελευταία όμως κάτω από την ένταση και πίεση που δημιουργούνται από την ανάπτυξη της πληροφορικής, και ιδιαίτερα της τεχνητής νοημοσύνης και ρομποτικής, έχουν εισαχθεί και αναπτύσσονται επιστημονικά αντικείμενα όπως η 'ασαφής λογική', και γενικότερα οι 'πλειότιμες λογικές' (many-valued logics), καθώς επίσης και οι αντίστοιχες μη-Καντοριανές μαθηματικές θεωρίες. Μια άλλη εξέλιξη που αξίζει να μνημονευθεί είναι η 'εκτασιακή σημασιολογία' (denotational semantics), που είναι για τις γλώσσες προγραμματισμού, ότι είναι η Θεωρία Μοντέλων για τη Λογική Πρώτης Τάξης.

Ο πυρήνας των δραστηριοτήτων αυτών περιγράφεται ως ακολούθως: Ξεκινώντας από τις κλασικές μαθηματικές θεωρίες και τις αντίστοιχες δίτιμες λογικές, φθάνουμε στις μη-Καντοριανές θεωρίες και στις πλειότιμες λογικές, αποκαθιστώντας έτσι τουλάχιστον ένα μέρος από την εκφραστική ικανότητα των φυσικών γλωσσών. Με τον τρόπο αυτό ολοκληρώνεται ένας απαραίτητος κύκλος: Με την 'ειδετική αναγωγή' και την χρήση του ενεστωτικού απείρου δημιουργούμε τα απόλυτα Καντοριανά-Πλατωνικά μαθηματικά, και στη συνέχεια με αφετηρία αυτά τα καλώς ορισμένα αντικείμενα και με την χρήση του δυναμικού απείρου και της ασάφειας που συνεπάγεται, αναπτύσσουμε διάφορες 'όψεις' της φυσικής πραγματικότητας. Αυτές οι διάφορες 'όψεις' ή 'θεάσεις' μέσα από τις οποίες μπορούμε να αντιληφθούμε την 'απόλυτη πραγματικότητα' αποτελούν στην ουσία τα διάφορα μοντέλα της απόλυτης θεωρίας. Από την άποψη λοιπόν των θεμελίων των εφαρμοσμένων μαθηματικών, για να οριστεί ένα 'φυσικό' αντικείμενο, θα πρέπει πρώτα να αναπαρασταθεί στα κλασικά μαθηματικά και στη συνέχεια να μετασχηματιστεί σε ένα μη - Καντοριανό ανάλογο.

Τα μαθηματικά της πρώτης βιομηχανικής επανάστασης ήταν τα λεγόμενα 'Νευτωνιακά μαθηματικά' που βασίζονταν πάνω στο 'συνεχές' και το 'αφηρημένο', το 'ενεστωτικό άπειρο' κλ.π. με κύριο και βασικό προιόν τον Απειροστικό Λογισμό, με τις τεράστιες σε αριθμό εφαρμογές.

Σήμερα τα πράγματα αλλάζουν. Τα Νευτωνιακά μαθηματικά, που στη βάση τους ήταν 'ποσοτικά' εμπλουτίζονται και εναρμονίζονται με τα λεγόμενα 'ποιοτικά μαθηματικά', αλλά και με ένα σοβαρό ενδιαφέρον για τα 'πεπερασμένα μαθηματικά', όπου με τον όρο 'πεπερασμένο' δεν εννοούμε αναγκαστικά 'ποσοτικά πεπερασμένο'. Μία από τις κύριες αιτίες γι' αυτό είναι η εισβολή των υπολογιστών οι οποίοι ανοίγουν απίστευτες ενοποιητικές και συνθετικές δυνατότητες. Η λειτουργία των υπολογιστών βασίζεται σε πεπερασμένα μαθηματικά συστήματα. Ο υπολογιστής χρησιμοποιεί μόνο ρητούς αριθμούς, στη μορφή περίπου που τους γνώριζαν και οι Πυθαγόρειοι, δεν καταλαβαίνει τι είναι μηδέν, το δε άπειρο το υποδηλώνει ως 'overflow' κάτι σαν το 'ακατανόητο' στά μη-συμβατικά μαθηματικά.

Η ισότητα στον υπολογιστή είναι τελείως δυναμική και δεν είναι αντιμεταθετική. Συγκρίνοντας τα μαθηματικά του υπολογιστή με τα Νευτωνιακά μαθηματικά παρατηρούμε τις ακόλουθες αντιστοιχίες:

Απειροστικός Λογισμός	$\leftrightarrow$	Λογική και «Πεπερασμένα» μαθηματικά
Συναρτήσεις	$\leftrightarrow$	Αλγόριθμοι
Πίνακες	$\leftrightarrow$	Δομές Δεδομένων
Πρωτοβάθμιες Εξισώσεις	$\leftrightarrow$	Stacks και Ουρές
Δευτεροβάθμιες Εξισώσεις	$\leftrightarrow$	Συναρμολογημένες λίστες και δυαδικά Δέντρα

Βλέπουμε λοιπόν οτι η σχέση της Πληροφορικής και της Λογικής στη γενική της μορφή, είναι περίπου υης ίδιας φύσης με την σχέση μεταξύ της Ανάλυσης και της Φυσικής, που υπάρχει στα Νευτωνιακά-Καντοριανά Μαθηματικά.

Ας έρθουμε τώρα στα βασικά εννοιολογικά στοιχεία της μαθηματικής λογικής. Διακρίνουμε συνήθως τους ακόλουθους τύπους αντικειμένων:

1) **Συντακτικά αντικείμενα.** Η κεντρική έννοια εδώ είναι αυτή της **τυπικής** ή **φορμαλιστικής γλώσσας**. Η **σύνταξη** των καλοσχηματισμένων εκφράσεων της γλώσσας, η λογική μορφή αυτών των εκφράσεων, η έννοια της απόδειξης και **η έννοια της θεωρίας**, είναι όλες συντακτικές έννοιες. Θα μπορούσε κανείς χοντρικά να ισχυριστεί, ότι ένα μαθηματικό βιβλίο που διαπραγματεύεται μια μαθηματική θεωρία, δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια συντακτική έκφραση αυτής της θεωρίας, σε μια γλώσσα, που είναι ανάμιξη μιας τυπικής γλώσσας και μιας μεταγλώσσας, που στην περίπτωσή μας είναι η Ελληνική γλώσσα.

Συνοψίζοντας λοιπόν, οι βασικές συντακτικές έννοιες αποτελούνται από:

(i) Μια **τυπική γλώσσα** $\mathscr{L}$ που απαρτίζεται: Από **τα λογικά σύμβολα** «$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$» από **μεταβλητές** $V = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, **ποσοδείκτες** «$\forall, \exists$», **το σύμβολο της ισότητας** «$\approx$», και **σύμβολα στίξης** «$(,), [,], \ldots$», καθώς επίσης και κάποιους συντακτικούς κανόνες για των σχηματισμό αποδεκτών εκφράσεων και τέλος από τα μη-λογικά σύμβολα των **κατηγορημάτων**, **των συναρτήσεων** και **των σταθερών**.

(ii) **Την έννοια της απόδειξης ή λογικής παραγωγής**, που προϋποθέτει ότι έχουμε δεχτεί κάποιους **λογικούς κανόνες** (π.χ. modus ponens) και κάποιες προτάσεις σαν **λογικά αξιώματα πρώτης τάξης**.

(iii) Μια **θεωρία** είναι ένα σύνολο προτάσεων T, που είναι κλειστό ως προς την αποδειξιμότητα, δηλαδή αν μια πρόταση μπορεί να αποδειχτεί από τις προτάσεις στην T τότε η πρόταση αυτή ανήκε ήδη στο T, συμβολικά, για κάθε $\mathscr{L}$-πρόταση με $T \vdash \varphi$ έχουμε ότι $\varphi \in T$. Ενα υποσύνολο A του T θα λέγεται ένα **σύνολο αξιωμάτων** για την T αν όλες οι προτάσεις της T μπορούν να αποδειχτούν με την χρήση μόνον των προτάσεων στο A.

Από την άλλη μεριά έχουμε τις **σημαντικές** ή **σημασιολογικές έννοιες**:

2) **Σημαντικά ή σημασιολογικά αντικείμενα.** Αυτά είναι τα βασικά μαθηματικά αντικείμενα, **Σύνολα**, **Γεωμετρία**, **Αλγεβρα**, **Ανάλυση**, και γενικά οι **μαθηματικές δομές**. Πολλοί πιστεύουν ότι όλα τα Μαθηματικά μπορούν να αναχθούν στη Συνολοθεωρία. Συνεπόμενα ο «παραγματικός κόσμος» των Μαθηματικών 'είναι' η Συνολοθεωρία! Είναι γνωστό όμως ότι για να μπορέσει ο Grothendieck να ανάγει την Αλγεβρική Γεωμετρία στη Συνολοθεωρία, χρησιμοποίησε τη «Θεωρία Δραγμάτων» (Sheaf Theory), ένα είδος «συνεχώς μεταβαλλόμενων συνόλων». Έτσι είναι πολλοί αυτοί που πιστεύουν σε μια «γεωμετρική πραγματικότητα» ανεξάρτητη από τη Θεωρία Συνόλων δείτε π.χ. το [127]. Τότε όμως μπορούμε να έχουμε μια σημασιολογία βασισμένη στις **κατηγορίες** και στους **τόπους**! Συνοψίζοντας λοιπόν **η «Θεωρία Μοντέλων» είναι η μελέτη των σχέσεων μεταξύ των «τυπικών γλωσσών» και των ερμηνειών τους στον «πραγματικό κόσμο», οτιδήποτε και αν σημαίνει αυτό το τελευταίο.** Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε ότι, αφού η έννοια του «σημείου-στοιχείου» μιάς «δομής» είναι αυτή που κάνει έναν τύπο «αληθή» ή «ψευδή», τότε **ή ανάπτυξη της «Θεωρίας Μοντέλων», ακολουθεί την παθολογία της έννοιας-θεωρίας του «σημείου-στοιχείου»**, δείτε για περισσότερα το εξαιρετικό άρθρο, [39].

Μπορούμε ακόμα να θεωρούμε και τις τυπικές γλώσσες σαν μαθηματικό αντικείμενο, που διαθέτουν «μορφή» παρόμοια με την μορφή των γεωμετρικών αντικειμένων, αλλά και συγκεκριμένη δομή.

Τα αντικείμενα αυτά πρέπει να εκλαμβάνονται σαν αφαιρέσεις και ειδετικές αναγωγές του κόσμου της εμπειρίας και σαν τέτοια είναι **νοητικές κατασκευές** και έχουν μια ρεαλιστική οντολογική διάσταση. Θα μπορούσαμε ίσως να πούμε ότι **η κεντρική μαθηματική έννοια είναι η έννοια της μαθηματικής δομής και οι διάφορες γενικεύσεις της**. Από την άλλη μεριά θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι, **τα βασικά μαθηματικά αντικείμενα αποτελούνται από τα γεωμετρικά αντικείμενα και την γλωσσική τους περιγραφή από μιά κατάλληλη γλώσσα, δηλάδη η βάση των μαθηματικών είναι η ένταση που δημιουργείται από**

το διαλεκτικό σχήμα: Γεωμετρία-Λογική.

Η η μεν αναλυτικολογική έκφρασή του διαλεκτικού αυτού σχήματος δίνει την Ανάλυση, η δε δομικο-ολιστική έκφρασή του, την Αλγεβρα. Στη συνέχεια θα θεωρούμε την έννοια της μαθηματικής δομής σαν την κεντρική σημαντική ($\equiv$ σημασιολογική) έννοια. Στίς σημειώσεις αυτές θα περιορίσουμε τους στόχους μας, στο να παρουσιάσουμε κυρίως την μέθοδο των υπεργινομένων, μια εξαιρετικά μαθηματική έννοια-κατασκευή, και την εφαρμογή τους στην Μη-Συμβατική Ανάλυση του Robinson, έναν κλάδο της «Εφαρμοσμένης Θεωρίας Μοντέλων». Ελπίζεται ότι μετά την εισαγωγή αυτή, ο αναγνώστης θα έχει καταλάβει την ουσία της θεωρίας και θα μπορεί άνετα να προχωρήσει σε πιό πλήρεις και πιό προχωρημές διαπραγματεύσεις.

Συνοψίζοντας λοιπόν οι βασικές σημαντικές έννοιες αποτελούνται από:

(i) **Την έννοια της $\mathscr{L}$-ερμηνείας ή $\mathscr{L}$-δομής**, που είναι μια μαθηματική δομή με ομόλογο ως προς τον γλωσσικό οπλισμό της τυπικής γλώσσας $\mathscr{L}$, σημαντικό οπλισμό.

(ii) **Την έννοια της ικανοποιησιμότητας** που είναι η ομόλογη έννοια της απόδειξης, και βασίζεται στη παραδοχή κάποιων αξιωμάτων για την δομή, και τέλος,

(iii) **Την έννοια του μοντέλου μιας θεωρίας** που είναι ακριβώς μια δομή στην οποία ικανοποιείται μια θεωρία.

Τα βασικά θεωρήματα της Θεωρίας Μοντέλων είναι τα Θεωρήματα Πληρότητας/Συμπαγίας, που συνδέουν θεωρίες και μοντέλα και μας εξασφαλίζουν, ότι κάθε συνεπής θεωρία έχει ένα τουλάχιστον μοντέλο, τα θεωρήματα των Löwenheim-Skolem, καθώς επίσης και διάφοροι τρόποι κατασκευής μοντέλων για συγκριμένες θεωρίες, ένας εκ των οποίων είναι και **η μέθοδος των υπεργινομένων**, με τον οποίο θα ασχοληθούμε περισσότερο εδώ.

Συνοψίζοντας λοιπόν, οι βασικές έννοιες της μοντελοθεωρίας είναι:

(i) Μια πρωτοβάθμια γλώσσα $\mathscr{L}$ μαζί με τους όρους, τις προτάσεις και τους τύπους της.

(ii) Οι ερμηνείες-πραγματώσεις [1] ή $\mathscr{L}$-δομές $\mathfrak{A}$, της $\mathscr{L}$.

(iv) Η έννοια της ικανοποιησιμότητας στη δομή $\mathfrak{A}$, δηλαδή $\mathfrak{A} \models \varphi$ (η φ ικανοποιείται στην $\mathfrak{A}$).

Τα βασικά θεωρήματα είναι:

6.1.1 Θεώρημα. (Συμπαγίας) *Αν Σ είναι ένα σύνολο από $\mathscr{L}$-προτάσεις, και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ έχει ένα μοντέλο, τότε και το Σ έχει ένα μοντέλο.*

6.1.2 Θεώρημα. (Καθοδικό Θεώρημα των Löwenheim - Skolem) *Αν T έχει ένα μοντέλο M με πληθάριθμο $k \geq \operatorname{card}(\mathscr{L})$, και X είναι ένα υποσύνολο του M, τότε υπάρχει μια υποδομή N του M με, $X \subseteq N \subseteq M, N \models T$, και $\operatorname{card}(N) = \max[\operatorname{card}(X), \operatorname{card}(\mathscr{L})]$.*

6.1.3 Θεώρημα. (Ανοδικό Θεώρημα των Löwenheim-Skolem) *Αν T έχει ένα μοντέλο M με πληθάριθμο $k \geq \aleph_0$ τότε η T έχει ένα μοντέλο για κάθε πληθάριθμο $\geq \operatorname{card}(\mathscr{L})$.*

6.1.4 Σχόλιο. (i) Τα Θεωρήματα Löwenheim-Skolem έχουν τεράστιες επιπτώσεις για τα Θεμέλια των Μαθηματικών, αφού στα θεωρήματα αυτά στηρίζεται η ύπαρξη μη-συμβατικών μοντέλων. Είναι ακόμα φανερό ότι οι έννοιες του «πεπερασμένου», του «αριθμήσιμου» καθώς επίσης και του «μη-αριθμήσιμου» δεν είναι πρωτοβαθμίως ορίσιμες, και επομένως είναι σχετικές από μοντέλο σε μοντέλο. Ορισμένες από αυτές τις έννοιες είναι ορίσιμες σε λογικές ανώτερης τάξης.

[1] Μιά τέτοια ερμηνεία-πραγμάτωση θα μπορούσε να ονομασθεί και «**σημασιοδότηση**» .

(ii) Από το βασικό αποτέλεσμα του P. Lindström (On model- completenes, *Theoria*, 30, (194), 183-196) γνωρίζουμε ότι η λογική πρώτης τάξης είναι η μόνη λογική, που είναι κλειστή ως προς τις λογικές πράξεις $\wedge, \neg, \exists$ και ικανοποιεί, το Καθοδικό Θεώρημα των Löwenheim - Skolem, και το Θεώρημα της Συμπαγότητας. Επομένως για τις λογικές ανώτερης τάξης χρειαζόμαστε καινούργιες ιδέες και βαθιά εννοιολογική κατανόηση των συνεπειών των ανωτέρω δύο αποτελεσμάτων. Αξίζει ακόμα να προσθέσουμε ότι το Θεώρημα των Löwenheim - Skolem συνεπάγεται το Αξίωμα της Επιλογής (AC).

(iii) Είναι ακόμη διαισθητικά φανερό ότι τα βασικά θεωρήματα της θεωρίας μοντέλων εισάγουν ένα είδος «επιπέδου πραγματικότητας» για την «μαθηματική ύλη». Ετσι π.χ. οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να «παρατηρηθούν» από πολλούς «παρατηρητές» δίνοντας κάθε φορά και από ένα μοντέλο με διαφορετικό πληθάριθμο. Ο πληθάριθμος αυτός εξαρτάται από την διακριτική ικανότητα του παρατηρητή αυτού. Κατά την άποψη του γράφοντος κάποιες από αυτές τις «νέες» ιδέες είναι η σύνθεση των ακόλουθων διαλεκτικών σχημάτων:

1 Γεωμετρία−Λογική

- Εκταση (Extention)− Ενταση (Intention)
- Αναλυτικο-λογικό − Ολιστικό-δομικό
- Μη-κλασσικά γεωμετρικά αντικείμενα −Πλειότιμες λογικές
- Σταθερό−μεταβαλλόμενο

2 Τοπικό (local)−Απόλυτο (absolute)

- δυναμικό−ενεστωτικό άπειρο
- εσωτερικό−εξωτερικό
- συμβατικό & Καντοριανό−μη-συμβατικό & μη-Καντοριανό
- ασαφές − εναργές.

3 Επιπέδο πραγματικότητας, & ορίζοντας αναφοράς

- Διακριτό − συνεχές
- Διακριτό − αδιάκριτο και μη-συμβατικότητα
- δυναμικό άπειρο ≡ πεπασμένο + αοριστία και ασάφεια

3 Ποσοτικό − ποιοτικό

- Αλγεβρες Boole & Heyting − μέτρα επί αυτών των αλγεβρών & MV-άλγεβρες
- Μοντέλα του Boole & Heyting − Μοντέλα με τιμές αλήθειας σε μιά MV-άλγεβρα

Ας δούμε τώρα ένα γνωστό παράδειγμα μαθηματικής δομής και της αντίστοιχης γλώσσας της. Εστω η δομή των πραγματικών αριθμών $\langle \mathbb{R}\,;\, \{+,\cdot\}, \{\leq\}, \{0,1\}\rangle$. Η γλώσσα $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ αποτελείται από τα ακόλουθα στοιχεία:

(I) Τα λογικά σύμβολα.

1) **Λογικοί σύνδεσμοι:** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \longleftrightarrow$
2) **Ποσοδείκτες:** $\forall, \exists$.
3) **Μεταβλητές:** $x_1, x_2, \ldots, x, y, z, \ldots$
4) **Το σύμβολο της ισότητας:** $\approx$[2]
5) **Σύμβολα Στίξης:** $(,), [,], \ldots$

(II) Τα μη-λογικά σύμβολα ή παράμετροι.

1) **Σύμβολα σχέσεων:** Η γλώσσα $\mathscr{L}(\mathbb{R})$, περιέχει ένα σύμβολο σχέσης, το $R_{\leq}$, που θα το ταυτίζουμε με την πραγματική σχέση $\leq$.
2) **Σύμβολα συναρτήσεων:** f_+ , $f_.$ σαν ονόματα των πράξεων «+» και «.».
3) **Σύμβολα διακεκριμένων σταθερών: 0, 1**.
4) **Σύμβολα σταθερών:** Για κάθε $c \in \mathbb{R}$, έχουμε ένα σύμβολο **c**.

Οι **όροι** $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ είναι το ελάχιστο σύνολο **Term**, σχηματισμών με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) **0, 1** $\in$ **Term**, και για κάθε μεταβλητή **x, x** $\in$ **Term**.

(ii) Αν $t_1,\ t_2 \in$ **Term** τότε $t_1 + t_2,\ t_1 \cdot t_2 \in$ **Term**.

Οι **τύποι** της $\mathscr{L}(\mathbb{R})$ είναι το ελάχιστο σύνολο **Form** με τις ιδιότητες:

(i) Αν $t_1, t_2 \in$ **Term** τότε $R_{\leq}(t_1, t_2) \in$ **Form**.

(ii) Αν $t_1, t_2 \in$ **Term** τότε $t_1 \approx t_2 \in$ **Form**.

(iii) Αν $\varphi, \psi\ \in$ **Form** τότε $\phi \square \psi \in$ **Form**, όπου $\square \in \{\wedge, \vee \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

(iv) Για κάθε $\varphi \in$ **Form** , $\neg\varphi \in$ **Form**.

(v) Αν $\varphi, \psi \in$ **Form** τότε $(\forall x)\varphi,\quad (\exists x)\psi \in$ **Form**.

Για την αυτονομία του βιβλίου αυτού κρίνεται σκόπιμο να αναπαραγάγουμε από το [67], κάποια γενικά εισαγωγικά σχόλια καθώς επίσης και την κατασκευή των υπερπραγματικών αριθμών, όπου γίνεται κατανοητό το βάθος της μεθόδου των υπερδυνάμεων. Στο επόμενο λοιπόν τμήμα θα κατασκευάσουμε

[2] Χρησιμοποιούμε αυτήν την παραλλαγή του συμβόλου ισότητας, για να τονίσουμε ότι η δήλωση «$t_i \approx t_j$» δεν σημαίνει ότι οι συμβολικές εκφράσεις «t_i, t_j» είναι στην πραγματικότητα ίσες ως τέτοιες, αλλά απλά ότι η δήλωση «$t_i \approx t_j$» είναι μια ακόμα συντακτική συμβολική έκφραση. Αν για παράδειγμα $f_+(x_1, x_2) \approx f_+(x_2, x_1)$, αυτό δεν σημαίνει ότι ως συμβολικές εκφράσεις είναι ίσες (στην πραγματικότητα δεν είναι), αλλά ότι σε μια ερμηνεία π.χ. στους φυσικούς αριθμούς, έχουμε ότι $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$, όπου πράγματι το σύμβολο $\approx$ παίρνει μια σημασία πραγματικής ισότητας.

λεπτομερειακά την υπερδύναμη των πραγματικών αριθμών. Στην κατασκευή αυτή θα διαυγαστούν όλες οι έννοιες που σχετίζονται με τα υπεργινόμενα και τις υπερδυνάμεις, με τρόπο τέτοιο που οι γενικεύσεις που θα ακολουθήσουν να είναι τελείως φυσιολογικές.

Η υπερδύναμη $^*\mathbb{R}$, θα κατασκευασθεί διαλεκτικά με βάση την διαλεκτική αρχή της «άρνησης της άρνησης» εμαρμοσμένης στο διαλεκτικό σχήμα: σταθερό - μεταβαλλόμενο.

Κατά την θεώρηση μεταβαλλόμενων στοιχείων σε διακριτό χρόνο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, και επομένως κατά την άρνηση της σταθερότητας του $\mathbb{R}$, θεωρήσαμε την δομή $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}; +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$ σταθερή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η δε μεταβολή γινόταν στο εσωτερικό του $\mathbb{R}$. Ακριβέστερα είχαμε την δομή $\mathfrak{R}^{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \oplus, \odot, \otimes, \bar{0}, \bar{1} \rangle$ όπου, αν $f = (a_1, \ldots, a_n \ldots)$ και $g = (b_1, \ldots, b_n \ldots)$ τότε,

$$
\begin{aligned}
g \oplus f &= (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots) \\
g \odot f &= (a_1 \cdot b_1, \ldots, a_n \cdot b_n \ldots) \\
g \otimes f &\Leftrightarrow a_i \leq b_i \qquad \text{για} \quad \text{κθε} \quad i = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

και $\bar{0} := (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ και $\bar{1} := (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

Η προκείπτουσα δομή $\mathfrak{R}^{\mathbb{N}}$ είναι ένας δακτύλιος η δε διάταξη είναι μερική και όχι ολική. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το διαλεκτικό βήμα της άρνησης της άρνησης, καταφέραμε να κατασκευάσουμε τη δομή $^*\mathfrak{R} = \langle ^*\mathbb{R}; +, \cdot, \leq, 0, 1 \rangle$ που ικανοποιεί τα αξιώματα του διατεταγμένου σώματος.

6.2 Η Υπερδύναμη του $\mathbb{R}$: Πραγματικοί αριθμοί με απειροστά.

6.2.1 Εισαγωγή

Στόχος του τμήματος αυτού, που είναι μέρος του Κεφαλαίου 3 του [67], είναι να δώσει μια ενορατική εισαγωγή στις σύγχρονες έννοιες του απειροστού και του άπειρα μεγάλου αριθμού. Ταυτόχρονα το εδάφιο αυτό αποτελεί μια εισαγωγή στην ουσία της μεθόδου των υπερδυνάμεων, που είναι μια ειδική περίπτωση της μεθόδου των υπεργινομένων, που θα εξετάσουμε αργότερα. Η θεώρηση θα είναι διαλεκτική, όπως διαλεκτικός ήταν εξάλλου και ο αρχικός τρόπος εισαγωγής τους, και στην ουσία χρησιμοποιεί ελάχιστες γνώσεις από την Λογική.

Στις διαισθητικές μας εξηγήσεις, θα ακολουθούμε την άποψη του Paul Cohen (μετάλλιο fields): *«...όλη η διαίσθησή μας προέρχεται από την πίστη μας σ' ένα φυσικό, σχεδόν υλικό μοντέλο του μαθηματικού σύμπαντος.»* [3] Η αντίληψη αυτή έχει ριζοσπαστικές συνέπειες. Κατά πρώτον, κάθε μη συμβατικό πλαίσιο μπορεί να θεωρηθεί ότι συγκροτείται σε δύο τουλάχιστον 'επίπεδα

[3] "... all our intuition comes from our belief in a natural, almost physical, model of mathematical universe." (P. Cohen: *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* Benjamin, 1966, p.107)

πραγματικότητας'. Με τον τρόπο αυτό *τα στοιχεία μιας δομής είναι δυνατόν να θεωρηθούν 'ως μόρια έχοντα δομή'.* Επί πλέον εισάγεται η βασική έννοια του 'τοπικού παρατηρητή γνώσης'. Έτσι τα διαφορετικά επίπεδα του μοντέλου μας και οι ενσωματωμένοι σ' αυτά παρατηρητές, εισάγουν μια λογική αλήθεια που βασίζεται στην επικοινωνία (π.χ. μέσω τηλεφώνου) των δύο τοπικών παρατηρητών βλ. π.χ. [115][4]. Όλα αυτά που συμβαίνουν στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, θυμίζουν έντονα ανάλογα φαινόμενα της Φιλοσοφίας της Φυσικής, όπου η Αρχή της Αβεβαιότητας του Heisenberg, στην ουσία εισήγαγε την έννοια του «παρατηρητή» στη φυσική. Για τα θέματα αυτά, βλ. τα [173, 23, 134] [5].

Αξίζει ακόμα να αναφέρουμε εδώ ότι υπάρχουν πολλών ειδών απειροστά. Οι βασικές κατηγορίες απειροστών, βλ. και [132], είναι: Τα 'εκτασιακά-Καντοριανά' απειροστά του Robinson [107, 125, 94, 3, 99], τα «Εντασιακά-μη Καντοριανά» απειροστά των Nelson-Vopěnka [155, 140, 54, 173], και τα γεωμετρικά απειροστά [24, 26]. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τα εκτασιακά-Καντοριανά απειροστά του Robinson.

Οι ιδέες των απειροστών, υπήρχαν ακόμη από την αρχαία Ελλάδα. Βρίσκουμε π.χ. στα Στοιχεία του Ευκλείδη, ότι η κερατοειδής γωνία, βλ. Σχήμα 6.1, –ένα είδος μη-συμβατικής γωνίας– είναι ένα απειροστό, στο σύνολο όλων των συμβατικών θετικών γωνιών[6] Εστω $\mathscr{G}$ το σύνολο όλων των θετικών συμβατικών γωνιών, όπως η $\angle(BOA)$. Μια θετική «απειροστική γωνία» θα ήταν μια γωνία, διαφορετική από τη μηδενική και μικρότερη από κάθε άλλη θετική μεταξύ $0°$ και $360°$. Είναι προφανές ότι τέτοια γωνία δεν υπάρχει στο σύνολο $\mathscr{G}$. Γιατί αν υποθέσουμε ότι $\angle(\delta) \in \mathscr{G}$ με,

(i) $\angle(0) < \angle(\delta)$ και

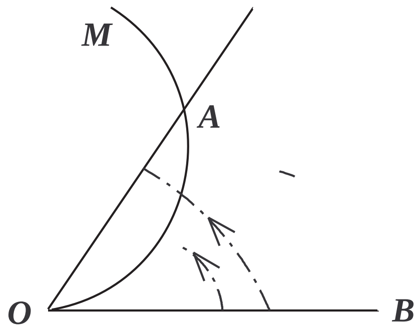
(ii) $\angle(\delta) < \angle(\phi)$ για κάθε $\angle(\phi) \in \mathscr{G}$,

τότε και η $\dfrac{\angle(\delta)}{2} \in \mathscr{G}$ και $\angle(0) < \dfrac{\angle(\delta)}{2} < \angle(\delta)$, που είναι βεβαίως άτοπο, αφού η $\angle(\delta)$ υποτέθηκε απειροστό. Αν θέλουμε να έχουμε την έννοια της 'απειροστικής γωνίας' θα πρέπει να γενικεύσουμε την έννοια της γωνίας, σ' αυτήν της κερατοειδούς γωνίας, όπως η $\angle(BOM)$ του Σχήματος 6.1. Ο Ευκλείδης λοιπόν αποδεικνύει (βλ. [93, σελ. 223]), ότι κάθε 'κερατοειδής γωνία' είναι μικρότερη από κάθε θετική συμβατική, μικρότερη των 360^o. Η εύρεση

[4]Στη σελίδα 170 του [115], βρίσκουμε: "In a qualitative sense, *the notion of Boolean-valued model includes a new concept of modelling*, which could be termed modelling by communication, or modelling by telephone."

[5]Σχετική με τη βασική μας άποψη για το παρόν κεφάλαιο, ότι δηλαδή «*τα σημεία έχουν δομή και επομένως υπάρχουν επίπεδα πραγματικότητας*» είναι και η σχολή του 'κριτικού ρεαλισμού' (critical realism) στο τέλος του προηγούμενου αιώνα, η οποία υποστήριζε 'επίπεδα πραγματικότητας' και 'αναδυόμενη εξέλιξη' (emergent evolution) βλ. το [30] καθώς επίσης και τα [96, σελ. 220],[173]. Από τεχνικής όμως πλευράς αξίζει να μελετήσει κανείς την εξαιρετική εργασία [39] όπου δίνεται μιά σφαιρική περιγραφή των Πρωτεϊκών εννοιών του 'σημείου' και του 'χώρου' καθώς επίσης και των σχετικών δομών των!

[6]Στο [13, σελ. 53] αναφέρονται όλα τα είδη γωνιών που θεωρούσαν οι Αρχαίοι Έλληνες, π.χ. ευθεία-κυρτή (γραμμή), ευθεία-κοίλη, ευθεία-ευθεία (συμβατική γωνία), κυρτή-κοίλη, κυρτή-κυρτή, κοίλη-κοίλη.



Σχήμα 6.1: Η κερατοειδής γωνία ως απειροστό

του παραπάνω απειροστού έγινε δυνατή αφού πρώτα χρειάστηκε, να γενικευτεί η συμβατική έννοια της γωνίας, σε μια μη-συμβατική, όπου επιτρέπουμε και τόξα καμπύλων για πλευρές. Παρ' όλο που φαίνεται απίθανο, να είχε ο Ευκλείδης μια βαθιά συνείδηση και προβληματισμό για τα απειροστά, ωστόσο η κερατοειδής γωνία είναι ένα γεωμετρικό απειροστό και υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις ότι ο Ευκλείδης είχε το βασικό προβληματισμό για τα απειροστά. Αυτό εξάλλου φαίνεται και από την αντίληψή του ότι, *ένα γεωμετρικό σημείο έχει θέση αλλά όχι διαστάσεις*, η οποία στην ουσία απαγορεύει την ύπαρξη και τη χρήση απειροστών στη γεωμετρία. Η αντίληψη αυτή ήταν αντίθετη με τον 'ατομισμό' του Δημόκριτου και τις απόψεις του Ξενοκράτη, διαδόχου του Πλάτωνα στην Ακαδημία, για τα απειροστά. Ο ατομισμός του Δημόκριτου, δεν περιορίζονταν στη δομή της ύλης, αλλά είχε και επεκτάσεις στις έννοιες του χρόνου και του χώρου και επομένως και στη 'μαθηματική ύλη'.

Από την άλλη μεριά, *τα επιχειρήματα και τα παράδοξα του Ζήνωνα βασίζονταν στη σκόπιμη σύγχυση των δύο ιεραρχικών επιπέδων οργάνωσης της ευθείας: του μη-Αρχιμήδειου μικροσκοπικού και του Αρχιμήδειου μακροσκοπικού.*

Η εισαγωγή από τον Εύδοξο, της μεθόδου της εξάντλησης, ήταν ίσως η σοβαρότερη προσπάθεια αντικατάστασης του 'απειροστικού τρόπου σκέψης', με έναν πιο 'αυστηρό' και έγκυρο τρόπο. Η μέθοδος της εξάντλησης ήταν, σε τελευταία ανάλυση, ένα γεωμετρικό αρχαίο ανάλογο της ε - δ μεθόδου των ορίων και είχε ως στόχο την εξοβέλιση των απειροστών από τη Γεωμετρία.

Μετά την αριθμητικοποίηση - αλγεβροποίηση (αντικατάσταση της γεωμετρίας ως θεμέλιου των μαθηματικών, από την αριθμητική και την άλγεβρα) των μαθηματικών και κατά συνέπεια μετά την απογεωμετρικοποίησή τους, η ίδια ιστορία της εξοβέλισης των απειροστών από τον Εύδοξο, επαναλήφθηκε από τους Cauchy και Weierstrass, αλλά σε ένα ποιοτικά ψηλότερο επίπεδο. Εκείνος όμως που ασχολήθηκε περισσότερο με τις έννοιες των απειροστών και τη μέθοδο εξάντλησης, ήταν ο Αρχιμήδης (βλ. το [33, σελ.48-60]). Ο

Αρχιμήδης χρησιμοιούσε τη μέθοδο των απειροστών για να ανακαλύπτει μαθηματικές αλήθειες, φρόντιζε όμως στη συνέχεια, να τις αποδεικνύει αυστηρά, με τη μέθοδο της εξάντλησης. Εξάλλου, ο Αρχιμήδης ήταν αυτός που διατύπωσε και την ομώνυμη ιδιότητα (**Αρχιμήδεια ιδιότητα**), ότι δηλαδή, *κάθε πραγματικός αριθμός είναι μικρότερος από κάποιο πεπερασμένο άθροισμα μονάδων.* Η ιδιότητα αυτή είναι στην ουσία η αλγεβρική έκφραση της αντίληψης του Ευκλείδη ότι *κάθε σημείο έχει θέση αλλά όχι διάσταση.* Και οι δύο αρχές απαγορεύουν την ύπαρξη και χρήση απειροστών. Θα μπορούσε ακόμη κανείς να χαρακτηρίσει την Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$, με τη λαϊκή ρήση: «κάλιο αργά παρά ποτέ!» Δηλαδή όσο μεγάλο και αν είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, μπορεί να εξαντληθεί επαναλαμβάνοντας ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, θετικού συμβατικού μήκους και οσοδήποτε μικρού. Μπορεί αυτό να πάρει πολύ χρόνο, αλλά δεν είναι αδύνατη η μέτρηση.

Μπορεί ακόμα να ισχυριστεί κανείς ότι αν θεωρήσουμε την πραγματική ευθεία ως ένα είδος 'αφηρημένης υλικής ευθείας' που κληρομομεί και αντανακλά ωστόσο, τις ιδιότητες της ύλης, τότε η Αρχιμήδεια ιδιότητα μας λέει ότι οσοδήποτε μικρό διάστημα και αν έχουμε (το πιο μικρό θα μπορούσε να είναι η διάμεσος ενός 'μορίου ακαθόριστης ύλης' ή η πλευρά ενός φωτοστοιχείου (pixel) της οθόνης του υπολογιστή) μπορούμε τοποθετώντας το ένα διάστημα δίπλα στο άλλο πεπερασμένες φορές, να ξεπερνάμε ένα οσοδήποτε μεγάλο διάστημα. Αν όμως αλλάξουμε ιεραρχικό επίπεδο οργάνωσης ύλης και θεωρήσουμε μικροσκοπικά σωμάτια, τότε είναι αδύνατη η εξάντληση ενός διαστήματος, χρησιμοποιώντας σωμάτια. Στην περίπτωση αυτή είμαστε σε μια μη-Αρχιμήδεια κατάσταση. Έτσι η Αρχιμήδεια ιδιότητα περιορίζει τη δομή σε ένα είδος «μακροσκοπικής θεώρησης» ενώ η απουσία της ιδιότητας αυτής μας εξαναγκάζει σε μια μικροσκοπική θεώρηση της δομής.

Στη συνέχεια, τα απειροστά παίζουν ένα ρόλο μικροσωματίων στα πλαίσια της 'μαθηματικής ύλης' της πραγματικής ευθείας. Για τους αλγεβριστές, το σύνολο όλων των απειροστών είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες, ενώ κάθε στιβάδα απειροστών μιας συγκεκριμένης τάξης είναι ένα πρώτο ιδεώδες. Στα πλαίσια λοιπόν των μη-συμβατικών μαθηματικών οι έννοιες 'μεγιστικό ιδεώδες' 'πρώτο ιδεώδες' κ.λπ. σχετίζονται πράγματι με ιδεώδεις αριθμούς, που βρίσκονται ίσως σε ένα άλλο 'επίπεδο πραγματικότητας'.

Ας έλθουμε όμως ξανά στους αρχαίους Έλληνες. Τελικά μπορεί κανείς να ισχυριστεί, ότι στη μη-ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού από αυτούς, πρέπει να έπαιξαν σοβαρό ρόλο τα ακόλουθα :

(i) Η μεγάλη για την εποχή εκείνη αυστηρότητα στα μαθηματικά και η καθαρή θεωρητική και φιλοσοφική σκέψη τους έκανε σχεδόν αδύνατη τη θεωρητικοφιλοσοφική και τεχνική υπέρβαση των εμποδίων που έθεταν τα απειροστά και η αυστηρή θεμελίωση των αριθμών.

(ii) Η σκέψη και ιδιαίτερα τα μαθηματικά των αρχαίων Ελλήνων ήταν στατικά και αντι-Ηρακλειτικά, γι' αυτό εξάλλου υπάρχει σχεδόν πλήρης απουσία της έννοιας της συνάρτησης, με συστηματικό τρόπο.

Χρειάστηκαν να περάσουν ολόκληροι αιώνες, ώστε ο κόσμος να αποστασιοποιηθεί από την Ελληνική αυστηρότητα και στατικότητα και να αρχίσει να μεταχειρίζεται τα απειροστά, με μεγαλύτερη άνεση και χωρίς αυστηρότητα στους υπολογισμούς. Φθάνουμε έτσι σε μια σειρά διανοητών μαθηματικών όπως οι: Nicholas of Cuse, Kepler, J., Cavallieri, B., Fermat, P., Descartes, Wallis, Barrow, Newton και Leibniz, στους οποίους οφείλεται η ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού. Αυτό που συνήθως είναι γνωστό ως **«μεσαιωνικό αμάλγαμα»,** αποτελείτο κύρια:

(i) Από τα προβλήματα με τα οποία ασχολείτο ο Αρχιμήδης.

(ii) Από την ανάπτυξη σοβαρών υπολογιστικών τεχνικών και ικανοτήτων και,

(iii) Από την ελεύθερη και διαισθητική χρήση του άπειρου και των απειροστών.

Είναι δυνατόν να ισχυριστεί κανείς, ότι το «αμάλγαμα» αυτό ήταν υπεύθυνο για τις τόσες ανακαλύψεις, στον ύστερο μεσαίωνα, ενώ η Ελληνική αυστηρότητα κατάληξε, συνδυαζόμενη και με άλλες αιτίες, να είναι ένα σοβαρό και αξεπέραστο εμπόδιο για την παραπέρα εξέλιξη των μαθηματικών.

Το συμπέρασμα που βγαίνει από τα παραπάνω, είναι ότι: *η μαθηματική αυστηρότητα, όταν δε συνδυάζεται και δεν εναρμονίζεται κατάλληλα με μια ισχυρή και αυθεντική διαίσθηση, ενόραση και φαντασία, καταντάει φραγμός για την παραπέρα εξέλιξη των μαθηματικών.*

6.2.2 Επιχειρήματα για τη μη-Ύπαρξη των Απειροστών.

Τα κύρια επιχειρήματα για τη μη-ύπαρξη των απειροστών, προέρχονται από τη θεωρία των πληθαρίθμων του Cantor. Είναι φανερό ότι, για να υπάρχουν απειροστά, θα πρέπει να είναι δυνατή η διαίρεση ενός σταθερού αριθμού μ' έναν άπειρο αριθμό, θα πρέπει δηλαδή να ισχύει*η εννοιολογική εξίσωση*:

$$\text{`απειροστό'} \ = \frac{1}{\text{`άπειρος αριθμός'}}$$

Για τους άπειρους πληθαρίθμους και διατακτικούς αριθμούς όμως, η διαίρεση είναι αδύνατη. Για παράδειγμα είναι γνωστό ότι $2\aleph_0 = \aleph_0$, διαίρεση δε με το $\aleph_0$ θα μας έδινε $2 = 1$. Έτσι βγαίνει αβίαστα το συμπέρασμα : *με την προϋπόθεση ότι οι μόνοι άπειροι αριθμοί είναι οι πληθάριθμοι του Cantor, δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν απειροστά.*

Πρέπει όμως να σημειώσουμε εδώ ότι, εκτός από τις διαδικασίες απαρίθμησης και διάταξης και τους αντίστοιχους άπειρους αριθμούς, τους πληθάριθμους και τους διατακτικούς, υπάρχει και **η διαδικασία της μέτρησης** και οι αντίστοιχοι άπειροι αριθμοί με τους οποίους μάλιστα είναι δυνατή η διαίρεση. Ένα είδος τέτοιων αριθμών θα θεμελιωθεί στη συνέχεια.

Ένα δεύτερο επιχείρημα μη-ύπαρξης των απειροστών στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι και το ακόλουθο : Έστω ότι το $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, είναι ένα θετικό απειροστό, δηλαδή για κάθε θετικό πραγματικό $x \in \mathbb{R}^+$, έχουμε

$0 < \varepsilon < x$. Αλλα τότε θα έχουμε επίσης και $\varepsilon/2 > 0, \quad \varepsilon/2 \in \mathbb{R}^+$ και $\varepsilon/2 < \varepsilon$, άρα το ε είναι αδύνατο να είναι απειροστό. Το επιχείρημα αυτό είναι βεβαίως αληθές, επειδή στο $\mathbb{R}$ πράγματι δεν υπάρχουν απειροστά πέραν του μηδενός.

Τέλος, αν για παράδειγμα,

$$f(x) := x^2 \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

τότε

$$f'(x) = 2x, \quad \text{ενώ} \quad \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = 2x + dx$$

έτσι, $2x = 2x + dx$ και επομένως θα πρέπει $dx = 0$. Δηλαδή το μηδέν είναι το μόνο απειροστό στο $\mathbb{R}$, το οποίο βεβαίως είναι σωστό.

Τελικά καταλήγουμε ότι, αν υπάρχει κάποια δυνατότητα ύπαρξης απειροστών, θα πρέπει, όπως και με την κερατοειδή γωνία, να τα αναζητήσουμε σε κάποια γενίκευση - επέκταση της έννοιας του πραγματικού αριθμού, που είναι βεβαίως και η σωστή κατεύθυνση.

6.2.3 Ενδείξεις για την Ύπαρξη των Απειροστών.

Εκτός από το γεωμετρικό παράδειγμα της κερατοειδούς γωνίας, που δίνει και τη σωστή κατεύθυνση αναζήτησης των απειροστών, υπάρχουν και κάποια φαινόμενα που σχετίζονται με τα όρια, που μας παρέχουν ισχυρές ενδείξεις ύπαρξης των απειροστών. Για παράδειγμα έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{4n^3+7} = 0$$

και αυτό παρόλο που $\lim_{n\to\infty}\left(3n^2+5\right) = +\infty$ και $\lim_{n\to\infty}\left(4n^3+7\right) = +\infty$

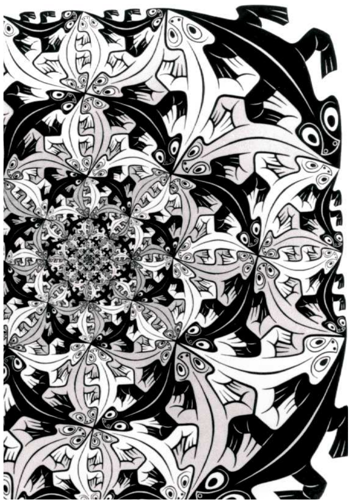
Για να συμβαίνει όμως το παραπάνω, θα πρέπει το «άπειρο» που τείνει το $3n^2+5$ να είναι διαφορετικό από αυτό στο οποίο τείνει το $4n^3+7$. Επομένως κάθε αποκλείνουσα ακολουθία, ανάλογα με την ταχύτητα που τείνει στο $\pm\infty$, μπορεί να καθορίζει «διαφορετικά άπειρα». Ομοια, παρόλο που,

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{n^2} \to 0, \quad \text{ωστόσο} \quad \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \infty,$$

γεγονός που σημαίνει ότι οι ακολουθίες $(\frac{1}{n}), (\frac{1}{n^2})$ συγκλίνουν και οι δύο στο μηδέν, αλλά με διαφορετικές ταχύτητες. Τα παραπάνω παραδείγματα βρίσκονται ακριβώς προς τη σωστή κατεύθυνση αναζήτησης των απειροστών, οι δε έννοιες της *ταχύτητας σύγκλισης* και *της ασυμπτωτικής συμπεριφιράς* βρίσκονται στην καρδιά του προβλήματος.

Τέλος μια άλλη σοβαρή ένδειξη για την ύπαρξη των απειροστών είναι το γεγονός ότι από την εποχή του μεσαίωνα οι υπολογισμοί με βάση τα απειροστά έδιναν σωστές απαντήσεις σε συγκεκριμένα προβλήματα. (Δες για παράδειγμα το [75, Κεφ. 4]).

Η τελική λύση στο πρόβλημα της αυστηρής ύπαρξης και δικαίωσης των απειροστών δόθηκε για πρώτη φορά από τον Abraham Robinson το 1960. Η λύση στηριζόταν πάνω σε μεθόδους της Θεωρίας Μοντέλων (Θεώρημα της Συμπαγότητας). Στη συνέχεια θα δοθεί μια διαλεκτική εισαγωγή στα απει-



Σχήμα 6.2: Escher: Η έννοια του ορίου.

ροστά του Robinson, αποφεύγοντας, όσο είναι δυνατόν, τη χρήση ισχυρών εργαλείων της λογικής. Με τον τρόπο αυτό αποκαλύπτεται ότι η διαλεκτική μεταβολή διαπερνά το σύνολο του απειροστικού λογισμού.

Από παιδαγωγική άποψη, στην εργασία [164], μπορεί κανείς να βρει στατιστικές μελέτες και επιχειρήματα που ενισχύουν την άποψη ότι τα απειροστά είναι περισσότερο κατάλληλα για τη διδασκαλία του απειροστικού λογισμού, απ' ότι ο παραδοσιακός τρόπος, που βασίζεται στη θεωρία των ορίων. Ωστόσο οι αλλαγές στις συνήθειες της μαθηματικής κοινότητας είναι εξαιρετικά δύσκολες και χρονοβόρες. Το γεγονός, π.χ., ότι σήμερα τα απειροστά δεν είχαν, στο διδακτικό επίπεδο, την αποδοχή που θα ανέμενε κανείς, δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι ο παραδοσιακός τρόπος είναι διδακτικά πιό επιτυχής.

Κατά τη άποψη του γράφοντος, ο «σωστός τρόπος διδασκαλίας» του απειροστικού λογισμού πρέπει να στηρίζεται σε μια κατάλληλη διαλεκτική σύνθεση των δύο τρόπων:

(α) του τρόπου με τα όρια, που στην ουσία είναι ο αναλυτικός-στοιχειακός τρόπος (αντίληψη με το αριστερό ημισφαίριο του εγκεφάλου) βλ. [34] και

(β) του τρόπου με τα απειροστά, που είναι ο ολιστικός-δομικός τρόπος (αντίληψη με το δεξί ημισφαίριο του εγκεφάλου).

Εξ άλλου αυτός είναι και ο φυσιολογικός τρόπος με τον οποίο ο εγκέφαλος αντιλαμβάνεται τον κόσμο.

6.2.4 Το Διαλεκτικό Σχήμα: Σταθερό–Μεταβαλλόμενο.

Η εισαγωγή της διαλεκτικής στα μαθηματικά, με ένα νέο και σύγχρονο τρόπο, έγινε από τον F. W. Lawvere, στα πλαίσια της Θεωρίας των Μεταβαλλομένων Συνόλων (Θεωρία Τόπων) και γενικότερα στα πλαίσια της Θεωρίας Κατηγοριών (βλ. τα [116, 23] και σχετικές εκεί παραπομπές).

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια εισαγωγή στις ιδέες αυτές, χωρίς τη γενική χρήση της Θεωρίας των Τόπων και Κατηγοριών. Τις γενικές αρχές των θεωριών αυτών θα εξετάσουμε στον 2^o τόμο.

Τα βασικά διαλεκτικά σχήματα που χρησιμοποιούμε στη συνέχεια είναι:

(i) Σταθερές και στατικές οντότητες ενάντια σε μεταβαλλόμενες και δυναμικές οντότητες, και

(ii) Ποσοτικά και αναλυτικά χαρακτηριστικά ενάντια σε ποιοτικά και ολιστικά χαρακτηριστικά.

Πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι, το **σταθερό** είναι περισσότερο προσιτό στο **ποσοτικό** και **αναλυτικό**, ενώ το μεταβαλλόμενο, από τη φύση του, απαιτεί κύρια **ποιοτικούς** και **ολιστικούς**[7] χαρακτηρισμούς.

Πριν αρχίσουμε τη μαθηματική μας κατασκευή, είναι ίσως σκόπιμο να αναφέρουμε μερικά σχετικά αποσπάσματα διαλεκτικών φιλοσόφων. Σ' όλους τους διαλεκτικούς φιλοσόφους, από τον Ηράκλειτο[8], τον Kant, τον Hengel ως τους Marx και Engels, συναντάμε, με διάφορες παραλλαγές, τα παραπάνω βασικά διαλεκτικά σχήματα και κύρια τη σπουδαιότητα και την παρουσία του χρόνου σε κάθε μεταβολή. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι *η μεταβολή και η ασάφεια είναι δυϊκές έννοιες. Η μεταβολή μπορεί να ερμηνευθεί ως ασάφεια και αντιστρόφως, βλ. το Κεφ. 1: Συναρτήσεις, του [67].*

Ο φιλόσοφος Κ. Αξελός [6] γράφει: «Ο ρυθμός της συμπαντικής κίνησης, που ενώνει και αντιθέτει τα αντίθετα μέσα στην αρμονία του γίγνεσθαι, αυτός ο ρυθμός, που συλλαμβάνει η διαλεκτική σκέψη, είναι ο Χρόνος» και παρακάτω: «Ο Χρόνος είναι ενσωματωμένος σε κάθε διαλεκτική» και «στην πραγματικότητα η διαλεκτική προϋποθέτει το χρόνο κι ο χρόνος γίνεται αισθητός από ένα είδος διαλεκτικής».

Στο [74, σελ. 182] βρίσκουμε: «Αυτά τα Μαθηματικά, από τη στιγμή που θα πραγματευτούν μεταβλητά μεγέθη, μπαίνουν στο χώρο της διαλεκτικής και είναι χαρακτηριστικό ότι αυτή την πρόοδο την εισήγαγε πρώτος ένας διαλεκτικός φιλόσοφος, ο Καρτέσιος. Ό,τι είναι τα Μαθηματικά των μεταβλητών

[7] Ο όρος «ολιστικός» θεωρείται ως το αντίθετο του «αναλυτικού» και σημαίνει τη σύλληψη του πράγματος ως μιας ολότητας ή "gestalt" και όχι ως ένα κατακερματισμένο αναλυτικό όλο. Έτσι, συνοπτικά, «ολιστικό» =«δομημένη ολότητα» .

[8] «(Η φωτιά) μεταβαλλόμενη αναπαύεται.»

μεγεθών σχετικά με τα Μαθηματικά των σταθερών μεγεθών, το ίδιο εν γένει είναι και η διαλεκτική σκέψη σχετικά με τη μεταφυσική σκέψη».

Και παρακάτω, στη σελ. 201, βρίσκουμε: «Τα στοιχειώδη Μαθηματικά, τα Μαθηματικά δηλαδή των σταθερών μεγεθών, κινούνται μέσα στα όρια της τυπικής λογικής. Τα Μαθηματικά όμως των μεταβλητών μεγεθών που το σπουδαιότερο μέρος τους είναι ο απειροστικός λογισμός, δεν είναι ουσιαστικά τίποτε άλλο παρά η εφαρμογή της διαλεκτικής στις μαθηματικές σχέσεις».

Αξίζει ακόμη να αναφέρουμε την άποψη αυτού του ίδιου του Liebniz, βλ. το [145, p.397],

«Θα πρέπει πάντα να μην ξεχνάμε ότι οι ασύγκριτα μικρές ποσότητες, ακόμα και αν ληφθούν με τη λαϊκή τους έννοια, δεν είναι σε καμιά περίπτωση σταθερές και οριστικές ...» Επομένως μια ποσότητα όπως η dx είναι κάτι μεταβαλλόμενο, κάτι που εξαρτάται και μεταβάλλεται με το «χρόνο».

Σχήμα 6.3: Ecsher: Liberation. Από το σταθερό Καντοριανό στο μεταβαλλόμενο μη-Καντοριανό.

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι να δικαιώσουμε την άποψη ότι, πράγματι ο Απειροστικός Λογισμός είναι ακριβώς η εφαρμογή της διαλεκτικής και ιδιαίτερα του νόμου της άρνησης της άρνησης στις μαθηματικές σχέσεις.

6.2.5 Η Άρνηση της Άρνησης. (ΑΑ)

Στο τμήμα αυτό θα ξαναθεωρήσουμε τη γνωστή κατασκευή των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς, αλλά με μια καθαρά διαλεκτική πρόθεση και εντασιακή φόρτιση.

(I) Πρώτη εφαρμογή της άρνησης της άρνησης. Έστω ότι μας δίνεται το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$ ως ένα διαταγμένο σώμα, και το οποίο θεωρούμε ως ένα πραγματωμένο, σταθερό αντικείμενο, που απαρτίζεται επίσης από σταθερά στοιχεία, δηλαδή από μη-μεταβαλλόμενους ρητούς αριθμούς. Η υπόθεση αυτή γίνεται γιατί κάθε ρητός θα μπορούσε να θεωρηθεί ως μια κλάση ισοδυναμίας από ακέραιους. Την κλάση ισοδυναμίας αυτή, τη θεωρούμε εδώ ως ένα σταθερό στη μορφή «άτομο» ή «πρωτοστοιχείο» .

Πρώτος μας διαλεκτικός στόχος είναι να αρνηθούμε τη σταθερότητα των στοιχείων του $\mathbb{Q}$. Αυτό είναι δυνατόν να γίνει, αν θεωρήσουμε «μεταβαλλόμενους ρητούς», π.χ. σε διακριτό χρόνο, δηλαδή αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των ακολουθιών ρητών,

$$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} := \{\, f \mid f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}\}$$

Κάθε στοιχείο $f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ θεωρείται ως ένας «μεταβαλλόμενος ρητός σε διακριτό χρόνο» , δηλαδή $f = (q_n)_{n=1}^{\infty}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι, η άρνηση της σταθερότητας των στοιχείων του $\mathbb{Q}$ και η μετάβαση από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, έχει ως συνέπεια να χάσουμε πολλές αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{Q}$. Το $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ δεν είναι πλέον σώμα και ως δακτύλιος περιέχει διαιρέτες του μηδενός, δηλαδή στοιχεία που είναι διάφορα από το μηδέν αλλά το γινόμενό τους είναι μηδέν, π.χ. τα $(0, 1, 0, 1, \ldots)$ και $(1, 0, 1, 0, \ldots)$.

Το δεύτερο βήμα, η άρνηση της άρνησης της σταθερότητας, κατάλληλα εκτελεσμένο, έχει ως στόχο να μας απαλλάξει από τα προβλήματα που σχετίζονται με το $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, και που δημιουργούνται από την ελεύθερη μεταβολή των στοιχείων του. Δηλαδή θέλουμε να επανέλθουμε σε μια κατάσταση σταθερών στοιχείων (άρρητοι αριθμοί) που ποιοτικά αναμένουμε να βρίσκονται σε ψηλότερο επίπεδο από αυτό των ρητών.

Κάθε άρρητος λοιπόν εμφανίζεται ως ένα ενεστωτικό τελειωμένο άπειρο, μεταβαλλόμενων στοιχείων του κατώτερου ιεραρχικού επιπέδου (ρητοί), που στη μεταβολή τους εμφανίζουν χαρακτηριστικά δυναμικού απείρου, βλ. και σελ. 62.

Είναι προφανές ότι μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, ταυτίζοντας το $\mathbb{Q}$ με το σύνολο των σταθερών ακολουθιών ρητών, $\mathbb{Q}$.

6.2.1 Ορισμός. Μια ακολουθία ρητών $f = (q_n)$ λέγεται **ακολουθία του Cauchy** ανν για κάθε θετικό ρητό $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε:

$$n, m > n_0 \quad \text{συνεπάγεται ότι} \mid q_n - q_m \mid < \varepsilon$$

δηλαδή $\lim\limits_{n,m\to\infty} \mid q_n - q_m \mid = 0$.

Έστω τώρα $\mathscr{C}_0$, το σύνολο όλων των ακολουθιών Cauchy που συγκλίνουν στο μηδέν και $\mathscr{C}$ το σύνολο όλων των ακολουθιών Cauchy.[9] Με τη βοήθεια του $\mathscr{C}_0$, θα ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $\mathscr{C}$, η οποία, στην ουσία, θα ταξινομεί τις ακολουθίες του Cauchy στην ίδια κλάση ισοδυναμίας, εφ' όσον προσεγγίζουν τον ίδιο «ιδεατό αριθμό» , υπάρχοντος ή μη στο $\mathbb{Q}$. Τελικά, η κλάση ισοδυναμίας, π.χ. όλων των ακολουθιών Cauchy που συγκλίνουν στο $\sqrt{2}$ θα παρουσιάζεται ως ένα ευσταθές «μόριο» (μια κλάση ισοδυναμίας με ετικέτα $\sqrt{2}$, που μόνο στο εσωτερικό της επιτρέπεται η μεταβολή!), που αποτελείται πρακτικά από άπειρο αριθμό μεταβαλλόμενων ατόμων, στοιχείων δηλαδή του προηγούμενου ιεραρχικού επιπέδου οργάνωσης της «μαθηματικής ύλης».

Η επιζητούμενη λοιπόν σταθερότητα θα προκύψει μέσα από τον ορισμό μιας κατάλληλης σχέσης ισοδυναμίας.

6.2.2 Ορισμός. Έστω $f, g \in \mathscr{C}$. Τότε,

$$f \approx_{\mathscr{C}} g \quad \text{ανν} \quad f - g \in \mathscr{C}_0$$

6.2.3 Πρόταση. *Η σχέση $\approx_{\mathscr{C}}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου όλων των ακολουθιών του Cauchy.*

Απόδ. Η $\approx_{\mathscr{C}}$ είναι φανερό ότι είναι ανακλαστική και συμμετρική. Θα δείξουμε ότι είναι και μεταβατική. Έστω $f = (a_n), g = (b_n), h = (c_n) \in \mathscr{C}$ και έστω ότι $f \approx_{\mathscr{C}} g$ και $g \approx_{\mathscr{C}} h$. Τότε, αν θέσουμε $d_n := a_n - b_n$ και $e_n := b_n - c_n$ έχουμε, εξ υποθέσεως ότι, $d_n \longrightarrow 0$ και $e_n \longrightarrow 0$. Αλλά

$$d_n + e_n = a_n - b_n + b_n - c_n = a_n - c_n$$

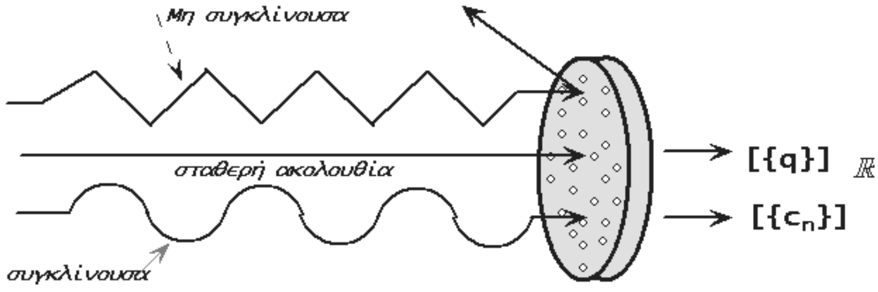
και επειδή $d_n + e_n \longrightarrow 0$ έχουμε τελικά $(a_n) \approx_{\mathscr{C}} (c_n)$. ⊣▮

6.2.4 Ορισμός. Ορίζουμε τώρα το $\mathbb{R}$ ως το ακόλουθο σύνολο πηλίκο: $\mathbb{R} := \mathscr{C} / \approx_{\mathscr{C}}$

Την παραπάνω διαδικασία αποκατάστασης της σταθερότητας, μπορούμε να την παραστήσουμε εικονικά ως εξής: Με ευθείες γραμμές παριστάνουμε τις σταθερές ακολουθίες, με κυματοειδείς γραμμές τις ακολουθίες του Cauchy και

[9] Το σύνολο $\mathscr{C}$ είναι ένας δακτύλιος, το δε σύνολο $\mathscr{C}_0$ είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες στο δακτύλιο $\mathscr{C}$, δηλ. **(1)** Αν $(r_n), (s_n) \in \mathscr{C}_0$ τότε και $(r_n + s_n) \in \mathscr{C}_0$ και **(2)** Αν $(r_n) \in \mathscr{C}_0$ και $(s_n) \in \mathscr{C}$ τότε $(r_n) \cdot (s_n) = (r_n \cdot s_n) \in \mathscr{C}_0$.

με οδοντωτές γραμμές τις ακολουθίες που δεν είναι Cauchy (αποκλίνουσες και εναλλάσουσες ακολουθίες). Τότε,



Σχήμα 6.4: Το «φίλτρο» του Cauchy: Από το φίλτρο περνάνε μόνον οι ακολουθίες του Cauchy, οι οποίες ταυτόχρονα ταξινομούνται στις κατάλληλες κλάσεις ισοδυναμίας.

Με τον τρόπο αυτό, όλες οι ακολουθίες του Cauchy που, με μια απειροδυναμική διαδικασία, προσεγγίζουν σε κάποιο ιδεατό αριθμό, π.χ. τον $\sqrt{2}$, αποτελούν μια ολόκληρη κλάση ισοδυναμίας, στην ετικέτα της οποίας υπάρχει το «όνομα-σύμβολο» $\sqrt{2}$. Ο αριθμός $\sqrt{2}$, ως σύνολο ακολουθιών του Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που κι αυτές με τη σειρά τους είναι σύνολα ρητών, βρίσκεται σε ψηλότερο ιεραρχικό επίπεδο οργάνωσης της «μαθηματικής ύλης» από ό,τι οι ρητοί. Το τελικό προϊόν είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ και απαρτίζεται πλέον από οντότητες που θεωρούνται σταθερές και υπακούουν στα αξιώματα ενός διαταγμένου, Αρχιμηδείου σώματος. Η Αρχιμήδεια φύση του $\mathbb{R}$, απαγορεύει την ύπαρξη απειροστών στο $\mathbb{R}$. Απαγορεύει δηλαδή τη θέαση στο εσωτερικό μικροσκοπικό επίπεδο του $\mathbb{R}$.

Ο αξιωματικός τρόπος θεώρησης του $\mathbb{R}$ είναι ένας ολιστικός-δομικός και μη-στοιχειακός τρόπος θεώρησης και χαρακτηρισμού των στοιχείων του $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι θεωρούμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}$, όχι ως σύνολα-κλάσεις ισοδυναμίας, αλλά ως άτομα, η συμπεριφορά των οποίων καθορίζεται από τα αξιώματα της δομής του $\mathbb{R}$. Η μετάβαση από το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ είναι μια μετάβαση από έναν ποιοτικά κατώτερο τρόπο αντίληψης σ' έναν ποιοτικά ανώτερο. Πιο συγκεκριμένα στον κατώτερο τρόπο αντίληψης έχουμε:

(i) Αναλυτική θεώρηση στο επίπεδο οργάνωσης του $\mathbb{Q}$. Οι ρητοί αριθμοί θεωρούνται ως σύνολα (κλάσεις ισοδυναμίας) στοιχείων του προηγούμενου ιεραρχικού επιπέδου οργάνωσης, που εδώ είναι το σύνολο των ακέραιων $\mathbb{Z}$. Κάθε ρητός λοιπόν καθορίζεται εκτασιακά, με το καθορισμό των στοιχείων της κλάσης ισοδυναμίας που τον ορίζουν. Καθορίζεται δηλαδή στοιχειακά.

(ii) Ολιστική θεώρηση στο επίπεδο οργάνωσης του $\mathbb{Q}$. Οι ρητοί θεωρούνται ολιστικά, ως άτομα χωρίς στοιχεία (πρωτοστοιχεία (urelements)), ο δε καθορισμός τους γίνεται όχι με στοιχειακό και εκτασιακό τρόπο, αλλά με εντασιακό-δομικό τρόπο, από την αξιωματική δομή του $\mathbb{Q}$.

Στο ποιοτικά ανώτερο επίπεδο αντίληψης έχουμε πάλι:
(iii) Αναλυτική θεώρηση στο επίπεδο οργάνωσης του $\mathbb{R}$. Οι πραγματικοί αριθμοί θεωρούνται ως σύνολα (κλάσεις ισοδυναμίας) στοιχείων του προηγούμενου ιεραρχικού επιπέδου οργάνωσης, που είναι το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$. Κάθε πραγματικός λοιπόν καθορίζεται εκτασιακά με τον καθορισμό των στοιχείων της κλάσης ισοδυναμίας που τον ορίζουν. Καθορίζεται δηλαδή στοιχειακά.
(iv) Ολιστική θεώρηση στο επίπεδο οργάνωσης του $\mathbb{R}$. Οι πραγματικοί θεωρούνται ολιστικά, δηλαδή ως άτομα χωρίς στοιχεία (πρωτοστοιχεία), ο δε καθορισμός τους γίνεται όχι κατά στοιχειακό τρόπο, αλλά με εντασιακό-δομικό τρόπο από την αξιωματική δομή του $\mathbb{R}$.

Πρέπει ακόμα να σημειωθεί αν $r = [r_n] \in \mathbb{R}$ είναι ένας άρρητος αριθμός, π.χ. ο $\sqrt{2}$, τότε αν ο $\sqrt{2}$ θεαθεί με έναν ποιοτικά ανώτερο τρόπο, δηλαδή ολιστικά-δομικά, τότε ο $\sqrt{2}$ παρουσιάζεται ως μια τελειωμένη, **ενεστωτικά άπειρη** ολότητα στοιχείων του προηγούμενου επιπέδου οργάνωσης, του $\mathbb{Q}$. Αν όμως ο $\sqrt{2}$ θεαθεί από μια αναλυτική-στοιχειακή σκοπιά, δηλαδή από έναν ποιοτικά κατώτερο τρόπο, τότε το $\sqrt{2}$ παρουσιάζεται ως μια **έν δυνάμει άπειρη** οντότητα στοιχείων του $\mathbb{Q}$, δηλαδή των προσεγγιζουσών στο $\sqrt{2}$ ακολουθιών του Cauchy. Ετσι το $\sqrt{2}$ παρουσιάζεται ως το **«είναι του γίγνεσθαι»** ενώ η ακολουθία αντιπρόσωπος (r_n) ως το **«γίγνεσθαι του είναι».**

(II) Δεύτερη εφαρμογή της άρνησης της άρνησης.

Ο στόχος μας κατά τη δεύτερη εφαρμογή της βασικής διαλεκτικής αρχής, της άρνησης της άρνησης, είναι να πάρουμε, πέρα από συμβατικούς πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ και νέους που να είναι «άπειρα μικροί» (απειροστά) και άλλους που να είναι «άπειρα μεγάλοι» , διατηρώντας όμως, στα πλαίσια του δυνατού, την αλγεβρική δομή του σώματος. Μάλιστα αν θέλουμε το τελικό προϊόν, να το ονομάσουμε «μη- συμβατικοί πραγματικοί αριθμοί» θα πρέπει να πληρούνται τουλάχιστον τα αξιώματα πρώτης τάξης, αυτά δηλαδή, που η διατύπωσή τους δεν περιέχει ποσοδείκτες που αναφέρονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Η άρνηση της σταθερότητας των στοιχείων του $\mathbb{R}$ μας υποχρεώνει ξανά, να θεωρήσουμε το σύνολο των μεταβαλλόμενων πραγματικών σε διακριτό χρόνο, δηλαδή το σύνολο,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{\, f \mid f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

Το σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ μπορούμε να το διαμερίσουμε ως ακολούθως:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathscr{C} \cup \mathscr{A} \cup \mathscr{E},$$

όπου $\mathscr{C}$ είναι οι συγκλίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών, $\mathscr{A}$ είναι οι αποκλίνουσες ακολουθίες πραγματικών αριθμών και $\mathscr{E}$ είναι οι υπόλοιπες εναλλάσσουσες ακολουθίες (οι «κακές ακολουθίες»).

Επειδή το $\mathbb{R}$ είναι πλήρες σώμα, μια δεύτερη εφαρμογή της διαδικασίας που περιγράφουμε στο (I) θα μας έδινε πάλι το $\mathbb{R}$. Έτσι αν θέλουμε να πάρουμε απειροστά, όταν αρνηθούμε τη μεταβλητότητα του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το λεπτότερο δυνατό φίλτρο που διατηρεί τα αξιώματα πρώτης τάξης του $\mathbb{R}$ και δίνει τις λεπτότερες ή μικρότερες κλάσεις ισοδυναμίας. Θα μπορούσαμε βεβαίως να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας που οι κλάσεις της να είναι μονοσύνολα, να περιέχουν δηλαδή μια ακριβώς ακολουθία, δηλαδή:

$$a_n \approx b_n \quad \text{ανν} \quad a_n = b_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Τότε όμως θα παίρναμε πάλι το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, του οποίου η ελεύθερη και ανεξέλεγκτη μεταβλητότητα το κάνει να είναι δακτύλιος και όχι σώμα. Για παράδειγμα, αν

$$a_n := \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 2k-1 \\ 0 & \text{αν } n = 2k \end{cases} \quad \text{και} \quad b_n := \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 2k-1 \\ 1 & \text{αν } n = 2k \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots$$

τότε $(a_n)(b_n) = (0, 0, 0, \ldots) \equiv 0$ αλλά ούτε η (a_n), ούτε η (b_n) είναι μηδέν. Άρα το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ έχει διαιρέτες του μηδενός. Ζητάμε λοιπόν μια σχέση ισοδυναμίας, με τις λεπτότερες δυνατές κλάσεις, που να περιορίζουν την ανεξέλεκτη μεταβλητότητα των μεταβαλλόμενων στοιχείων του δακτυλίου, και ως συνέπεια να εξαφανίζουν ταυτόχρονα, μαζί με άλλα προβλήματα, και το πρόβλημα των διαιρετών του μηδενός. Ας δούμε όμως ποιος είναι ο συνολικός προβληματισμός που θα μας οδηγήσει στον ορισμό της ζητούμενης κατάλληλης σχέσης ισοδυναμίας.

6.2.6 Η Διάσπαση των Ατόμων του $\mathbb{R}$.

Λαμβάνοντας υπόψη την πληρότητα[10] του $\mathbb{R}$, είναι φανερό ότι, αν θέλουμε απειροστά, αυτά θα πρέπει να δημιουργηθούν από τη διάσπαση των ατόμων του $\mathbb{R}$ αφού στο $\mathbb{R}$, ως πλήρες διατεταγμένο σώμα, δεν υπάρχουν θέσεις προς κατάληψη. Είναι αρκετό να θεωρήσουμε την κλάση ισοδυναμίας των ακολουθιών Cauchy που συγκλίνουν στο μηδέν. Είναι διαισθητικά καθαρό ότι αν θέλουμε να δημιουργήσουμε απειροστά, αυτά μάλλον θα πρέπει να δημιουργηθούν «εκ του μηδενός», παρά τη ρήση "ex nihilo nihil" (τίποτα δεν προέρχεται εκ του μηδενός), διασπώντας τη κλάση ισοδυναμίας [0] του «ατόμου» του μηδενός, σε άλλες λεπτότερες υποκλάσεις. Αυτό μπορεί να γίνει, αν διακρίνουμε τα στοιχεία της [0], δηλαδή τις συγκλίνουσες στο μηδέν ακολουθίες, αναφορικά με τα ακόλουθα δύο κριτήρια:

(1) *Την ταχύτητα σύγκλισης των ακολουθιών* και

(2) *Την ασυμπτωτική συμπεριφορά ή τάξη μεγέθους των ακολουθιών.*

Τι σημαίνει όμως ταχύτητα σύγκλισης και τι ασυμπτωτική συμπεριφορά; Ας δούμε πρώτα ένα παράδειγμα: Η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει στο μηδέν με πολύ μικρότερη ταχύτητα από ό,τι η $\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Η κατάλληλη έννοια που ενσωματώνει

[10] Η πληρότητα είναι μια ιδιότητα δευτέρας τάξεως και γι'αυτό δε διατηρείται αναγκαία από μοντέλο σε μοντέλο,

τον προβληματισμό της ταχύτητας σύγκλισης, δίνεται μέσα από την έννοια του **ασυμπτωτικού παράγοντα σύγκλισης**. Έστω μια συγκλίνουσα στο a ακολουθία (a_n). Τότε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a - a_{n+1}}{a - a_n} \equiv \varrho.$$

Το όριο αυτό ϱ λέγεται **ασυμπτωτικός παράγοντας σύγκλισης** και είναι δυνατόν να δειχτεί ότι $|\ \varrho\ | \leq 1$. Όσο το ϱ βρίσκεται κοντύτερα στο μηδέν, τόσο η ακολουθία συγκλίνει ταχύτερα, ενώ όσο κοντύτερα βρίσκεται στο 1, τόσο αργότερη είναι η σύγκλιση. Έτσι, αν $|\ \varrho\ | = 1$, τότε, για μεγάλα n, έχουμε $|\ a - a_{n+1}\ | \simeq |\ a - a_n\ |$ και άρα η σύγκλιση είναι πολύ αργή, ενώ αν $|\ \varrho\ | < 1$, τότε για μεγάλα n, έχουμε $(a - a_{n+1}) \simeq \varrho(a - a_n)$ και επομένως τελικά κάθε όρος της ακολουθίας είναι περίπου $|\ \varrho\ |$ φορές κοντύτερα στο όριο a από ό,τι ο προηγούμενος όρος. Είναι ακόμα δυνατόν να αποδειχτεί ότι:

(i) Αν ο ρ υπάρχει, τότε,

$$\varrho = \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}}, \quad n \geq 3$$

(ii) Αν $|\ \varrho\ | < 1$ και k είναι ο ελάχιστος ακέραιος τέτοιος ώστε $|\ \varrho\ |^k < \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1$, τότε $|\ \alpha - \alpha_{n+k}\ | < \varepsilon\ |\ \alpha - \alpha_n\ |$.

Αναφορικά με την ταχύτητα σύγκλισης, έχουμε τελικά την ακόλουθη διάταξη που μπορεί να γίνει όσο πυκνή θέλουμε:

$$\begin{aligned} 0, \ldots, \left(\tfrac{1}{e^{e^{n^2}}}\right), \left(\tfrac{1}{e^{e^n}}\right), \ldots, \quad \left(\tfrac{1}{e^{n^2}}\right), \left(\tfrac{1}{e^n}\right), \ldots, \\ \left(\tfrac{1}{n^2}\right), \left(\tfrac{1}{n}\right), \ldots, \quad \left(\tfrac{1}{\ln n}\right), \left(\tfrac{1}{\ln\ln n}\right), \ldots, \end{aligned} \tag{6.1}$$

Όλες οι παραπάνω ακολουθίες διακρίνονται ως προς τη ταχύτητα σύγκλισης (η εκθετικοποίηση επιταχύνει τη σύγκλιση, η δε λογαριθμοποίηση την επιβραδύνει) και δίνουν διαφορετικά στοιχεία στο εσωτερικό της [0]. Ακόμα, παρόλο που οι ακολουθίες $\left(\frac{1}{n}\right)$ και $\left(\frac{2}{n}\right)$ έχουν την ίδια ταχύτητα σύγκλισης, η $\left(\frac{1}{n}\right)$ προπορεύεται σταθερά από την $\left(\frac{2}{n}\right)$ και αν, για παράδειγμα, η $\left(\frac{1}{n}\right)$ παριστάνει ένα απειροστό ε, τότε η $\left(\frac{2}{n}\right)$ θα διακρίνεται από την $\left(\frac{1}{n}\right)$ ως προς την ασυμπτωτική της συμπεριφορά και θα παριστάνει το απειροστό 2ε [11].

Είναι φανερό ότι η ταχύτητα και η ασυμπτωτική συμπεριφορά μιας ακολουθίας καθορίζονται από τη συμπεριφορά της ακολουθίας πάνω σε μια «ουρά» του πεδίου ορισμού της $\mathbb{N}$. Η αλλαγή πεπερασμένου πλήθους όρων μιας ακολουθίας δεν επηρεάζει ούτε την τελική της ταχύτητα, ούτε την ασυμπτωτική της συμπεριφορά. Άρα οι «ουρές» που είναι συμπληρώματα πεπερασμένων όρων της ακολουθίας καθορίζουν τις δύο βασικές μας ιδιότητες. Αυτό μας οδηγεί στο να θεωρήσουμε την κλάση $\mathscr{F}$,

$$\mathscr{F} := \{\ T \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} - T \quad \text{είναι πεπερασμένο}\}$$

[11] Για θέματα ταχύτητας σύγκλισης και σχετικά θέματα βλ. [47, σελ. 469]

όλων των «ουρών» του $\mathbb{N}$, και να εξετάζουμε τη συμπεριφορά των ακολουθιών πάνω στις «ουρές» $T \in \mathscr{F}$. Από την παραπάνω ανάλυση είναι φανερό ότι δύο ακολουθίες που ταυτίζονται πάνω σε μια ουρά $T \in \mathscr{F}$, που είναι δηλαδή ίσες τελικά για όλους τους δείκτες, έχουν και την ίδια τελική ταχύτητα σύγκλισης και την ίδια ασυμπτωματική συμπεριφορά. Είναι λογικό λοιπόν να ταυτίζουμε τέτοιες ακολουθίες. Η νέα κλάση ισοδυναμίας του μηδενός είναι κατά πολύ λεπτότερη από την αρχική και περιέχει *μόνον*, ακολουθίες που από ένα δείκτη και μετά έχουν όλους τους όρους ίσους με μηδέν, και επομένως θα μπορούσαμε να πούμε, ότι συγκλίνουν στο μηδέν με «άπειρη ταχύτητα». Ακριβέστερα, αν $[0]_{\Pi}$ είναι η παλιά κλάση ισοδυναμίας του μηδενός στο $\mathbb{R}$ και $[0]_N$ η νέα επί του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή,

$$[0]_N := \{(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \alpha_n = 0 \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0 \in \mathbb{N}\}$$

έχουμε ότι $\left(\frac{1}{n}\right) \in [0]_{\Pi}$ αλλά $\left(\frac{1}{n}\right) \notin [0]_N$. Το ίδιο συμβαίνει και με όλες τις ακολουθίες που εμφανίζονται στη διάταξη (6.1), σελ. 64, και οι οποίες αφού ανήκαν στην παλιά $[0]_{\Pi}$ αλλά δεν ανήκουν στη νέα $[0]_N$, αποτελούν τη βάση για την κατασκευή νέων «πραγματικών αριθμών», που όλοι τους είναι υποψήφιοι για το ρόλο των απειροστών. Έτσι τελείως φυσιολογικά και χωρίς στην ουσία περιθώρια διαφορετικής επιλογής, η αναζητούμενη σχέση ισοδυναμίας που θα διασπάσει τα άτομα του $\mathbb{R}$ και θα μας δώσει μη-συμβατικούς πραγματικούς αριθμούς είναι η ακόλουθη:

6.2.5 Ορισμός. Δύο ακολουθίες $f = (a_i)$ και $g = (b_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ θα λέγονται **ισοδύναμες** αν υπάρχει $T \in \mathscr{F}$ τέτοιο ώστε, $a_m = b_m$ για κάθε $m \in T$, δηλαδή

$$(a_i) \approx (b_j) \quad \text{ανν} \quad (\exists T \in \mathscr{F})(\forall m \in T)[a_m = b_m].$$

Υπάρχει όμως το πρόβλημα: Είναι η σχέση $\approx$ πράγματι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{R}^{\mathbb{T}}$; Η απάντηση είναι καταφατική. Θα αποδείξουμε όμως πρώτα την ακόλουθη πρόταση.

6.2.6 Πρόταση. *Η κλάση $\mathscr{F}$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\mathbb{N} \in \mathscr{F}$ *και* $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

(ii) $A \in \mathscr{F}$ *και* $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathscr{F}$.

(iii) $A, B \in \mathscr{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$.

Απόδ. **(i)** Είναι φανερό, αφού $\emptyset = \mathbb{N} - \mathbb{N}$ και το $\emptyset$ είναι πεπερασμένο. Επίσης $\mathbb{N} - \emptyset = \mathbb{N}$ είναι πάντοτε αριθμησίμως άπειρο. ⊣□

(ii) Πράγματι, $A \in \mathscr{F}$ συνεπάγεται ότι το $\mathbb{N} - A$ είναι πεπερασμένο. Αλλά $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{N} - B \subseteq \mathbb{N} - A$, άρα και το $\mathbb{N} - B$ είναι πεπερασμένο και άρα $B \in \mathscr{F}$. ⊣▯
(iii) Επειδή $(\mathbb{N} - A) \cup (\mathbb{N} - B) = \mathbb{N} - (A \cap B)$ και $\mathbb{N} - A$, $\mathbb{N} - B$ είναι πεπερασμένα αφού τα $A, B \in \mathscr{F}$, έχουμε επίσης ότι και το $\mathbb{N} - (A \cap B)$ είναι πεπερασμένο και έτσι $A \cap B \in \mathscr{F}$. ⊣▮

6.2.7 Πρόταση. *Η σχέση $\approx$ (Ορισμός 6.2.5) είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδ. Η ανακλαστική και η συμμετρική ιδιότητα είναι φανερές. Θα αποδείξουμε τη μεταβατική. Εστω $(a_n) \approx (b_n)$ και $(b_n) \approx (c_n)$. Τότε έχουμε: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathscr{F}$ και $B = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n = c_n\} \in \mathscr{F}$. Άρα $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n = c_n\} \in \mathscr{F}$ βλ. Πρόταση 6.2.6 (iii). Αλλά C $= \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = c_n\} \supseteq A \cap B$, άρα σύμφωνα με την (ii) (Πρόταση 6.2.6), $C \in \mathscr{F}$ και επομένως $(a_n) \approx (c_n)$ ⊣▮

6.2.8 Σχόλιο. Η κλάση $\mathscr{F}$ αλλά και κάθε κλάση υποσυνόλων που πληρεί τις ιδιότητες (i),(ii),(iii) (Πρόταση 6.2.6) λέγεται **φίλτρο**. Ο λόγος ίσως είναι ότι, κάθε φίλτρο ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\approx$ επί του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και επομένως και ένα σύνολο πηλίκο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx$ που είναι μια νέα «αφαίρεση» ή «μοριοποίηση» του αρχικού συνόλου. Διαισθητικά μπορούμε να φανταστούμε ότι, κάθε κλάση συνόλων με τις ιδιότητες του φίλτρου, έχει ως συνέπεια τη δημιουργία ενός «φίλτρου» με την καθομιλουμένη έννοια. Εκτός από τις γεωμετρικές ιδιότητες, όπως η δημιουργία κλάσεων ισοδυναμίας και η αναδόμηση τον στοιχείων, κάθε φίλτρο έχει και μια «λογική σημασία». Έτσι αν ερμηνεύσουμε τα υποσύνολα A στοιχεία του φίλτρου, ως την «έκταση» πάνω στην οποία ισχύει μια λογική πρόταση p, δηλ. $A := \{x \in \mathbb{N} \mid p(x)\}$ και τη σχέση «$\leq$» ως συνεπαγωγή, τότε η λογική ερμηνεία των αξιωμάτων του φίλτρου είναι η ακόλουθη:

(i) Οι ταυτολογίες είναι πάντοτε αληθείς, ενώ οι αντιφάσεις πάντοτε ψευδείς.

(ii) Αν μια πρόταση p είναι αληθής και $p \Rightarrow q$ τότε και η q είναι αληθής. Δηλαδή η ιδιότητα (ii) δεν είναι τίποτα άλλο από το γνωστό λογικό κανόνα συμπερασμού, modus ponens.

(iii) Τέλος η τρίτη ιδιότητα μας λέει ότι αν δύο προτάσεις p και q είναι αληθείς τότε και η σύζευξή τους είναι αληθής. Για το λόγο αυτό ένα φίλτρο λέγεται στα πλαίσια της λογικής και «παραγωγικό ή απαγωγικό σύστημα» (deductive system).

Μέσα από αυτό το «φίλτρο» λοιπόν, φιλτράρονται τα στοιχεία του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, με το να ταξινομούνται σε κλάσεις ισοδυναμίας, των αντίστοιχων στοιχείων που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα. Εστω για παράδειγμα ένα στοιχείο $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ και μια συγκεκριμένη ιδιότητα, π.χ. $p = \{x \mid x \geq 0\}$. Τότε αν οι όροι της ακολουθίας που έχουν την ιδιότητα p, αντιστοιχούν σ' ένα σύνολο δεικτών που ανήκει στο $\mathscr{F}$, δηλαδή αν $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \ \text{ έχει την ιδότητα } \ p\} \in \mathscr{F}$, τότε ολόκληρο το στοιχείο (a_n) διέρχεται από το «φίλτρο» και ταξινομείται στη κλάση ισοδυναμίας όλων των στοιχείων του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, που ικανοποιούν την ιδιότητα p και έχουν την ίδια ταχύτητα σύγκλισης. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται ένα νέο στοιχείο, του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx$ πλέον, που ικανοποιεί την ιδιότητα p.

Για να πούμε ότι μια ιδιότητα της δομής $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, διέρχεται από το «φίλτρο» και κληρονομείται και στη δομή $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx, +, \cdot, \leq)$, δεν πρέπει να υπάρχει στοιχείο του, που διερχόμενο από το φίλτρο, αποτελεί με άλλα στοιχεία, μια κλάση ισοδυναμίας που καταστρατηγεί την ιδιότητα p. Συνοψίζοντας λοιπόν, η ιδιότητα (i) (Πρόταση 6.2.6) στην ουσία μας λέει ότι: Αν για την (a_n) ισχύει ότι κάθε όρος της, έχει την ιδιότητα p, τότε και το ολιστικό στοιχείο (a_n) έχει την ιδιότητα p και επομένως διέρχεται του φίλτρου και ταξινομείται στη κλάση ισοδυναμίας όλων των στοιχείων του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, που έχουν τη συγκεκριμένη ιδιότητα και την ίδια ταχύτητα σύγκλισης. Αν όμως,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{ το } a_n \text{ έχει την ιδιότητα } p\} = \emptyset,$$

τότε και το στοιχείο (a_n) δεν έχει την ιδιότητα p.

Η ιδιότητα (ii)(Πρόταση 6.2.6), λέει ότι, αν η (a_n) έχει την ιδιότητα p, δηλαδή αν,

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ το } a_n \text{ έχει την ιδιότητα } p\} \in \mathscr{F}$$

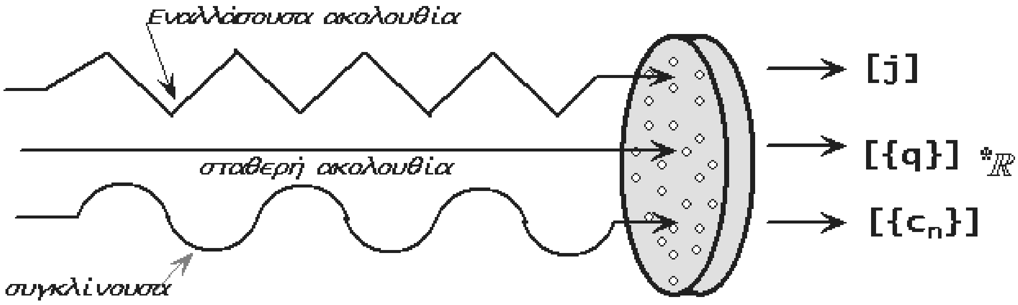
και το σύνολο δεικτών,

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ το } a_n \quad \text{έχει την ιδιότητα} \quad q\}$$

είναι υπερσύνολο του A, δηλαδή αν $p \Rightarrow q$, τότε η (a_n) έχει επίσης και την ιδιότητα q. Ετσι αν τελικά διέρχεται του φίλτρου μια πρόταση p, ταυτόχρονα διέρχονται και όλες οι προτάσεις που συνεπάγεται η p. Για παράδειγμα, για να είναι σώμα η δομή $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx, +, \cdot, \leq)$ αρκεί να διέρχονται του φίλτρου τα αξιώματα του σώματος. Τέλος η (iii) (Πρόταση 6.2.6) λέει ότι αν το στοιχείο (a_n), έχει την ιδιότητα p και q τότε διέρχεται από το φίλτρο και η ιδιότητα $p \wedge q$.

Το φίλτρο $\mathscr{F}$ και η σχέση ισοδυναμίας που συνεπάγεται, κατασκευάστηκαν με στόχο να εκφράσουν τον προβληματισμό των ταχυτήτων σύγκλισης και της ασυμπτωματικής συμπεριφοράς. Ωστόσο όμως δεν επιλύεται ούτε το πρόβλημα των διαιρετών του μηδενός, ούτε διατηρείται η ιδιότητα της τριχοτομίας.

6.2.9 Παράδειγμα. **(i)** Εστω $f = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ και $g = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$, τότε $f \cdot g = (0, 0, 0, \ldots)$ αλλά ούτε οι άρτιοι, ούτε οι περιττοί ανήκουν στο $\mathscr{F}$, έτσι τα στοιχεία f και g δεν σταθεροποιούνται γύρω ούτε από τη τιμή 0 ούτε από τη τιμή 1 και επομένως ούτε η f, ούτε η g δεν είναι μηδέν. Αν για παράδειγμα οι άρτιοι ανήκαν στο $\mathscr{F}$ τότε η f θα ήταν ίση με 1 και η g ίση με 0.



Σχήμα 6.5: Το υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$: Λόγω της λεπτότητας του υπερφίλτρου, όλες οι ακολουθίες (Cauchy, αποκλίνουσες, εναλλάσουσες) διέρχονται από το φίλτρο και ταξινομούνται σε κατάλληλες κλάσεις ισοδυναμίας.

(ii) Εστω

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ -1 & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases} \tag{6.2}$$

Αν επιθυμούμε να ισχύει η ιδιότητα της τριχοτομίας στο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\approx$, θα πρέπει να μπορούμε να αποφανθούμε, ποια ακριβώς από τις ακόλουθες σχέσεις ισχύει:

$$(f > 0) \vee (f = 0) \vee (f < 0).$$

Επειδή όμως ούτε οι άρτιοι ούτε οι περιττοί ανήκουν στο $\mathscr{F}$, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν $(f > 0)$, $(f = 0)$ ή $(f < 0)$.

Τα προβλήματα που παρουσιάζονται στο Παράδειγμα 6.2.9 μπορούν να επιλυθούν, αν δημιουργήσουμε ένα φίλτρο $\mathscr{F}_M$ που να είναι επέκταση του $\mathscr{F}$, δηλαδή $\mathscr{F}_M \supseteq \mathscr{F}$ και το οποίο να ταξινομεί όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ σε «μεγάλα» τα οποία θα απαρτίζουν το $\mathscr{F}_M$ και σε μικρά που θα ανήκουν στο $\mathscr{P}(\mathbb{N}) - \mathscr{F}_M$. Η απαίτηση $\mathscr{F}_M \supseteq \mathscr{F}$ γίνεται ώστε να διατηρήσουμε τους προβληματισμούς σχετικά με τη ταχύτητα σύγκλισης, την ασυμπτωτική συμπεριφορά αλλά και τις λογικές ιδιότητες που έχουν τα φίλτρα. Από την άλλη μεριά απαιτούμε το $\mathscr{F}_M$ να είναι φίλτρο για να έχουμε τελικά μια σχέση ισοδυναμίας, αλλά και ένα παραγωγικό σύστημα.

Με τη βοήθεια του Αξιώματος της Επιλογής και φροντίζοντας να τηρούμε τις ιδιότητες (i),(ii),(iii) (Πρόταση 6.2.6), μπορούμε να ταξινομήσουμε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ σε «μεγάλα» και σε «μικρά» που είναι συμπληρώματα μεγάλων. Ετσι για παράδειγμα, αν ταξινομήσουμε τους αρτίους ως μεγάλο σύνολο, τότε αναγκαστικά οι περιττοί θα ταξινομηθούν ως μικρό σύνολο και αντίστροφα. Αξίζει να σημειωθεί ότι *δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος ταξινόμησης*. Καταλήγουμε τελικά στον ακόκουθο ορισμό.

6.2.10 Ορισμός. Ένα **υπερφίλτρο** $\mathscr{F}_M$ επί του $\mathbb{N}$ είναι ένα φίλτρο τέτοιο ώστε[12] για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\text{ή} \quad A \in \mathscr{F}_M \quad \text{ή} \quad \mathbb{N} - A \in \mathscr{F}_M \tag{6.3}$$

6.2.11 Πρόταση. *Αν $\mathscr{F}_M$ είναι ένα υπερφίλτρο επί του $\mathbb{N}$ και $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ τότε $A \in \mathscr{F}_M \Rightarrow A_i \in \mathscr{F}_M$ για κάποιο $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Απόδ. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, $A_i \notin \mathscr{F}_M$. Επειδή το $\mathscr{F}_M$ είναι υπεφίλτρο έχουμε ότι $\mathbb{N} - A_i \in \mathscr{F}_M$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots n$. Αλλά τότε $\emptyset = A \cap (\mathbb{N} - A_1) \ldots \cap (\mathbb{N} - A_n) \in \mathscr{F}_M$ που είναι άτοπο αφού $\emptyset \notin \mathscr{F}_M$. ⊣

Ας δούμε τώρα με πιο τρόπο η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται ως προς το $\mathscr{F}_M$, λύνει τα προβλήματά μας. Εστω,

$$(a_n) \approx (b_n) \quad \text{ανν} \quad \{\, n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n \,\} \in \mathscr{F}_M \tag{6.4}$$

και ας θεωρήσουμε πάλι τις περιπτώσεις στο Παράδειγμα 6.2.9. Επειδή με οποιαδήποτε ταξινόμηση (δεν υπάρχει μια μοναδική), ένα από τα δύο σύνολα, των αρτίων ή των περιττών, θα ταξινομηθεί ως «μεγάλο» ενώ το άλλο ως «μικρό», θα έχουμε:

- $f \approx 0$ αν οι περιττοί ανήκουν στο $\mathscr{F}_M$, οπότε $g \approx 1$,
- $f \approx 1$ αν οι άρτιοι ανήκουν στο $\mathscr{F}_M$, οπότε $g \approx 0$.

Επίσης, αν υποθέσουμε ότι οι άρτιοι ανήκουν στο $\mathscr{F}_M$, τότε για το (ii) (Παράδειγμα 6.2.9) έχουμε,

$$f \approx -1 \quad \text{και έτσι} \quad f < 0.$$

Ετσι λοιπόν *η σχέση ισοδυναμίας που βασίζεται στο $\mathscr{F}_M$, λύνει όλα τα προβλήματα και ενσωματώνει τους σχετικούς προβληματισμούς για τη ταχύτητα σύγκλισης και την ασυμπτωτική συμπεριφορά.* Τελικά οδηγούμαστε φυσιολογικά στον ακόλουθο ορισμό:

[12] Συνήθως 'υπερφίλτρο' και 'μεγιστικό φίλτρο' είναι ταυτόσημες έννοιες. Φίλτρα που ικανοποιούν την (6.3), λέγονται **πρώτα φίλτρα.** Για άλγεβρες του Boole, όπως π.χ. η $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, οι έννοιες του υπερφίλτρου και του πρώτου φίλτρου συμπίπτουν.

6.2.12 Ορισμός. (i) Εστω $f = (a_n), g = (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ τότε,

$$\boxed{f \approx g \quad \text{άνν} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathscr{F}_M}$$

Θεωρώντας τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) ως μεταβαλλόμενους πραγματικούς αριθμούς σε διακριτό χρόνο $\mathbb{N}$, η πιο πάνω σχέση στην ουσία ταυτίζει δύο μεταβαλλόμενους πραγαμτικούς, αν παίρνουν ίσες τιμές για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, δηλαδή σύνολο χρονικών στιγμών που ανήκει στο $\mathscr{F}_M$.

(ii) Το σύνολο των **μη-συμβατικών αριθμών** ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{{}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \approx}$$

Αν δε συμβολίζουμε με $[a_n]$ την κλάση ισοδυναμίας της (a_n) τότε :

- $[a_n] = [b_n] \quad$ ανν $\quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n = b_n\} \in \mathscr{F}_M$.
- $[a_n] \leq [b_n] \quad$ ανν $\quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \leq b_n\} \in \mathscr{F}_M$.
- $[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n]$.
- $[a_n] \cdot [b_n] = [a_n \cdot b_n]$.
- $[0]$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης,
- $[1]$ είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού και $[-a_n]$ είναι το αντίθετο στοιχείο του $[a_n]$.

Αν τώρα $[a_n] \neq [0]$ δηλαδή αν $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} \in \mathscr{F}_M$ και,

$$c_n := \begin{cases} a_n^{-1} & \text{αν } a_n \neq 0 \\ 0 & \text{αν } a_n = 0 \end{cases}$$

τότε $[a_n]^{-1} = [c_n]$ και $[a_n] \cdot [c_n] = [1]$ αφού $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \cdot c_n = 1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\} \in \mathscr{F}_M$

Οι παραπάνω ορισμοί είναι εύκολο να δειχτεί ότι δεν εξαρτώνται από τις ακολουθίες - αντιπροσώπους $(a_n), (b_n)$.

Είναι εύκολο να δείξει κανείς, ότι η δομή $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ είναι ένα διαταγμένο σώμα, βλ. Θεώρημα 6.2.13.

Με την κατασκευή του ${}^*\mathbb{R}$ συμπληρώθηκε η διαλεκτική πορεία. Αν επαναλάβουμε επί του ${}^*\mathbb{R}$ την ίδια διαδικασία, της άρνησης της άρνησης, δεν παίρνουμε άλλα νέα αντικείμενα, αφού οι κλάσεις ισοδυναμίας που παράγονται από την $\approx$, είναι οι λεπτότερες δυνατές, αναφορικά με το χρόνο $\mathbb{N}$, που ταυτόχρονα διατηρούν την αλγεβρική δομή του σώματος. Ετσι *δοθέντος ότι χρησιμοποιούμε διακριτό χρόνο, ή διακριτό πεδίο μεταβολής* π.χ. το $\mathbb{N}$, το ${}^*\mathbb{R}$

παρουσιάζεται ως ο τελικός διαλεκτικός στόχος. Αλλάζοντας όμως πεδίο μεταβολής $\mathbb{N}$ με άλλα, π.χ. ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ έχουμε καινούργια διαλεκτικά σχήματα και «πραγματικούς αριθμούς» που στη φύση τους είναι τυχαίες μεταβλητές, (βλ. [59, 60]), όπου εξετάζονται παρόμοια θέματα, αλλά σε πιο προχωρημένο επίπεδο, βλ. επίσης και το [23].

Επειδή το $\mathscr{F}_M$ παράγει τις λεπτότερες δυνατές κλάσεις ισοδυναμίας, δικαίως ονομάζεται υπεφίλτρο.

Βλέπουμε ότι η αναγκαιότητα για την επίλυση του προβλήματος των διαιρετών του μηδενός, αλλά και της ιδιότητας της τριχοτομίας μας υποχρεώνει να ταξινομήσουμε όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, σε αντίθεση με την περίπτωση του φίλτρου του Cauchy όπου υπάρχει ταξινόμηση μόνον για τις συγκλίνουσες ακολουθίες. Για παράδειγμα η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ και οι ισοδύναμές της δίνουν, έστω το απειροστό ε, η δε $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ το ε^2, μεταξύ δε του ε και του ε^2, υπάρχει για παράδειγμα το απειροστό που προέρχεται από την ακολουθία $\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$ κ.λπ. Επίσης η κλάση ισοδυναμίας $[n]$ μας δίνει τον άπειρα μεγάλο αριθμό $H = \frac{1}{\varepsilon}$, κ.λπ. Από την άλλη μεριά η εναλλάσουσα ακολουθία,

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{αν } n \in \mathbb{N}_{3k} := \{3k \mid k = 0, 1, 2 \ldots\} \\ 0 & \text{αν } n \in \mathbb{N}_{3k+1} \\ -1 & \text{αν } n \in \mathbb{N}_{3k+2} \end{cases} \tag{6.5}$$

εξαναγκάζεται από την ύπαρξη του υπερφίλτρου, να πάρει μόνον μια τιμή (τη τιμή με την οποία είναι ίση για ένα «μεγάλο» χρονικό διάστημα.) και να ταξινομηθεί στη κλάση ισοδυναμίας της σταθερής αυτής τιμής. Αυτό το συμπεραίνουμε από την Πρόταση 6.2.11. Με τον τρόπο αυτό «απαλλασσόμαστε» από τις ενοχλητικές εναλλάσουσες ακολουθίες «εξορίζοντάς τες» σε μια κλάση ισοδυναμίας κατά ένα συνεπή τρόπο. Με άλλα λόγια η ύπαρξη του υπερφίλτρου επιβάλλει ένα «αυστηρό καθεστώς» και μια οστεοποίηση επί του $\mathbb{R}$, με άκαμπτη εξωτερικά τάξη. *Κάθε μεταβολή έχει περιοριστεί στο εσωτερικό των κλάσεων ισοδυναμίας και γι' αυτό είναι εξωτερικά αθέατη, αντιλαμβανόμαστε δηλαδή το* $\mathbb{R}$, *ως μια δομή με σταθερά στοιχεία. Δηλαδή στο* ${}^*\mathbb{R}$ *η μεταβλητότητα και η ανάπτυξη, επιτρέπεται στο εσωτερικό των κλάσεων ισοδυναμίας, ενώ οι ίδιες οι κλάσεις εξωτερικά παρουσιάζουν μια απόλυτη σταθερότητα.* Η όλη κατάσταση είναι ανάλογη μ' αυτήν ενός ευσταθούς μορίου, στο εσωτερικό του οποίου υπάρχουν μεταβαλλόμενα ηλεκτρόνια, λεπτόνια και άλλα σώματια.

Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι οι αλγεβρικές δομές του δακτυλίου, της ομάδας, και γενικότερα του μονοειδούς, είναι δομές που επιτρέπουν την έννοια της μεταβολής στο εσωτερικό τους και γι' αυτό οι αναπαραστάσεις τους σχετίζονται με χώρους συναρτήσεων. Είναι αξιοσημείωτο ότι το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ αλλά και κάθε κλάση ισοδυναμίας ενός πεπερασμένου στοιχείου είναι δακτύλιοι.

Για το ${}^*\mathbb{R}$ υπάρχουν τρεις θεάσεις: Μια μακροσκοπική «διά γυμνού οφθαλμού», μια μικροσκοπική με «απειροστικό μικροσκόπιο» και μια τελεσκοπική με «άπειρης δύναμης τηλεσκόπια». Διά γυμνού οφθαλμού αντιλαμβανόμαστε τις κλάσεις ισοδυναμίας των πεπερασμένων υπερπραγματικών που συμπίπτουν με τους συμβατικούς πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$. *Στην περίπτωση αυτή της μακροσκοπικής θέασης η ισότητα στην ουσία συμπίπτει με τη σχέση '$\approx$' του άπειρα κοντά.* Από την άλλη μεριά, με τα μικροσκόπια άπειρης διαχωριστικής δύναμης, αντιλαμβανόμαστε απειροστικές μεταβολές και λεπτομέρειες στο εσωτερικό των κλάσεων ισοδυναμίας του $\mathbb{R}$, δηλαδή βλέπουμε απειροστά, ενώ με τα τηλεσκόπια άπειρα μεγάλους αριθμούς. *Η ισότητα στην περίπτωση αυτή είναι η απόλυτη ισότητα '$=$'.*

Απ' όλα τα παραπάνω βγαίνει αβίαστα το εξαιρετικά σπουδαίο συμπέρασμα–σύνθημα[13] ότι:

Τα στοιχεία έχουν δομή, και επομένως,
οι δομές συγκροτούνται σε επίπεδα πραγματικότητας !

Έξ 'άλλου οποιαδήποτε επισύναψη σημείων π.χ. στο $\mathbb{R}$ το οποίο είναι πλήρες και «συνεχές» δε θα μπορούσε να είναι δυνατή παρά μόνον αν τα ιδεατά αυτά σημεία προέρχονται από μια κάποια «μικροσκοπική ή μεγασκοπική πραγματικότητα!». Αυτό ισχύει και για τους υπερπραγματικούς πραγματικούς αριθμούς αλλά και για τους μιγαδικούς αριθμούς βλ.[67, σελ. 224]. Με το θέμα όμως αυτό θα ασχοληθούμε και στη συνέχεια.

6.2.7 Η Δομή των μη-Συμβατικών Πραγματικών Αριθμών και οι Σχετικές Γεωμετρικές Παραστάσεις

Με τη χρήση των ιδιοτήτων του $\mathscr{F}_M$, είναι σχετικά εύκολο να αποδείξει κανείς το ακόλουθο θεώρημα.

6.2.13 Θεώρημα. *Το $^*\mathbb{R}$ είναι ένα διαταγμένο σώμα.*

Απόδ. Για παράδειγμα η επιμεριστική ιδιότητα αποδεικνύεται ως εξής: Εστω $[a_n], [b_n], [c_n] \in {}^*\mathbb{R}$, τότε,

$$\begin{aligned}
[a_n]\cdot([b_n]+[c]) &= [a_n]\cdot([b_n+c_n]) \\
&= [a_n\cdot(b_n+c_n)] \\
&= [(a_n\cdot b_n)+(a_n\cdot c_n)] \\
&= [a_n]\cdot[b_n]+[a_n]\cdot[c_n]. \quad \dashv
\end{aligned}$$

[13] Το συμπέρασμα αυτό είναι ένα κεντρικό σημείο για τα σύγχρονα μαθηματικά, και είναι ίσως η ουσία των Θεωρημάτων Löwenheim – Skolem στη Μαθηματική Λογική.

Το $\mathbb{R}$ μπορεί να εμφυτευτεί στο ${}^*\mathbb{R}$ ως εξής :

$$i : \mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R} \;\; /\!\!/ \;\; r \longmapsto i(r) = [r, r, \ldots, r, \ldots]$$

6.2.14 Πρόταση. *Η εμφύτευση $i : \mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R}$ είναι ένας ομομορφισμός που διατηρεί τη διάταξη. Με διαφορετική διατύπωση, τα $\mathbb{R}$ και $i(\mathbb{R})$ είναι ισομορφικά σώματα και το $i(\mathbb{R})$ είναι ένα γνήσιο υποσώμα του ${}^*\mathbb{R}$.*

Απόδ. Η συνάρτηση i είναι $1-1$, γιατί αν $i(r) = i(s)$ τότε $[r, r, \ldots] = [s, s, \ldots]$ και άρα $r = s$. Είναι ακόμα φανερό ότι η $i(\cdot)$ διατηρεί τις πράξεις και τη διάταξη. Για παράδειγμα,

$$i(r) + i(s) = [r, r, \ldots] + [s, s, \ldots] = [r + s, r + s, \ldots] = i(r + s),$$

και αν $r < s$ τότε $i(r) < i(s)$ αφού $[r, r, \ldots] < [s, s, \ldots]$ ισχύει για κάθε $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ και το $\mathbb{N} \in \mathscr{F}_N$.

Τέλος η $i(\cdot)$ δεν είναι επί, γιατί αν $\omega = [1, 2, 3, \ldots]$, τότε το ω δεν είναι δυνατόν να είναι ίσο με κανένα $[r, r, \ldots]$ αφού το σύνολο $A = \{\, n \in \mathbb{N} \mid r = n \,\}$ είναι το πολύ μονοσύνολο, δηλαδή πεπερασμένο και έτσι $A \notin \mathscr{F}_M$. Άρα $\omega > [r, r, \ldots]$ δηλαδή $\{\, n \in \mathbb{N} \mid n > r \,\} \in \mathscr{F}_M$ για κάθε $r \in \mathbb{R}$ και έτσι $\omega > r$ για κάθε $r \in \mathbb{R}$. Το ω λέγεται **άπειρα μεγάλος ακέραιος**, το δε $\frac{1}{\omega} = [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots]$ είναι ένα **απειροστό** που επίσης δεν ανήκει στο $i(\mathbb{R})$. ⊣

6.2.15 Ορισμός. Για κάθε $r = [r_n] \in {}^*\mathbb{R}$, ορίζουμε τη συνάρτηση της **απόλυτης τιμής** ως ακολούθως:

$$|\cdot| : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}_+ \;\; /\!\!/ \;\; r \longmapsto |\, r \,| = [|\, r_n \,|]$$

6.2.16 Πρόταση. *Για κάθε $r = [r_n] \in {}^*\mathbb{R}$, έχουμε:*

$$|\, r \,| = \begin{cases} r & \text{αν } r > 0 \\ 0 & \text{αν } r = 0 \\ -r & \text{αν } r < 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

Απόδ. Εχουμε ότι,

$$
\begin{aligned}
[|r_n|] &= \begin{cases} [r_n] & \text{αν } \{ n \in \mathbb{N} \,|\, r_n > 0 \} \in \mathscr{F}_M \\ 0 & \text{αν } \{ n \in \mathbb{N} \,|\, r_n = 0 \} \in \mathscr{F}_M \\ -[r_n] & \text{αν } \{ n \in \mathbb{N} \,|\, r_n < 0 \} \in \mathscr{F}_M \end{cases} \\
&= \begin{cases} [r_n] & \text{αν } [r_n] > 0 \\ 0 & \text{αν } [r_n] = 0 \\ -r & \text{αν } [r_n] < 0 \end{cases} \\
&= |[r_n]| = |r| \quad \dashv\blacksquare
\end{aligned}
$$

6.2.17 Ορισμός. Εστω $x, y \in {}^*\mathbb{R}$ τότε:

(i) Το x λέγεται **πεπερασμένο** (finite) ή **περιορισμένο** (limited)[14] ανν

$$|x| < n \quad \text{για κάποιο} \quad n \in \mathbb{N},$$

άπειρο ή απεριόριστο δε ανν

$$|x| > n \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Το x λέγεται **απειροστό** (συμβολικά $x \approx 0$) αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|\, x \,| < \frac{1}{n}$

(iii) Το x είναι άπειρα κοντά στο y (συμβολικά $x \approx y$) ανν $x - y \approx 0$. (Στο εξής θα ταυτίζουμε τα $i(x) \equiv x,\ x \in \mathbb{R}$).

Είναι προφανές ότι κάθε πεπερασμένος υπερπραγματικός $r \in {}^*\mathbb{R}$, περιβάλλεται από ένα **νέφος απειροστών**, όπως ο πυρήνας ενός ατόμου περιβάλλεται από ηλεκτρόνια. Αν μάλιστα περιοριστούμε στους πεπερασμένους υπερπραγματικούς και ταυτίσουμε όλους όσους είναι άπειρα κοντά, δηλαδή όλους όσους βρίσκονται στο ίδιο νέφος, τότε παίρνουμε πάλι τους συμβατικούς πραγματικούς. Ετσι φυσιολιογικά οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό:

[14] Συνήθως χρησιμοποιούμε το 'πεπερασμένο' για το Καντοριανό πεπερασμένο και το 'περιορισμένο' για το μη-Καντοριανό πεπερασμένο, που όμως εδώ δε θάχουμε την ευκαιρία να το χρησιμοποιήσουμε.

6.2.18 Ορισμός. **(i)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τη **μονάδα του** x ως εξής:

$$m(x) := \{ y \in {}^*\mathbb{R} \mid x \approx y \} \quad \textbf{(το νέφος απειροστών γύρω απ' το } x\textbf{)}$$

(ii) Για κάθε $x \in {}^*\mathbb{R}$ ορίζουμε το **γαλαξία** του ως:

$$G(x) = \{ y \in {}^*\mathbb{R} \mid x - y \quad \text{είναι πεπερασμένο} \}$$

δηλαδή το $G(x)$ είναι το σύνολο όλων όσων απέχουν πεπερασμένη απόσταση από το x.

Το $G(0)$ συμβολίζεται συνήθως και με το σύμβολο του Landau $\mathcal{O}$ (Ο μεγάλο). Για κάθε $a \in G(0)$,

- $m(a) =$ «το σύνολο όλων των άπειρα κοντά στο α»
- $m(0) =$ «το σύνολο των απειροστών» που θα το συμβολίζουμε επίσης και με o, (ο μικρό).

Επίσης, αν $\varepsilon \approx 0$, δηλαδή αν $\varepsilon \in m(0)$, τότε το σύνολο,

$$G\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \{\frac{1}{\varepsilon} + x \mid x \in G(0)\}$$

είναι όλοι οι απείρως μεγάλοι υπερπραγματικοί, που απέχουν πεπερασμένη απόσταση από τον απείρως μεγάλο υπερπραγματικό $\frac{1}{\varepsilon}$.

6.2.19 Θεώρημα. **(i)** *Ο γαλαξίας του μηδενός $G(0) \equiv \mathcal{O}$ είναι ως σύνολο, κλειστό ως προς τις πράξεις, της πρόσθεσης, αφαίρεσης και πολλαπλασιασμού.*

(ii) *Η μονάδα του μηδενός $m(0) \equiv o$, είναι κλειστή ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, αφαίρεσης και επιπλέον, το γινόμενο ενός απειροστού και ενός πεπερασμένου ισούται πάντοτε με απειροστό, δηλαδή :*

(α) $\varepsilon, \delta \in m(0) \Rightarrow \varepsilon \pm \delta \in m(0)$

(β) $\varepsilon \in m(0)$ *και* $b \in G(0) \Rightarrow \varepsilon \cdot b \in m(0)$

Απόδ. **(i)** Εστω $b, c \in G(0)$. Τότε υπάρχουν $r, s \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε, $\mid b \mid < r$ και $\mid c \mid < s$. Άρα,

$$\begin{aligned} \mid b + c \mid &< r + s \\ \mid b - c \mid &< r + s \\ \mid b \cdot c \mid &< r \cdot s \end{aligned}$$

Ετσι, $b+c, b-c$ και $b \cdot c$ ανήκουν στο $G(0)$. ⊣□

(ii) α: Εστω $\varepsilon, \delta \approx 0$. Άρα $| \varepsilon |< \frac{r}{2}, | \delta |< \frac{r}{2}$ για κάθε $r \in \mathbb{R}^+$ και επομένως, $| \varepsilon \pm \delta |< r$, για κάθε $r \in \mathbb{R}^+$ και επομένως $\varepsilon \pm \delta \in m(0)$. ⊣□

(ii) β: Εστω $\varepsilon \approx 0$ και $b \in G(0)$. Επειδή $b \in G(0)$, υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε, $| b |< t$. Αλλά για κάθε $r \in \mathbb{R}^+$, επειδή $\varepsilon \approx 0$ έχουμε ότι, $| \varepsilon |< \frac{r}{t}$. Άρα $| b \cdot \varepsilon |< t \cdot \frac{r}{t} = r$ για κάθε $r \in \mathbb{R}^+$, δηλαδή $b \cdot \varepsilon \approx 0$. ⊣■

6.2.20 Σχόλιο. Το πιο πάνω Θεώρημα μας λέει ότι:

- Το $G(0)$ είναι ένας υποδακτύλιος του $^*\mathbb{R}$.
- Το $m(0)$ είναι ένα ιδεώδες του $G(0)$. Είναι δυνατόν να δειχτεί ότι είναι και μεγιστικό (maximal) ιδεώδες του $G(0)$. Τότε όμως θα έχουμε και $G(0)/m(0) \cong \mathbb{R}$.

Αυτό που απομένει τώρα είναι να έχουμε έναν επίσημο τρόπο σύνδεσης του $\mathbb{R}$ με το $G(0) \equiv \mathcal{O}$, που σε τελευταία ανάλυση είναι το $\mathbb{R}$, του οποίου τα άτομα έχουν διασπαστεί για να δώσουν τις μονάδες ή τα νέφη $m(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι *σε κάθε μονάδα ή νέφος, υπάρχει πράγματι ένας μοναδικός συμβατικός πραγματικός.*

6.2.21 Θεώρημα. (του συμβατικού μέρους) *Κάθε $x \in G(0)$, βρίσκεται απείρως κοντά σ' ένα μοναδικό συμβατικό πραγματικό $r \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, κάθε πεπερασμένη μονάδα (δηλ. μονάδα πεπερασμένου υπερπραγματικού) περιέχει ένα μοναδικό συμβατικό πραγματικό αριθμό.*

Απόδ. (i) Μοναδικότητα : Εστω $r, s \in \mathbb{R}$ με $r \approx x$ και $s \approx x$, δηλαδή έστω $r, s \in m(x)$. Τότε όμως $r - s \in m(0)$ και ταυτόχρονα έχουμε ότι $r - s \in \mathbb{R}$. Άρα $r - s = 0$, αφού το 0 είναι το μαναδικό απειροστό του $\mathbb{R}$. Ετσι $r = s$. ⊣□
(ii) Υπαρξη: Εστω $A = \{s \in \mathbb{R} : s < x\}, x \in G(0)$. Επειδή $x \in G(0)$ υπάρχει $r \in \mathbb{R}$ με $x < r$, έτσι το A είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$ και άρα λόγω της πληρότητας του $\mathbb{R}$, υπάρχει το $a = \sup A$. Θα πρέπει να δείξουμε τώρα ότι το $x - a$ είναι απειροστό. Εστω ότι δεν είναι, τότε υπάρχει $r \in \mathbb{R}^+$ με $0 < r <| x - \alpha |$. Αν $x - a > 0$, τότε $a + r < x$, που είναι άτοπο, αφού $a = \sup A$. Αν $x - a < 0$ τότε πάλι έχουμε $x < \alpha - r$, που επίσης αντιφάσκει με την επιλογή του a. Άρα τελικά έχουμε $x - \alpha \approx 0$ ή $x \approx a$. ⊣■

Το παραπάνω θεώρημα μας επιτρέπει να ορίσουμε την επιθυμητή συνάρτηση που συνδέει το $\mathbb{R}$, τη «μακροσκοπική εικόνα των πραγματικών», με το $G(0) \equiv \mathcal{O}$, τη «μικροσκοπική εικόνα των πραγματικών».

6.2.22 Ορισμός. Ορίζουμε τη **συνάρτηση του συμβατικού μέρους** ως ακολούθως:

$$\mathrm{st}(\cdot) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R} \;\; /\!\!/ \;\; x \mapsto \mathrm{st}(x)$$

όπου το $\mathrm{st}(x)$ είναι ο μοναδικά ορισμένος $r \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $x \approx r$. Η τιμή της συνάρτησης $\mathrm{st}(x)$ συμβολίζεται και ως ${}^{o}x$ και λέγεται το **συμβατικό μέρος του x**.

Ετσι κάθε $x \in \mathcal{O} \equiv G(0)$ έχει μια μοναδική ανάλυση.

$$x = r + \varepsilon$$

όπου $r = \mathrm{st}(x) \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon \in m(0) \equiv o$.

6.2.23 Θεώρημα. *Η συνάρτηση* $\mathrm{st} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ *έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Η* st *είναι επί.*

(ii) $\mathrm{st}(x \pm y) = \mathrm{st}(x) \pm \mathrm{st}(y)$.

(iii) $\mathrm{st}(x \cdot y) = \mathrm{st}(x) \cdot \mathrm{st}(y)$.

(iv) $\mathrm{st}(x/y) = \mathrm{st}(x)/\,\mathrm{st}(y)$ *άν* $\mathrm{st}(y) \neq 0$.

(v) *Αν* $x \leq y$ *τότε* $\mathrm{st}(x) \leq \mathrm{st}(y)$.

(vi) $\mathrm{st}(r) = r$ *για κάθε* $r \in \mathbb{R}$.

(vii) *Αν* $y = \sqrt{x}$ *τότε* $\mathrm{st}(y) = \sqrt{\mathrm{st}(x)}$.

Απόδ.

(i) Εστω $r \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $\varepsilon \in m(0)$, $r+\varepsilon$ είναι ένας μοναδικά ορισμένος αριθμός στο $G(0)$. Αρα η st είναι επί. ⊣□

(ii) Επειδή $\mathrm{st}(x) \approx x$ και $\mathrm{st}(y) \approx y$,

$$\mathrm{st}(x) \pm \mathrm{st}(y) \approx x + y \qquad (*)$$

Επίσης,

$$\mathrm{st}(x \pm y) \approx x + y \qquad (**)$$

Από τις $(*)$ και $(**)$ έχουμε ότι

$$\mathrm{st}(x \pm y) \approx \mathrm{st}(x) \pm \mathrm{st}(y),$$

επειδή όμως $\text{st}(x \pm y), \text{st}(x), \text{st}(y) \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι $\text{st}(x \pm y) = \text{st}(x) \pm \text{st}(y)$. ⊣□

(iii) Αποδεικνύεται όμοια με την (ii). ⊣□

(iv) $\text{st}(x) = \text{st}\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = \text{st}\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \text{st}(y)$, άρα $\text{st}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\text{st}(x)}{\text{st}(y)}$. ⊣□

(v) Αν $x \leq y$ τότε $x = \text{st}(x) + \varepsilon$ και $y = \text{st}(y) + \delta$, για $\varepsilon, \delta \in m(0)$ και $\text{st}(x) + \varepsilon \leq \text{st}(y) + \delta$ ή $\text{st}(x) \leq \text{st}(y) + (\delta - \varepsilon)$. Επειδή $(\delta - \varepsilon) \approx 0$, τότε για κάθε $r \in \mathbb{R}^+, (\delta - \varepsilon) < r$ έτσι για κάθε $r \in \mathbb{R}, \text{st}(x) < \text{st}(y) + r$, άρα $\text{st}(x) \leq \text{st}(y)$. ⊣□

(vi) Προφανές. ⊣□

(vii) Αν π.χ. $x > 0$ και $y = \sqrt{x}$ τότε $y^2 = x$ και $\text{st}(x) = \text{st}(y^2) = [\text{st}(y)]^2$ λόγω της (iv). Άρα $\text{st}(y) = \sqrt{\text{st}(x)}$. ⊣■

Συνήθως στην πράξη, όταν έχουμε να υπολογίσουμε συμβατικά μέρη ακολουθούμε μια διαδικασία τριών βημάτων [107]:

ΒΗΜΑ 1: Πρώτα εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ υπερπραγματικών αριθμών, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα του σώματος $^*\mathbb{R}$.

ΒΗΜΑ 2: Στη συνέχεια εκτελούμε τις πράξεις που περιέχουν τη συνάρτηση του συμβατικού μέρους, και

ΒΗΜΑ 3: Τέλος εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των συμβατικών πραγματικών.

Εστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή της παράστασης:

$$\text{st}\left(\frac{3H^3 + 8H^2 - 5H}{4H^3 - 7H^2 + 2H}\right), \quad \text{οπού } H \text{ θετικός άπειρος}$$

Επειδή και ο παρανομαστής και ο αριθμητής είναι άπειροι αριθμοί δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις ιδιότητες της συνάρτησης st, γιατί το πεδίο ορισμού της είναι ο γαλαξίας του μηδενός. Ετσι εκτελούμε πρώτα τις υπερπραγματικές πράξεις :

$$c = \frac{3H^3 + 8H^2 - 5H}{4H^3 - 7H^2 + 2H} = \frac{3 + 8H^{-1} - 5H^{-2}}{4 - 7H^{-1} + 2H^{-2}}$$

Αλλά τα H^{-1}, H^{-2}, είναι απειροστά, έτσι,

$$\text{st}(c) = \text{st}\left(\frac{3 + 8H^{-1} - 5H^{-2}}{4 - 7H^{-1} + 2H^{-2}}\right)$$

$$= \quad \frac{\mathrm{st}(3)+8\,\mathrm{st}(H^{-1})-5\,\mathrm{st}(H^{-2})}{\mathrm{st}(4)-7\,\mathrm{st}(H^{-1})+2\,\mathrm{st}(H^{-2})} = \frac{3+0-0}{4-0+0} = \frac{3}{4}.$$

Γεωμετρικες Παραστασεις.

Η γεωμετρική παράσταση του $^*\mathbb{R}$, θα προκύψει από τη δυνατότητα θέασης του $^*\mathbb{R}$, από τη μια μεριά μακροσκοπικά **«διά γυμνού οφθαλμού»** και από την άλλη μικροσκοπικά, όπου αντιλαμβανόμαστε τις απειροστικές λεπτομέρειες και τηλεσκοπικά όπου αντιλαμβανόμαστε τη δομή του απείρου.

Είναι φανερό λοιπόν, ότι ακόμη και για τον «απόλυτο Καντοριανό παρατηρητή», υπάρχει ένας «ορίζοντας» αντίληψης, που εκτείνεται και περιορίζει τη θέαση και προς το μικροσκοπικό και προς το μεγασκοπικό. Για τον απόλυτο Καντοριανό παρατηρητή λοιπόν υπάρχουν περιορισμοί στην ικανότητα διάκρισης και αντίληψης της μικροσκοπικής και μεγασκοπικής λεπτομέρειας και μόνον μέσα από μικροσκόπια και τηλεσκόπια ο ορίζοντας μπορεί να διευρυνθεί.

Η συνηθισμένη γεωμετρική παράσταση του $\mathbb{R}$ ως μιας προσανατολισμένης ευθείας, συμπίπτει με τη μακροσκοπική εικόνα της ευθείας των πραγματικών αριθμών, όπου στην ουσία βλέπουμε μόνον τα συμβατικά μέρη των πεπερασμένων υπερπραγματικών, χάνοντας τελείως από το πεδίο οράσεως την απειροστική λεπτομέρεια. Για να αντιληφθούμε τις απειροστικές λεπτομέρειες, θα χρειαστεί να δούμε την πραγματική ευθεία, τοπικά και μέσα από μικροσκόπια άπειρης διαχωριστικής δύναμης.

Είναι γνωστό βέβαια ότι οι δύο διαφορετικοί κόσμοι, $\mathbb{R}$ και $^*\mathbb{R}$ συνδέονται με τη συνάρτηση του συμβατικού μέρους $\mathrm{st}(\cdot)$. Ετσι για παράδειγμα, οι απειροστικές λεπτομέρειες γύρω από το $a \in \mathbb{R}$, είναι ακριβώς η μονάδα του a, δηλαδή,

$$m(a) = \mathrm{st}^{-1}(a) \quad a \in \mathbb{R}.$$

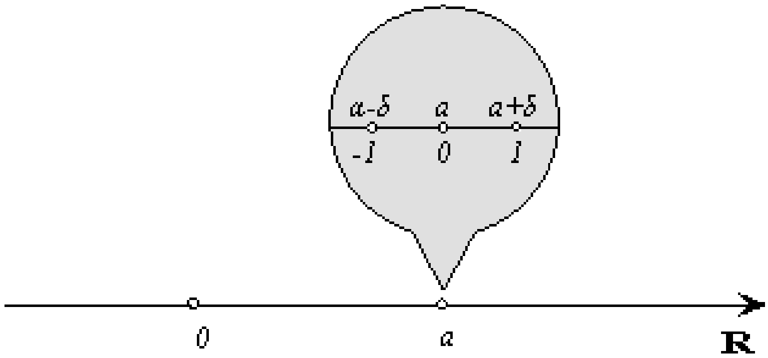
Η μονάδα όμως του a περιέχει ένα τεράστιο ποσό, απειροστικής λεπτομέρειας, που είναι αδύνατων να θεαθεί ταυτόχρονα. Η θέαση και επομένως και η γεωμετρική αντίληψη, θα πρέπει να γίνεται σε συγκεκριμένα επίπεδα ταχυτήτων σύγκλισης. Η οπτική εικόνα θα παριστάνει τοπικά, τις διαφορετικές ασυμπτωτικές συμπεριφορές για δοσμένη ταχύτητα σύγκλισης.

Σε μια μεγέθυνση λοιπόν, με άπειρη διαχωριστική δύναμη $\frac{1}{\delta}$ όπου $\delta = [\frac{1}{n}]$, είναι δυνατόν να αντιληφθούμε το $2\delta = [\frac{2}{n}]$ κ.λπ., αλλά είναι αδύνατο να αντιληφθούμε απειροστικές λεπτομέρειες της τάξης του δ^2, ή και μεγαλύτερης τάξης.

Ας δούμε όμως πρώτα μερικά παραδείγματα μεγεθύνσεων και σμικρίνσεων: Θεωρούμε τη συνάρτηση,

$$\mu_{a,\delta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;/\!\!/\; x \longmapsto \mu_{a,\delta}(x) = \frac{x-a}{\delta}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \delta > 0.$$

Κάτω από τη συνάρτηση $\mu_{a,\delta}$, το διάστημα $\varDelta = [a-1, a+1]$ μήκους 2, μετασχηματίζεται στο $\mu_{a,\delta}(\varDelta) = [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$ μήκους 1, δηλαδή το $\varDelta$ υποδιπλασιάστηκε



Σχήμα 6.6: Το $\alpha \in \mathbb{R}$ στο μικροσκόπιο συμπίπτει με το 0 της διαβάθμισης του μικροσκοπίου.

όταν $\delta = 2$. Αν $\delta = \frac{1}{2}$ τότε έχουμε :

$$\mu_{\alpha,1/2}(\varDelta) = [-2, 2]$$

δηλαδή έχουμε διπλασιασμό. Είναι λοιπόν φανερό ότι όταν $0 < \delta < 1$, τότε έχουμε μεγέθυνση, ενώ όταν $\delta > 1$, τότε έχουμε σμίκρυνση. Είναι προφανές ότι αν το $\delta \in m(0)$, είναι δηλαδή απειροστό, τότε θα έχουμε άπειρα μεγάλη μεγέθυνση. Για να αντιληφθούμε λοιπόν απειροστικές λεπτομέρειες μεγέθους δ, γύρω από το $a \in \mathbb{R}$, πρέπει να εστιάσουμε το μικροσκόπιο $\mu_{a,\delta}$ στο a, δηλαδή έχουμε τη συνάρτηση:

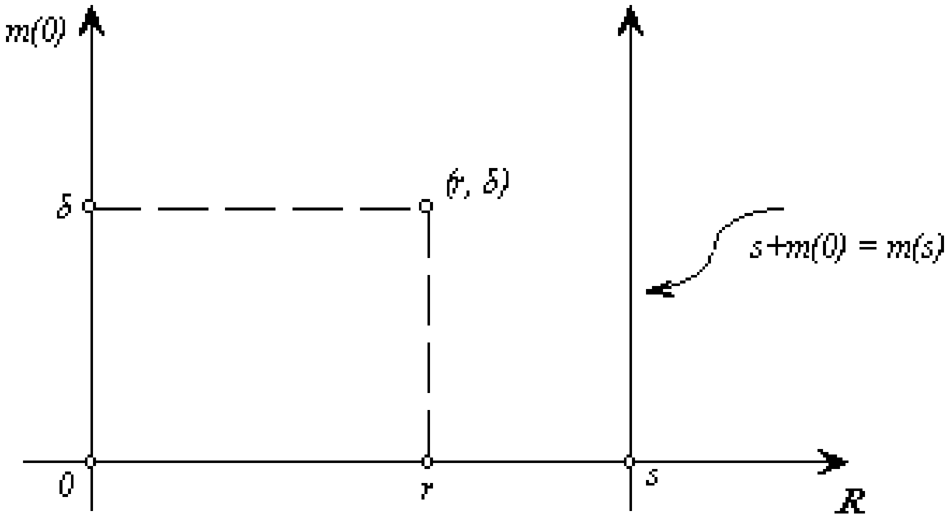
$$\mu_{a,\delta} : m(a) \longrightarrow \mathbb{R} \;\; /\!\!/ \;\; x \longmapsto \mu_{a,\delta}(x) = \mathrm{st}[\frac{x-a}{\delta}].$$

Κάτω από τη συνάρτηση $\mu_{a,\delta}$, το σημείο εστίασης $a \in \mathbb{R}$, απεικονίζεται στο μηδέν του προσανατολισμένου άξονα μεγέθυνσης, κάθε δε σημείο $x \in m(a)$ που γράφεται ως $x = a + r\delta, \quad r \in \mathbb{R}$ απεικονίζεται στο σημείο $r \in \mathbb{R}$, ενώ το $a + \delta$ στη μονάδα του απειροστικού άξονα μεγέθυνσης. *Ο ρόλος της συνάρτησης* st *στον ορισμό της* $\mu_{a,\delta}$, *είναι για να εξαφανίζει από το πεδίο όρασης, απειροστικές λεπτομέρειες υψηλότερης τάξης από αυτήν του* δ. *Ταυτόχρονα λεπτομέρειες χαμηλότερης τάξης βρίσκονται εκτός πεδίου όρασης.* Για παράδειγμα το σημείο $a + \delta_2 \in m(a)$ απεικονίζεται στο,

$$\mathrm{st}[\frac{a+\delta^2-a}{\delta}] = \mathrm{st}[\delta] = 0$$

Δηλαδή το $a+\delta$ στη μεγέθυνσή μας δε φαίνεται και συμπίπτει με το μηδέν του μικροσκοπίου μας. Τελικά έχουμε τη γεωμετρική παράσταση του Σχήματος 6.6:

Ο άξονας του μικροσκοπίου είναι βαθμολογημένος με βάση το δ, γι' αυτό κατά κανόνα αντί του $\mu_{a,\delta}(a + r\delta) = r$, θα γράφουμε $a + r\delta$, δηλαδή την πραγματική θέση του $a + r\delta$ στο ${}^*\mathbb{R}$.



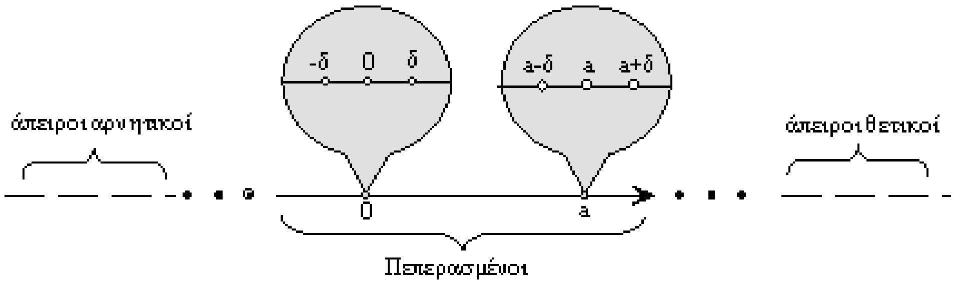
Σχήμα 6.7: Γεωμετρική παράσταση της $^*\mathbb{R}$ ως δακτύλιος πηλίκο ως προς το ιδεώδες $m(0)$.

Μια άλλη γεωμετρική παράσταση [92] για το σύνολο των πεπερασμένων στοιχείων $G(0) \equiv \mathcal{O}$ θυμίζει περισσότερο την παράσταση των μιγαδικών αριθμών, βλ. το Σχήμα 6.7 αλλά και τα σχόλια στην σελίδα 154, και δίνεται με βάση την ακόλουθη συνάρτηση:

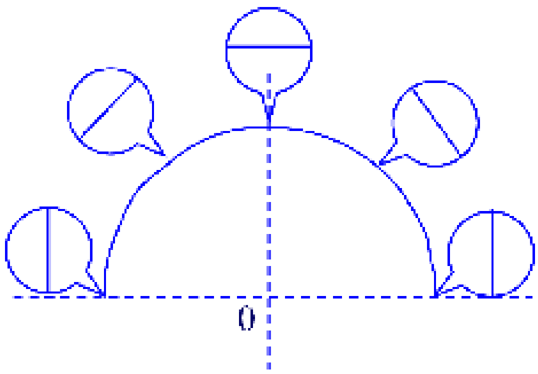
$$` : G(0) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;\; /\!\!/ \;\; x \mapsto (r, \delta)$$

όπου $r = \mathrm{st}(x)$ και $\delta = x - r \in m(0)$. Δηλαδή έχουμε : Ο κατακόρυφος άξονας στην παράσταση του Σχήματος 6.7, είναι το ιδεώδες των απειροστών στον δακτύλιο $G(0)$ (ένα είδος φανταστικού άξονα, όπως ίσως θα έλεγε ο Gauss!), ενώ ο οριζόντιος άξονας, η συνήθης πραγματική ευθεία. Για κάθε πραγματικό αριθμό $s \in \mathbb{R}$, η μονάδα του $m(s)$ είναι η s-μεταφορά της $m(0)$. Για κάθε $r, s \in \mathbb{R}$, οι μονάδες $r + m(0)$ και $s + m(0)$, διατάσσονται όπως και τα πραγματικά τους μέρη. Ετσι κάθε στοιχείο της $m(0)$ είναι μικρότερο κάθε θετικού πραγματικού. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι συμπιέζουμε κάθε μονάδα στο συμβατικό της μέρος, π.χ. αν συμπιέσουμε την $s + m(0)$, στο s, τότε παίρνουμε τη γνωστή μας πραγματική ευθεία, που στερείται κάθε απειροστικής λεπτομέρειας. Η η μονάδα λοιπόν $s + m(0)$ είναι μια εικονική θέαση «όλης της μονάδας», παρόμοια με τη θέαση μέσα από απειροστικά μικροσκόπια, στην οποία όμως είναι αδύνατη μια τέτοια ταυτόχρονη θέαση.

Οσο για τους άπειρα μεγάλους αριθμούς $H = \frac{1}{\delta} \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$, $\delta \in m(0)$, μπορούμε να έχουμε μια γεωμετρική αντίληψη μέσα από τηλεσκόπια άπειρης δύναμης, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής $\tau(x) := x - H$. Για περισσότερα πάνω σε μικροσκόπια και τηλεσκόπια, βλ. τα, [107, 108], και [166]. Η τελική



Σχήμα 6.8: Γεωμετρική παράσταση της $^*\mathbb{R}$ με τη χρήση απειροστικών μικροσκοπίων και τηλεσκοπίων.



Σχήμα 6.9: Το υπερπραγματικό γράφημα του ημικυκλίου.

γεωμετρική παράσταση του $^*\mathbb{R}$ είναι αυτή του Σχήματος 6.8.

Μπορούμε επίσης να γενικεύσουμε τους παραπάνω ορισμούς και στην περίπτωση του επιπέδου. Εστω $(a,b) \in \mathbb{R}$, τότε

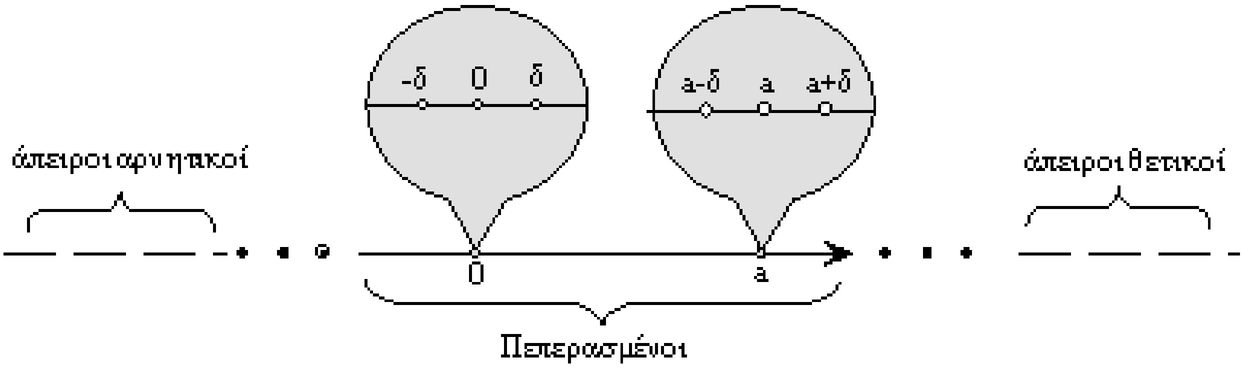
$$\mu_\delta : m(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \;/\!\!/\; (x,y) \mapsto \mu_{a,\delta} = \mathrm{st}[\left(\frac{x-a}{\delta}, \frac{y-b}{\delta}\right)]$$

Θα χρησιμοποιήσουμε κύρια το πιο πάνω μικροσκόπιο για την αποκάλυψη απειροστικών λεπτομερειών, σε συγκεκριμένα σημεία (a,b) των γραφημάτων συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα δώσουμε μερικά βασικά παραδείγματα.

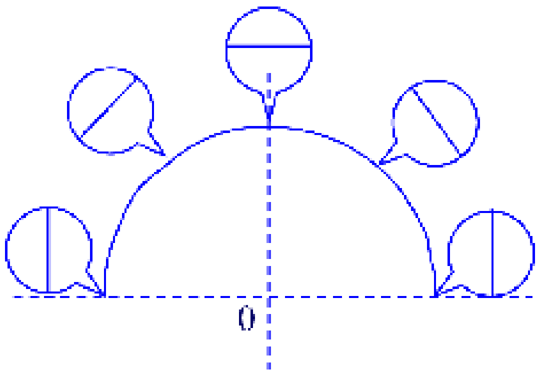
6.2.24 Παραδείγματα. **(i)** Για υπερπραγματικό γράφημα του ημικυκλίου $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, βλ. το Σχήμα 6.8. Στο πεδίο του μικροσκοπίου βλέπουμε πάντοτε την εφαπτόμενη, εφ' όσον υπάρχει, στο εν λόγω σημείο.

(ii) Για το υπερπραγματικό γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x$, βλ. το Σχήμα 6.10.

(iii) Για το υπερπραγματικό γράφημα της $y = \mathrm{st}(x)$ βλ. το Σχήμα 6.11.



Σχήμα 6.10: Το υπερπραγματικό γράφημα της $f(x) = x$.



Σχήμα 6.11: Το υπερπραγματικό γράφημα της $y = \mathrm{st}(x)$. Η συνάρτηση $y = \mathrm{st}(x)$, αλλιώς εμφανίζεται μικροσκοπικά (εσωτερικά) και αλλιώς μακροσκοπικά (εξωτερικά). Τέτοιες συναρτήσεις θα τις ονομάζουμε **εξωτερικές**

Το Σύστημα $(\mathbb{R}, {}^*\mathbb{R}, *)$ Πρώτα θα πρέπει να πούμε ότι υπάρχει ένας μετασχηματισμός που μετασχηματίζει (επεκτείνει), μαθηματικές οντότητες που αναφέρονται στο $\mathbb{R}$, σε μαθηματικές οντότητες που αναφέρονται στο ${}^*\mathbb{R}$.
Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε :

$$\boxed{{}^*A = \{[a_n] \in {}^*\mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in A\} \in \mathscr{F}_M\}} \tag{6.7}$$

Ετσι κάθε ακολουθία A_n υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, ορίζει ένα υποσύνολο $[A_n]$ του $\mathbb{R}$, ως ακολούθως:

$$\boxed{[a_n] \in [A_n] \quad \text{νν} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in A_n\} \in \mathscr{F}_M} \tag{6.8}$$

Τα υποσύνολα που παίρνονται με τον τρόπο αυτό λέγονται **εσωτερικά**

υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Με όμοιο τρόπο κάθε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ορίζει μια **εσωτερική συνάρτηση**, $[f_n] : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ως εξής:

$$\boxed{[f_n]([x_n]) := [f_n(x_n)]}$$

Αντί $[f_n]$, θα γράφουμε και ${}^*f$. Όμοιοι ορισμοί δίνονται και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

6.2.25 Παράδειγμα. **(i)** Εστω $\Delta_n := [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$ μια ακολουθία διαστημάτων του $\mathbb{R}$ και $a = [a_n], b = [b_n] \in {}^*\mathbb{R}$. Τότε το

$$[a, b] = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

είναι εσωτερικό, αφού $[a, b] = [\,[a_n, b_n]\,]$.

(ii) Εστω $a = [a_n], x = [x_n] \in {}^*\mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση,

$$e^{ax} := [e^{a_n x_n}]$$

είναι εσωτερική εξ ορισμού.

(iii) Εστω $A = [A_n] \subseteq {}^*\mathbb{R}$ και $f = [f_n]$ μια εσωτερική συνάρτηση, τότε ορίζουμε,

$$\int_A f dx := \left[\int_{A_n} f_n dx\right].$$

Το νέο αυτό ολοκλήρωμα, ικανοποιεί όλες τις συνηθισμένες ιδιότητες, που χαρακτηρίζουν τα ολοκληρώματα.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να εισάγουμε για ένα εσωτερικό υποσύνολο την έννοια του υπερπεπερασμένου συνόλου.

6.2.26 Ορισμός. Εστω το εσωτερικό υποσύνολο $A = [A_n]$. Το A θα λέγεται **υπερπερασμένο** ανν $\{n \in \mathbb{N} \mid A_n \quad \text{είναι πεπερασμένο } \} \in \mathscr{F}_M$.
Ο εσωτερικός πληθάριθμος του A, ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{card}(A) := [\operatorname{card}(A)]$$

6.2.27 Παράδειγμα. Εστω $H \in {}^*\mathbb{N}$ ένας άπειρος υπερακέραιος. Τότε το σύνολο,

$$T_H := \{0, \frac{1}{H}, \frac{2}{H}, \ldots, \frac{H-1}{H}, 1\}$$

είναι υπερπερασμένο.
Πράγματι, έστω $H = [H_n]$, τότε $T_H = [T_n]$ όπου

$$T_n := \{0, \frac{1}{H_n}, \frac{2}{H_n}, \ldots, \frac{H_n - 1}{H_n}, 1\}$$

Άρα,

$$\operatorname{card}(T_H) = [\operatorname{card}(T_n)] = [H_n + 1] = [H_n] + [1] = H + 1.$$

Αρχή της Μεταφοράς.

Ο τρόπος που έχουμε ορίσει τα εσωτερικά σύνολα και τις $*-$επεκτάσεις συνόλων και συναρτήσεων, μας κάνει να αναμένουμε ότι οι εσωτερικές μαθηματικές οντότητες, θα διατηρούν πολλές, ίσως όλες τις ιδιότητες πρώτης τάξης του $\mathbb{R}$. Πράγματι αυτό είναι το περιεχόμενο της αρχής της μεταφοράς, ή αρχής του Leibniz.

6.2.28 Αρχή της μεταφοράς. *Μια ιδιότητα P που αναφέρεται στη δομή του $\mathbb{R}$ είναι αληθής ανν η $*$-μεταφορά της ${}^*P$, που αναφέρεται στη δομή του ${}^*\mathbb{R}$ είναι αληθής.*

Η παραπάνω διαισθητικά διατυπωμένη αρχή, ισχύει λοιπόν για όλες τις φραγμένες προτάσεις σχετικά με το $\mathbb{R}$ και επομένως το ${}^*\mathbb{R}$, κληρονομεί όλες τις ιδιότητες πρώτης τάξης του $\mathbb{R}$. Οταν λέμε φραγμένες προτάσεις εννοούμε αυτές που περιέχουν τους βασικούς ποσοδείκτες με την ακόλουθη μορφή :

- $(\forall x)\,[x \in A \Longrightarrow \ldots]$ που θα συντομογραφείται ως $(\forall x \in A)[\ldots]$ και
- $(\exists x)\,[x \in A \ldots]$ που θα συντομογραφείται $(\exists x \in A)[\ldots]$.

Μερικά παραδείγματα θα ξεκαθαρίσουν τα πιο πάνω ζητήματα.

6.2.29 Παράδειγμα. Εστω $P = (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x + y == y + x]$, τότε η $*-$μεταφορά είναι η ${}^*P = (\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\forall y \in {}^*\mathbb{R})[x + y = y + x]$, δηλαδή απλά «αστρώσαμε» κάθε σύνολο ή συνάρτηση που εμφανίζεται στην πρόταση. Κανονικά θα έπρεπε αντί $+$ να γράφουμε ${}^*+$, αλλά λόγω του ότι η πράξη ${}^*+$ είναι επέκταση της $+$, για απλοποίηση του συμβολισμού θα παραλείπουμε το άστρο. Επίσης έχουμε ${}^*x = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Με όμοιο τρόπο μεταφέρονται και τα άλλα αξιώματα του $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα αν,

$$P = (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})\,[x < y \Rightarrow x + z < y + z]$$

τότε στο ${}^*\mathbb{R}$ ισχύει η πρόταση:

$${}^*P = (\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\forall y \in {}^*\mathbb{R})(\forall z \in {}^*\mathbb{R})\,[x < y \Rightarrow x + z < y + z]$$

Είναι δυνατόν να έχουμε και προτάσεις ανώτερης τάξης όπως:

$$P = (\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}))(\forall B \in \mathscr{P}(\mathbb{R}))\,[A \cup B = B \cup A]\,.$$

Τότε στο ${}^*\mathbb{R}$ ισχύει η,

$${}^*P = (\forall A \in {}^*\mathscr{P}(\mathbb{R}))(\forall B \in {}^*\mathscr{P}(\mathbb{R}))\,[{}^*A \cup {}^*B = {}^*B \cup {}^*A]\,.$$

Η Αρχή της Μεταφοράς, που είναι πόρισμα ενός βασικού θεωρήματος (Θεώρημα του Łoś για υπερδυνάμεις), που δεν ενδιαφέρει εδώ, με λίγη εξάσκηση και προσοχή στη γραφή των προτάσεων, γίνεται μια πολύ απλή υπόθεση και ταυτόχρονα ένα ισχυρότατο όπλο.

Μετά από όλα αυτά είμαστε έτοιμοι να συνοψίζουμε και να χαρακτηρίσουμε όλα τα παραπάνω, με αξιωματικό τρόπο, ο οποίος ταυτόχρονα θα διευκολύνει και τους υπολογισμούς μας.

Αξιωματα Για το Συστημα $(\mathbb{R}, {}^*\mathbb{R}, *)$

Αξίωμα 1 : Το $\mathbb{R}$ είναι ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα.

Αξίωμα 2 : Το ${}^*\mathbb{R}$ είναι ένα μη-Αρχιμήδειο διατεταγμένο σώμα, που αποτελεί μια γνήσια επέκταση του $\mathbb{R}$. Δηλαδή,

α) Το ${}^*\mathbb{R}$ είναι ένα διαταγμένο σώμα

β) Το ${}^*\mathbb{R}$ είναι μη-Αρχιμήδειο, δηλαδή δεν ισχύει το,

$$(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})\,[x < n1]$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\quad {}^*x = x$

Αξίωμα 3: (Αρχή της Μεταφοράς) Ο $*$ - μετασχηματισμός ικανοποιεί την αρχή της μεταφοράς, δηλαδή αν φ είναι μια περιορισμένης εμβέλειας ή φραγμένη πρόταση που αναφέρεται στο $\mathbb{R}$, τότε:

$$\boxed{\textit{η } \varphi \textit{ είναι αληθινή στο } \mathbb{R} \textit{ ανν η } {}^*\varphi \textit{ είναι αληθινή στο } {}^*\mathbb{R}}$$

που καμιά φορά θα συμβολίζουμε και ως εξής:

$$\boxed{\models \varphi \Longleftrightarrow {}^*\!\models {}^*\varphi}$$

Με βάση τα παραπάνω τρία αξιώματα μπορούμε να παράγουμε όλα τα σχετικά αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού. Τα αξιώματα αυτά γενικεύονται και στην περίπτωση που έχουμε μια υπερδομή επί ενός συνόλου πρωτοστοιχείων. Ετσι αν S είναι ένα απειροσύνολο, τότε η υπερδομή $V(S)$ επί του S ορίζεται ως εξής:

$$\begin{array}{rcl} V_0 \equiv V_0(S) & := & S \\ V_1 \equiv V_1(S) & := & V_0 \cup \mathscr{P}(V_0) \\ & \vdots & \\ V_{n+1} \equiv V_{n+1}(S) & := & V_n \cup \mathscr{P}(V_n) \\ & \vdots & \end{array}$$

και τελικά,

$$V(S) \ := \ \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n.$$

Ενα μη συμβατικό μοντέλο για την $V(S)$ αποτελείται από τα ακόλουθα στοιχεία:

(i) Μια υπερδομή $V(^*S)$ επί μιας μη-συμβατικής επέκτασης $^*S$ του S και

(ii) Μια εμφύτευση : $*(\cdot) : V(S) \hookrightarrow V(^*S)$

που ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα.

Αρχή Επέκτασης: Το S είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του $^*S$ και

$$(\forall s \in S)[^*s = s]$$

Αρχή Μεταφοράς: Μια πρόταση φ στη $\mathscr{L}(V, S)$ ισχύει στη $V(S)$ ανν $*$ -μεταφορά της ισχύει στη $V(^*S)$, συμβολικά,

$$V(S) \models \varphi \quad \text{ανν} \quad V(^*S) \models {}^*\varphi \qquad (\text{βλ. και } [88, 125])$$

Μια άλλη αξιωματικοποίηση της μη-συμβατικής ανάλυσης είναι η Εσωτερική Θεωρία Συνόλων (Internal Set Theory) IST του E. Nelson, η οποία είναι μια συντηρητική (conservative) επέκταση της Θεωρίας Συνόλων ZFC. Παρ' όλο που ο ίδιος ο Nelson επιμένει σεμια συντακτική−φορμαλιστική αντίληψη της θεωρίας του, ωστόσο πιστεύουμε ότι η Εναλλακτική Θεωρία Συνόλων του Vopěnka αποτελεί τη σωστή κατεύθυνση προς μια μη-Καντοριανή ερμηνεία της IST, βλ. το [173] καθώς επίσης και την εργασία [59].

Με βάση τα παραπάνω τρία αξιώματα μπορούμε να παράγουμε όλα τα σχετικά αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού. Για διευκόλυνση των υπολογισμών αναφέρουμε τα παρακάτω:
Αν με ε, δ συμβολίζουμε απειροστά, με b, c συμβολίζουμε θετικούς πεπερασμένους αλλά όχι απειροστά και με H, K συμβολίζουμε θετικούς άπειρους αριθμούς.
Τότε:

(i) Τα ακόλουθα είναι απειροστά:

$$-\varepsilon, \frac{1}{H}, \frac{\varepsilon}{b}, \frac{\varepsilon}{H}, \frac{b}{H}, \varepsilon + \delta, \varepsilon - \delta, \varepsilon \cdot \delta, b \cdot \varepsilon, \sqrt{\varepsilon}$$

(ii) Τα ακόλουθα είναι πεπερασμένα αλλά και απειροστά:

$$-b, \frac{1}{b}, \frac{b}{c}, b + \varepsilon, b \cdot c, \sqrt{b}, b + c$$

(iii) Τα ακόλουθα είναι άπειροι αριθμοί:

$$-H, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{b}{\varepsilon}, \frac{H}{\varepsilon}, H + \varepsilon, H + b, H \cdot b, H \cdot K, \sqrt{H}, H + K$$

(iv) Τα ακόλουθα μπορεί να είναι, είτε απειροστά, είτε πεπερασμένοι αλλά όχι απειροστά, είτε άπειροι:

$$\frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{H}{K}, H \cdot \varepsilon, H - K$$

6.3 Δομές και Γλώσσες.

Η έννοια της μαθηματικής δομής είναι κεντρική γιά όλα τα μαθηματικά. Μπορούμε βεβαίως να δώσουμε ένα ορισμό που θα συλλαμβάνει λιγώτερο ή περισσότερο την έννοια αυτή. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι προσέγγισης της εννοίας της μαθηματικής δομής. Εδώ θα περιοριστούμε σε μιά κοινά αποδεκτή έννοια. Θα θέλαμε όμως να κάνουμε μιά προσπάθεια να εκθέσουμε κάποιες απόψεις που στοχεύουν να φωτίσουν νοηματικά την έννοια της δομής. Ο Felix Klein στό περίφημο Erlager Program, λέγει ότι: «Δομή είναι οτιδήποτε παραμένει αναλλοίωτο από τούς αυτομορφισμούς». Είναι φανερό ότι αυτό που ποιοτικά παραμένει αναλλοίωτο μπορεί να έχει κυρίως σχέση με την «γεωμετρική μορφή» των γεωμετρικών οντοτήτων. Δηλαδή μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι **οι έννοιες της μαθηματικής δομής και της γεωμετρικής μορφής των μαθηματικών αντικειμένων, είναι από μιά άποψη δυϊκές.** «Η γεωμετρική μορφή είναι μια Άλγεβρική δομή εκπεφρασμένη με γεωμετρικά σχήματα, ένω μια Άλγεβρική δομή είναι ένα γεωμετρικό σχήμα εκπεφρασμένο με μαθηματικά σύμβολα.»

Μπορούμε να γενικεύσουμε την καταστάση που είχαμε με τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ σε μια οποιαδήποτε άλλη δομή.

Ο ορισμός μιας γενικής δομής είναι ο ακόλουθος:

6.3.1 Ορισμός. Μια **δομή** $\mathfrak{A}$ είναι μια διαταγμένη τετράδα,

$$\langle A\,;\, \mathscr{F}^A, \mathscr{R}^A, \mathscr{C}^A \rangle$$

όπου,

• A είναι ένα μη - κενό σύνολο, που λέγεται **φορέας** της $\mathfrak{A}$, και συνήθως γράφουμε απλά A ή $\mathrm{carr}(\mathfrak{A})$. Τα στοιχεία του A λέγονται **στοιχεία της δομής**, ο δε πληθάριθμος της δομής $\mathfrak{A}$ θα συμβολίζεται με $\mathrm{card}\,(\mathfrak{A}) \equiv \mathrm{card}\,(A)$. Πολλές φορές θα συγχέουμε τα σύμβολα $\mathfrak{A}$ και A.

• Γιά κάθε θετικό ακέραιο n, έχουμε ένα σύνολο $\mathscr{F}^A_n = \{ f^A \mid f^A : A^n \to A \}$ **n-μελών πράξεων** επί του A, που η κάθε μια ονοματίζεται με δείκτη το αντίστοιχο συναρτησιακό σύμβολο f. Τελικά το σύνολο όλων των πράξεων επί του A, είναι το $\mathscr{F}^A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}^A_n$

• Γιά κάθε θετικό ακέραιο n, έχουμε ένα σύνολο (πιθανά κενό,) **n-μελών σχέσεων** $\mathscr{R}^A_n = \{ R^A_i : R^A_i \subseteq A^n \}$, που ονοματίζονται με δείκτη το κατηγορηματικό σύμβολο R_i. Τελικά το σύνολο όλων των σχέσεων επί του A είναι το $\mathscr{R}^A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}^A_n$

• Το $\mathscr{C}^A = \{ c^A_k \in A : k \in K \}$ είναι ένα σύνολο (πιθανά κενό) κάποιων ειδικών (διακεκριμένων) στοιχείων του A που θα τα ονομάζουμε **σταθερές**, και που ονοματίζονται με δείκτες από ένα ή περισσότερα σύμβολα σταθερών, c_k.

Υποθέτουμε βεβαίως ότι $\mathscr{R} \cap \mathscr{F} \cap \mathscr{C} = \emptyset$.

• Αν $\mathscr{R} = \emptyset$, τότε η $\mathfrak{A}$ λέγεται **αλγεβρική δομή** ή απλά **άλγεβρα**.

• Αν $\mathscr{F} = \emptyset$ τότε η $\mathfrak{A}$ είναι μια γνήσια **δομή σχέσεων**.

Ο **τύπος** της δομής $\mathfrak{A}$, $\delta_{\mathfrak{A}}$ είναι η διατεταγμένη τριάδα $\langle \lambda\,;\, \mu\,;\, \mathrm{card}\,(K) \rangle$ όπου $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{N}^+$, και $\mu : J \longrightarrow \mathbb{N}^+$ είναι συναρτήσεις που φανερώνουν την τάξη (arity) των πράξεων και σχέσεων αντίστοιχα.

6.3.2 Παράδειγμα. 1) Μια **ομάδα** $\mathscr{G}$ είναι μια αλγεβρική δομή ή απλά μια άλγεβρα $\langle G, \cdot, (\cdot)^{-1}, 1 \rangle$ που αποτελείται από μια διμελή πράξη, από μια μονομελή πράξη και από μια διακεκριμένη σταθερά 1, το μοναδιαίο ή ουδέτερο στοιχείο.

Εχουμε δηλαδή εδώ:

$\mathscr{R} = \emptyset$, $\mathscr{F} = \{ \cdot, (\cdot)^{-1} \}$ και $\mathscr{C} = \{1\}$ η δε δομή $\mathscr{G}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(G1) $\quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)\ [x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$

(G2) $\quad (\forall x)[x \cdot 1 = 1 \cdot x = x]$

(G3) $\quad (\forall x)[x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1]$

Αν ισχύει και η ιδιότητα:

(G4) $\quad (\forall x)(\forall y)[x \cdot y = y \cdot x]$

τότε η ομάδα λέγεται **αβελιανή**.

2) Μια **άλγεβρα του Boole** είναι μια άλγεβρα $\mathfrak{B} \equiv \langle \mathbb{B}, \wedge, \vee, (\cdot)', 0, 1\rangle$ με $\mathscr{F} = \{\vee, \wedge, (\cdot)'\}$, $\mathscr{R} = \emptyset$ και $\mathscr{C} = \{0, 1\}$, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

(B1) $(\forall x)(\forall y)[x \vee y = y \vee x \quad \& \quad x \wedge y = y \wedge x]$

(B2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad \& \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z]$

(B3) $(\forall x)[x \vee x = x \;\&\; x \wedge x = x]$

(B4) $(\forall x)(\forall y)[x = x \vee (x \wedge y) \;\&\; x = x \wedge (x \vee y)]$

(B5) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)]$

(B6) $(\forall x)[x \wedge 0 = 0 \;\&\; x \vee 1 = 1]$

(B7) $(\forall x)[x \wedge x' = 0 \;\&\; x \vee x' = 1]$

Μια άλγεβρα $\langle \mathbb{L}, \wedge, \vee\rangle$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες $(B_1) - (B_5)$ λέγεται **επιμεριστικό δικτυωτό**.

Παραδείγματα αλγεβρών του Boole είναι το δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$, ενός μη-κενού συνόλου X, με πράξεις την ένωση την τομή και το συμπλήρωμα, δηλαδή $\langle \mathscr{P}(X)\,;\, \cup, \cap, {}^c, \emptyset, \Omega\rangle$.

Επίσης η τετριμμένη άλγεβρα του Boole είναι η **2**$= \{0, 1\}$ με πράξεις: $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1$, $0 \wedge 0, = 0$, $0 \wedge 1 = 0$. Ακόμα κάθε σ - άλγεβρα είναι μια άλγεβρα του Boole, αφού τα αξιώματα της σ - αλγέβρας στην ουσία εξασφαλίζουν την κλειστότητα των πράξεων, ως προς την $\mathscr{P}(X)$ και επομένως αποτελεί μια υποάλγεβρά της. Ετσι το ακόλουθο σύνολο, με τις πράξεις της τομής, ένωσης και συμπληρώματος, είναι μια σ-άλγεβρα και άρα μια άλγεβρα του Boole:

$$\mathbb{B} := \{A \subseteq \mathbb{N} | A \quad \text{ή} \quad \mathbb{N} - A \quad \text{είναι πεπερασμένο}\}$$

Ένα άλλο βασικό παράδειγμα άλγεβρας Boole είναι και η άλγεβρα των Lindenbaum-Tarski δείτε το 6.4.

3 Μια **άλγεβρα Heyting** είναι μια άλγεβρα $\langle \mathbb{H}, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1\rangle$ με $\mathscr{F} = \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$, $\mathscr{R} = \emptyset$, και $\mathscr{C} = \{0, 1\}$, που ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

(H1) $\langle \mathbb{H}, \vee, \wedge\rangle$ είναι ένα επιμεριστικό δικτυωτό.

(H2) $(\forall x)\ [x \wedge 0 = 0 \quad \& \quad x \vee 1 = 1]$

(H3) $(\forall x)\ [x \rightarrow x = 1]$

(H4) $(\forall x)(\forall y)\ [(x \rightarrow y) \wedge y = y \quad \& \quad x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y]$

(H5) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z) \quad \& \quad (x \wedge y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)]$.

Το γνωστότερο παράδειγμα άλγεβρας Heyting είναι τα ανοικτά σύνολα μιας τοπολογίας. Εστω $G(X)$ το σύνολο των ανοικτών συνόλων επί του X. Τότε η $\langle G(X),\ \cup,\ \cap,\ \to,\ 0, 1\rangle$ είναι μια άλγεβρα Heyting, όπου: $\cup$, $\cap$ είναι οι γνωστές συνολοθεωρητικές πράξεις, $0 := \emptyset, 1 := X$ και για κάθε $A, B \in G(X)$ ορίζουμε:

$$A \to B := \operatorname{int}[(X - A) \cup\ B]$$

Οπου το $\operatorname{int}(X)$, συμβολίζει το εσωτερικό του X, το δε, $A \to B$ είναι το μέγιστο ανοικτό σύνολο που ικανοποιεί τη σχέση $(A \to B) \cup A\ \subseteq B$.

Επίσης το ολικά διαταγμένο σύνολο $\langle\,[0, 1], \leq\,\rangle$ παράγει μια άλγεβρα Heyting $\langle [0, 1], \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ ως ακολούθως:

Για κάθε $a, b, \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} a \wedge b &:= a \quad \text{ανν} \quad a \leq b \\ a \vee b &:= b \quad \text{ανν} \quad b \leq a \\ a \to b &:= \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad a \leq b \\ b, & \text{αν} \quad b \leq a \end{cases} \end{aligned}$$

4) Μια MV-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα, $\mathfrak{A} = \langle\, A, +, \cdot, ^*, 0, 1\rangle$ τέτοια ώστε, $\langle\, A, +, \cdot\,\rangle$ είναι ένα αβελιανό μονοειδές και για κάθε $a, b \in A$ έχουμε,

$$\begin{aligned} a + 1 = 1, &\qquad 0^* = 1 \\ a \cdot b = (a^* + b^*)^* &\qquad a^{**} = a \end{aligned}$$

$$(a^* + b^*)^* + b = (b^* + a)^* + a$$

Οι MV-άλγεβρες, γνωστές και ως Chang άλγεβρες, παίζουν τον ίδιο περίπου ρόλο για τις πλειότιμες λογικές, που παίζουν οι άλγεβρες Boole για την κλασική λογική. Στην ουσία είναι μιά γενίκευση των αλγεβρών Boole, στίς οπίες δεν ισχύει το αξίωμα της ταυτοδυναμίας (idempontet law), και από την άποψη αυτή είναι ένα είδος «ποσοτικών» αλγεβρών, βλ. π.χ. το [?] αλλά και το [61] όπου εξετάζονται γενικώτερες δομές.

Σε μια MV-άλγεβρα μπορούμε να ορίσουμε και τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} a \vee b &:= (a \cdot b^*) + b \\ a \wedge b &:= (a + b^*) \cdot b \\ a\ \to\ b &:= a^* + b \\ a \leq b &:\Leftrightarrow\ \ a \wedge b = a\ \Leftrightarrow\ \ a \vee b = b \end{aligned}$$

Τότε, $\langle\, A\,;\, \leq, \wedge, \vee, ^*, 0, 1\rangle$ είναι μια **De Morgan άλγεβρα**, δηλαδή ένα επιμεριστικό δικτυωτό στο οποίο ισχύουν οι νόμοι του De Morgan, η δε $\langle\, A\,;\, \wedge, \vee, \cdot,\ \to\,, \leq, 0, 1\rangle$ είναι ένα **υπολειματικό δικτυωτό ή δικτυωτό**

με υπόλοιπα (residuated lattice), όπου τα $b \to a, \quad a, b, \in A$ είναι τα υπόλοιπα (residuals).

Το βασικό παράδειγμα για μια MV-άλγεβρα είναι η δομή,

$$\langle\, [0,1], +, \cdot, ^*, 0, 1 \,\rangle$$

όπου, για κάθε $x, y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} x + y &:= \min\{1, x + y\} \\ x \cdot y &:= \max\{0, x + y - 1\} \\ x^* &:= 1 - x \end{aligned}$$

Οι πιο πάνω πράξεις λέγονται **τελεστές Łukasiewicz**.

5) Το παράδειγμα του διανυσματικού χώρου παρουσιάζει κάποια ιδιομορφία, αφού στην ουσία η δομή αυτή είναι μιά δομή με δύο είδη στοιχείων (many-sorted structure), τα διανύσματα και τα βαθμωτά. Ωστόσο υπάρχει τρόπος να παρουσιασθεί στα πλάισια των δομών που ορίσαμε. Ας πάρουμε σαν φορέα της δομής το σύνολο των διανυσμάτων V. Υπάρχει επίσης μιά διακεκριμένη σταθερά 0^V, η αρχή του διανυσματικού χώρου. Υπάρχει μιά διμελής πράξη, $+^V$, η πρόσθεση των διανυσμάτων, καθώς επίσης και μιά μονομελής πράξη, $-^V$ για τον προσθετικό αντίστροφο. Τέλος για κάθε βαθμωτό $k \in K$, υπάρχει μιά μονομελής πράξη, k^V που αναπαριστά το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ενός διανύσματος $\vec{x}$ με το k. Ετσι κάθε βαθμωτό θεωρείται σαν μια μονομελής πράξη.

6.3.3 Ορισμός. Για απλότητα έστω ένας οπλισμός $(\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C})$ με,

$$\mathscr{R} = \{R_1, \cdots, R_n\}, \quad \mathscr{F} = \{f_1, \cdots, f_m\} \quad \text{και} \quad \mathscr{C} = \{c_k : k \in K\}.$$

Ο τύπος ομοιότητας κάθε δομής $\mathfrak{A}$ με οπλισμό $(\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C})$ είναι μια διαταγμένη τριάδα (μ, ν, k) όπου $\mu := \alpha(\cdot) \restriction \mathscr{R}$, $\nu := \alpha(\cdot) \restriction \mathscr{F}$ και $k := \operatorname{card}(\mathscr{C})$. Ετσι,

$$\begin{aligned} \mu &: \mathscr{R} \to \mathbb{N} & \qquad \nu &: \mathscr{F} \to \mathbb{N} \\ R_i &\mapsto \mu(R_i) = \mu_i & f_j &\mapsto \nu(f_j) := \nu_j \end{aligned}$$

και $R_i \subseteq A^{\mu_i}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\quad f_j : A^{\nu_j} \to A, \quad j = 1, \cdots, m$

Συχνά θα συμβολίζουμε έναν τύπο ομοιότητας και ως

$$(\mu_1, \cdots, \mu_n; \nu_1, \cdots, \nu_m\,; k)\,.$$

Παρατηρούμε στη συνέχεια, ότι αν έχουμε δυο διαφορετικές δομές $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1\,; \mathscr{F}_1, \mathscr{R}_1, \mathscr{C}_1\rangle$ και $\mathfrak{A}_2 = \langle A_2\,; \mathscr{F}_2, \mathscr{R}_2, \mathscr{C}_2\rangle$ με $A_1 \neq A_2$ αλλά όπου $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$, $\quad \mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2$, και $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$, τότε από συντακτικής απόψεως και γλωσσικής περιγραφής, θα πρέπει να θεωρούνται ίδιες. Για παράδειγμα οι δομές $\langle\,\mathbb{Q},\leq\,\rangle$ και $\langle\,\mathbb{R},\leq\,\rangle$ από συντακτικής πλευράς δίνουν τους ίδιους ατομικούς και τους ίδιους γενικά τύπους. Ετσι επειδή δεν ενδιαφέρει στη φάση αυτή, η αλήθεια ή το ψεύδος των τύπων που μπορούν να σχηματιστούν, μπορεί κανείς να πει πως έχουν την ίδια ακριβώς σύνταξη. Αυτό μας οδηγεί στη θεώρηση του στοιχείου που **συντακτικά** ταυτίζει ή διαφοροποιεί δυο δομές. Η έννοια αυτή, είναι φανερό ότι είναι αυτή του οπλισμού μιας δομής, δηλαδή η «δομή» που συνοδεύει τον φορέα της δομής $\mathfrak{A}$.

6.3.4 Ορισμός. Εστω $\mathfrak{A}=\langle A;\mathscr{R},\mathscr{F},\mathscr{C}\rangle$ μια δομή. Ο **οπλισμός** (signature) της $\mathfrak{A}$ είναι η διαταγμένη τριάδα $(\mathscr{R},\mathscr{F},\mathscr{C})$. Ο συμβολισμός $(\mathscr{R},\mathscr{F},\mathscr{C})$ όμως δεν μας φανερώνει την τάξη κάθε μιας σχέσης και συνάρτησης, καθώς και τον πληθάριθμο του $\mathscr{C}$. Ετσι αν $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ και αν κάθε 0-μελής πράξη ή συνάρτηση ταυτίζεται με ένα στοιχείο του A, τότε ο **ο οπλισμός** της $\mathfrak{A}$ είναι μια διαταγμένη τριάδα $(\mathscr{R},\mathscr{F},\mathrm{ar}(\cdot))$ με,

(i) $\mathscr{R}\cap\mathscr{F}=\emptyset$

(ii) Η συνάρτηση $\alpha(\cdot):\mathscr{R}\cup\mathscr{F}\to\mathbb{N}$, που λέγεται **τάξη** (arity) του οπλισμού είναι τέτοια ώστε:

(α) Αν $R\in\mathscr{R}$ και $\alpha(R)=n$ τότε η σχέση R είναι μια n-μελής ή n-τάξης, $n\geq 1$.

(β) Αν $f\in\mathscr{F}$ και $\alpha(f)=k$, τότε η συνάρτηση f είναι k-τάξης, δηλαδή $f:A^k\to A$. Για $k=0$ παίρνουμε τις σταθερές $\mathscr{C}=\{c_k:k\in K\}$.

Συχνά είναι βολικό να γράφουμε έναν οπλισμό με την μορφή,

$$\left\langle R_1^{\alpha(R_1)},\cdots,R_i^{\alpha(R_i)},\cdots;f_1^{\alpha(f_1)},\cdots f_j^{\alpha(f_j)},\cdots;\{c_k:k\in K\}\right\rangle,$$

ακόμα συμβολίζουμε συνήθως: $\mathscr{R}_n:=\alpha^{-1}(n)\cap\mathscr{R}$ για τις n-μελής σχέσεις οπότε,

$$\mathscr{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}_n$$

και $\mathscr{F}_n:=\alpha^{-1}(n)\cap\mathscr{F}$ για τις συναρτήσεις n-μεταβλητών, οπότε,

$$\mathscr{F}=\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$$

6.3.5 Ορισμός. Δύο δομές,

$$\mathfrak{A} := \langle A\,;\, \mathscr{F}_A, \mathscr{R}_A, \mathscr{C}_A \rangle \quad \textit{και} \quad \mathfrak{B} := \langle B\,;\, \mathscr{F}_B, \mathscr{R}_B, \mathscr{C}_B \rangle$$

όπου,
– $\mathscr{F}_A := \{f_{i,A} : i \in I_A\}$, $\mathscr{R}_A := \{R_{j,A} : j \in J_A\}$, $\mathscr{C}_A := \{c_{k,A} : k \in K_A\}$
και,
– $\mathscr{F}_B := \{f_{i,B} : i \in I_B\}$, $\mathscr{R}_B := \{R_{j,B} : j \in J_B\}$, $\mathscr{C}_B := \{c_{k,B} : k \in K_B\}$,
λέγονται **όμοιες (similar)** ή είναι όμοιου τύπου, ανν οι τύποι ομοιότητάς τους, $\delta_A = (\lambda_A, \mu_A, \mathrm{card}\,(K_A))$ και $\delta_B = (\lambda_B, \mu_B, \mathrm{card}\,(K_B))$ μπορούν να αναδιαταχτούν οι οικογένειες των πράξεων, των σχέσεων και των σταθερών, έτσι ώστε να γίνουν του ιδίου ακριβώς τύπου. Δηλαδή, υπάρχουν $1-1$ και επί συναρτήσεις $h_F : I_A \longrightarrow I_B$, $h_R : J_A \longrightarrow J_B$, $h_C : K_A \longrightarrow K_B$, έτσι ώστε, για κάθε $i \in I_A$, $j \in J_A$, $k \in K_A$ έχουμε:

$$\lambda_A(i) = \lambda_B\left(h_F(i)\right), \qquad \mu_A(j) = \mu_B\left(h_R(j)\right), \qquad c_{k,B} = h_C(c_{k,A}).$$

Είναι φανερό ότι δύο ομοίου τύπου δομές έχουν τον ίδιο δομικό οπλισμό. Ακριβέστερα έχουμε:

6.3.6 Ορισμός. Εστω $\mathfrak{A} = \langle A; \mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C} \rangle$ μια δομή. Ο **οπλισμός** (signature) της $\mathfrak{A}$ είναι η διαταγμένη τριάδα $(\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C})$ μαζί με τις συναρτήσεις,

$$\alpha_F : \mathscr{F} \to \mathbb{N}^+ \quad \alpha_R : \mathscr{R} \to \mathbb{N}^+$$

τέτοιες ώστε αν $\eta_F : I \to \mathscr{F}$ και $\eta_R : J \to \mathscr{R}$, τότε

$$\alpha_F \circ \eta_F = \lambda_A \quad \alpha_R \circ \eta_R = \mu_A$$

Είναι φανερό ότι οπλισμός και τύπος ομοιότητας είναι στην ουσία το ίδιο πράγμα. Συμβολίζουμε συνήθως: $\mathscr{R}_n := \alpha^{-1}(n) \cap \mathscr{R}$ για τις n-μελής σχέσεις οπότε,

$$\mathscr{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}_n$$

και $\mathscr{F}_n := \alpha^{-1}(n) \cap \mathscr{F}$ για τις συναρτήσεις n-μεταβλητών, οπότε,

$$\mathscr{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$$

Η κλάση των δομών ενός συγκεκριμένου τύπου $\delta = (\lambda, \mu, \mathrm{card}\,(K))$ συμβολίζεται με $Sim(\delta)$ και λέγεται **κλάση ομοιότητας δομών (similarity class)** ή **είδος δομών**.

6.3.7 Παράδειγμα. **(i)** Αν $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}\,;\, +, \cdot, \,;\, \leq\,;\, 0, 1 \rangle$ τότε ο τύπος ομοιότητας της $\mathfrak{A}$ είναι $(2, 2\,;\, 2\,;\, 2)$ αφού $\mathscr{F} = \{+, \cdot\}$ $\mathscr{R} = \{\leq\}$, και $\mathscr{C} = \{0, 1\}$

(ii) Αν $\mathfrak{G} = \left\langle G\,;\, \cdot, (\cdot)^{-1}\,;\, 1 \right\rangle$ τότε ο τύπος ομοιότητας είναι ο $(\,2, 1\,;\, \emptyset\,;\, 1\,)$, όπου $\emptyset$ συμβολίζει την πλήρη απουσία συμβόλων σχέσεων.

(iii) Αν $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{B}\,;\, \wedge, \vee, (\cdot)'\,;\, 0, 1 \,\rangle$ τότε ο τύπος ομοιότητας είναι ο $(2, 2, 1\,;\, \emptyset\,;\, 2)$.

(iv) Αν $\mathfrak{H} = \langle \mathbb{H}\,;\, \vee, \wedge, \rightarrow\,;\, 0, 1 \rangle$ τότε ο τύπος ομοιότητας είναι ο $(\,2, 2, 2\,;\, \emptyset\,;\, 2\,)$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι επειδή κάθε μαθηματική δομή είναι εφοδιασμένη με μια σχέση ισότητας, δεν περιλαμβάνουμε τη σχέση αυτή στον τύπο ομοιότητας. Πολλές φορές όμως όταν η σχέση της ισότητας παίζει έναν σοβαρό ρόλο (όπως π.χ. στα μοντέλα του Boole και γενικά στα μη-συμβατικά μοντέλα) την περιλαμβάνουμε στην δομή. Πρέπει να σημειώσουμε ακόμα ότι **πράξεις 0-τάξης** συμπίπτουν με σταθερές, ενώ **σχέσεις 1-τάξης** συμπίπτουν με υποσύνολα του A. Είναι φανερό ότι θεωρώντας την κλάση ομοιότητας $\mathrm{Sim}(\delta)$, και εισάγοντας έναν ορισμό με αφαίρεση, (definition by absraction) οδηγούμαστε φυσιολογικά στην έννοια της πρωτοβάθμιας γλώσσας, που αποτελεί την γλώσσα με την οποία εκφράζουμε γεγονότα για μια οποιαδήποτε δομή που ανήκει στην κλάση ομοιότητας $\mathrm{Sim}(\delta)$. «Ξεχνώντας» λοιπόν τους φορείς που εμφανίζονται στις δομές που ανήκουν στην $\mathrm{Sim}(\delta)$, παίρνουμε σαν αποτέλεσμα αυτής της αφαίρεσης μια γλώσσα που απαρτίζεται από σύμβολα, χωρίς καμιά σημασία και που είναι κατάλληλη για την περιγραφή μιάς οποιαδήποτε δομής στην $\mathrm{Sim}(\delta)$. Για το λόγο αυτό μια πρωτοβάθμια γλώσσα λέγεται και απλά, «**γλωσσικός τύπος ή οπλισμός**». Ετσι η γλώσσα είναι μια δευτερεύουσα αφαίρεση, που προκύπτει από την πρωτογενή μαθηματική δραστηριότητα, που είναι η μελέτη των δομών.

Η ΓΛΩΣΣΑ ΕΝΟΣ ΟΠΛΙΣΜΟΥ.

Οπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, ένα οπλισμός μπορεί να αναφέρεται σε πολλά μη - κενά σύνολα, που έτσι γίνονται **φορείς του οπλισμού**. Παρά τη διαφορετική φύση των φορέων του οπλισμού (διαφορετικά σύνολα με διαφοερετικό πληθάριθμο, κ.λ.π.) η συντακτική τους περιγραφή καθορίζεται και είναι κοινή μόνον από τη φύση του οπλισμού. Εστω λοιπόν ένας γενικός οπλισμός $\Sigma = (\mathscr{F}, \mathscr{R}, \mathscr{C})$, δεν αναφέρεται σε κανένα ειδικό συγκεκριμένο φορέα. Με τον τρόπο αυτό, αφού οι σχέσεις και οι συναρτήσεις δεν αναφέρονται σε κάποιο φορέα, αυτόματα μετασχηματίζονται σε απλά ονόματα - σύμβολα, για συγκεκριμένες σχέσεις, συναρτήσεις και σταθερές που θα ορίζονται σε μια δομή με οπλισμό Σ. Αφαιρώντας λοιπόν από τη μέση τον φορέα, αυτό που μένει είναι κάποια αφηρημένα σύμβολα - ονόματα, και τελικά μια γλώσσα που περιγράφει συντακτικά δομές με οπλισμό Σ. Μια **πρωτοβάθμια γλώσσα** $\mathscr{L}_{\boldsymbol{\Sigma}}$**, οπλισμού** $\boldsymbol{\Sigma}$**,** περιλαμβάνει τα ακόλουθα στοιχεία:

(I) Τα λογικά σύμβολα

- **(i) Μεταβλητές:** $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n \dots\}$ (αριθμήσιμο πλήθος).
- **(ii) Λογικοί σύνδεσμοι:** $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- **(iii) Ποσοδείκτες:** $\forall$ (καθολικός), $\exists$ (υπαρξιακός).
- **(iv) Ισότητα:** $\approx$
- **(v) Βοηθητικά σύμβολα:** παρενθέσεις, (,), αγκύλες [,] κ.λ.π.

(II) Μη - λογικά σύμβολα. Τα λογικά σύμβολα μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας, παραμένουν τα ίδια, ακόμα και όταν αλλάζουν οι οπλισμοί ή οι δομές, ενώ τα μη λογικά σύμβολα αναφέρονται σε συγκεκριμένο οπλισμό και επομένως αναφέρονται σε όλες τις δομές με τον ίδιο τύπο ομοιότητας.

- **(i) Σύμβολα σχέσεων ή κατηγορημάτων:** $\{R_i; i \in I\}$
- **(ii) Σύμβολα συναρτήσεων ή πράξεων:** $\{f_j; j \in J\}$
- **(iii) Σύμβολα σταθερών:** $\{c_k : k \in K\}$

Όλα τα πιο πάνω σύνολα υποτίθεται ότι είναι ανα δύο ξένα μεταξύ τους και κάθε ένα από αυτά μπορεί να είναι το κενό σύνολο. Επειδή τα λογικά σύμβολα είναι κοινά για κάθε γλώσσα, αυτό που διακρίνει μια γλώσσα, στην ουσία είναι τα μη - λογικά σύμβολα, που αποτελούν και τον οπλισμό ή τύπο ομοιότητας.

Μπορούμε λοιπόν, χωρίς κίνδυνο σύγχυσης, να ταυτίζουμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με τον οπλισμό της, συχνά δε γράφουμε:

$$\mathscr{L}_\Sigma = (\{R_i; i \in I\}; \{f_j; j \in J\}; \{c_k : k \in K\})$$

Στην πρωτοβάθμια γλώσσα $\mathscr{L}_\Sigma$ έχουμε μια **αρχή επαγωγής**, για ορισμούς και αποδείξεις, που είναι τελείως ανάλογη με την γνωστή αρχή της μαθηματικής επαγωγής, που έχουμε για τους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, ο ορισμός που δώσαμε για τους όρους και τους τύπους μιας γλώσσας είναι επαγωγικός. Στην περίπτωση μας έχουμε όμοια:

6.3.8 Ορισμός. Το σύνολο $\mathbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma)$ των **όρων** της $\mathscr{L}_\Sigma$ είναι το ελάχιστο σύνολο που παράγεται από την εφαρμογή των ακόλουθων ιδιοτήτων:

(i) Οι μεταβλητές και τα σταθερά σύμβολα είναι όροι, δηλαδή,

$$x_i \in \mathbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma), i = 1, 2, \dots \quad \text{και} \quad c_k \in \mathbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma) \quad \text{για κάθε} \quad k \in K.$$

(ii) Αν $t_1, \dots t_n \in \mathbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma)$, και $f \in \mathscr{F}$ με $\mathrm{ar}(f) = n$ τότε,

$$f(t_1, \dots, t_n) \in \mathbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma).$$

Αν $\mathscr{F}_k$ είναι το σύνολο των k-μελών συναρτησιακών συμβόλων, τότε έχουμε πιο αναλυτικά :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Term}_0 &:= V \cup \{\, c_j : j \in J \,\} \\
\mathbf{Term}_{n+1} &:= \mathbf{Term}_n \cup \{\, f(t_1, \ldots, t_k) \,|\, t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{Term}_n, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f \in \mathscr{F}_k,\ k \in \mathbb{N} \,\}
\end{aligned}$$

και τέλος,

$$\mathbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{Term}_n$$

Όμοια όπως και με την περίπτωση των πραγματικών αριθμών ορίζουμε το σύνολο των τύπων $\mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$ της $\mathscr{L}_\Sigma$.

6.3.9 Ορισμός. Το σύνολο των τύπων $\mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$ της $\mathscr{L}_\Sigma$ είναι το ελάχιστο σύνολο που παράγεται από την εφαρμογή των ακόλουθων ιδιοτήτων:

(i) Ατομικοί ή Στοιχειώδεις Τύποι. Αν $R \in \mathscr{R}$ με $\alpha(R) = n$ και $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma)$ τότε,

$$R(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$$

και,

$$t_1, t_2 \in \mathbf{Term}(\mathscr{L}_\Sigma) \;\Rightarrow\; (t_1 = t_2) \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$$

(ii) Σύνθετοι Τύποι.

(α) Αν $\varphi, \psi \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$, τότε $(\varphi \Box \psi) \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$ όπου $\Box \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(β) Αν $\phi \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$ τότε $(\neg\varphi) \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$

(γ) Αν για κάθε μεταβλητή $x \in V$, ο σχηματισμός φ είναι τύπος της $\mathscr{L}_\Sigma$ τότε και οι σχηματισμοί,

$$(\forall x)\varphi \quad \text{και} \quad (\exists x)\varphi \quad \text{είναι τύποι της } \mathscr{L}_\Sigma$$

Αν περιορίσουμε το σύνολο των λογικών συνδέσμων σε ένα επαρκές σύνολο, π.χ. το $\mathscr{S} := \{\wedge, \neg\}$,, και $\mathscr{R} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{R}_n$ είναι το σύνολο των κατηγορημάτων, με $\mathscr{R}_n$ το σύνολο των n-μελών κατηγορημάτων, $n \in \mathbb{N}$, τότε πιο αναλυτικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Form}_0 &:= \{\, R(t_1,\ldots,t_n) \mid R \in \mathscr{R}_n,\ t_i \in \mathbf{Term},\ i = 1,\ldots,n\} \\
\mathbf{Form}_{n+1} &:= \mathbf{Form}_n \cup \{\, (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{Form}_n\} \\
&\qquad\qquad \cup \{\neg\varphi \mid \varphi \in \mathbf{Form}_n\} \\
&\qquad\qquad\quad \cup \{(\exists x)\ \varphi(x) \mid \varphi \in \mathbf{Form}_n\}
\end{aligned}$$

και τέλος,

$$\mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbf{Form}_n$$

6.3.10 Σχόλιο. **(i)** Από την αναλυτική μορφή των συνόλων **Term** και **Form** γίνεται τελείως φανερός ο επαγωγικός χαρακτήρας των, και ο επαγωγικός τρόπος απόδειξης που ακολουθούμε συνήθως στη Μαθηματική Λογική.

(ii) Πρέπει από την αρχή να σημειώσουμε ότι εκτός από την τυπική γλώσσα $\mathscr{L}_\Sigma$ έχουμε επίσης και την **μεταγλώσσα,** που στην περίπτωση μας είναι η Ελληνική γλώσσα. Το ίδιο εξ άλλου συμβαίνει και στην εκμάθηση από Ελληνες της αγγλικής γλώσσας. Η Ελληνική τότε είναι η μεταγλώσσα η δε Αγγλική είναι η γλώσσα - στόχος που θέλουμε να μάθουμε. Η Ελληνική επίσης είναι μια μεταγλώσσα για την τυπική γλώσσα προγραμματισμού υπολογιστών `BASIC`.

Το σύμβολο $\Rightarrow$ δεν είναι σύμβολο της γλώσσας $\mathscr{L}_\Sigma$ αλλά είναι ένα μεταγλωσσικό σύμβολο που έχει εισαχθεί αντί της λέξης «συνεπάγεται». Το σύμβολο συνεπαγωγής της γλώσσας $\mathscr{L}_\Sigma$ είναι το $\rightarrow$. Ετσι $\Rightarrow \notin \mathscr{L}_\Sigma$.

(iii) Επίσης τα σύμβολα φ, ψ για τις προτάσεις, είναι σύμβολα της μεταγλώσσας δεν είναι τύποι αυτά τα ίδια. Τα εισάγουμε για ευκολία αντί της φράσης ο σχηματισμός των συμβόλων π.χ. $(\forall x)(\forall y)[x + y = y + z]$ είναι ένα τύπος. Αντί λοιπόν να γράφουμε όλον τον τύπο κάθε φορά, εισάγουμε το μετασύμβολο φ για τον σχηματισμό αυτό, για ευκολία στη γραφή. Ετσι αντί να γράφουμε

$$(\forall x)(\forall y)[x + y = y + z] \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$$

διευκολύνεται η διατύπωση αν εισάγουμε την μετα - μεταβλητή φ και γράφουμε $\varphi \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\mathbb{R})$. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι το σύμβολο φ εμφανίζεται στο σύνολο $\mathbf{Form}(\mathscr{L}_\mathbb{R})$.

6.3.11 Ορισμός. **Η εμβέλεια** (scope) ενός ποσοδείκτη, π.χ. του $(\forall)$ εντός ενός τύπου ϕ είναι ένα καλοσχηματισμένος υποτύπος ψ του οποίου τα πρώτα σύμβολα είναι τα $(\forall x)$ και αμέσως μετά αρχίζει με αριστερή αγκύλη και τελειώνει με την αντίστοιχη δεξιά αγκύλη.

Για παράδειγμα στον τύπο $(\forall x)[\phi(x) \wedge \psi(x)]$ η εμβέλεια του $(\forall)$ είναι ο τύπος $[\phi(x) \wedge \psi(x)]$, ενώ στον τύπο $(\forall x)[\phi(x)] \wedge [\psi(x)]$ η εμβέλεια του $(\forall)$ είναι ο υποτύπος $[\phi(x)]$.

Κάθε εμφάνιση μιας μεταβλητής x στον τύπο ϕ θα λέγεται **δεσμευμένη ή φραγμένη (bound)** αν εμφανίζεται στους ποσοδείκτες $(\forall x), (\exists x)$ ή βρίσκεται στην εμβέλεια των ποσοδεικτών $(\forall x), (\exists x)$ εντός του τύπου φ. Σε αντίθετη περίπτωση μια εμφάνιση της μεταβλητής x στον τύπο φ λέγεται **ελεύθερη**. Ενα τύπος λέγεται **πρόταση** αν δεν περιέχει καθόλου ελεύθερες μεταβλητές. Οι έννοιες της δεσμευμένης και της ελεύθερης μεταβλητής μπορούν να οριστούν αυστηρά με επαγωγικό τρόπο.

Για παράδειγμα η εμφάνιση της μεταβλητής x είναι ελεύθερη στους τύπους: $[x = c]$, $[x = c] \rightarrow (\forall x)[x = c]$ ενώ στους τύπους $(\forall x)(\forall y)[R(x, y) \rightarrow R(y, x)], (\forall x)(\exists y)[y = f(x)]$ είναι δεσμευμένη.

Επίσης στον τύπο:

$$(\forall \epsilon)\,[\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)\,[\,\delta > 0 \wedge (\forall y)[\,|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,]]]$$

που εκφράζει την συνέχεια της συναρτήσεως f, οι μεταβλητές ϵ, δ και y είναι δεσμευμένες ενώ η μεταβλητή x είναι ελεύθερη γιατί δεν είναι στην εμβέλεια κάποιου ποσοδείκτη.

6.3.12 Ορισμός. Μια γλώσσα $\mathscr{L}_\Sigma$ λέγεται **πρωτοβάθμια** αν επιτρέπει ποσοδείκτηση μόνον σε μεταβλητές $V = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ της γλώσσας $\mathscr{L}_\Sigma$. Τα σύμβολα των συναρτήσεων και σχέσεων είναι δοσμένα σταθερά σύμβολα. Οι μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ αναφέρονται στα στοιχεία του φορέα A μιας $\sum$-δομής της οποίας η $\mathscr{L}_\Sigma$ είναι η γλώσσα περιγραφής της. Αν όμως επιτρέπουμε ποσοδείκτηση και σε μεταβλητές που αναφέρονται σε συναρτήσεις, σχέσεις ή υποσύνολα του A, τότε πλέον δεν μιλάμε για πρωτοβάθμιες γλώσσες, αλλά για γλώσσες ανώτερης τάξης.

Για παράδειγμα το αξίωμα της πληρότητας και το Αρχιμήδειο αξίωμα είναι τύποι δεύτερης τάξης. Το αξίωμα της πληρότητας διατυπώνεται στη μεταγλώσσα ως «κάθε μη - κενό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, που είναι φραγμένο εκ των άνω έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα».

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΜΙΑΣ ΠΡΩΤΑΒΑΘΜΙΑΣ ΓΛΩΣΣΑΣ

Εστω $\mathscr{L}_\Sigma$ μια γλώσσα οπλισμού $\sum = (\mathscr{F}, \mathscr{R}, \mathscr{C})$, και έστω $\mathfrak{A} = \langle A\,;\, \mathscr{F}_A, \mathscr{R}_A, \mathscr{C}_A \rangle$ μια Σ- δομή με φορέα το σύνολο A, όπου $\mathscr{F}_A := \{f^A \,|\, f \in \mathscr{F}\}$,$\mathscr{R}_A := \{R^A \,|\, R \in \mathscr{R}\}$, και $\mathscr{C}_A := \{c_k^A \,|\, k \in K\}$, και αν $R^A \in \mathscr{R}_n^A$ τότε $R^A \subseteq A^n$, αν δε $f^A \in \mathscr{F}_m^A$ τότε $f^A : A^m \to A$ και τέλος $c_k^A \in A$ για κάθε $i \in K$.

Η συνολική απεικόνιση, $R \mapsto R^A$, $f \mapsto f^A$ και $c_i \mapsto c_i^A$ λέγεται μια $\mathfrak{A}$-**ερμηνεία** της $\mathscr{L}_\Sigma$. Μπορούμε επίσης να ερμηνεύουμε τις μεταβλητές της γλώσσας σε στοιχεία του A, δηλαδή να έχουμε μια αντιστοιχία-αποτίμηση,

$$\alpha : V \to A,$$

οπότε έτσι μπορούμε να ερμηνεύουμε και τους όρους και τύπους της $\mathscr{L}_\Sigma$ σε όρους και τύπους της $\mathfrak{A}$. Οι ελεύθερες μεταβλητές στους τύπους παίρνουν μια συγκεκριμένη τιμή, και οι τύποι μετατρέπονται σε προτάσεις με μια συγκεκριμένη τιμή αλήθειας.

Τα σταθερά σύμβολα μιας γλώσσας, υπάρχουν για να συμβολίζουν κάποια διακεκριμένα στοιχεία του A, όπως ουδέτερα στοιχεία κ.λ.π. Μπορούμε όμως, και αυτό είναι πάντοτε χρήσιμο, να εισάγουμε σύμβολα - ονόματα για κάθε $a \in A$. Ετσι παίρνοντας την στοιχειώδη επέκταση της $\mathscr{L}_\Sigma$ με την επισύναψη του συνόλου $\{a : a \in A\}$ έχουμε μια γλώσσα που θα τη συμβολίζουμε με $\mathscr{L}_\Sigma(\mathfrak{A})$.

Από την παραπάνω συζήτηση μπορούμε να διατυπώσουμε ακριβέστερα τον ακόλουθο ορισμό.

6.3.13 Ορισμός. Μια **ερμηνεία** της $\mathscr{L}_\Sigma$ είναι ένα ζευγάρι $(\mathfrak{A}, I)$ όπου $\mathfrak{A}$ είναι μια Σ-δομή με οπλισμό $(\mathscr{F}_A, \mathscr{R}_A, \mathscr{C}_A)$ και I είναι μια αντιστοιχία με πεδίο ορισμού τα μη - λογικά σύμβολα της $\mathscr{L}_\Sigma$ και τιμές στον οπλισμό της $\mathfrak{A}$, έτσι ώστε:

$$I : \mathscr{R} \cup \mathscr{F} \cup \mathscr{C} \to \mathscr{R}_A \cup \mathscr{F}_A \cup \mathscr{C}_A$$

$$\begin{array}{ll} R \to R^A \equiv I(R) \equiv R_I & R \in \mathscr{R}\ ,\ R^A \in \mathscr{R}_A \\ f \to f^A \equiv I(f) \equiv f^I & f \in \mathscr{F}\ ,\ f^A \in \mathscr{F}_A \\ c_j \to c_{j,A} \equiv I(c_j) \equiv c_{j,I} & c_j \in \mathscr{C}\ ,\ c_j^A \in \mathscr{C}_A \end{array}$$

Σημειώνουμε και πάλι ότι οι μεταβλητές της $\mathscr{L}_\Sigma$ ερμηνεύονται σαν μαθηματικές οντότητες - στοιχεία του μη - κενού συνόλου A με επαγωγή δε η ερμηνεία αυτή των μεταβλητών επεκτείνεται και στους όρους και τους τύπους της γλώσσας $\mathscr{L}(\Sigma)$. Με την αντιστοιχία αυτή θα ασχοληθούμε αργότερα.

6.3.14 Παράδειγμα. Εστω $\mathscr{L}(\Sigma)$ μια γλώσσα με οπλισμό $\Sigma = (\mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{C})$ όπου, $\mathscr{R} = \{R_=, R_\leq\}$, $\mathscr{F} = \{f_+, f_\cdot\}$, $\mathscr{C} = \{\mathbf{0},\ \mathbf{1}\}$ τότε μια ερμηνεία της $\mathscr{L}(\Sigma)$

στους φυσικούς αριθμούς $\langle \mathbb{N}\,; =, \leq\,; +, \cdot\,; 0, 1\rangle$ είναι η απεικόνιση I τέτοια ώστε $R_{=,I} \equiv =$, $R_{\leq,I} \equiv \leq$, $f_{+,I} \equiv +, f_{\cdot,I} \equiv \cdot$ $\mathbf{0}_I \equiv 0$, $\mathbf{1}_I \equiv 1$. Ετσι ο τύπος $R_{=}(f_+(x_1, x_2), f_{\cdot}(x_1, x_2))$ της $\mathscr{L}(\Sigma)$ ερμηνεύεται σαν $n_1 + n_2 = n_1 \cdot n_2$ όπου $\alpha(x_1) = n_1, \alpha(x_2) = n_2$.

Η $\mathscr{L}(\Sigma)$ μπορεί επίσης να ερμηνευθεί και στις Σ-δομές $\langle\, \mathbb{R}\,; =, \leq\,; +, \cdot\,; 0, 1\rangle$ ή $\mathfrak{Q} = \langle \mathbb{Q}\,; \leq\,; +, \cdot\,; 0, 1\rangle$ με τον προφανή τρόπο.

Εχουμε ήδη αναφέρει ότι σε μια ερμηνεία, οι μεταβλητές της γλώσσας θα πρέπει να ερμηνευθούν σαν στοιχεία που μεταβάλλονται επί του A. Μόνο έτσι είναι δυνατόν να ερμηνεύσουμε τους $\mathscr{L}(\Sigma)$-όρους και τους $\mathscr{L}(\Sigma)$-τύπους στην Σ-δομή $\mathfrak{A}$. Η ερμηνεία λοιπόν των μη-λογικών συμβόλων θα πρέπει να συμπληρωθεί και από την ερμηνεία των λογικών συμβόλων για να έχουμε μια πλήρη ερμηνεία της $\mathscr{L}(\Sigma)$ στην Σ-δομή $\mathfrak{A}$. Οι λογικοί σύνδεσμοι δεν παρουσιάζουν κανένα πρόβλημα: το «$\neg$» θα ερμηνεύεται «όχι» , το “$\wedge$” θα ερμηνεύεται «και» το «$\rightarrow$», «συνεπάγεται» κ.λ.π. Το μόνο που αξίζει ιδιαίτερης προσοχής είναι οι μεταβλητές της $\mathscr{L}(\Sigma)$ που πρέπει να ερμηνεύονται σαν στοιχεία - μεταβλητές του A και συνακόλουθα έχουμε και μια ερμηνεία των όρων και των τύπων. Ακριβέστερα έχουμε:

6.3.15 Ορισμός. Θα συμβολίζουμε με το ίδιο σύμβολο I, την ακόλουθη συνάρτηση: $I : V \ni x \mapsto x^I \in A$ που λέγεται και **αποτίμηση των μεταβλητών**. Ετσι το x^I στην ουσία είναι το νόημα που δίνουμε στη μεταβλητή x. Η συνάρτηση I επεκτείνεται και στους όρους της $\mathscr{L}(\Sigma)$:

(i) Αν ο όρος t συμπίπτει με μια μεταβλητή $x \in V$, τότε $t^I := I(x) \equiv x^I$. Επίσης αν $t = c \in \mathscr{C}$, τότε $t^I := I(c) \equiv c^I \equiv c^A$

(ii) Αν $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ τότε $t^I = f^I(t_1^I, \ldots t_n^I)$.

Εχοντας ορίσει την ερμηνεία των μη-λογικών και των λογικών συμβόλων καθώς επίσης και των $\mathscr{L}(\Sigma)$-όρων, οι ατομικοί τύποι, αλλά και κάθε τύπος χωρίς ελεύθερες μεταβλητές, δηλαδή πρόταση, αποκτάει μια τιμή αληθείας, γίνεται δηλαδή ή αληθής ή ψευδής, ως προς την ερμηνεία - αποτίμηση I.

Εστω μια πρόταση φ της γλώσσας $\mathscr{L}(\Sigma)(A)$, τότε ορίζουμε επαγωγικά τη σχέση “$\models_I$”, που λέγεται **σχέση ικανοποιησιμότητας:**

6.3.16 Ορισμός. Πρώτα δίνουμε τον ορισμό για τους ατομικούς τύπους:

(i) Εχουμε, $\mathfrak{A} \models_I (t_1 = t_2)$ *αν* $t_1^I = t_2^I$. Για ευκολία χρησιμοποιούμε μόνον ένα n-μελές κατηγόρημα R. Το ίδιο όμως ισχύει και για οποιοδήποτε άλλο. Απλά αυξάνονται οι ατομικοί τύποι.

(ii) $\mathfrak{A} \models_I R(t_1, \ldots, t_n)$ *αν* $(t_1^I, \ldots t_n^I) \in R_I$ Στη συνέχεια, με την επαγωγική υπόθεση ότι έχουμε ορίσει την σημασία του συμβόλου $\models_I$ για τύπους που κατασκευάστηκαν στο n-στό βήμα, ορίζουμε το σύμβολο για τους τύπους του (n+1)-στου βήματος.

(iii) $\mathfrak{A} \models_I \neg\varphi$ αν δεν ισχύει ότι $\mathfrak{A} \models_I \varphi$

(iv) $\mathfrak{A} \models_I (\varphi \wedge \psi)$ *αν* $\mathfrak{A} \models_I \varphi$ *και* $\mathfrak{A} \models_I \psi$

(v) $\mathfrak{A} \models_I (\varphi \vee \psi)$ *αν* $\mathfrak{A} \models_I \varphi$ ή/και $\mathfrak{A} \models_I \psi$

(vi) $\mathfrak{A} \models_I (\varphi \to \psi)$ *αν* $\mathfrak{A} \models_I \neg\varphi$ $\mathfrak{A} \models_I \psi$ (δηλαδή $\mathfrak{A} \models_I \varphi \Rightarrow \mathfrak{A} \models_I \psi$

(vii) $\mathfrak{A} \models_I (\exists x)[\varphi(x)]$ αν υπάρχει ένα $a \in A$, τέτοιο ώστε $\mathfrak{A} \models_I \varphi(a)$.

Ακριβέστερα έχουμε $\mathfrak{A} \models_I \varphi(\mathbf{a}|\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{a}|\mathbf{x}$ είναι η αντικατάσταση του $\mathbf{x}$ από το $\mathbf{a}$, θα γράφουμε όμως πιο απλά $\mathfrak{A} \models_I \varphi(a)$.

(viii) $\mathfrak{A} \models_I (\forall x)[\varphi(x)]$ αν για κάθε $a \in A$ έχουμε $\mathfrak{A} \models_I \varphi(a)$.

Ετσι συμπληρώθηκε ο ορισμός του συμβόλου '$\models_I$' με επαγωγή στο μήκος ή την πολυπλοκότητα των τύπων.

Η σχέση ικανοποίησης μπορεί να θεωρηθεί και σαν μια σημαντική ερμηνεία των προτάσεων χωρίς ελεύθερες μεταβλητές, στο δισύνολο $\{0, 1\}$, όπου χρησιμοποιούμε το '0' για το 'ψεύδος' και το '1' για την 'αλήθεια'. Δηλαδή αν, $\mathbf{Sent}(\mathscr{L}_\Sigma(A)) \equiv S((\mathscr{L}_\Sigma(A)))$ είναι οι προτάσεις της $\mathscr{L}_\Sigma(A)$, τότε:

$$I \ : \ \mathbf{Sent}(\mathscr{L}_\Sigma(A)) \to \{0, 1\}$$

$$\varphi \mapsto I(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad \mathfrak{A} \models \varphi \\ 0 & \text{αν} \quad \mathfrak{A} \not\models \varphi \end{cases}$$

6.3.17 Ορισμός. Αν $\mathfrak{A} \models \varphi$ τότε θα λέμε ότι η δομή $\mathfrak{A}$ είναι ένα **μοντέλο για την πρόταση** φ, αν δε $\mathfrak{A} \models \varphi$ για κάθε $\varphi \in \Sigma$ τότε θα λέμε ότι η δομή $\mathfrak{A}$ **είναι ένα μοντέλο για τη συλλογή των προτάσεων** $\mathbf{\Sigma}$, και συχνά γράφουμε $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

Είναι φανερό ότι η αλήθεια ή το ψεύδος του $\mathfrak{A} \models \varphi$ ως προς την αποτίμηση των μεταβλητών $I : V \to A$, εξαρτάται μόνον από τις τιμές $I(x)$, των μεταβλητών x που είναι ελεύθερες στον τύπο φ. Ετσι αν οι ελεύθερες μεταβλητές του φ είναι μεταξύ των $\{x_1, \ldots, x_n\}$ συμβολικά $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ και $a_1 = I(x_1), \ldots, a_n = I(x_n)$ τότε θα γράφουμε $\mathfrak{A} \models_I \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ αντί του $\mathfrak{A} \models_I \varphi(x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n)$.

Βλέπουμε ακόμη ότι στον ορισμό $\mathfrak{A} \models_I \varphi$, οι δεσμευμένες και οι ελεύθερες μεταβλητές παίζουν τελείως ξεχωριστούς ρόλους κατά την διαδικασία διαπίστωσης της αλήθειας της φ.

Στις ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x, απονέμουμε μια σταθερή τιμή $I(x) \in A$, ενώ στις δεσμευμένες δεν απονέμουμε καμιά συγκεκριμένη σταθερή τιμή, αλλά ουσιαστικά μεταβάλλονται πλέον σε μεταβλητές του A.

Ας δούμε στη συνέχεια ορισμένες βασικές έννοιες από τη Θεωρία Μοντέλων.

Εστω δυο Σ-δομές $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$. Και στην περίπτωση των Σ-δομών έχουμε έννοιες, όπως, **ομομορφισμός, ισομορφισμός**, κ.λ.π. Ακριβέστερα έχουμε:

6.3.18 Ορισμός. **(i)** Μια συνάρτηση $h : A \to B$ θα λέγεται **ομομορφισμός** αν για κάθε $R \in \mathscr{R}$, για κάθε $f \in \mathscr{F}$ και για κάθε $c \in \mathscr{C}$, έχουμε:

$$(a_1, \dots, a_k)_{I_A} \in R_{I_A} \Rightarrow (h(a_1), \dots, h(a_2) \in R_{I_B}$$

$$h(f_{I_A}(a_1, \dots, a_m)) = f_{I_B}(h(a_1), \dots h(a_m))$$

και

$$h(c_{I_A}) = c_{I_B}.$$

όπου I_A συμβολίζει την ερμηνεία της $\mathscr{L}(\Sigma)$ στην Σ-δομή $\mathscr{A}$ με φορέα το σύνολο A, όμοια με την I_B.

(ii) Μια συνάρτηση $h : A \to B$ θα λέγεται **εμφύτευση** της $\mathscr{A}$ στην $\mathscr{B}$ αν η h είναι ένας $1-1$ ομομορφισμός.

(iii) Μια συνάρτηση $h : A \to B$ θα λέγεται **ισομορφισμός** μεταξύ των Σ-δομών $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ αν η h είναι μια εμφύτευση του A **επί του** B, θα γράφουμε δε $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$.

(iv) Οι Σ-δομές $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ θα λέγονται **στοιχειωδώς ισοδύναμες** (elementary equivalent), συμβολικά $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$, αν για κάθε $\varphi \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma)$,

$$\mathscr{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathscr{B} \models \varphi$$

Ετσι οι δομές $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ δεν μπορούν να διαφοροποιηθούν από μια $\mathscr{L}(\Sigma)$-πρόταση.

Αν $\mathrm{Th}(\mathscr{A}) := \{ \varphi \in \mathbf{Form}(\mathscr{L}_\Sigma) \mid \mathscr{A} \models \varphi \}$, είναι η θεωρία του $\mathscr{A}$, τότε η σχέση $\equiv$ εκφράζεται και ως εξής: $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ αν $\mathrm{Th}(\mathscr{A}) = \mathrm{Th}(\mathscr{B})$.

Αν $h : A \to B$ είναι ένας ισομορφισμός, τότε με επαγωγή μπορεί να δειχτεί ότι αν $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ τότε,

$$\mathscr{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathscr{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)]$$

Ετσι $\mathscr{A} \cong \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$. **Το αντίστροφο δεν ισχύει.**

(v) Μια εμφύτευση $h : A \hookrightarrow B$ της $\mathscr{A}$ στην $\mathscr{B}$ θα λέγεται **$\mathscr{L}_\Sigma$-στοιχειώδης εμφύτευση** αν για κάθε $\mathscr{L}(\Sigma)$-τύπο φ με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ έχουμε:

$$\mathscr{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathscr{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)],$$

για κάθε, $a_1, \dots, a_n \in A$.

6.3.19 Ορισμός. Εστω $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ δυο Σ-δομές. Θα λέμε ότι η $\mathscr{A}$ είναι μια **υποδομή (ή υπομοντέλο),** συμβολικά $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, της δομής $\mathscr{B}$ αν για όλα τα n-μελή σύμβολα σχέσεων και συναρτήσεων της $\mathscr{L}(\Sigma)$ έχουμε:

(i) $A \subseteq B \quad \& \quad c_{j,I_A} = c_{j,I_B}, \quad j \in J$

(ii) $R_{I_A} = R_{I_B} \cap A^n$

(iii) $f_{I_A} = f_{I_B} \restriction A^n$.

Ετσι $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ αν οι Σ-δομές $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ έχουν τις ίδιες σταθερές και οι σχέσεις και συναρτήσεις της $\mathscr{A}$ είναι περιορισμοί των αντίστοιχων σχέσεων και συναρτήσεων της $\mathscr{B}$, όπου $A \subseteq B$.

Για παράδειγμα το σώμα των ρητών $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ είναι μια υποδομή του σώματος $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1\rangle$ αλλά το διαταγμένο σώμα $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$ δεν είναι υποδομή του διαταγμένου σώματος $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$.

6.3.20 Ορισμός. Εστω $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ δυο Σ-δομές. Τότε η δομή $\mathscr{A}$ είναι μια **στοιχειώδης υποδομή** της $\mathscr{B}$ (ή η $\mathscr{B}$ **είναι μια στοιχειώδης επέκταση** της $\mathscr{A}$, συμβολικά $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$ αν

(i) $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$ και,

(ii) Για κάθε φ με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ και $a_1, \ldots, a_n \in A$ έχουμε: $\mathscr{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow \mathscr{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Αν $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$, τότε λέμε ότι οι Σ- δομές έχουν τις ίδιες αληθείς προτάσεις με παραμέτρους στο A.

Εχουμε ακόμη ότι: $\mathscr{A} \prec \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$, το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα αν $\mathscr{A} = \langle \mathbb{N} - \{0\}, <\rangle$ και $\mathscr{B} = \langle \mathbb{N}, <\rangle$, τότε έχουμε $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, αλλά δεν ισχύει ότι $\mathscr{A} \prec \mathscr{B}$.

Στη συνέχεια θα συγχέουμε συνειδητά τα ονόματα $\mathbf{a}$ με τα πραγματικά αντικείμενα a, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος παρανόησης.

6.4 Η Άλγεβρα των Lindenbaum-Tarski.

Σ' αυτό το τμήμα θα θέλαμε να σκιαγραφήσουμε το ρόλο των αλγεβρών Boole στην Κλασική Λογική και ιδιαίτερα στον προτασιακό Λόγισμό. Για τον ορισμό της εν λόγω άλγεβρας υπάρχουν δύο τρόποι προσεγγισης: Ο συντακτικός και ο σημασιολογικός. Ο συντακτικός τρόπος βασίζεται σε ένα *τυπικό σύστημα* *παραγωγής* στο οποίο ένας καλοσχηματισμένος τύπος (κστ) είναι αληθής αν μπορεί να συναχθεί από ένα σύνολο αξιωμάτων με καθορισμένους απαγωγικούς κανόνες (deduction rules). Οι τύποι αυτοί αποτελούν αυτά που συνήθως αποκαλούμε «θεωρήματα».

Από την άλλη μεριά ο σημασιολογικός ή σημαντικός τρόπος βασίζεται σε μιά συνάρτηση απονομής τιμών αληθείας, όπου ένας κστ είναι αληθής αν είναι μια ταυτολογία.

Ενα βασικό συμπέρασμα των Θεωρημάτων «Ορθότητας» και «Επάρκειας» είναι ότι οι δύο αυτές προσεγγίσεις συμπίπτουν. Στη συνέχεια θα ορίσουμε την Άλγεβρα των Lindenbaum-Tarski για το Προτασιακό Λογισμό. Με όμοιο τρόπο ορίζεται και για τον Κατηγορηματικό Λογισμό.

Έστω $\mathbf{Form(X)}$ οι τύποι επί των προτασιακών μεταβλητών X. Επί του $\mathbf{Form(X)}$ ορίζουμε την σχέση προδιατάξεως,

$$\varphi \preccurlyeq \psi \quad \text{ανν} \quad \vdash \varphi \to \psi$$

Η σχέση $\preccurlyeq$ δεν ικανοποιεί την αντισυμμετρική ιδιότητα και γι'αυτό είναι μια προδιάταξη. Έτσι αν στη συνέχεια ορίσουμε την,

$$\varphi \equiv \psi \quad \text{ανν} \quad \varphi \preccurlyeq \psi \quad \text{και} \quad \psi \preccurlyeq \varphi$$

Τότε η $\equiv$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας (δείξτε όλα τα σχετικά, π.χ. αν $\varphi \equiv \varphi' \quad \& \quad \psi \equiv \psi'$ τότε $\varphi \vdash \psi \quad$ ανν $\quad \varphi' \vdash \psi'$) και αν ορίσουμε επί του συνόλου-πηλίκου, $B := \mathbf{Form(X)}/\equiv$ τη σχέση,

$$[\varphi] \preceq [\psi] \quad \text{ανν} \quad \vdash \varphi \to \psi$$

όπου φ, ψ, αντιπρόσωποι των κλάσεων ισοδυναμίας $[\varphi], [\varphi]$, τότε έχουμε μια σχέση διατάξεως.

6.4.1 Θεώρημα. *(**Άλγεβρα των Lindenbaum-Tarski**) Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο, $\mathbb{B} := \langle B, \preceq \rangle$ είναι ένα μιά άλγερβα Boole (ένα συμπληρωμένο, επιμεριστικό δυκτιωτό). Επί πλέον έχουμε,*

$$[\varphi] = 1 \quad \textit{ανν} \quad \vdash \varphi \quad \textit{και} \quad [\varphi] = 0 \quad \textit{ανν} \quad \vdash \neg\varphi.$$

Απόδ. (Σκιαγράφιση) : Πρώτα δείχνουμε ότι το $\mathbb{B}$ είναι ένα δυκτιωτό, δηλαδή για οποιαδήποτε ζευγάρι στοιχείων, $[\varphi], [\psi]$ δείξτε ότι,

$$[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi] \quad \text{και} \quad [\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$$

Στη συνέχεια δείξτε ότι ισχύουν οι επιμεριστικές ιδιότητες και τέλος για οποιαδήποτε ζευγάρι στοιχείων, $[\varphi], [\psi]$ ισχύουν οι,

$$[\varphi] \vee [\neg\psi] = 1 \quad \text{και} \quad [\varphi] \wedge [\neg\psi] = 0 \quad \dashv\blacksquare$$

Οι Τ-θεωρίες είναι (οι λογικά ισοδύναμες προτάσεις ταυτίζονται) τα φίλτρα (δές Ορισμός 7.2.4, σελ.116) αυτής της άλγεβρας, ενώ τα υπερφίλτρα της είναι οι πλήρης Τ-θεωρίες. Γενκά με τη χρήση της Άλγέβρας των Lindenbaum-Tarski τα θέματα της Λογικής παίρνουν μια κομψή αλγεβρική μορφή, δείτε π.χ. το [27].

7

ΥΠΕΡΓΙΝΟΜΕΝΑ ΔΟΜΩΝ

7.1 Εισαγωγή

Τα υπεργινόμενα δομών θα μπορούσαμε να τα χαρακτηρίσουμε και σαν κατασκευές αναφερόμενες σε μεταβαλλόμενες δομές, όπου με εφαρμογή της διαλεκτικής αρχής της «άρνησης της άρνησης» στο σχήμα σταθερό μεταβαλλόμενο, καταφέρνουμε να πάρουμε ποιοτικά ανώτερες ευσταθείς δομές που ικανοποιούν τους τύπους μιας γλώσσας $\mathscr{L}_{\Sigma}$.

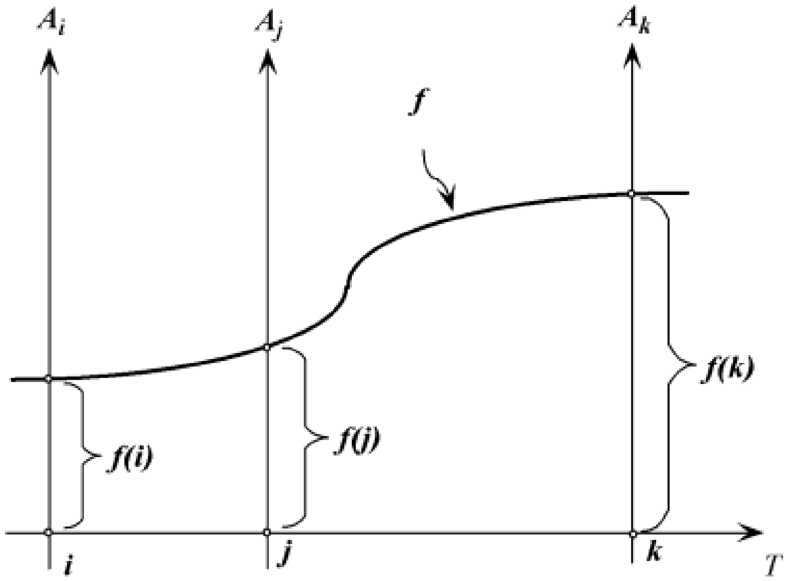
7.2 Υπεργινόμενα Δομών

Υπεργινόμενα Δομών Στη συνέχεια μπορούμε να θεωρούμε δομές με μια ή περισσότερες γενικές σχέσεις ή πράξεις, από αυτές των πραγματικών αριθμών $\langle \mathbb{R};+,\cdot,\leq,0,1\rangle$, όμως για να διευκολύνουμε την ανάπτυξη του θέματος, θα περιοριστούμε σε γενικές δομές με οπλισμό $\Sigma = (\mathscr{R},\mathscr{F},\mathscr{C})$, όπου $\mathscr{R} = \{E,R\}, \mathscr{F} = \emptyset, \mathscr{C} = \emptyset$. Το σύμβολο σχέσης E προορίζεται για τη σχέση της ισότητας, το δε R για σύμβολο μιας γενικής σχέσης. Στην ανάπτυξη του θέματος θα ακολουθήσουμε το [20].

Η γλώσσα για τις δομές αυτές θα συμβολίζεται απλά με $\mathscr{L}$. Ετσι η $\mathscr{L}$ είναι μια γλώσσα με μόνον ένα κατηγορηματικό σύμβολο για την ισότητα και ένα κατηγορηματικό σύμβολο για μια γενική σχέση.

Θα θεωρήσουμε και δω το διαλεκτικό σχήμα: **σταθερή δομή ενάντια σε μεταβαλλόμενη δομή.** Δηλαδή στην περίπτωση μας **δεν θα θεωρούμε μόνον μεταβαλλόμενα στοιχεία που ανήκουν στον φορέα μιας δομής**, όπως η $\langle \mathbb{R};+,\cdot,\leq,0,1\rangle$ **αλλά ταυτόχρονα θα μεταβάλλονται και οι Σ-δομές.**

Εστω T ένα σύνολο, που θα το χρησιμοποιούμε σαν πεδίο μεταβολής του χρόνου (χρονοσύνολο) και έστω $\{\mathfrak{A}_t : t \in T\}$ μια μεταβαλλόμενη Σ - δομή όπου $\mathfrak{A}_t := \langle A_t;R_t\rangle$. Αν θέλουμε ταυτόχρονα να θεωρήσουμε και μεταβαλλόμενα στοιχεία, όπου για κάθε $t \in T$, $f(t) \in A_t$, τότε είναι φανερό ότι θα



Σχήμα 7.1: Χαρακτηριστικό στοιχείο του: $A \equiv \prod_{t\in T} A_t := \{f|f : T \to \bigcup_{t\in T} A_t \quad \& \quad f(t) \in A_t,\ t \in T\}$

πρέπει να θεωρήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathfrak{A} \equiv \prod\limits_{t\in T} \mathfrak{A}_t := \langle A, R\rangle$, όπου

$$A \equiv \prod_{t\in T} A_t := \{f|f : T \to \bigcup_{t\in T} A_t \quad \& \quad f(t) \in A_t, \quad t \in T\}$$

Είναι φανερό ότι κάθε στοιχείο $f \in \prod\limits_{t\in T} A_t$ είναι ένα μεταβαλλόμενο στοιχείο που αναφέρεται σε μεταβαλλόμενες Σ-δομές, έτσι ώστε για κάθε χρονοσημείο $t \in T$, $f(t) \in A_t$. Κάθε τέτοιο μεταβαλλόμενο στοιχείο λέγεται και **συνάρτηση επιλογής**, αφού επιλέγει για κάθε χρονοσημείο $t \in T$ ένα στοιχείο από το A_t. Για να υπάρχουν τέτοια μεταβαλλόμενα στοιχεία πρέπει να ισχύει το **Αξίωμα της Επιλογής**.

Η σχέση R, ορίζεται ως ακολούθως:

$$R := \{(f, g) \in A \times A \,|\, (\forall t \in T)[(f(t), g(t)) \in R_t]\}$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς, όπως και στην περίπτωση όπου $T = \mathbb{N}$ και $\mathfrak{A}_n = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ότι η δομή $\langle A, R\rangle$ δεν ικανοποιεί τις ιδιότητες πρώτης τάξης, που ικανοποιούνται στις στιγμιαίες δομές $\mathfrak{A}_t, \quad t \in T$. Είναι δηλαδή δυνατόν να έχουμε $\mathfrak{A}_t \models \varphi$ για κάθε $t \in T$, αλλά $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. Εχουμε ήδη παρατηρήσει τέτοια παραδείγματα για την περίπτωση των πραγματικών αριθμών και για τα αξιώματα που λένε ότι στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν διαιρέτες του μηδενός και ακόμη ότι το $\mathbb{R}$ είναι ολικά διατεταγμέμο. Ωστόσο το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ έχει και διαιρέτες του μηδενός αλλά και δεν είναι ολικά διατεταγμέμο. Στη συνέχεια δεν θα κάνουμε διάκριση μεταξύ ονόματος f και συνάρτησης f.

Παρατηρούμε ότι παρ' όλο που για κάθε $f, g, \in A$ είναι δυνατόν να μην ισχύει ότι $(f(t), g(t)) \in E_t$, για κάθε $t \in T$, μπορεί όμως για κάποια $t \in T$, πράγματι να έχουμε $(f(t), g(t)) \in E_t$. Ομοίως είναι δυνατόν, για κάποια $t \in T$ να έχουμε ότι $(f(t), g(t)) \in R_t$, ενώ για κάποια άλλα $(f(t), g(t)) \notin R_t$. Ετσι για κάθε $f, g \in A$, ορίζουμε την **τιμή αληθείας** των ατομικών τύπων ως ακολούθως:

$$\begin{array}{rcccl} E & : & A \times A & \to & \mathscr{P}(T) \\ & & (f,g) & \mapsto & E(f,g) := \{t \in T | f(t) = g(t)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} R & : & A \times A & \to & \mathscr{P}(T) \\ & & (f,g) & \mapsto & R(f,g) := \{t \in T | \, (f(t), g(t)) \in R_t\} \end{array}$$

Ετσι ο βαθμός ή η τιμή αλήθειας, με την οποία ισχύει η ισότητα μεταξύ των f, g είναι το σύνολο των στιγμών $t \in T$, κατά τις οποίες ισχύει πράγματι η ισότητα. Ομοια ερμηνεία ισχύει και για την $R(f, g)$.

Τις παραπάνω συναρτήσεις τιμών αλήθειας τις επεκτείνουμε και σε γενικούς τύπους της γλώσσας $\mathscr{L}(A)$, παίρνοντας έτσι **μια συνάρτηση αλήθειας** που αντί να παίρνει δυο τιμές στην τετριμμένη άλγεβρα του Boole $\mathbf{2} \equiv \{0, 1\}$, παίρνει τιμές στην δυναμοάλγεβρα του Boole $\mathscr{P}(T)$. Ετσι με επαγωγή ορίζουμε την συνάρτηση:

$$\begin{array}{rcccl} [\![\cdot]\!] & : & S\left(\mathscr{L}(A)\right) & \to & \mathscr{P}(T) \\ & & \varphi & \mapsto & [\![\varphi]\!] \end{array}$$

ως ακολούθως

(i) Για ατομικούς τύπους την έχουμε ήδη ορίσει:

$$[\![f = g]\!] := E(f, g) \text{ και } [\![R(f, g)]\!] := R(f, g)$$

σημειωτέον τα f, g στα $[\![\, f = g \,]\!]$ και $[\![\, R(f, g) \,]\!]$ κανονικά θα έπρεπε να είναι $[\![\, \mathbf{f} = \mathbf{g}]\!]$ και $[\![\, \mathbf{R}(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \,]\!]$.

(ii) Εστω τώρα ότι έχουμε ορίσει την τιμή αλήθειας για τις προτάσεις, $\varphi, \psi \in S(\mathscr{L}(A))$, τότε,

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!] := [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$$

$$[\![\neg\varphi]\!] := T \setminus [\![\varphi]\!]$$

(iii) Για κάθε φ με $\mathrm{FV}(\varphi) \subseteq \{x\}$, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ορίσει την τιμή αλήθειας για κάθε αντικατάσταση της ελεύθερης μεταβλητής.

τότε,

$$[\![(\exists x)\varphi]\!] := \bigcup_{f \in A} [\![\varphi(f)]\!]$$

Σημειώστε ότι για κάθε πρόταση φ, η $[\![\varphi]\!]$ είναι υποσύνολο του $\mathscr{P}(T)$. Στην περίπτωση του $^*\mathbb{R}$, οι τιμές αλήθειας ήταν υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

Εστω τώρα ένας τύπος φ με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, τότε η συνάρτηση αλήθειας $[\![\varphi(f_1, \ldots, f_n)]\!]$ είναι ίση με το σύνολο των στιγμών $t \in T$, για τις οποίες ισχύει η $\varphi\,(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ στην στιγμιαία δομή $\mathfrak{A}_t$. Ακριβέστερα έχουμε:

7.2.1 Θεώρημα. *Εστω φ ένας $\mathscr{L}$-τύπος με $FV(\varphi) \subseteq \{\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n}\}$, τότε, για κάθε $\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_n} \in \mathbf{A}$, έχουμε:*

$$[\![\varphi(\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_n})]\!] = \{\mathbf{t} \in \mathbf{T} : \mathfrak{A}_\mathbf{t} \models \varphi[\,\mathbf{f_1}(\mathbf{t}), \ldots, \mathbf{f_n}(\mathbf{t})\,]\}$$

Απόδ. Το αποτέλεσμα ισχύει για ατομικούς τύπους εξ ορισμού. Εστω τώρα ότι $\varphi \equiv \psi_1, \wedge\psi_2$ και ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τους τύπους ψ_1 και ψ_2. Τότε,

$$\begin{aligned}
[\![\varphi(f_1, \ldots, f_n)]\!] &= [\![\psi_1(f_1, \ldots, f_n)]\!] \cap [\![\psi_2(f_1, \ldots, f_n)]\!] \\
&= \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \psi_1[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\} \cap \\
&\qquad\qquad \cap \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \psi_2[f_1(t_1), \ldots f_n(t)]\} \\
&= \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models (\psi_1 \wedge \psi_2)[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\} \\
&= \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \varphi[f_1(t), \ldots f_n(t)]\}
\end{aligned}$$

Ετσι το αποτέλεσμα ισχύει για τύπους $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$. ⊣❑

Εστω τώρα ότι $\varphi \equiv \neg\psi$ και ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τον τύπο ψ. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
[\![\varphi(f_1, \ldots, f_n)]\!] &= T \setminus [\![\psi(f_1, \ldots, f_n)]\!] \\
&= T \setminus \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \psi[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\} \\
&= \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \neg\psi[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\} \\
&= \{t \in T : \mathfrak{A}_t \models \varphi[f_1(t), \ldots, f_n(t)]\}
\end{aligned}$$

Αρα στην περίπτωση αυτή ισχύει. ⊣❑

Τέλος έστω $\varphi \equiv (\exists x_k)[\psi]$.Αν $\alpha = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ είναι μια αποτίμιση των μεταβλητών $x_1 \ldots, x_n \ldots$ τότε θα συμβολίζουμε με $\alpha(\kappa|f(t))$ την ίδια αποτίμηση μεταβλητών εκτός του ότι η μεταβλητή x_k αποτιμάται με το στοιχείο $f(t)$, δηλ.,

$$k\alpha\,(k|f) := (\,f_1(t), \ldots, f_{k-1}(t), f(t), f_{k+1}(t), \ldots f_n(t)\,)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $k \leq n$. Εχουμε:

$$\begin{aligned}[\![\varphi(f_1,\ldots,f_n)]\!] &= [\![(\exists x_k)[\psi](f_1,\ldots f_n)]\!] \\ &= \bigcup_{f\in A}[\![\psi(\alpha(k\,|\,f))]\!] \\ &= \bigcup_{f\in A}\{t\in T : \mathfrak{A}_t \models \psi[\alpha(k\,|\,f)]\}\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι αν,

$$\{t \in T \ : \ \exists\ f \in A, \quad \text{με} \quad \mathfrak{A}_t \models \psi[\alpha\,(\,k|f(t))]\} \equiv X$$

τότε

$$X \subseteq \{t\in T : \mathfrak{A}_t \models (\exists x_k)\psi[f_1(t),\ldots,f_n(t)]\} \equiv t(\varphi)$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και η αντίστροφη σχέση. Εστω $t \in T(\varphi)$, τότε υπάρχει $a \in A_t$ τέτοιο ώστε,

$$\mathfrak{A}_t \models \psi[\alpha(k|a)]$$

Αν τώρα πάρουμε μια $f \in A$ με $f(t) = a$, τότε βλέπουμε ότι $t \in X$, έτσι $X = T(\varphi)$ και επομένως ο τύπος ισχύει και στην τελευταία αυτή περίπτωση. ⊣

Από το Θεώρημα 7.2.1, αν κάθε $\mathfrak{A}_t$ ταυτίζεται με κάποια δομή $\mathfrak{B}$, $t \in T$ οπότε στην περίπτωση αυτή έχουμε αντί το γινόμενο $\prod_{t\in T} A_t$ την δύναμη B^T, και αν για κάθε $b \in B$ ορίσουμε την σταθερή συνάρτηση

$$\begin{array}{cccc}\hat{b} & : & T & \rightarrow & B \\ & & t & \mapsto & \hat{b}\equiv b\end{array}$$

τότε μπορεί κανείς να δείξει ότι:
Για κάθε τύπο φ με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1\ldots,x_n\}$ και για κάθε $\mathbf{b_1},\ldots,\mathbf{b_n} \in \mathbf{B}$ έχουμε ότι:

$$\mathfrak{B} \models \varphi[b_1,\ldots b_n] \Leftrightarrow [\![\varphi(\widehat{b_1}\ldots,\widehat{b_n}]\!] = T$$

Δηλαδή ο φ ικανοποιείται στη δομή $\mathfrak{B}$ αν στην δύναμη B^T ικανοποιείται για κάθε χρονική στιγμή $t \in T$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ακόλουθη χρήσιμη πρόταση:

7.2.2 Πρόταση. *Εστω φ ένας $\mathscr{L}(A)$-***τύπος με** *$FV(\varphi) \subseteq \{\mathbf{x}\}$ και $\mathbf{f},\mathbf{g} \in \mathbf{A}$, τότε,*

$$[\![\mathbf{f}=\mathbf{g}]\!] \cap [\![\varphi(\mathbf{f})]\!] \subseteq [\![\varphi(\mathbf{g})]\!].$$

Απόδ. Εχουμε ότι,

$$[\![f=g]\!] = \{t\in T\,|\,f(t)=g(t)\}$$

και από το Θεώρημα 7.2.1 έχουμε,

$$[\![\varphi(f)]\!] = \{t \in T \,|\, \mathfrak{A}_t \models \varphi[f(t)]\}$$

άρα,

$$\begin{aligned}[\![f = g]\!] \cap [\![\varphi(f)]\!] &= \{t \in T \,|\, [f(t) = g(t)] \wedge \mathfrak{A}_t \models \varphi[f(t)]\} \\ &= \{t \in T \,|\, [f(t) = g(t)] \wedge \mathfrak{A}_t \models \varphi[g(t)]\} \\ &\subseteq \{t \in T \,|\, \mathfrak{A}_t \models \varphi[g(t)\} = [\![\varphi(g)]\!]\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε την βασική **Αρχή του Μεγίστου**, που μας λέει ότι στον ορισμό,

$$[\![\, \exists x \varphi \,]\!] := \bigcup_{f \in A} [\![\varphi(f)]\!]$$

υπάρχει στοιχείο $f \in A$ έτσι ώστε να επιτυγχάνεται το supremum $\bigcup_{f \in A} [\![\varphi(f)]\!]$, ως προς το μερικά διατεταγμένο σύνολο $\langle \mathscr{P}(T), \subseteq \rangle$.

7.2.3 Θεώρημα. (Αρχή του μεγίστου) *Εστω φ ένας $\mathscr{L}(A)$-τύπος με* $\mathbf{FV}(\varphi) \subseteq \{\mathbf{x}\}$. *Τότε υπάρχει $\mathbf{g} \in \mathbf{A}$ έτσι ώστε:*

$$[\![\, \exists x \varphi(x) \,]\!] := \bigcup_{f \in A} [\![\varphi(f)]\!] = [\![\varphi(g)]\!]$$

Απόδ. Με την προϋπόθεση ότι ισχύει το Αξίωμα της επιλογής AC, μπορούμε να διατάξουμε καλώς το A με τη μορφή $\{f_\xi : \xi < \alpha\}$ για κάποιο διατακτικό α. Για κάθε $\xi < \alpha$, θέτουμε:

$$T_\xi := [\![\varphi(f_\xi)]\!] \setminus \bigcup_{n < \xi} [\![\varphi(f_n)$$

Ετσι έχουμε:

$$[\![\, \exists x \varphi \,]\!] = \bigcup_{f \in A} [\![\varphi(f)]\!] = \bigcup_{\xi < \alpha} [\![\varphi(f_\xi)]\!] = \bigcup_{\xi < \alpha} T_\xi \qquad (*)$$

αφού $[\![\varphi(f_\xi)]\!] \cap [\bigcup_{n < \xi} [\![\varphi(f_n)]\!]] = \emptyset$.

Επίσης, αν $\xi \neq n$ τότε $T_\xi \cap T_n = \emptyset$, έτσι μπορούμε να επιλέξουμε ένα $g \in A$, που να ικανοποιεί τη σχέση,

$$g \restriction T_\xi = f_\xi \restriction T_\xi \quad \text{για} \;\; \text{κθε} \;\; \xi < a$$

Τότε $T_\xi \subseteq [\![g = f_\xi]\!]$, είναι δε φανερό ότι $T_\xi \subseteq [\![\varphi(f_\xi)]\!]$, έτσι από την Πρόταση 7.2.2 έχουμε:

$$T_\xi \subseteq [\![g = f_\xi]\!] \cap [\![\varphi(f_\xi)]\!] \subseteq [\![\varphi(g)]\!] \quad \text{για κάθε } \xi < a$$

Αρα, $\bigcup\limits_{\xi<a} T_\xi \subseteq [\![\varphi(g)]\!]$ και επομένως από την $(*)$ έχουμε:

$$[\![\exists x\varphi]\!] \subseteq [\![\varphi(g)]\!]$$

Αφού δε,

$$[\![\exists\varphi]\!] := \bigcup_{f\in A} [\![\varphi(f)]\!]$$

άρα η αντίστροφη σχέση είναι φανερή, έτσι λοιπόν,

$$[\![\exists x\varphi]\!] = [\![\varphi(g)]\!].$$

και η απόδειξη συμπληρώθηκε. ⊣

Μέχρι στιγμής έχουμε κατασκευάσει μια δομή $\mathfrak{A} = \langle A\,; E, R\rangle$ με τιμές αλήθειας στην άλγεβρα του Boole $\mathscr{P}(T)$. Η δομή $\mathfrak{A}$ είναι η δομή μετά την άρνηση της σταθερότητας, και των δομών $\mathfrak{A}_t$ καθ' εαυτών, αλλά και των στοιχείων $f_t \in A_t$, $t \in T$. Ετσι **κάθε $\mathbf{f} \in \mathbf{A}$ είναι ένα μεταβαλλόμενο στοιχείο με στιγμιαίες τιμές $\mathbf{f_t} \in \mathbf{A_t}, \mathbf{t} \in \mathbf{T}$, η δε τιμή αλήθειας $[\![\varphi]\!]$ κάθε πρότασης είναι το σύνολο των χρονικών στιγμών $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, για τις οποίες η φ είναι αληθής**.

Ο επόμενος στόχος μας είναι να **αρνηθούμε την άρνηση της σταθερότητας, και των δομών και των στοιχείων.** Με την δεύτερη αυτή άρνηση, ελπίζουμε να περάσουμε από την δομή των Boole $\langle A\,;\, E, R\rangle$ (Boolean - valued structure), των μεταβαλλόμενων $\mathscr{L}$-δομών και ταυτόχρονα μεταβαλλόμενων στοιχείων, σε μια συνηθισμένη $\mathscr{L}$-δομή, όπως ακριβώς από το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ πήραμε την ${}^*\mathbb{R}$. Στο δεύτερο μέρος αυτού του βιβλίου, εξετάζεται, ο τρόπος μελέτης της $\langle A\,;\, E, R\rangle$, σαν δομής το Boole, χωρίς αναγκαίο πέρασμα στη σταθερότητα.

Το βήμα της άρνησης γίνεται πάλι με βάση ένα μεγιστικό (maximal) ελεύθερο φίλτρο, δηλαδή ένα ελεύθερο υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$. Το $\mathscr{F}_M$ παράγεται από το φίλτρο του Fréchet $\mathscr{F}$, που και εδώ ορίζεται με ανάλογο τρόπο, όπως και στην περίπτωση των «ουρών ακολουθιών δεικτών» από το $\mathbb{N}$. Το υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$ ταυτόχρονα επιβάλλει και ένα «καθεστώς αλήθειας» στο μοντέλο $\mathfrak{A}$. Ας ξαναθυμηθούμε όμως πρώτα κάποια βασικά αποτελέσματα για τα φίλτρα.

7.2.1 Η Έννοια του Φίλτρου και η Αναγωγική Μείωση. (reduction)

7.2.4 Ορισμός. Εστω T ένα μη-κενό σύνολο. Ενα **φίλτρο** $\mathscr{F}$ επί του T (ακριβέστερα επί της $\mathscr{P}(T)$) είναι μια μη-κενή κλάση υποσυνόλων του T, $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(T)$, τέτοια ώστε:

(F$_1$) $T \in \mathscr{F}$

(F$_2$) Αν $A, B \in \mathscr{F}$ τότε $A \cap B \in \mathscr{F}$.

(F$_3$) An $A \in \mathscr{F}$ και $A \subseteq B$ τότε $B \in \mathscr{F}$.

Δυϊκά μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του ιδεώδους ή ιδεατού. Το $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(T)$ λέγεται **ιδεώδες** ανν

(I$_1$) $\emptyset \in \mathscr{I}$

(I$_2$) Αν $A, B \in \mathscr{I}$ τότε $A \cup B \in \mathscr{I}$.

(I$_3$) An $A \in \mathscr{I}$ και $B \subseteq A$ τότε $B \in \mathscr{I}$.

Είναι φανερό ότι αν $\mathscr{F}^c := \{A^c : A \in \mathscr{F}\}$ τότε το $\mathscr{F}$ είναι φίλτρο ανν το $\mathscr{F}^c$ είναι ιδεώδες και αντίστροφα, αν $\mathscr{I}^c := \{A^c : A \in \}$ τότε το $\mathscr{I}$ είναι ιδεώδες ανν το $\mathscr{I}^c$ είναι φίλτρο.

Οι ίδιοι ακριβώς ορισμοί ισχύουν και στην περίπτωση μιας γενικής αλγέβρας Boole $\mathbb{B}$ αντί της $\mathscr{P}(T)$ ή ακόμα και ενός δικτυωτού.

Ασκηση. Να εξεταστεί αν οι συνθήκες (F_2) & (F_3) είναι ισοδύναμες με την ακόλουθη συνθήκη:

$$A \in \mathscr{F}, \ \& \ B \in \mathscr{F} \Leftrightarrow A \cap B \in \mathscr{F}$$

7.2.5 Παράδειγμα. (i) Για κάθε $x \in T$ το **κύριο (principal) ή τετριμμένο** φίλτρο ορίζεται ως εξής:

$$\mathscr{F}_x := \{A \in \mathscr{P}(T) : x \in A\}$$

(ii) Το **φίλτρο του Fréchet** επί του T, ορίζεται ανάλογα ως εξής:

$$\mathscr{F} := \{\, A \subseteq T \,|\, T \setminus A \quad \text{είναι πεπερασμένο}\} \subseteq \mathscr{P}(T).$$

(iii) Εστω $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας και,

$$\mathscr{F} := \{A \in \mathscr{A} : P(A) = 1\}$$

Τότε το $\mathscr{F}$ είναι ένα δ-φίλτρο (κλειστό δηλαδή ως προς αριθμήσιμες τομές).

(iv) Αν $\langle T, \mathscr{T}\rangle$ είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε το σύστημα γειτονίων ενός σημείου $x \in T$

$$\mathscr{F}(x) := \{G \in \mathscr{T} \colon G \quad \text{είναι μια περιοχή του } x\}$$

είναι ένα φίλτρο.

7.2.6 Πρόταση. *Εστω $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}(T)$ ένα ιδεώδες επί του T. Αν,*

$$A \sim_{\mathscr{I}} B \Leftrightarrow (A \vartriangle B) \in \mathscr{I}$$

τότε η σχέση $\sim_{\mathscr{I}}$ είναι μια ισοδυναμία.

Απόδ. Αφήνεται σαν άσκηση. $\dashv\blacksquare$

Έστω τώρα η οικογένεια των γνήσιων φίλτρων επί του Τ,

$$\mathfrak{F} := \{\mathscr{F} : \mathscr{F}\text{είναι ένα γνήσιο φίλτρο επί του} T, \mathscr{F} \neq 2^T\}$$

Το $\mathfrak{F}$ είναι ένα επαγωγικό σύνολο (κάθε αύξουσα αλυσίδα έχει ένα άνω φράγμα). Από το Λήμμα του Zorn έχουμε ότι το $\mathfrak{F}$ έχει ένα μεγιστικό (maximal) στοιχείο. Ετσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

7.2.7 Ορισμός. Κάθε στοιχείο του συνόλου των μεγιστικών στοιχείων του $\mathfrak{F}$ λέγεται **υπερφίλτρο επί του T**

Με κατάλληλη χρήση του Λήμματος του Zorn μπορούμε να επεκτείνουμε κάθε γνήσιο φίλτρο επί του Τ σε ένα υπερφίλτρο επί του Τ.

7.2.8 Πρόταση. *Ενα φίλτρο $\mathscr{F}_M$ επί του T είναι ένα υπερφίλτρο ανν για κάθε $A \subseteq T$, ή $A \in \mathscr{F}_M$ (και επομένως) $T \backslash A \notin \mathscr{F}_M$ ή $T \backslash A \in \mathscr{F}_M$ (και έτσι) $A \notin \mathscr{F}_M$*

Απόδ. ($\Leftarrow$): Εστω ότι το $\mathscr{F}_M$ ικανοποιεί την ανωτέρω ιδιότητα, και έστω $\mathscr{F}_M \subset \mathscr{F}$ και $\mathscr{F}_M \neq \mathscr{F}$, άρα $\mathscr{F} \backslash \mathscr{F}_M \neq \emptyset$ και επομένως έστω $A \in \mathscr{F} \backslash \mathscr{F}_M \neq \emptyset$. Λόγω της συνθήκης $T \setminus A \notin \mathscr{F}_M$. Επειδή $\mathscr{F}_M \subset \mathscr{F}$, έχουμε ότι ούτε το A ούτε το $T \setminus A$ ανήκουν στο $\mathscr{F}$ και επομένως το $\emptyset = A \cap (T \setminus A) \in \mathscr{F}$ και έτσι $\mathscr{F} = 2^T$ που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας ότι το φίλτρο $\mathscr{F}$ ήταν γνήσιο, άρα το $\mathscr{F}_M$ είναι ένα υπερφίλτρο. $\dashv\square$

($\Rightarrow$): Αντίστροφα έστω ότι το $\mathscr{F}_M$ είναι ένα υπερφίλτρο επί του T και έστω $A \subseteq T$. Ας υποθέσουμε ότι $T \setminus A \notin \mathscr{F}_M$, θα δείξουμε ότι $A \in \mathscr{F}_M$. Εστω

$\mathscr{B} := \{A \cap B : B \in \mathscr{F}_M\}$. Εστω $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ το φίλτρο επί του T που παράγεται από το $\mathscr{B}$. Εχουμε, $\mathscr{F}_M \subset \mathscr{F}(\mathscr{B})$ και αυτό γιατί αν $B \in \mathscr{F}_M$, τότε $A \cap B \in \mathscr{B} \subset \mathscr{F}(\mathscr{B})$ και άρα $B \in \mathscr{F}(\mathscr{B})$. Θα δείξουμε και την αντίστροφη σχέση. Πράγματι επειδή $T \setminus A \notin \mathscr{F}_M$ έχουμε ότι $\emptyset \not\ni \mathscr{B}$ και επομένως το $\mathscr{F}(\mathscr{B})$ είναι ένα γνήσιο φίλτρο. Το $\mathscr{F}_M$ όμως είναι μεγιστικό και άρα $\mathscr{F}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{F}_M$, επειδή δε $A \in \mathscr{F}(\mathscr{B})$ έχουμε αντίφαση. ⊣

7.2.9 Πρόταση. *Εστω $\mathscr{F}_M$ ένα υπερφίλτρο επί του T. Ας υποθέσουμε επίσης ότι αν $A_i \subset T$ $i = 1, \ldots, n$ με,*

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n \in \mathscr{F}_M$$

τότε, για κάποιο i, $A_i \in \mathscr{F}_M$.

Απόδ. Για να φθάσουμε σε αντίφαση, έστω ότι $A_i \notin \mathscr{F}_M$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Από την Πρόταση 7.2.8, έχουμε ότι $T \setminus A_i \in \mathscr{F}_M$, έτσι

$$\emptyset = \bigcap_{1 \le i \le n} (T \setminus A_i) \cap (\bigcup_i A_i) \in \mathscr{F}_M$$

που είναι μια αντίφαση. ⊣

7.2.10 Λήμμα. *Το υπερφίλτρο $\mathscr{U}$ επί του T είναι τετριμμένο ανν υπάρχει ένα πεπαρασμένο σύνολο A τέτοιο ώστε $A \in \mathscr{U}$.*

Κάθε υπερφίλτρο που παράγεται από το φίλτρο του Fréchet λέγεται ελεύθερο υπερφίλτρο. Τα ελεύθερα υπερφίλτρα επί του $\mathbb{N}$ έχουν μια πολύ χρήσιμη για την απειροστική ανάλυση, ιδιότητα:

7.2.11 Πρόταση. *Κάθε μη-τετριμμένο υπερφίλτρο επί του $\mathbb{N}$, $\mathscr{U}$ είναι* **δ-μη-πλήρες** *(δ ή countably incomplete), δηλαδή, υπάρχει ακολουθία (A_n) με $A_n \in \mathscr{U}$ για κάθε n και ταυτόχρονα $\bigcap_n A_n = \emptyset$.*

Απόδ. Εστω $n \in \mathbb{N}$. Λόγω ότι το $\mathscr{U}$ είναι μη τετριμμένο υπερφίλτρο, υπάρχει $A_n \in \mathscr{U}$ με $n \notin A_n$. Για παράδειγμα έστω $A_n := \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Είναι φανερό ότι $\cap_n A_n = \emptyset$. ⊣

Εστω τώρα $\mathscr{F}_M$ ένα υπερφίλτρο (μεγιστικό φίλτρο) που παράγεται από το φίλτρο του Fréchet $\mathscr{F}$ (ελεύθερο υπερφίλτρο). Το προϊόν της άρνησης της άρνησης είναι μια δομή $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M := \langle A/\mathscr{F}_M; R/\mathscr{F}_M \rangle$ (την σχέση της ισότητας

$= /\mathscr{F}_M \equiv =_{\mathscr{F}_M}$, δεν την περιλαμβάνουμε, αφού πάντα εννοείται ότι υπάρχει) που ορίζεται με ανάλογο τρόπο με αυτόν που χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό της $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/ \approx, \leq, +, \cdot, 0, 1\rangle$, ως ακολούθως: Ορίζουμε πρώτα τη σχέση ισοδυναμίας επί του A, πάνω στην οποία ουσιαστικά, βασίζεται η άρνηση της άρνησης:

$$f =_{\mathscr{F}_M} g \overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} [\![f = g]\!] \in \mathscr{F}_M$$

καθώς επίσης,

$$(f, g) \in R/\mathscr{F}_M \overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} [\![(f, g)]\!] \in \mathscr{F}_M.$$

Επειδή το $\mathscr{F}_M$ είναι ένα υπερφίλτρο, η σχέση $=_{\mathscr{F}_M}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Εστω τώρα το σύνολο πηλίκο:

$$A/\mathscr{F}_M \equiv A/ =_{\mathscr{F}_M} := \{[f] : f \in A\}$$

όπου $[f] := \{g \in A \,|\, f =_{\mathscr{F}_M} g\}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του $f \in A$.

Ετσι η δομή που είναι προϊόν της άρνησης της άρνησης είναι η $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M := \langle\, A/\mathscr{F}_M; R/\mathscr{F}_M\rangle$, την οποία θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι μια συνηθισμένη $\mathscr{L}$-δομή με την ιδιότητα ότι:

Αν μια μεταβαλλόμενη πρόταση $\{\varphi_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$ είναι τέτοια ώστε το σύνολο των χρονικών στιγμών $t \in T$, για τις οποίες η $\varphi_{\mathbf{t}}$ ισχύει, δηλαδή για τις οποίες έχουμε $\mathfrak{A}_t \models \varphi_t$, είναι ένα «μεγάλο σύνολο» ανήκει δηλαδή στο υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$, τότε η πρόταση ισχύει και στη δομή $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M$.

Η $\mathscr{L}$–δομή $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M$,που πλέον είναι μια δομή με δίτιμη λογική, σε αντίθεση με τη δομή του Boole $\mathfrak{A} = \langle A; R\rangle$, που ήταν μια δομή με πλειότιμη λογική, λέγεται **υπεργινόμενο** της μεταβαλλόμενης δομής $\{\mathfrak{A}_t : t \in T\}$, ως προς το υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$. Αν κάθε $\mathscr{L}$–δομή $\mathfrak{A}_t$ ταυτίζεται με μια σταθερή δομή $\mathscr{B}$, τότε το υπεργινόμενο λέγεται **υπερδύναμη της $\mathscr{B}$ ως προς το $\mathscr{F}_M$.** Για παράδειγμα η δομή ${}^*\mathfrak{R} := \langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/{\approx_{\mathscr{F}_M}}\,; \{+_{\mathscr{F}_M}, \cdot_{\mathscr{F}_M}\}, \{\leq_{\mathscr{F}}\}, \{0, 1\}\rangle$ είναι υπερδύναμη της $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$ ως προς το ελεύθερο υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$. Το ακόλουθο θεώρημα είναι βασικότατο, και μαζί με το Πρόταση 7.2.2, μας δίνει το φημισμένο Θεώρημα του Łoś (συνήθως προφέρεται Λός, αλλά η σωστή Πολωνέζικη προφορά του είναι, γουάsh.).

7.2.12 Θεώρημα. *Εστω φ ένας $\mathscr{L}$- τύπος με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ τότε για κάθε $f_1, \ldots, f_n \in A$ έχουμε:*

$$\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \varphi[[f_1], \ldots, [f_n]] \Leftrightarrow [\![\varphi(f_1, \ldots, f_n)]\!] \in \mathscr{F}_M$$

Απόδ. Η απόδειξη γίνεται και πάλι με επαγωγή στο μήκος ή στο βαθμό πολυπλοκότητας του τύπου φ. Οι ατομικοί τύποι της δομής $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M$ είναι οι ακόλουθοι:

$$[f_1] =_{\mathscr{F}_M} [f_2], \quad \text{και} \quad R/\mathscr{F}_M([f_1], [f_2])$$

Εχουμε βεβαίως εξ ορισμού, $[f_1] =_{\mathscr{F}_M} [f_2] \Leftrightarrow [\![f_1 = f_2]\!] \in \mathscr{F}_M$, όμοια $R/\mathscr{F}_M([f_1],[f_2]) :\Leftrightarrow [\![R(f_1,f_2)]\!] \in \mathscr{F}_M$. Ετσι οι ατομικοί τύποι ισχύουν εξ ορισμού.

Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις, που είναι και ικανές:

(i) Εστω $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ τότε,

$$\begin{aligned}[\![\varphi(f_1,\ldots,f_n)]\!] \in \mathscr{F}_M &\Leftrightarrow [\![(\psi_1 \wedge \psi_2)(f_1,\ldots f_n)]\!] \in \mathscr{F}_M \\ &\Leftrightarrow [\![\psi_1(f_1,\ldots,f_n)]\!] \in \mathscr{F}_M \& [\![\psi_2(f_1,\ldots,f_n)]\!] \in \mathscr{F}_M\end{aligned}$$

και από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε,

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \psi_1([f_1],\ldots,[f_n]) \& \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \psi_2([f_1],\ldots,[f_n]) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models (\psi_1 \wedge \psi_2)([f_1],\ldots,[f_n]) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \varphi([f_1],\ldots,[f_n])\end{aligned}$$

Ετσι στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα ισχύει. $\dashv\Box$

(ii) Εστω $\varphi \equiv \neg\psi$, τότε

$$\begin{aligned}[\![\varphi(f_1,\ldots,f_n)]\!] \in \mathscr{F}_M &\Leftrightarrow [\![\neg\psi(f_1,\ldots,f_n)]\!] \in \mathscr{F}_M \\ &\Leftrightarrow T - [\![\psi(f_1,\ldots,f_n)]\!] \in \mathscr{F}_M \\ &\Leftrightarrow [\![\psi(f_1,\ldots,f_n)]\!] \notin \mathscr{F}_M \\ &\Leftrightarrow \text{χι} \quad \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \psi([f_1],\ldots,f_n]) \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \neg\psi([f_1],\ldots,[f_n]) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \varphi([f_1],\ldots,[f_n]).\end{aligned}$$

Η σχέση $(*)$ ισχύει από την υπόθεση της επαγωγής. Αρα το αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση αυτή. $\dashv\Box$

(iii) Τέλος έστω $\varphi \equiv (\exists x_k)[\psi]$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $k \leq n$, τότε έχουμε για κάποιο $f \in A$:

$$\begin{aligned}[\![\varphi(f_1,\ldots,f_n)]\!] \in \mathscr{F}_M &\Leftrightarrow [\![(\exists x_k[\psi(f_1,\ldots,f_n)]]\!] \in \mathscr{F}_M \\ &\Leftrightarrow [\![\psi(f_1,\ldots,f_{k-1},f,f_{k+1},\ldots,f_n)]\!] \in \mathscr{F}_M \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \psi([f_1],[f_{k-1},[f],[f_{k+1},\ldots,[f_n]) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models (\exists x_k\psi)([f_1],\ldots,[f_n]) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{A}/\mathscr{F}_M \models \varphi([f_1],\ldots,[f_n])\end{aligned}$$

Ετσι η απόδειξη συμπληρώθηκε. $\dashv\blacksquare$

Το παραπάνω θεώρημα μαζί με το Θεώρημα 7.2.1 δίνουν το ακόλουθο ονομαστό θεώρημα για τα υπεργινόμενα,

7.2.13 Θεώρημα. *(Θεώρημα του Łoś) Για κάθε $\mathscr{L}$- τύπο φ με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ και για κάθε $\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_n} \in \mathbf{A}$ έχουμε:*

$$\mathfrak{A}/\mathscr{F}_{\mathbf{M}} \models \varphi([\mathbf{f_1}], \ldots, [\mathbf{f_n}]) \Leftrightarrow \{\mathbf{t} \in \mathbf{T} : \mathfrak{A}_{\mathbf{t}} \models \varphi(\mathbf{f_1}(\mathbf{t}), \ldots, \mathbf{f_n}(\mathbf{t}))\} \in \mathscr{F}_{\mathbf{M}}.$$

Ειδικά αν σ είναι μια $\mathscr{L}-$πρόταση τότε,

$$\mathfrak{A}/\mathscr{F}_{\mathbf{M}} \models \sigma \Leftrightarrow \{\mathbf{t} \in \mathbf{T} : \mathfrak{A}_{\mathbf{t}} \models \sigma\} \in \mathscr{F}_{\mathbf{M}}.$$

Η διαλεκτική ερμηνεία του Θεωρήματος του Łoś είναι η ακόλουθη: Ενας $\mathscr{L}$ - τύπος ϕ, είναι αληθής στην $\mathscr{L}$ - δομή $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M$ $\langle A/\mathscr{F}_M, R/\mathscr{F}_M\rangle$, ανν είναι αληθής για ένα μεγάλο σύνολο στιγμών $t \in T$, σύνολο δηλαδή, που ανήκει στο υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$. Αν δε ορίσουμε την πεπερασμένα προσθετική $0-1$ πιθανότητα,

$$\mu_{\mathscr{F}_M}(A) := \begin{cases} 1 & \text{αν } A \in \mathscr{F}_M \\ 0 & \text{αν } A \notin \mathscr{F}_M \end{cases}$$

τότε το θεώρημα λέει ότι ο τύπος φ είναι αληθής στην δομή $\mathfrak{A}/\mathscr{F}_M$ ανν είναι αληθής $\mu_{\mathscr{F}_M}$ - σχεδόν βεβαίως.

Αν $(A_t)_{t\in T}$ είναι μια οικογένεια συνόλων και $\mathscr{U}$ ένα υπερφίλτρο επί του T τότε το **συνολοθεωρητικό υπεργινόμενο**, συμβολικά $(A_t)_{\mathscr{U}}$ ορίζεται με όμοιο τρόπο, δηλαδή,

$$(A_t)_{\mathscr{U}} := \prod_{t\in T} A_t/ \approx_{\mathscr{U}}$$

Ασκηση. Αν $(A_t)_{t\in T}$ και $(B_t)_{t\in T}$ είναι δύο οικογένειες συνόλων τότε έχουμε:

(i) $(A_t)_{\mathscr{U}} \cup (B_t)_{\mathscr{U}} = (A_t \cup B_t)_{\mathscr{U}}$

(ii) $(A_t)_{\mathscr{U}} \cap (B_t)_{\mathscr{U}} = (A_t \cap B_t)_{\mathscr{U}}$

(iii) $(A_t)_{\mathscr{U}} - (B_t)_{\mathscr{U}} = (A_t - B_t)_{\mathscr{U}}$

Στην περίπτωση τώρα που έχουμε μια σταθερή $\mathscr{L}$ - δομή $\mathfrak{B} = \langle B, R\rangle$ έχουμε δηλαδή μόνον μεταβαλλόμενα στοιχεία εντός της $\mathfrak{B}$ και όχι μεταβαλλόμενες δομές, και $\mathscr{F}_M$ είναι υπερφίλτρο, τότε βρισκόμαστε στην **περίπτωση των υπερδυνάμεων** και μπορούμε να εμφυτεύσουμε την $\mathfrak{B}$ στην $\mathfrak{B}^T/\mathscr{F}_M$ ως εξής:

η δε συνάρτηση,

$$\hat{b} : T \longrightarrow B^T/\mathscr{F}_M$$
$$t \mapsto [\hat{b}](t) := [\hat{b}]$$

είναι σταθερή συνάρτηση επί του T. Η συνάρτηση $i(\cdot)$ είναι μία εμφύτευση της δομής $\mathfrak{B}$ στην δομή $\mathfrak{B}^T/\mathscr{F}_M$, η οποία λόγω του ότι η δομή $\mathfrak{B}^T/\mathscr{F}_M$ έχει για φορέα ένα σύνολο πηλίκο, λέγεται **κανονική εμφύτευση**. Το ακόλουθο θεώρημα είναι **το βασικό θεώρημα για τις υπερδυνάμεις:**

7.2.14 Θεώρημα. *Η κανονική εμφύτευση* $\mathbf{i} : \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{B}^{\mathbf{T}}/\mathscr{F}_{\mathbf{M}}$ *είναι μια στοιχειώδης εμφύτευση. Αρα οι* $\mathscr{L}$ *- δομές* $\mathfrak{B}$ *και* $\mathfrak{B}^{\mathbf{T}}/\mathscr{F}_{\mathbf{M}}$ *είναι στοιχειωδώς ισοδύναμες.*

Απόδ. Εστω φ ένας $\mathscr{L}$–τύπος με $\mathrm{FV}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, c_n\}$ και έστω $b_1, \dots, b_n \in B$. Από το Θεώρημα του Łoś έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^T/\mathscr{F}_M \models \varphi\left(i(b_1), \dots, i(b_n)\right) &\Leftrightarrow \mathfrak{B}^T/\mathscr{F}_M \models \varphi([\hat{b}_1], \dots, [\hat{b}_n]) \\ &\Leftrightarrow \{t \in T : \mathfrak{B} \models \varphi\left(\hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_n(t)\right)\} \in \mathscr{F}_M \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n) \end{aligned}$$

Ετσι η απόδειξη συμπληρώθηκε. ⫤

Το Θεωρημα Της Συμπαγιας

[1] Με τη χρήση των υπεργινομένων και του Θεωρήματος του Łoś μπορούμε να αποδείξουμε και το ονομαστό θεώρημα της μαθηματικής λογικής, γνωστού σαν «Θεώρημα της Συμπαγίας» (compactness theorem).

Το θεώρημα του Łoś μας λέει ότι για κάθε οικογένεια $\mathfrak{A}_t : t \in T$ $\mathscr{L}$–δομών, και για κάθε ελεύθερο υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$, αν κάθε $\mathfrak{A}_t$ ικανοποιεί ένα σύνολο Σ, από προτάσεις πρώτης τάξης, τότε και το υπεργινόμενο $\prod_{t \in T} \mathfrak{A}_t/\mathscr{F}_M$ ικανοποιεί επίσης τις ίδιες προτάσεις Σ. Το Θεώρημα της συμπαγότητας είναι μια συνέπεια του Θεωρήματος του Łoś, και μας λέει ότι για κάποιο κατάλληλο υπερφίλτρο $\mathscr{D}$, το υπεργινόμενο $\prod_{t \in T} \mathfrak{A}_t/\mathscr{D} \equiv \mathfrak{A}$ μπορεί να ικανοποιεί ένα σύνολο προτάσεων πρώτης τάξης Σ, παρ' όλο που είναι δυνατόν καμιά δομή $\mathfrak{A}_t$, $t \in T$, να μην ικανοποιεί τις προτάσεις αυτές. Ακριβέστερα έχουμε:

7.2.15 Θεώρημα. (Θεώρημα της συμπαγίας) *Εστω* Σ *ένα σύνολο* $\mathscr{L}$ *- προτάσεων. Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του* Σ *έχει ένα μοντέλο, τότε και το* Σ *έχει ένα μοντέλο.*

Απόδ. Εστω T η οικογένεια όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του Σ. Είναι βολικό να σκεπτόμαστε το T σαν πεδίο μεταβολή του χρόνου. Κάθε

[1] Μερικοί Έλληνες συγγραφείς χρησιμοποιούν τον απαράδεκτο όρο 'συμπάγεια' για να αποδώσουν τον Αγγλικό όρο "compactness". Τα έγκυρα λεξικά του Δημητράκου αλλά και των Liddell-Scott, χρησιμοποιούν τον όρο 'συμπαγία' για κάτι που έχει την ιδιότητα του συμπαγούς. Αν λοιπόν έτσι έχουν τα πράγματα τότε το 'συμπάγεια' είναι σαν να χρησιμοποιούμε το 'ευτύχεια' αντί 'ευτυχία' ή το 'συζύγεια' αντί του 'συζυγία'. Αλλά και το 'συμπαγότητα' είναι πολύ πιό εύφωνο από το ανατριχιαστικά κακόηχο 'συμπάγεια'.

$t \in T$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο προτάσεων. Για κάθε $t \in T$, έστω $\mathfrak{A}_t$ μία $\mathscr{L}$ - δομή που ικανοποιεί τις προτάσεις στο t. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Łoś, αν $\mathfrak{A} := \prod_{t \in T} \mathfrak{A}_t / \mathscr{D}$ τότε για κάθε $\varphi \in \Sigma$, θα έχουμε:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ ανν } [\![\varphi]\!] := \{t \in T \,|\, \mathfrak{A}_t \models \varphi\} \in \mathscr{D}$$

για κάποιο ελεύθερο υπερφίλτρο $\mathscr{D}$. Αλλά αν $\varphi \in t$ τότε $\mathfrak{A}_t \models \varphi$, έτσι $\{t \in T \,|\, \varphi \in t\} \subseteq \{t \in T \,|\, \mathfrak{A}_t \models \varphi\}$. Για να έχουμε λοιπόν,

$$[\![\varphi]\!] \in \mathscr{D} \text{ αρκε να χουμε τι } \bar{\varphi} := \{t \in T \,|\, \varphi \in t\} \in \mathscr{D}$$

Πρέπει λοιπόν να κατασκευάσουμε ένα υπερφίλτρο $\mathscr{D}$, που να περιέχει όλα τα σύνολα $\bar{\varphi}$. Παρατηρούμε όμως ότι το σύνολο

$$S := \{\bar{\varphi} \mid \varphi \in \Sigma\}$$

έχει ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, δηλαδή κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ έχει μη - κενή τομή. Παράγματι, αν $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Sigma$ τότε υπάρχει $t \in T$ με $t = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Αλλά τότε έχουμε ότι $t \in \bar{\varphi}_i$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και επομένως $\bar{\varphi} \cap \cdots \cap \bar{\varphi}_n \neq \emptyset$. Είναι γνωστό όμως, ότι τότε υπάρχει ένα υπερφίλτρο $\mathscr{D}$ που περιέχει το Σ και η απόδειξη συμπληρώθηκε. ⊣

Από το Θεώρημα Συμπαγότητας έχουμε επίσης τα ακόλουθα πορίσματα που οι αποδείξεις τους αφήνονται ως ασκήσεις.

Ασκηση (1) Αν Σ είναι ένα σύνολο από $\mathscr{L}$ - προτάσεις και φ είναι μια $\mathscr{L}$ - πρόταση με $\Sigma \models \varphi$, τότε για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο Σ_0 του Σ έχουμε $\Sigma_0 \models \varphi$.

Ασκηση (2) Εστω $\mathfrak{A}$ μια $\mathscr{L}$ -δομή με φορέα το σύνολο A. Εστω επίσης $T = \{t \in \mathscr{P}(A) : t \text{ είναι πεπερασμένο }\}$. Για κάθε t έστω $\mathfrak{A}_t$ η υποδομή που παράγεται από το $t \in T$. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο $\mathscr{D}$ επί του T έτσι ώστε η δομή $\mathfrak{A}$ να μπορεί να εμφυτευτεί στο υπεργινόμενο $\prod_{t \in T} \mathfrak{A}_t / \mathscr{D}$.

Υπόδ.: Σημειώστε ότι για κάθε $t \in T$, an $F_{to} := \{t \in T | to \subseteq t\}$ και $F := \{A \subseteq T | F_{to} \subseteq A \text{ για κάποιο } to \in T\}$, τότε το F είναι ένα γνήσιο φίλτρο με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

8

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΥΠΕΡΔΟΜΕΣ

8.1 Εισαγωγή.

Στο τμήμα αυτό θα θεωρήσουμε την υπερδομή (εποικοδόμημα) που μπορούμε να κατασκευάσουμε, έχοντας σαν βάση μια Σ -δομή $\mathfrak{A}$. Αυτό είναι αναγκαίο αν θέλουμε να μελετήσουμε οντότητες που αναφέρονται και ορίζονται ως προς τη δομή $\mathfrak{A}$. Για παράδειγμα, υποσύνολα του φορέα A της δομής $\mathfrak{A}$, συναρτήσεις επί του A, χώροι πιθανότητας επί του A κ.λ.π. Γενικώς αν $\mathfrak{B}$ είναι μια άλλη δομή που ορίζεται με όρους της $\mathfrak{A}$, τότε η $\mathfrak{B}$ μπορεί να οριστεί συνολοθεωρητικά από την $\mathfrak{A}$. Ολες αυτές οι δομές που μπορούν να οριστούν συνολοθεωρητικά από την $\mathfrak{A}$ σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων βρίσκονται όλες στην υπερδομή με βάση την $\mathfrak{A}$.

Εστω $\mathscr{L}$ μια γλώσσα με οπλισμό Σ και $\mathfrak{A}$ μια Σ-δομή ή $\mathscr{L}$ - δομή με φορέα A. Τα στοιχεία του A τα θεωρούμε σαν πρωτοστοιχεία (Urelements ή individuals), χωρίς δηλαδή καμία συνολοθεωρητική δομή, δηλαδή έχουμε ότι, για κάθε $x, x \notin r$ για όλα τα $r \in A$. Η θεώρηση των στοιχείων του A ως πρωτοστοιχείων γίύεται για να διευκολυνθεί η μαθηματική μελέτη. Αν θεωρούσαμε τα πάντα ως σύνολα,— το οποίο είναι δυνατόν, αρχίζοντας από το κενό σύνολο, όπως γίνεται στη συνολοθεωρία ZF (Zermelo - Fraenkel — τότε θα ήταν εξαιρετικά δύσκολη έως αδύνατη μια πραγματική μαθηματική μελέτη. Το ίδιο εξ άλλου συμβαίνει και στην καθημερινή μας ζωή: Οταν θέλουμε να μελετήσουμε κάποια μακροσκοπικά αντικείμενα, δεν αρχίζουμε συχνά την μελέτη από το σωματιδιακό - μικροσκοπικό επίπεδο.

Τα πρωτοστοιχεία εξαρτώνται κύρια από το αντικείμενο μελέτης, που θεωρούμε ότι μας δίνεται πραγματωμένο εκ των προτέρων. Το A μπορεί για παράδειγμα να είναι οι ρητοί, οι πραγματικοί αριθμοί, ένα τοπολογικός χώρος, κ.λ.π.

Ενα σύστημα που κάνει χρήση ατόμων - στοιχείων και είναι ασθενέστερο από το ZF, είναι το σύστημα KPU (Kripke-Platek με άτομα) (βλ.το [17].

8.2 Υπερδομές.

Εστω τώρα $\mathfrak{A}$ μια $\mathscr{L}$- δομή με φορέα το σύνολο A. Συμβολίζουμε τον φορέα με A αντί για να δώσουμε έμφαση στα Urelements. Ορίζουμε την ακόλουθη ιεραρχία:

$$V_0 \equiv V_0(\mathfrak{A}) := A, \ldots, V_{n+1} \equiv V_{n+1}(\mathfrak{A}) := V_n \cup \mathscr{P}(V_n), \ldots$$

Ορίζουμε επίσης τα σύνολα της ιεραρχίας ως ακολούθως:

$$\mathscr{S}_1 := V_1 - A,\ \mathscr{S}_2 := V_2 - A, \cdots, \mathscr{S}_{n+1} := V_{n+1} - A, \cdots$$

Τέλος θεωρούμε την υπερδομή επί της $\mathfrak{A}$ ως εξής:

$$V \equiv V(\mathfrak{A}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$$

Είναι φανερό ότι για τις ανάγκες των κλασσικών μαθηματικών (Ανάλυση, Αλγεβρα κ.λ.π.) επί της $\mathfrak{A}$, είναι αρκετό να θεωρήσουμε την υπερδομή μέχρι τον πρώτο οριακό διατακτικό αριθμό. Επίσης τα σύνολα της υπερδομή είναι τα

$$\mathscr{S} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{S}_n$$

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια με συνέπεια τις ακόλουθες μεταβλητές:

$$\left\{ \begin{array}{l} p, q, r, p_1, q_1, r_1, \cdots \quad \text{για τα πρωτοστοιχεία του } A \\ X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, \ldots, A, B, C, \ldots \text{ για σύνολα στο } \ \mathscr{S} \equiv V - A \\ u, v, u_1, v_1 \cdots, \quad \text{για γενικές μεταβλητές} \end{array} \right. \qquad (*)$$

Αν $A = \mathbb{R}$, τότε έχουμε μια υπερδομή με βάση το $\mathbb{R}$. Συνήθως όταν μας ενδιαφέρει, για παράδειγμα ένας τοπολογικός χώρος Ω, τότε επιλέγουμε σαν πρωτοστοιχεία το $A = \Omega \cup \mathbb{R}$, έτσι όταν θα χρειαστούμε πραγματικούς αριθμούς να είμαστε σίγουροι ότι υπάρχουν στην υπερδομή. Σημειώστε ότι $\emptyset \subseteq A$ και επομένως $\emptyset \in V$.

Η γλώσσα $\mathscr{L}(V(\mathfrak{A}))$ της υπερδομής $V(\mathfrak{A})$ είναι μια επέκταση της γλώσσας $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$.

Επεκτείνουμε την $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$ επισυνάπτοντας ένα σύμβολο του ανήκειν «∈» και πιθανά άλλα σύμβολα σχέσεων, συναρτήσεων και σταθερών συμβόλων. Για τις μεταβλητές της $\mathscr{L}(V(\mathfrak{A}))$ ακολουθούμε την σύμβαση $(*)$. Στο σύνολο των ατομικών μας τύπων επισυνάπτουμε τώρα και τύπους της μορφής:

$$(p \in X), \quad (X \in Y), \qquad X, Y \in \mathscr{S} \text{ και } p \in A$$
$$(\forall x \in Y), \text{ για όλα τα σύνολα} X \in \mathscr{S} \text{ που είναι στοιχεία του } Y$$
$$(\exists x \in Y), \text{ για κάποιο σύνολο } X \in \mathscr{S}, \text{που είναι στοιχείο του } Y$$

Εχοντας καθορίσει τους ατομικούς τύπους της $\mathscr{L}(V)$, οι υπόλοιποι τύποι καθορίζονται με τον γνωστό τρόπο.

Μια $\mathscr{L}(V(\mathfrak{A}))-$υπερδομή στην ουσία μπορεί να θεωρηθεί σαν μια δομή $\langle V(\mathfrak{A})\,; \mathscr{S}, E, \cdots \rangle$
όπου:

(i) $\mathfrak{A} = \langle\, A; \cdots \rangle$ είναι μια $\mathscr{L}-$δομή, τα δε στοιχεία του A λέγονται **πρωτοστοιχεία** (Urelements).

(ii) $\mathscr{S}$ είναι ένα μη - κενό σύνολο με $\mathscr{S} \cap A = \emptyset$, τα στοιχεία του οποίου λέγονται σύνολα.

(iii) $E \subseteq V \times \mathscr{S}$ είναι μια διμελής σχέση που ερμηνεύει το σύμβολο του ανήκειν «$\in$».

(iv) Σχέσεις, συναρτήσεις και επί του $A \cap \mathscr{S}$, που ερμηνεύουν αντίστοιχα σύμβολα της $\mathscr{L}(\,\in, \cdots)$.

Παρ' όλο που το σύμβολο της ισότητας έχει περιληφθεί στα λογικά σύμβολα, είναι βολικό, στις κατασκευές που θα ακολουθήσουν, να την περιλαμβάνουμε στα μη - λογικά σύμβολα. Απλοποιώντας κάπως το συμβολισμό, θα συμβολίζουμε μια υπερδομή ως εξής:

$$\langle V(\mathfrak{A}), =, \in \rangle$$

χωρίς να αναφερόμαστε στις ερμηνείες του οπλισμού της $\mathscr{L}(\mathfrak{A})$.

8.2.1 Ορισμός. Ένα σύνολο $A \in \mathscr{S}$ θα λέγεται **μεταβατικό** (transitive), συμβολικά $\mathrm{Tran}(A)$, ανν $(\forall X \in A)(\forall u \in X)[\,u \in A\,]$. Ετσι κάθε στοιχείο του A είναι ή άτομο - στοιχείο ή υποσύνολο του A.

Για παράδειγμα αν,

$$\begin{aligned} 4 :=& \{0,1,2,3\} = \Big\{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\Big\} \\ \text{ττε}&\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in 4 \quad \text{και}\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq 4 \end{aligned}$$

Γενικά **όλοι οι διατακτικοί αριθμοί είναι μεταβατικά σύνολα και ολικά διαταγμένοι από τη σχέση του ανήκειν** $\in$**,** έτσι στην ουσία είναι μεταβατικά σύνολα, τα στοιχεία των οποίων είναι επίσης μεταβατικά.

Ενα παράδειγμα **μη - μεταβατικού συνόλου** είναι το ακόλουθο: Εστω $A = \{\{2\}, 3\}, X = \{2\}, u = 2$ τότε $2 \in X = \{2\}$ και $\{2\} \in A = \{\{2\}, 3\}$ αλλά $2 \notin \{\{2\}, 3\} = A$.

Τα πρωτοστοιχεία δεν θεωρούνται μεταβατικά, όμως κάθε σύνολο ατόμων - στοιχείων θεωρείται μεταβατικό σύνολο, όπως μεταβατικό θεωρείται και το κενό σύνολο.

Εστω $u \in V(\mathbb{R})$, τότε **η τάξη ή ο βαθμός του u (rank)** είναι ο ελάχιστος φυσικός $n \in \mathbb{N}$ με $u \in V_n(\mathbb{R})$. Συμβολικά θα γράφουμε $r(u) = n$. Ετσι οι οντότητες που ανήκουν στο $V_n \setminus V_{n-1}, \quad n \geq 1$, είναι **οντότητες βαθμού (rank) n.**

Εστω $\langle V(\mathfrak{A}), =, \in \rangle$ μια υπερδομή. Τότε έχουμε τις ακόλουθες προτάσεις:

8.2.2 Πρόταση. **(i)** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το V_n είναι ένα μεταβατικό σύνολο. Σημειώστε ότι από τον ορισμό της υπερδομής έχουμε:*

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n \subseteq V_{n+1} \subseteq \cdots \quad \text{και}$$
$$V_0 \in V_1 \in V_2 \in \cdots \in v_n \in V_{n+1} \in \cdots$$

(ii) *Αν $X \in \mathscr{S}_n,\ n = 1, 2, \ldots$ τότε $\{X\} \in V_{n+1}$ και $\mathscr{P}(X) \in V_{n+2}$.*

(iii) *Αν $u, s \in V_n,\ n = 0, 1, \cdots$ τότε $(u, s) \in V_{n+2}$ και*

αν $u_1, \cdots, u_k \in V_n,\ k \geq 2$ τότε $(u_1, \ldots, u_k) \in V_{n+2k-2},\ n = 0, 1, \ldots$.

(iv) *Αν $X, Y, \in S_n,\ n = 1, 2, \ldots$ τότε $X \times Y \in V_{n+3}$.*

Απόδ. **(i)** Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον n. Το V_0 είναι μεταβατικό εξ ορισμού. Εστω ότι το V_n είναι μεταβατικό τότε, θα δείξουμε ότι και το V_{n+1} είναι επίσης μεταβατικό. Εστω $X \in \mathscr{S}_{n+1}$. Τότε ή $X \in \mathscr{P}(V_n)$. Στην πρώτη περίπτωση $X \subseteq V_n$, από την υπόθεση της επαγωγής, στην δε δεύτερη περίπτωση $X \subseteq V_n$, από τον ορισμό του δυναμοσυνόλου. Αλλά $V_n \subseteq V_{n+1}$, άρα $X \subseteq V_{n+1}$ και επομένως το V_{n+1} είναι ένα μεταβατικό σύνολο. ⊣□

(ii) Αφού $X \in \mathscr{S}_n$ τότε $\{X\} \in \mathscr{P}(V_n) \cup V_n = V_{n+1}$. Στη συνέχεια αφού το V_n είναι μεταβατικό, από την $X \in V_n$ έχουμε ότι $X \subseteq V_n$ και επομένως $\mathscr{P}(X) \subseteq \mathscr{P}(V_n) \subseteq V_{n+1} \in V_{n+2}$, άρα $\mathscr{P}(X) \in V_{n+2}$. ⊣□

(iii) Εχουμε ότι $(u, s) := \{\{u\}, \{u, s\}\}$. Αλλά $\{u\} \in V_{n+1}, \{u, s\} \in V_{n+1}$

Ετσι $\{\{u\}, \{u, s\}\} \subseteq V_{n+1}$ και επομένως $(u, s) \in V_{n+2}$. Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι φανερός (επαγωγή στο $k \geq 2$). ⊣□

(iv) $X + Y \subseteq V_{n+2}$, αφού $(x, y) \in X \times Y \Rightarrow x, y \in V_n$ και έτσι $(x, y) \in V_{n+2}$. Αλλά $X \times Y \subseteq V_{n+2}$ συνεπάγεται ότι $X \times Y \in V_{n+3}$. ⊣□

8.2.3 Πρόταση. **(i)** *Εστω $X, Y \in \mathscr{S}_n, n = 1, 2, \cdots$ και $f : X \longrightarrow Y$ μια συνάρτηση, τότε $f \in V_{n+3}$.*

(ii) *Για κάθε $u \in X,\ f(u) \in V_n$.*

(iii) *Αν $A \subseteq X$ τότε $f(A) \in V_{n+1}$.*

Αποδ. (i) Από την Πρόταση 8.2.2 (iv), έχουμε ότι $X \times Y \subseteq V_{n+2}$. Επειδή έχουμε $f \subseteq X \times Y$ έχουμε $f \subseteq V_{n+2}$ και έτσι $f \in V_{n+3}$.

(ii) Εχουμε ότι για κάθε α, $f(\alpha) \in Y \in V_n$. Ετσι το V_n είναι μεταβατικό έχουμε $f(\alpha) \in V_n$.

(iii) Εχουμε $f(A) \subseteq Y \in V_n$. Αφού όμως το V_n είναι μεταβατικό έοχυμε $Y \subseteq V_n$. Ετσι $f(A) \subseteq V_n$ και $f(A) \in V_{n+1}$. ⊣□

Ασκήσεις. (1) Εστω $C[a,b] := \{f | f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \& \quad f \text{ είναι συνεχής}\}$ Να δειχτεί ότι $C[a,b] \in V_4(\mathbb{R})$.

(2) Εστω $\|f\| := \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$. Να δειχτεί ότι $\|f\| \in V_6(\mathbb{R})$, για κάθε $f \in C[a,b]$.

(3) Εστω $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Να ευρεθεί ο βαθμός του, δηλ. το ελάχιστο επίπεδο $V_n(\Omega)$ στο οποίο ανήκει.

Εστω τώρα μια ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $u_n \in V_{n+1} - V_n$. Είναι φανερό ότι τότε $(u_n) \notin V(\mathbb{R})$. Τέτοιου είδους ακολουθίες δεν μας ενδιαφέρουν στη συνέχεια και θα περιοριστούμε μόνον στις λεγόμενες **V** ή **V**$(\mathfrak{A})$ - **φραγμένες**. Ακριβέστερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

8.2.4 Ορισμός. Εστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία οντοτήτων της $V(\mathfrak{A})$, θα λέμε ότι η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι V- φραγμένη ανν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε,

$$u_n \in V_k \qquad \text{για κθε } n \in \mathbb{N}$$

Για να ορίσουμε την τάξη μιας V- φραγμένης ακολουθίας $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, παρατηρούμε ότι αν,

$$\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{N} | r(u_n) = m\}, \quad m = 0, 1, \ldots, k,$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε επειδή,,

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_1 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_k \quad \& \quad \mathbb{N} \in \mathscr{F}_M$$

όπου $\mathscr{F}_M$ είναι ένα ελεύθερο υπερφίλτρο, τότε από την Πρόταση 7.2.9 έχουμε,

$$\mathbb{N}_i \in \mathscr{F}_M \text{ για κποιο } \ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Τον φυσικό αυτό αριθμό θα τον ονομάζουμε **τάξη** της (u_n), συμβολικά $r((u_n))$. Η τάξη μιας ακολουθίας είναι δηλαδή ο φυσικός αριθμός που εμφανίζεται σαν τάξη όρων της ακολουθίας, οι δείκτες των οποίων αποτελούν ένα «μεγάλο σύνολο». Ετσι αλλάζοντας τους όρους μιας ακολουθίας σε ένα «μικρό σύνολο» δεικτών, πράγμα που δεν αλλάζει τη συμπεριφορά της ακολουθίας, μπορούμε να υποθέτουμε ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας έχουν τάξη μικρότερη ή ίση με την τάξη $r((u_n))$.

Τέλος, συνηθίζεται να δίνεται μια γραφική παράσταση για μια υπερδομή επί του $\mathbb{R}$.

8.3 Μη-Συμβατικά Πλαίσια.

Στην Απειροστική μη-συμβατική ανάλυση η έννοια του μη-συμβατικού πλαισίου δίνεται σύμφωνα με τον επόμενο ορισμό.

8.3.1 Ορισμός. Μία τριάδα $\langle V(X), V(Y), *\rangle$ είναι ένα μη-συμβατικό πλαίσιο εάν :

1. $V(X)$ και $V(Y)$ είναι κλασικές υπερδομές με αντίστοιχα σύνολα βάσης τα X και Y, τα οποία είναι απειροσύνολα.
2. Η συνάρτηση $* : V(X) \to V(Y)$ είναι μία φραγμένη στοιχειώδης εμφύτευση (Αρχή Μεταφοράς) .
3. $Y = {}^*X$.
4. Για κάθε άπειρο $A \subseteq X$ το σύνολο ${}^\sigma A = \{{}^*a : \ a \in A\}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του ${}^*A = *(A)$.

Η υπερδομή $V(X)$ λέγεται *συμβατικό σύμπαν*, ενώ η υπερδομή $V(Y)$ λέγεται *μη-συμβατικό σύμπαν.*

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τον τρόπο που κατασκευάζονται οι εμφυτεύσεις $i(\cdot)$ και $m(\cdot)$, οπότε η εμφύτευση $*$ παίρνεται σαν σύνθεση των i και m.

8.3.1 V-Φραγμένες Υπερδυνάμεις.

Θα περιοριστούμε στη συνέχεια στην περίπτωση $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R};+, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$. Οπως έχουμε ήδη σημειώσει, μπορούμε να θεωρούμε την υπερδομή $V(\mathbb{R})$ σαν μια συνηθισμένη δομή $\langle\, V(\mathbb{R}), =, \in\,\rangle$, χωρίς να μνημονεύουμε τον οπλισμό της δομής $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$. Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς πορεία, που ακολουθήσαμε στην κατασκευή της $\langle \mathfrak{A}^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M,\ R/\mathscr{F}_M\rangle$ από την $\mathfrak{A} = \langle A, R\rangle$ και της $\langle {}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$ από την $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την δομή $\left\langle V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M, =_{\mathscr{F}_M}, \in_{\mathscr{F}_M}\right\rangle$. Πιο συγκεκριμένα, κατά την άρνηση της σταθερότητας του $V(\mathbb{R})$ θα χρησιμοποιήσουμε, αφ' ενός διακριτό χρόνο $\mathbb{N}$, και αφ' ετέρου V- φραγμένες ακολουθίες, σαν μεταβαλλόμενα στοιχεία. Για το λόγο αυτό το τελικό προϊόν ονομάζεται **φραγμένη υπερδύναμη του $\mathbf{V}(\mathbb{R})$.**

Τα αντίστοιχα βήματα είναι τα εξής:

(i) **Άρνηση της σταθερότητας των στοιχείων του** $V(\mathbb{R})$. Για το βήμα αυτό θα θεωρήσουμε V-φραγμένες ακολουθίες στοιχείων του $V(\mathbb{R})$, δηλαδή,

$$V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} := \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_n \text{ είναι μια } V\text{- φραγμένη ακολουθία στοιχείων του } V(\mathbb{R})\}$$

(ii) Αρνηση της άρνησης της σταθερότητας των στοιχείων του $V(\mathbb{R})$.

Εστω $\mathscr{F}_M$ ένα ελεύθερο υπερφίλτρο. Τα επιχειρήματα που μας οδήγησαν στο ελεύθερο υπερφίλτρο, κατά την κατασκευή του ${}^*\mathbb{R}$, εξακολουθούν να ισχύουν. Ακολουθώντας τη διαδικασία του Τμήματος 2.2, για τη δομή $\langle V(\mathbb{R}), =, \in\rangle$ παίρνουμε τελικά την φραγμένη υπερδύναμη:

$$\left\langle V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M, =_{\mathscr{F}_M}, \in_{\mathscr{F}_M}\right\rangle$$

όπου

$$V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M := \{[u_n] | \{u_n\} \in V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}\}$$

$$[u_n] := \{\{u_n\} \in V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} | \{n \in \mathbb{N} | u_n = u_n\} \in \mathscr{F}_M\}$$

$$[u_n] =_{\mathscr{F}_M} [u_n] \text{ ανν } \{n \in \mathbb{N} | u_n = u_n\} \in \mathscr{F}_M \quad \text{και}$$

$$[u_n] \in_{\mathscr{F}_M} [u_n] \text{ ανν } \{n \in \mathbb{N} | u_n \in u_n\} \in \mathscr{F}_M$$

Εστω τώρα,

$$V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M := \{[u_n] \,|\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ είναι μια } V_k(\mathbb{R})- \text{ φραγ. ακολουθία}\},\ k = 0, 1\cdots$$

Ετσι το $V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ είναι το προϊόν της εφαρμογής της αρχής της «άρνησης της άρνησης» στο ιεραρχικό επίπεδο $V_k(\mathbb{R})$. Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι:

$$^*\mathbb{R} := \mathbf{V_0}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_\mathbf{M} \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{V_k}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_\mathbf{M} \subseteq \cdots \quad \text{και}$$

$$\mathbf{V}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_\mathbf{M} = \bigcup_{\mathbf{k}=\mathbf{0}}^{\infty} \mathbf{V_k}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_\mathbf{M}$$

Η εμφύτευση $i(\cdot)$ που εμφανίζεται στα σχήματα των υπερδομών ορίζεται τώρα με τον προφανή τρόπο:

$$\mathbf{i}(\cdot) : \mathbf{V}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbf{V}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_\mathbf{M}$$
$$\mathbf{u} \mapsto [\mathbf{u}, \mathbf{u}, \cdots]$$

Η φραγμένη υπερδύναμη όμως $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ δεν ισούται με ολόκληρη την υπερδομή $V({}^*\mathbb{R})$. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια εμφύτευση της $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ στην $V({}^*\mathbb{R})$. Κατά την εμφύτευση η σχέση $\in_{\mathscr{F}_M}$ αντιστοιχίζεται στη σχέση $\in_{{}^*\mathbb{R}}$, η δ $\in =_{\mathscr{F}_M}$ στην $=_{{}^*\mathbb{R}}$. Αυτό επιτυγχάνεται με την Συνάρτηση Σύνθλιψης του Mostowski (Mostowski's collapsing function).

8.3.2 Η Συνάρτηση Σύνθλιψης του Mostowski.

Έχουμε ήδη κατασκευάσει μεταξύ των δομών,

- $(V(\mathbb{R}), \in_{\mathbb{R}}, =_{\mathbb{R}})$ και
- $\left\langle V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M, \in_{\mathscr{F}_M}, =_{\mathscr{F}_M}\right\rangle$

την εμφύτευση,

$$i(\cdot) : V(\mathbb{R}) \hookrightarrow V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$$

Ετσι ώστε να ισχύει το Θεώρημα του Łoś, οπότε για τις προτάσεις της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$ έχουμε και μια αρχή μεταφοράς.

Η υπερδομή εξ άλλου που κατασκευάζεται αν πάρουμε για πρωτοστοιχεία τα στοιχεία του $^*\mathbb{R}$, δεν ταυτίζεται με την $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η πράξη του να πάρουμε τα στοιχεία του $^*\mathbb{R}$ σαν πρωτοστοιχεία έχει σαν συνέπεια την αλλαγή των σχέσεων $\in_{\mathbb{R}}$ και $=_{\mathbb{R}}$ της $V(\mathbb{R})$ στις αντίστοιχες σχέσεις $\in_{^*\mathbb{R}}$ και $=_{^*\mathbb{R}}$ της υπερδομής $V(^*\mathbb{R})$. Στόχος μας στη συνέχεια είναι η κατασκευή της εμφύτευσης

$$m : (V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M, \in_{\mathscr{F}_n}, =_{\mathscr{F}_m}) \hookrightarrow (V(^*\mathbb{R}), \in_{^*\mathbb{R}}, =_{^*\mathbb{R}})$$

γνωστής ως «εμφύτευση σύνθλιψης του Mostowski», με την ιδιότητα

$$u \in_{\mathscr{F}_u} A \quad \text{ανν} \quad m(u) \in_{^*\mathbb{R}} m(A)$$

Η εμφύτευση m θα κατασκευαστεί κατά στάδια με επαγωγή στην τάξη των αντικειμένων.

Για $k = 0$ έχουμε, $^*\mathbb{R} := V_0(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$, έτσι στο ιεραρχικό αυτό επίπεδο έχουμε μόνον τα πρωτοστοιχεία του $^*\mathbb{R}$, και στην $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ αλλά και στην υπερδομή $V(^*\mathbb{R})$. Ετσι απαιτούμε η συνάρτηση σύνθλιψης να είναι η ταυτοτική συνάρτηση επί του $^*\mathbb{R}$. Δηλαδή

$$m \restriction {}^*\mathbb{R} = id_{^*\mathbb{R}}$$

Εστω τώρα ότι για $k \geq 0$ έχουμε ορίσει την συνάρτηση,

$$m([A]) \;\; \text{για} \;\; [A] \in V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$$

Τότε για τα στοιχεία $[A] \in V_{k+1}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$, $[A] \notin {}^*\mathbb{R}$, η συνάρτηση m ορίζεται ως εξής:

$$m([A]) := \{m([B]) | [B] \in_{\mathscr{F}_M} [A]\}$$

Τελικά η επαγωγή μας εξασφαλίζει μια συνάρτηση,

$$\begin{aligned} m : V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M &\hookrightarrow V(^*\mathbb{R}) \\ u &\mapsto m(u) \end{aligned}$$

η οποία είναι ένα ισομορφισμός μεταξύ των δομών

$$\left\langle V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M,\ \in_{\mathscr{F}_M},\ =_{\mathscr{F}_M}\right\rangle \quad \text{και} \quad \left\langle m[V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M],\ \in_{^*\mathbb{R}}, =_{^*\mathbb{R}}\right\rangle$$

όπου $m[V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M] \subsetneq V(^*\mathbb{R})$. Ετσι τελικά έχουμε την επιθυμητή επέκταση της συμβατικής υπερδομής στην μη - συμβατική υπερδομή $V(^*\mathbb{R})$, βλ. και Σχήμα 8.1. Ετσι για κάθε $u \in V(\mathbb{R})$, έχουμε ορίσει το $u = m(i(u))$.

$$\begin{tikzcd}
 & \langle V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M, =_{\mathscr{F}_M}, \in_{\mathscr{F}_M}\rangle \arrow[dr, "m"] & \\
\langle V(\mathbb{R}), =_{\mathbb{R}}, \in_{\mathbb{R}}\rangle \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, dashed, "*:=m\circ i"'] & & \langle V(^*\mathbb{R}), =_{^*\mathbb{R}}, \in_{^*\mathbb{R}}\rangle
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 8.1: Μη-συμβατική επέκταση.

Η εμφύτευση υπερδομών,

$$* : V(\mathbb{R}) \quad \hookrightarrow \quad V(^*\mathbb{R})$$

ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) **Αρχή της επέκτασης:** Το $\mathbb{R}$ είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του $^*\mathbb{R}$ και για κάθε $r \in \mathbb{R}$, $^*r = r$.

(β) Για κάθε $v, u, \in V(\mathbb{R})$,

$$v \in u \Leftrightarrow {}^*v \in {}^*u \qquad \& \qquad u = v \Leftrightarrow {}^*v = {}^*v$$

όπου για ευκολία δεν έχουμε κάνει την διάκριση $\in_{\mathbb{R}}$ και $\in_{^*\mathbb{R}}$. Παρατηρούμε ακόμα ότι η ιδιότητα (β) είναι συνέπεια του γεγονότος ότι μεταξύ των δομών με φορείς $V(\mathbb{R})$ και $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ έχουμε μια αρχή μεταφοράς, που είναι συνέπεια του Θεωρήματος του Łoś για τα υπεργινόμενα, και ότι μεταξύ των δομών $V(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ και $V(^*\mathbb{R})$ υπάρχει μια ισομορφική εμφύτευση, που εξασφαλίζεται από την συνάρτηση σύνθλιψης του Mostowski. Ετσι τελικά έχουμε μια αρχή μεταφοράς μεταξύ των δομών με φορείς τις υπερδομές $V(\mathbb{R})$ και $V(^*\mathbb{R})$:

(γ) **Αρχή της μεταφοράς.** Για κάθε πρόταση φ της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$ έχουμε:

$$V(\mathbb{R}) \models \varphi \quad \text{ανν} \quad V(^*\mathbb{R}) \models {}^*\varphi.$$

Τελικά η εμφύτευση υπερδομών $* : V(\mathbb{R}) \hookrightarrow V(^*\mathbb{R})$ καθορίζεται αξιωματικά ή από τις (α) και (β) ή από τις (α) και (γ), που είναι ισοδύναμες με τις πρώτες.

Για περισσότερα για τη Συνάρτηση Σύνθλιψης του Mostowski, δείτε π.χ. τα [42, 17]

8.3.3 Θεμέλια των Μη-Συμβατικών Μαθηματικών.

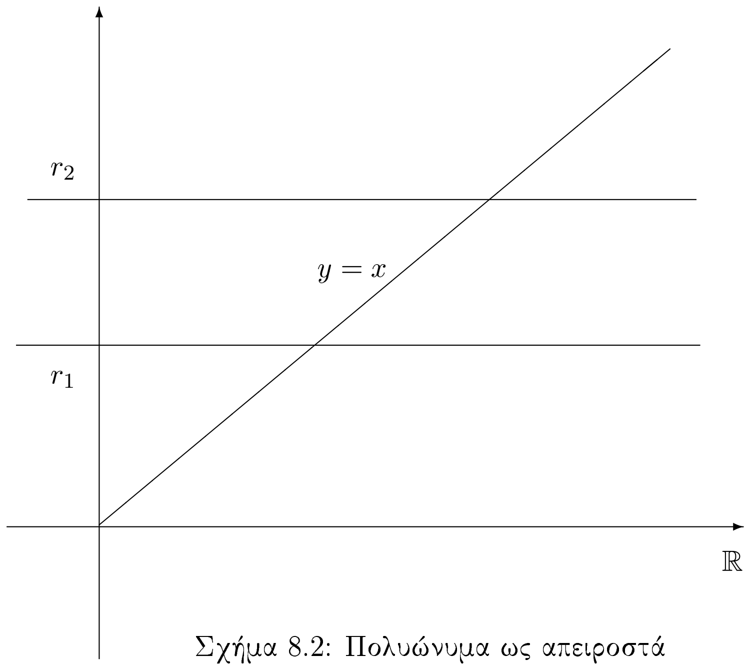
Τα μη - συμβατικά μαθηματικά μοντέλα, είναι συνέπεια και στηρίζονται στα Θεωρήματα των Löwenheim - Skolem. Εχουμε ήδη παρατηρήσει, ότι για κάθε δομή $\mathfrak{A}$ μπορούμε με τη χρήση υπεργινομένων και κύρια υπερδυνάμεων να κατασκευάσουμε μια μη - συμβατική δομή $^*\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^T/\mathscr{F}_M$ στην οποία η $\mathfrak{A}$ εμφυτεύεται στοιχειωδώς. Το μη - συμβατικό αντικείμενο $^*\mathfrak{A}$ είναι ένα αντικείμενο υψηλότερης τάξης ή τύπου από το αντικείμενο $\mathfrak{A}$. Ωστόσο **η θεωρία και η μεθοδολογία για αντικείμενα χαμηλότερης τάξης που σχετίζονται με την $\mathfrak{A}$, μεταφέρονται άθικτες για κατάλληλα αντικείμενα μεγαλύτερης που σχετίζονται με την δομή $\mathfrak{A}$.**

Οσο μεταλύτερη είναι η τάξη ενός αντικειμένου στην ιεραρχία των τύπων, τόσο ρευστό και ασαφές είναι, και τόσο η μελέτη του δυσκολεύει και χρειάζεται προχωρημένες μεθοδολογίες, όπως π.χ. της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Για παράδειγμα το $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \equiv \mathbb{R}^{\propto}$ είναι ένας χώρος Hilbert, δηλαδή ένα υψηλού τύπου αντικείμενο. Μεταβαίνοντας όμως στο $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$ καταφέρνουμε να έχουμε μια θέαση του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ που αξιωματικά δεν διαχωρίζεται από το $\mathbb{R}$, δηλαδή το $^*\mathbb{R}$ πληρεί όλα τα αξιώματα πρώτης τάξης των πραγματικών αριθμών, και επομένως δίκαια ονομάζεται ένα σύνολο μη - συμβατικών πραγματικών αριθμών. Ανάλυση επί του $\mathbb{R}^{\propto}$ στην ουσία ανάγεται σε ανάλυση επί του $\mathbb{R}$.**Ο μη-συμβατικός τρόπος μελέτης ενός αντικειμένου υψηλής τάξης ή τύπου είναι να πλησιάσουμε από άποψη τάξης, το εν λόγω αντικείμενο με ένα μη - συμβατικό αντικείμενο με γνωστή συμβατική θεωρία και στη συνέχεια να προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε την συμβατική αυτή θεωρία στην μη - συμβατική, απλοποιώντας έτσι τη μελέτη του αρχικού αντικειμένου.**

Το $^*\mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί και σαν το αποτέλεσμα της εμφύτευσης του $\mathbb{R}$, σε ένα περιβάλλον αντικειμένων μεγαλύτερης τάξης όπως τα στοιχεία του $\mathbb{R}^{\propto}$, όπου λόγω των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των στοιχείων του $\mathbb{R}^{\propto}$ και των στοιχείων του $\mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι και άλλες, εκτός των σταθερών ακολουθιών, αρχίζουν να συμπεριφέρονται σαν πραγματικοί αριθμοί.

Ακόμα αν $\mathbb{R}[t] := \{\frac{a_n t^n + \cdots + a_0}{b_m t^m + \cdots + b_0}\ , a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad b_m \neq 0\}$ είναι το σύνολο των ρητών πολυωνύμων ως προς την μεταβλητή t και $f(t) < g(t)$ ανν υπάρχει $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (0\varepsilon)$, $f(x) < g(x)$, τότε το $\mathbb{R}[t]$ είναι ένα μη - Αρχιμήδειο διαταγμένο σώμα, στο οποίο οι πραγματικοί αριθμοί εμφυτεύονται σαν σταθερές συναρτήσεις.

Μάλιστα η συνάρτηση $y = x$ είναι ένα απειροστό στο $\mathbb{R}[t]$. Παρατηρούμε δηλαδή και εδώ, ότι εμφυτεύοντας το $\mathbb{R}$ σε ένα περιβάλλον με αντικείμενα ανώτερης τάξης, τελικά ανακαλύπτουμε, ότι υπάρχουν και άλλα αντικείμενα



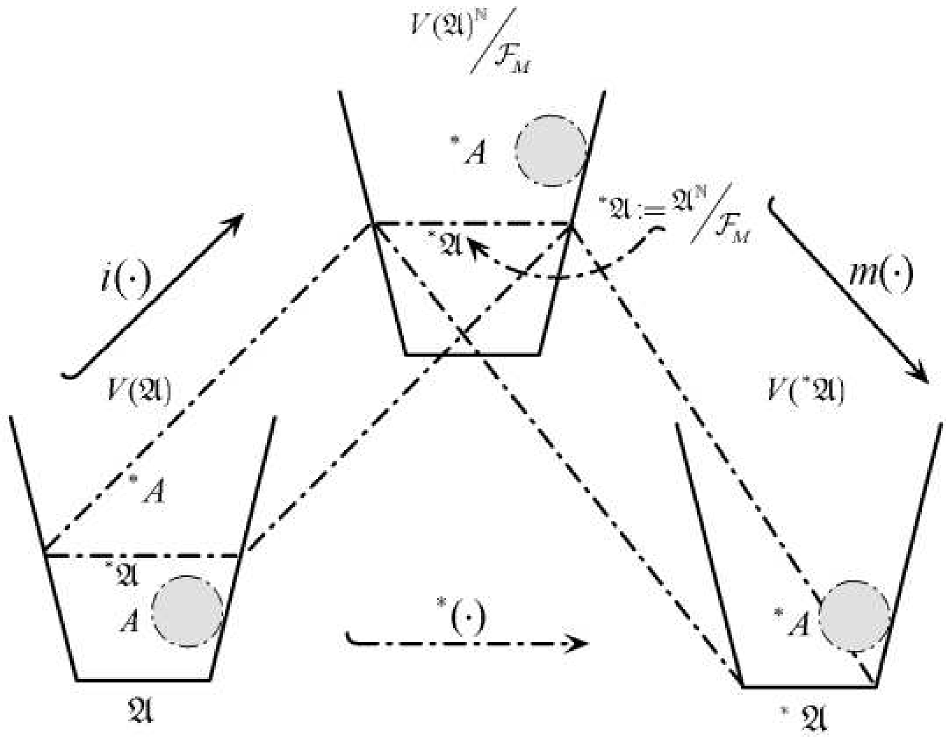
Σχήμα 8.2: Πολυώνυμα ως απειροστά

εκτός από τις σταθερές συναρτήσεις που συμπεριφέρονται σαν πραγματικοί αριθμοί. Στο δεύτερο μέρος του βιβλίου αυτού, όπου θα μελετήσουμε μεθόδους Ανάλυσης του Boole (Boolean analysis), θα θεωρήσουμε «πραγματικούς αριθμούς» με στοιχεία τυχαίες μεταβλητές ή και σε άλλη περίπτωση ααυτοσυζυγείς τελεστές, βλ. και [T].

Συνοπτικά η μεθοδολογία των **γενικών μη - συμβατικών μαθηματικών** (όχι μόνο της μη - συμβατική ανάλυσης του Robinson) είναι η ακόλουθη:

(i) Εστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε κάποια αντικείμενα υψηλής τάξης ή τύπου, π.χ. τυχαίες μεταβλητές, αυτοσυζυγείς τελεστές, μέτρα πιθανότητας κ.λ.π. Προσπαθούμε να βρούμε ένα τρόπο να θεωρήσουμε τα αντικείμενα αυτά σαν μη - συμβατικούς πραγματικούς και γενικά σαν αντικείμενα μιας μη - συμβατικής δομής. Συνήθως χρησιμοποιούμε, υπερδυνάμεις, δυνάμεις του Boole και άλλες μεθόδους που δεν έχουν ακόμα αναπτυχθεί.

(ii) Για να κάνουμε, η θεωρία υπεράνω της $\mathfrak{A}$ να μεταφέρεται και να αντιστοιχεί σε μια κατάλληλη θεωρία υπεράνω της $^*\mathfrak{A}$, είναι ανάγκη να κατασκευάσουμε την υπερδομή $V(^*\mathfrak{A})$ υπεράνω της $^*\mathfrak{A}$ και να εμφυτεύσουμε κατάλληλα (δηλ. στοιχειωδώς) την υπερδομή $V(\mathfrak{A})$ στην $V(^*\mathfrak{A}$.
Σχηματικά έχουμε το Σχήμα 8.3.



Σχήμα 8.3: Αντικείμενα υψηλού τύπου αναπαρίστανται στην τρίτη υπερδομή, με αντικείμενα $^*A$ του ίδιου τύπου με τα αντικείμενα του τύπου A.

2.3.6. Ασκηση: Οι εμφυτεύσεις m και $*$ είναι βεβαίως 1 - 1 αλλά δεν είναι επί. Αν $Im(f)$ συμβολίζει την εικόνα μέσω της f του πεδίου ορισμού της τότε,

$$Im(*) \subsetneq Im(m) \subsetneq V(^*\mathbb{R}).$$

8.4 Εσωτερικά Σύνολα και Αρχές Προέκτασης: Βασικές προτάσεις.

Μπορούμε αν θέλουμε να θεωρήσουμε όλο το υποτμήμα 2.3 σαν μια κατασκευή που αποδεικνύει ότι πράγματι υπάρχει μια ισομορφική στοιχειώδης εμφύτευση υπερδομών:

$$* : V(\mathbb{R}) \hookrightarrow V(^*\mathbb{R})$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Αρχή της επέκτασης. *Το $\mathbb{R}$ είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του $^*\mathbb{R}$ και για κάθε $r \in \mathbb{R}$, $^*r = r$.*

(ii) Αρχή της μεταφοράς. *Εστω φ ένας $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$-τύπος με $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}$. Εστω επίσης, $v_1, \cdots v_n \in V(\mathbb{R})$ τότε:*

$$\mathbf{V}(\mathbb{R}) \models \varphi(\mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_n}) \quad \text{ανν} \quad \mathbf{V}(^*\mathbb{R}) \models \varphi(^*\mathbf{v_1}, \cdots {}^*\mathbf{v_n})$$

Θεωρώντας τις δύο παραπάνω αρχές σαν αξιώματα, μπορούμε στην ουσία να παραγάγουμε όλα τα αποτελέσματα της μη - συμβατικής ανάλυσης. Αργότερα, για τοπολογικές έννοιες και έννοιες από τη θεωρία μέτρου θα χρειαστούμε ένα τρίτο αξίωμα την **αρχή του κορεσμού**.

Οπως έχουμε ήδη σημειώσει ότι η αρχή της μεταφοράς για τους ατομικούς τύπους της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$ γίνεται:

$$v \in u \quad \text{ανν} \quad ^*v \in {}^*u \quad \text{και} \quad v = u \quad \text{ανν} \quad ^*v = {}^*u.$$

Επομένως η συνολοθεωρία υπεράνω του $\mathbb{R}$ είναι ίδια με την συνολοθεωρία υπεράνω του $^*\mathbb{R}$. Αυτό είναι αρκετό για να δούμε ότι η αρχή της μεταφοράς είναι ισοδύναμη με τις ακόλουθες προτάσεις. Ωστόσο θα δώσουμε και μερικές λεπτομερέστερες υποδείξεις:

8.4.1 Θεώρημα. *Εστω $v, u, v_1, \cdots, v_n$ οντότητες της $V(\mathbb{R})$. Τότε,*

(i) $^*\{v_1, \cdots v_n\} = \{^*v_1, \cdots {}^*v_n\}$

(ii) $^*(v_1, \cdots v_n) = (^*v_1, \cdots {}^*v_n)$

(iii) $v \subseteq u$ *ανν* $^*v \subseteq {}^*u$

(iv) $^*(\bigcup_{i=1}^n v_i) = \bigcup_{i=1}^n {}^*v_i$ *και* $^*(\bigcap_{i=1}^n v_i) = \bigcap_{i=1}^n {}^*v_i$

(v) $^*(v_i \times v_2 \times \cdots, \times v_n) = {}^*v_1 \times {}^*v_2 \times \cdots \times {}^*v_n$

(vi) *Αν R είναι μια σχέση στο $v_1 \times \cdots \times v_n$, δηλαδή $R \subseteq v_1 \times \cdots \times v_n$ τότε και $^*R \subseteq {}^*v_1 \times \cdots \times {}^*v_n$ και για $n = 2$, $^*[dom(R)] = dom(^*R)$ και $^*[cod(R)] = cod(^*R)$.*

(vii) *Αν $f : v \to u$ τότε $^*f : {}^*v \to {}^*u$ και $^*[f(c)] = {}^*f(^*c), \quad c \in v$. Επίσης η f είναι $1-1$ ανν $^*f$ είναι $1-1$.*

Απόδ. (i) Εστω $v = \{v_1, \cdots v_n\}$ και έστω η πρόταση:

$$(\forall x \in v)[(x = v_1) \vee \cdots \vee (x = v_n)]$$

Παίρνοντας την $*$ - μεταφορά της έχουμε:

$$(\forall x \in {}^*v)[(x = {}^*v_1) \vee \cdots \vee (x = {}^*v_n)]$$

άρα
$$^*v = \{^*v_1, \cdots, ^*v_n\}. \quad \dashv\Box$$

(ii) Για $n = 2$, έχουμε, $(v_1, v_2) := \{\{v_1\}, \{v_1, v_2\}\}$ και,

$$\begin{aligned} ^*(v_1, v_2) &= {}^*\{\{v_1\}, \{v_1, v_2\}\} \\ &= \{^*\{v_1\}, ^*\{v_1, v_2\}\} \quad \text{από την (i)} \\ &= \{^*\{v_1\}, \{^*v_1, ^*v_2\}\} \quad \text{δεύτερη εφαρμογή της (i)} \\ &= (^*v_1, ^*v_2) \end{aligned}$$

Με επαγωγή παίρνουμε το αποτέλεσμα για κάθε n. $\dashv\Box$
(iii) $v \subseteq u$ ανν $(\forall x \in v)[x \in u]$
ανν $(\forall x \in {}^*v)[x \in {}^*u]$ (αρχή μεταφοράς)
ανν $^*v \subseteq {}^*u$. $\dashv\Box$
(iv) Θα δείξουμε τη σχέση με την ένωση για $n = 2$. Τη γενική σχέση την παίρνουμε με επαγωγή. Η απόδειξη για τη σχέση με την τομή είναι όμοια. Εστω $v = v_1 \cup v_2$ και έστω η πρόταση:

$$(\forall x \in v)[(x \in v_1) \vee (x \in v_2)] \quad \text{ανν} \quad (\forall x \in {}^*v)[(x \in {}^*v_1) \vee (x \in {}^*v_2)]$$

Ετσι έχουμε δείξει ότι $^*(v_1 \cup v_2) \subseteq {}^*v_1 \cup {}^*v_2$. 'Ομοια έχουμε $(\forall x \in {}^*v_1)[x \in {}^*v]$ και με την $*-$μεταφορά έχουμε $(\forall x \in {}^*v_1)[x \in {}^*x]$ και $(\forall x \in {}^*v_2)[x \in {}^*v]$ δηλαδή $^*v_1 \subseteq {}^*v$ και $^*v_2 \subseteq {}^*v$ άρα και $^*v_1 \cup {}^*v_2 \subseteq {}^*v$. Αρα $^*v = {}^*v_1 \cup {}^*v_2$. $\dashv\Box$

(v) Θα αποδείξουμε την περίπτωση $n = 2$. Ο τύπος που ορίζει το καρτεσιανό γινόμενο είναι:

$$(\forall z \in (v_1 \times v_2))(\exists \times \in v_1)(\exists y \in v_2)[z = (x, y)]$$

Ετσι με $*-$μεταφορά έχουμε,

$$(\forall z \in {}^*(v_1 \times v_2))(\exists x \in {}^*v_1)(\exists y \in {}^*v_2)[z = (x, y)]$$

Αυτό όμως σημαίνει $z \in {}^*(v_1 \times v_2) \Rightarrow z \in {}^*v_1 \times {}^*v_2$, έτσι $^*(v_1 \times v_i) \subseteq {}^*v_1 \times {}^*v_2$. Ομοια η σχέση $^*v_1 \times {}^*v_2 \subseteq {}^*(v_1 \times v_2)$ παίρνεται με $*-$μεταφορά της $(\forall x \in v_1)(\forall y \in v_2)(\exists z \in (v_1 \times v_2))[z = (x, y)]$. $\dashv\Box$
(vi) Η σχέση R είναι μια σχέση επί των $v_1, \ldots, v_n$ αν

$$(\forall x \in R)(\exists x_1 \in v_1) \ldots (\exists x_n \in v_n)[x = (x_1, \ldots, x_n)]$$

Η $*-$μεταφορά της πρότασης αυτής μας λέει ότι η $^*R$ είναι μια σχέση επί των $^*v_1, \ldots, ^*v_2$.

Για $n = 2$, θα δείξουμε τώρα ότι $^*[\mathrm{dom}(R)] = \mathrm{dom}(^*R)$. Εξ ορισμού έχουμε $(\forall x \in \mathrm{dom}(^*R))(\exists y \in {}^*v_2)[(x, y) \in {}^*R]$. Ετσι έχουμε επίσης

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(R))(\exists y \in v_2)[(x, y) \in {}^*R$$

Η $*$−μεταφορά της τελευταίας πρότασης μας δίνει

$$(\forall x \in {}^*\mathrm{dom}(R)(\exists y \in {}^*v_2)[(x,y) \in R]$$

Από την οποία παίρνουμε ότι ${}^*[\mathrm{dom}(R)] = \mathrm{dom}({}^*R)$. Όμοια και για τη σχέση ${}^*[\mathrm{cod}(R)] = \mathrm{cod}({}^*R)$. ⊣□

(vii) Η συνάρτηση $f : v \longrightarrow u$ ορίζεται από τον τύπο:

$$\varphi \equiv (f \subseteq v \times u) \wedge (\forall x \in v)(\forall y \in u)(\forall z \in u)[(x,y) \in f \wedge (x,z) \in f \Rightarrow y = z]$$

Παίρνοντας την $*$−μεταφορά της φ έχουμε:

$$\begin{aligned} {}^*\varphi \;\equiv\; & ({}^*f \subseteq {}^*v \times {}^*u) \wedge \\ & \wedge(\forall x \in {}^*v)(\forall y \in {}^*u)(\forall z \in {}^*u)[(x,y) \in {}^*f \wedge (x,z) \in {}^*f \Rightarrow y = z]. \end{aligned}$$

Ετσι η ${}^*f : {}^*v \longrightarrow {}^*u$ είναι μια συνάρτηση, και αν $c \in v$ είναι μια σταθερά τότε υπάρχει μια μοναδική σταθερά $b \in u$ έτσι ώστε να ισχύει ο ατομικός τύπος $b = f(c)$. Η $*$−μεταφορά του τύπου αυτού μας δίνει ${}^*b = {}^*f({}^*c)$. Τότε $*$−μεταφέροντας τον τύπο που ορίζει την 1 - 1 συνάρτηση έχουμε τελειώσει την απόδειξη. ⊣■

8.4.1 Εσωτερικές Οντότητες.

Οι εσωτερικές οντότητες είναι το σπουδαιότερο είδος οντοτήτων που θα συναντούμε στη συνέχεια και ιδιαίτερα στη διαπραγμάτευση της μη-συμβατικής Θεωρίας Μέτρου που θα γίνει στο επόμενο Κεφάλαιο.

8.4.2 Ορισμός. Εστω $u \in V({}^*\mathbb{R})$ τότε:

(i) Το u λέγεται **συμβατικό** ανν $u = {}^*v$ για κάποιο $v \in V(\mathbb{R})$.

(ii) Το u λέγεται **εσωτερικό** (εσωτερική οντότητα) ανν υπάρχει $A \in \mathscr{S}$ τέτοιο ώστε $u \in {}^*A$.

(iii) Το u λέγεται **εξωτερικό** (ή εξωτερική οντότητα) ανν δεν είναι εσωτερικό.

Είναι φανερό ότι η οντότητα u είναι συμβατική ανν $u \in Im(*)$.

Η ονομασία «συμβατική οντότητα» αιτιολογείται ως εξής: Εστω $u \in V_k(\mathbb{R})$, $k \geq 0$ μια οντότητα στην υπερδομή $V(\mathbb{R})$. Τέτοιες οντότητες θα τις ονομάζουμε συνήθως **πραγματικές οντότητες**, για να τις διακρίνουμε από τις συμβατικές οντότητες. Ας θεωρήσουμε ακόμα την κλάση ισοδυναμίας που παράγεται από την σταθερή ακολουθία $\{u, u, \ldots\}$ δηλαδή έστω $i(u) := [u, u, \ldots]$. Στη συνέχεια έστω $*(\cdot) := m(i(\cdot))$. Ετσι αρχίζοντας με σταθερές ακολουθίες της $V(\mathbb{R})$ καταλήγουμε σε συμβατικές οντότητες, όπως θα ανάμενε κανείς. Ετσι τίθεται το φυσιολογικό ερώτημα: Τι είδους οντότητες παίρνουμε μέσα από τη διαλεκτική μας διαδικασία, όταν αρχίσουμε από όχι αναγκαστικά σταθερές ακολουθίες; Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

8.4.3 Θεώρημα. *Η οντότητα $u \in V({}^*\mathbb{R})$ είναι εσωτερική ανν $u \in Im(m)$, οπότε υπάρχει αυθαίρετη $V(\mathbb{R})$-φραγμένη ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε:* $u = m([u_n]) \textit{και} u \in {}^*[V_{k+1}(\mathbb{R})] \quad \textit{ανν} \quad \{n \in \mathbb{N} | u_n \in V_{k+1}(\mathbb{R})\} \in \mathscr{F}_M, \qquad k \geq 0.$

Απόδ. Εστω u μια εσωτερική οντότητα. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει $k \geq 1$ με $u \in {}^*[V_k(\mathbb{R})] = m(i(V_k(\mathbb{R})))$. Αλλά από τον ορισμό της $m(\cdot)$ έχουμε:

$$m\left(i\left(V_k(\mathbb{R})\ \right)\right) := \{m([g]) | [g] \in_{\mathscr{F}_M} i(V_k(\mathbb{R}))\}$$

Ετσι $u \in m\Big((i(V_k(\mathbb{R}))\Big)$ συνεπάγεται ότι $u = m([g])$ για κάποια V - φραγμένη ακολουθία $g = \{u_n\}$. Αρα $u \in I_m(m)$.

Αντίστροφα Εστω $u \in I_m(m)$. Τότε $u = m([g])$ για κάποιο $[g] \in_{\mathscr{F}_M} i(V_k(\mathbb{R}))$ $k \geq 1$. Επομένως $u = m([g]) \in m(i(V_k(\mathbb{R})) = {}^*V_k(\mathbb{R})$. Αρα το u είναι μια εσωτερική οντότητα. Τέλος, αν u είναι με εσωτερική οντότητα, τότε από τον ορισμό έχουμε: $u \in {}^*[V_k(\mathbb{R})], \quad k \geq 1$. Αυτό όμως σημαίνει ότι για κάποια V - φραγμένη ακολουθία $\{u_n\}$ έχουμε $u = m([u_n])$. Ετσι, $u \in {}^*[V_k(\mathbb{R})]$

ανν $m([u_n]) \in m(i(V_k(\mathbb{R})))$

ανν $[u_n] \in_{\mathscr{F}_M} i(V_k(\mathbb{R}))$

ανν $\{n \in \mathbb{N} | u_n \in V_k(\mathbb{R})\} \in \mathscr{F}_M$

Αρα τελικά έχουμε:

$$u \in {}^*[V_k(\mathbb{R})], \quad k \geq 1 \ \text{ ανν}\{n \in \mathbb{N} | v_n \in V_k(\mathbb{R})\} \in \mathscr{F}_M, \quad k \geq 1,$$

όπου $\{u_n\}$ είναι μια $V(\mathbb{R})$- φραγμένη ακολουθία, που ορίζει την κλάση ισοδυναμίας $[u_n]$. Ετσι η έννοια των εσωτερικών οντοτήτων συμπίπτει με αυτή που ήδη έχουμε εισάγει, πριν από τον παράδειγμα 1.4.12.

Ασκηση. **(1)** Να δειχτεί ότι κάθε στοιχείο μιας εσωτερικής οντότητας είναι εσωτερική οντότητα και ότι τα στοιχεία του ${}^*\mathbb{R}$ είναι εσωτερικές οντότητες.
(2) Να υπολογιστούν τα εσωτερικά σύνολα που παράγονται από τις ακόλουθες

V - φραγμένες ακολουθίες:

$$A_n :=(-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}), n=1,2,\ldots$$
$$A_n :=(0, 1+\frac{1}{n}), n=1,2,\ldots$$
$$A_n :=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|(x-\frac{1}{n})^2+y^2<1\} \quad n=1,2,\ldots$$

8.4.4 Θεώρημα. *Το σύνολο όλων των εσωτερικών οντοτήτων της υπερδομής $V(^*\mathbb{R})$ είναι το $^*V(\mathbb{R})=\cup_{n=0}^{\infty}{}^*V_n(\mathbb{R})$.*

Απόδ. Εστω $u\in {}^*V_n(\mathbb{R})$. Τότε υπάρχει $n\geq 0$ με $u\in {}^*V_n(\mathbb{R})$ έτσι η u είναι εσωτερική οντότητα, αφού του $^*V_n(\mathbb{R})$ είναι μια συμβατική οντότητα. Αντίστροφα, έστω ότι το u είναι εσωτερικό. Αρα υπάρχει $v\in V_k(\mathbb{R}), k\geq 1$ με $u\in {}^*v$. Αλλά $v\in V_k(\mathbb{R})$ ανν $^*v\in {}^*V_k(\mathbb{R})$, έτσι έχουμε λόγω και της μεταβατικότητας ότι $u\in {}^*V_k(\mathbb{R})$. Επειδή ολόκληρος ο μηχανισμός των υπερδυνάμεων χρησιμοποιεί τύπους της γλώσσας $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$ για να ορίσει τις αντίστοιχες οντότητες, είναι χρήσιμο να έχουμε ένα κριτήριο όπου όταν μια οντότητα ορίζεται με τύπους να μπορούμε να την αναγνωρίζουμε αν είναι εσωτερική ή εξωτερική. Αυτό γίνεται μέσα από την σπουδαία «Αρχή του Εσωτερικού Ορισμού» του Keisler. Πριν όμως ένα ορισμός:

8.4.5 Ορισμός. Ενας τύπος φ της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$ λέγεται αντίστοιχα **πραγματικός, συμβατικός, εσωτερικός, ή εξωτερικός** ανν όλες οι σταθερές που περιέχει έχουν την αντίστοιχη ιδιότητα. Ετσι για παράδειγμα η $*$ - μεταφορά ενός πραγματικού τύπου είναι ένας συμβατικός τύπος.

8.4.6 Θεώρημα. *(Αρχή του εσωτερικού ορισμού (ΑΕΟ)) Εστω $A, u_1,\ldots,u_n$ αυθαίρετες εσωτερικές οντότητες με $A\in\mathscr{S}$ και έστω φ ένα εσωτερικός τύπος με $FV(\varphi)\subseteq\{x_0,\ldots,x_n\}$ τότε το σύνολο*

$$\{x\in A \mid \varphi(x,u_1,\ldots,u_n)\}$$

είναι εσωτερικό.

Απόδ. Οι σταθερές του τύπου $\varphi, u_1,\ldots,u_n$ αλλά και το σύνολο A αφού είναι εσωτερικές οντότητες, υπάρχει $k\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $A, u_1,\ldots,u_n\in {}^*(V_k(\mathbb{R})$.

Ετσι η πρόταση της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$,

$$(\forall x_1 \ldots, x_n, y \in V_k(\mathbb{R}))(\exists z \in V_{k+1}(\mathbb{R}))(\forall x \in V_k(\mathbb{R}))$$
$$[(x \in z) \Leftrightarrow (x \in y) \wedge \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)]$$

ισχύει στην υπερδομή $V(\mathbb{R})$. Επομένως η $*$-μεταφορά της ισχύει στην $V({}^*\mathbb{R})$, δηλαδή έχουμε,

$$(\forall x_1 \ldots, x_n, y \in {}^*V_k(\mathbb{R}))(\exists z \in {}^*V_{k+1}(\mathbb{R}))(\forall x \in {}^*V_k(\mathbb{R}))$$
$$[(x \in z) \Leftrightarrow (x \in y) \wedge \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)]$$

Αντικαθιστώντας τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ με τις σταθερές $u_1, \ldots, u_n$ και την y με τη σταθερή A, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ενός συνόλου $z \in {}^*V_{k+1}(\mathbb{R})$ τέτοιου ώστε, $(x \in z) \Leftrightarrow (x \in A)$ & $\varphi(x, u_1, \ldots, u_n)$. Ετσι αφού $z \in {}^*V_{k+1}(\mathbb{R})$ και $z = \{x \in A | \varphi(x_1, u_1, \ldots, u_n)\}$ έπεται ότι το σύνολο $\{x \in A \mid \varphi(x_1, u_1, \ldots, u_n)\}$ είναι εσωτερικό.

8.4.7 Παράδειγμα. (1) Εστω $f : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ μια εσωτερική συνάρτηση.

Τότε το σύνολο $\{x \in {}^*\mathbb{R} \mid$ η $f;$είναι $*$-συνεχής στο $x\}$ είναι εσωτερικό.
(2) Εστω $f : {}^*V_k(\mathbb{R}) \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ μια εσωτερική συνάρτηση, τότε το μηδενικό

σύνολο $Z_f := \{x \in {}^*V_k(\mathbb{R}) | (x, 0) \in f\}$ της f είναι εσωτερικό.
(3) Εστω A και B δύο εσωτερικά σύνολα. Αρα υπάρχει $k \geq 1$ με $A, B \in$

${}^*V_k(\mathbb{R})$. Εστω τώρα $A \cup B := \{x \in {}^*V_k(\mathbb{R}) | (x \in A) \vee (x \in B)\}$, τότε η ένωση $A \cup B$ είναι εσωτερικό σύνολο από την $A.E.O.$
(4) Εστω $\mathscr{I}$ το σύνολο των κλειστών και φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$.

Τότε κάθε διάστημα $\{x \mid a \leq x \leq b, \quad a, b \in {}^*\mathbb{R}\} \in {}^*\mathscr{I}$ είναι εσωτερικό. Τα συμβατικά $*$-διαστήματα είναι αυτά με $a, b \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αφού $x \in A$ ανν ${}^*x \in {}^*A$ για κάθε σύνολο A, της υπερδομής $V(\mathbb{R})$, τότε το ${}^*A$ περιέχει ένα στοιχειακό αντίγραφο του A, που ορίζεται ως εξής:

$${}^{\sigma}A := \{{}^*x : x \in A\}$$

και λέγεται **συμβατικό αντίγραφο του** A. Το ${}^*A$ είναι αυστηρά υπερσύνολο του ${}^{\sigma}A$, εκτός αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο. Ακριβώς αυτά τα επί πλέον ιδεώδη (ή φανταστικά) στοιχεία, είναι που κάνουν τη μέθοδο της μη συμβατικής ανάλυσης χρήσιμη. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με κάποια υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και κάποιες βασικές ιδιότητες του $\mathbb{R}$ που $*$- μεταφέρονται στο ${}^*\mathbb{R}$.

8.4.8 Πρόταση. (i) $*-$καλή διάταξη. *Για κάθε μη - κενό, εσωτερικό υποσύνολο $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$, υπάρχει ένα πρώτο στοιχείο $x \in A$.*

(ii) $*$ - επαγωγή. *Αν $S \subseteq {}^*\mathbb{N}$ είναι ένα εσωτερικό υποσύνολο του ${}^*\mathbb{N}$ και ισχύει : $0 \in S$ και για κάθε $x \in S$ έχουμε ότι $x+1 \in S$ τότε $S = {}^*\mathbb{N}$.*

(iii) $*$ - πληρότητα. *Κάθε μη - κενό, εσωτερικό υποσύνολο $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$, που έχει ένα άνω φράγμα, έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.*

(iv) $*-$Αρχιμήδεια ιδιότητα. *Για κάθε $x \in {}^*\mathbb{R}$, υπάρχει $n \in {}^*\mathbb{N}$ με $|x| < n$.*

Απόδ. Ολες οι αποδείξεις είναι $*-$μεταφορά των αντιστοίχων πραγματικών ιδιοτήτων.

(i) Επειδή το A είναι εσωτερικό, υπάρχει $k \geq 1$ με $A \in {}^*[V_k(\mathbb{R})]$. Αφού $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ η $*$ - μεταφορά της $(\forall X \in V(\mathbb{R}))[X \subseteq \mathbb{N} \to X \in \mathscr{P}(\mathbb{N})]$ δίνει ότι $A \in {}^*[\mathscr{P}(\mathbb{N})]$. Επειδή το $\mathbb{N}$ είναι καλώς διαταγμένο έχουμε:

$$(\forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}))[(X = \emptyset) \vee (\exists m \in X)(\forall x \in X)[m \leq x]]$$

Η $*$ - μεταφορά μας δίνει την ιδιότητα (i)

$$(\forall X \in {}^*(\mathscr{P}(\mathbb{N}))[(X = \emptyset) \vee (\exists m \in X)(\forall x \in X)[m \leq x]]$$

Επειδή το $A \in {}^*[\mathscr{P}(\mathbb{N})]$ και $A \neq \emptyset$ έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Η μαθηματική επαγωγή για το $\mathbb{N}$ είναι:

$$(\forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{N}))][(0 \in X) \wedge (\forall y \in X)[y+1 \in X] \to (X = \mathbb{N})]$$

με $*$ - μεταφορά έχουμε:

$$(\forall X \in {}^*\mathscr{P}(\mathbb{N}))[(0 \in X) \wedge (\forall y \in X) \to (X = {}^*\mathbb{N})]$$

Επειδή το S είναι εσωτερικό, $S \in {}^*\mathscr{P}(\mathbb{N})$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

(iii) Εστω ότι ο τύπος $\varphi(y, X) \equiv (\forall x \in X)[x \leq y]$, σημαίνει ότι το y είναι άνω φράγμα για το X και ο τύπος,

$$\psi(u, X) \equiv \varphi(u, X) \wedge (\forall u'[\varphi(u', X)] \to [u \equiv u'$$

σημαίνει ότι το u είναι το ελάχιστο άνω φράγμα για το X, τότε το αξίωμα της πληρότητας για το $\mathbb{R}$ γράφεται:

$$(\forall X \in \mathscr{P}(\mathbb{R}))[(\exists x \in \mathbb{R})[x \in X] \wedge (\exists y \in \mathbb{R})[\varphi(y, X)] \to (\exists u \in \mathbb{R})[\psi(u, X)]]$$

η δε $*$-μεταφορά είναι η,

$$(\forall X\in{}^*\mathscr{P}(\mathbb{R}))[(\exists x\in{}^*\mathbb{R})[x\in X]\wedge(\exists y\in{}^*\mathbb{R})[\varphi(y,X)]\rightarrow(\exists u\in{}^*\mathbb{R})[\psi(u,X)]]$$

που στην ουσία λέει ότι κάθε μη - κενό **εσωτερικό** υποσύνολο του ${}^*\mathbb{R}$ που έχει ένα άνω φράγμα, έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα.

(iv) Η Αρχιμήδεια ιδιότητα δίδεται από τον τύπο,

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}0[|x| < n]$$

Ετσι ισχύει, $(\forall x \in {}^*\mathbb{R})(\exists n \in {}^*\mathbb{N})[|x| < n]$

8.4.9 Σχόλιο. **(i)** Βλέπουμε ότι παρ' όλο που το ${}^*\mathbb{R}$ δεν είναι ούτε Αρχιμήδειο ούτε πλήρες ωστόσο είναι $*$ - Αρχιμήδειο και $*-$πλήρες. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας «τοπικός παρατηρητής» ενσωματωμένος στο ${}^*\mathbb{R}$ τότε ο τοπικός αυτός παρατηρητής εκλαμβάνει τις $*-$ιδιότητες ως απλές ιδιότητες. Δηλαδή γι' αυτόν το ${}^*\mathbb{R}$ είναι και Αρχιμήδειο και πλήρες. Μόνον ο απόλυτος εξωτερικός παραρητηρητής μπορεί να κάνει διαχωρισμούς του τύπου «εξωτερικός$-$εσωτερικός». Γενικότερα ισχύει η ακόλουθη αρχή.

(ii) Η $*$-μεταφορά μετασχηματίζει τις ποσοδεικτήσεις πάνω σε αυθαίρετα σύνολα στο $V(\mathbb{R})$ σε ποσοδεικτήσεις πάνω σε εσωτερικά σύνολα στο $V({}^*\mathbb{R})$. Από το γεγονός αυτό αντλούν και τη μεγάλη σπουδαιότητα, που έχουν τα εσωτερικά σύνολα στην ανάπτυξη της απειροστικής ανάλυσης.

8.4.10 Θεώρημα. *Εστω $G(0) \equiv \mathcal{O}$ ο γαλαξίας του μηδενός, δηλ. όλοι οι πεπερασμένοι υπερπραγματικοί. Τότε έχουμε:*

$${}^*\mathbb{N} \cap \mathcal{O} = \mathbb{N}$$

Απόδ. Είναι φανερό ότι ${}^\sigma\mathbb{N} \subseteq \mathcal{O}$ και ${}^\sigma\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$ έτσι έχουμε ${}^\sigma\mathbb{N} \subseteq \mathcal{O} \cap {}^*\mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι και ${}^*\mathbb{N}\cap\mathcal{O} \subseteq {}^\sigma\mathbb{N}$. Πράγματι αν $a \in {}^*\mathbb{N}\cap\mathcal{O}$ τότε $a \in {}^*\mathbb{N}$ & $a \in \mathcal{O}$. Αλλά $a \in \mathcal{O}$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ με $a \leq m_0$. Ετσι $a \in {}^*\mathbb{N}$ & $a \leq m_0$ για κάποιο $m_0 \in {}^\sigma\mathbb{N}$, συνεπάγεται ότι $a \in {}^\sigma\mathbb{N}$, αφού πάντα ${}^\sigma N \subseteq {}^*\mathbb{N}$.

Μπορεί ακόμα κανείς να αποδείξει ότι:

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε ${}^\sigma A \subseteq {}^*A$ και ${}^*A \cap {}^\sigma\mathbb{R} = {}^\sigma A$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι άπειροι υπερ - φυσικοί ${}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ είναι εξωτερικό σύνολο. Θα αποφεύγουμε να συμβολίζουμε το ${}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ με ${}^*\mathbb{N}_\infty$, γιατί υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης ότι το ${}^*\mathbb{N}_\infty$ είναι συμβατικό σύνολο, λόγω του $*$ και άρα εσωτερικό.

8.4.11 Πρόταση. *Το σύνολο των υπερφυσικών άπειρων αριθμών*

$$^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$$

είναι ένα εξωτερικό σύνολο.

Απόδ. Ας υποθέσουμε ότι το $^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ είναι εσωτερικό. Επειδή $^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{N}$, η Πρόταση 8.4.8 (i) εφαρμόζεται και επομένως το $^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ θα έπρεπε να έχει πρώτο στοιχείο. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού για κάθε $x \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ έχουμε επίσης $x - 1 \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$. Αρα το $^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ δεν είναι εσωτερικό.

8.4.12 Πρόταση. *Το σύνολο $^\sigma\mathbb{N}$ είναι εξωτερικό*

Απόδ. Αν το $^\sigma\mathbb{N}$ ήταν εξωτερικό, τότε από την ΑΕΟ και το σύνολο $^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N} = \{x \in {}^*\mathbb{N} | x \notin {}^\sigma\mathbb{N}\}$ θα ήταν εσωτερικό. Αρα το $^\sigma\mathbb{N}$ είναι εξωτερικό σύνολο.

8.4.13 Θεώρημα. *Εστω $A \in V(\mathbb{R})$ και $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε: το $^\sigma A$ είναι εσωτερικό ανν το A είναι πεπερασμένο.*

Απόδ. ($\Leftarrow$) Εστω ότι το A είναι πεπερασμένο, δηλαδή

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$$

Τότε $\models (\forall x \in A)[x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n]$ ανν $^* \models (\forall x \in {}^*A)[x = {}^*a_1 \vee \ldots \vee x = {}^*a_n]$ από την αρχή της μεταφοράς (ΑΜ). Αρα $^*A = \{^*a_1, \ldots, {}^*a_n\} = A$ αφού για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $^*a = a$. Ετσι το A είναι όχι μόνο εσωτερικό αλλά και συμβατικό.

($\Rightarrow$) Θα δείξουμε την αντίθετο-αντίστροφη πρόταση. Εστω ότι το A είναι απειροσύνολο τότε θα δείξουμε ότι είναι εξωτερικό. Επειδή το A είναι απειροσύνολο, υπάρχει ένα απειροσύνολο $B \subseteq A$ τέτοιο ώστε να είναι ισοδύναμο με τους φυσικού $\mathbb{N}$. Υπάρχει δηλαδή μια 1 - 1 και επί συνάρτηση $f : B \to \mathbb{N}$. Αν το $^\sigma A$ είναι εσωτερικό τότε και το $^\sigma A \cap {}^*B = {}^\sigma B$ είναι εσωτερικό. Από την συνάρτηση $f : B \to \mathbb{N}$ παράγεται η εσωτερική συνάρτηση, $^*f : {}^*B \to {}^*\mathbb{N}$. Αλλά $^*f({}^\sigma B) = {}^\sigma\mathbb{N}$. Ετσι το $^\sigma\mathbb{N}$ σαν εικόνα ενός εσωτερικού συνόλου $^*B$, μέσω μιας εσωτερικής συνάρτησης θα έπρεπε να είναι ένα εσωτερικό σύνολο, που είναι μια αντίφαση. Αρα το $^\sigma A$ είναι εξωτερικό.

8.4.14 Πόρισμα. *Τα σύνολα $^\sigma\mathbb{R}, {}^\sigma\mathbb{Q}$ και $^\sigma\mathbb{Z}$ είναι εξωτερικά.*

8.4.15 Θεώρημα. *Το σύνολο $m(0)$ των απειροστών είναι εξωτερικό.*

Απόδ. Θα ακολουθήσουμε και δω τον ίδιο γενικό τρόπο απόδειξης που ακολουθήσαμε και στις αποδείξεις των αποτελεσμάτων: Πρόταση 8.4.11 - Θεώρημα 8.4.13. Ας υποθέσουμε έτσι ότι το $m(0)$ είναι εσωτερικό. Τότε όμως, επειδή είναι και φραγμένο εκ των άνω (π.χ. από το 1), εφαρμόζεται η Πρόταση 8.4.8(iii). Αρα το $m(0)$ έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα εστω το s, δηλαδή $s = \sup m(0)$. Είναι φανερό ότι $s > 0$ Ακόμα $s \notin m(0)$ γιατί διαφορετικά καταλήγουμε σε άτοπο αφού και το $25 > s$ θα ήταν απειροστό και επομένως θα ανήκε στο $m(0)$. Αν όμως $s \notin m(0)$ τότε και το $\frac{s}{2}$ θα ήταν ένα άνω φράγμα που είναι άτοπο. Επομένως και στις δύο περιπτώσεις οδηγηθήκαμε σε άτοπο και άρα το $m(0)$ είναι εξωτερικό.

Αξίζει να συνοψίσουμε την μέθοδο που ακολουθήσαμε σ' όλες αυτές τις προηγούμενες αποδείξεις. Αξιόλογη μέθοδος απόδειξης. Χρησιμοποιούμε την μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής» με στόχο να φθάσουμε στην αντίφαση, ότι ένα σύνολο που γνωρίζουμε ότι είναι εξωτερικό, αποδεικνύεται ότι είναι εσωτερικό, κάτω από την υπόθεση που έχουμε αρνηθεί.

Ετσι από το γεγονός ότι το $m(0)$ είναι εξωτερικό και με τη χρήση της ΑΕΟ μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι ακόλουθες οντότητες είναι εξωτερικές οντότητες:

(i) Κάθε μονάδα $m(a)$ για $a \in {}^*\mathbb{R}$

(ii) Το σύνολο $\mathcal{O} \equiv G(0)$ των πεπερασμένων υπερπραγματικών.

(iii) Κάθε γαλαξίας $G(a), a \in {}^*\mathbb{R}$

(iv) Τα θετικά ή αρνητικά απειροστά,

(u) Οι θετικοί ή αρνητικοί πεπερασμένοι υπερπραγματικοί

(vi) Τα σύνολα ${}^*\mathbb{R} - {}^\sigma\mathbb{R}$ των άπειρων υπερπραγματικών καθώς επίσης και τα σύνολα του των θετικών και αρνητικών υπερπραγματικών.

8.4.2 Ο Τελεστής του Δυναμοσυνόλου και τα Εσωτερικά Σύνολα.

Παρόλο που ο τελεστής του δυναμοσυνόλου, τυπικά δεν είναι μια οντότητα (βλ.[163, p.20]), μπορούμε ωστόσο να θεωρούμε την συνάρτηση,

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{P}(\cdot) & : & V(\mathbb{R}) & \to & V(\mathbb{R}) \\ & & A & \mapsto & \mathscr{P}(A) \end{array}$$

σαν $\mathscr{P} \upharpoonright V_n(\mathbb{R})$, $\quad n \geq 0$ οπότε έχουμε και τον αντίστοιχο τελεστή,

$$\begin{array}{rccc} {}^*\mathscr{P}(\cdot) & : & {}^*V(\mathbb{R}) & \to & {}^*V(\mathbb{R}) \\ & & A & \mapsto & {}^*\mathscr{P}(A) \end{array}$$

σαν $*$-επέκταση όλων των $\mathscr{P} \restriction V_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ που δρα πάνω σε εσωτερικές οντότητες, και που βεβαίως είναι στοιχεία του ${}^*V(\mathbb{R})$.

Πρέπει κανείς να σημειώσει τη διαφορά στα,

$$^*[\mathscr{P}(A)], \quad A \in V(\mathbb{R}) \qquad \text{και} \qquad ^*[\mathscr{P}](A), \quad A \in {}^*V(\mathbb{R})$$

8.4.16 Πρόταση. *Εστω $A \in \mathscr{I} := V(\mathbb{R}) - \mathbb{R}$, τότε οι εσωτερικές οντότητες του $\mathscr{P}({}^*A)$ είναι ακριβώς τα στοιχεία του ${}^*\mathscr{P}(A)$.*

Απόδ. Εστω η ακόλουθη πρόταση της $\mathscr{L}(V(\mathbb{R}))$:

$$(\forall X \in V_n(\mathbb{R}))[X \subseteq A \Leftrightarrow X \in \mathscr{P}(A)]$$

Η $*$-μεταφορά μας λέει ότι

$$(\forall X \in {}^*V_n(\mathbb{R}))[X \subseteq {}^*A \Leftrightarrow X \in {}^*\mathscr{P}(A)]$$

Ετσι αν X είναι μια εσωτερική οντότητα, της $V({}^*\mathbb{R})$, τότε υπάρχει $n \geq 1$ με $X \in {}^*V_n(X)$, επομένως ένα υποσύνολο του ${}^*A$ είναι εσωτερικό ανν $X \in {}^*\mathscr{P}(A)$. Εχουμε ήδη παρατηρήσει ότι ${}^\sigma\mathbb{N} \notin {}^*\mathscr{P}(\mathbb{N})$ αλλά ${}^\sigma\mathbb{N} \in \mathscr{P}({}^*\mathbb{N})$. Ετσι τα εσωτερικά υποσύνολα του ${}^*\mathbb{N}$ είναι τα ${}^*\mathscr{P}(\mathbb{N})$ τα δε εσωτερικά τα $\mathscr{P}({}^*\mathbb{N}) - {}^*\mathscr{P}(\mathbb{N})$ και επί πλέον έχουμε

$$^\sigma[\mathscr{P}(\mathbb{N})] \subsetneq {}^*[\mathscr{P}(\mathbb{N})] \subsetneq \mathscr{P}({}^*\mathbb{N})$$

Η ίδια σχέση ισχύει και για γενικότερα σύνολα $X \in \mathscr{I}$.

8.4.3 Αρχές Προέκτασης (Prolongation Principles).

Οι ακόλουθες βασικές προτάσεις συναντώνται στην βιβλιογραφία σαν πορίσματα μιας γενικής αρχής, με διάφορα ονόματα: «Αρχή της μονιμότητας» στους Robinson και Lightstone και «Αρχή του Cauchy ή της συνέχειας» στους Stroyan - Luxenmburg. Ολες αυτές οι σχετικές προτάσεις έχουν σαν κεντρικό θέμα **την συμπεριφορά διαφόρων εσωτερικών οντοτήτων στο σύνορο και κατά την μετάβαση μεταξύ δύο ειδών δεικτών : τους πεπερασμένους φυσικούς και τους άπειρα μεγάλους υπερφυσικούς**. Η ονομασία που προτείνουμε «αρχές προέκτασης» (prolongation principles) εκφράζει ακριβώς το γεγονός ότι ιδιότητες που παρατηρούνται αναφορικά με τη μια κατηγορία δεικτών, επεκτείνονται ή προεκτείνονται, και στην άλλη κατηγορία δεικτών. Η πρώτη πρόταση, γνωστή σαν **Αριθμήσιμη Συμπερίληψη** (countable comprehension) έχει σαν κεντρικό θέμα το ακόλουθο πρόβλημα:

Είναι γνωστό ότι αν έχουμε μια ακολουθία πραγματικών οντοτήτων $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε υπάρχει μια κανονική επέκταση $({}^*u_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ με τη χρήση της αρχής της μεταφοράς. Ας υποθέσουμε όμως τώρα ότι έχουμε μια αριθμήσιμη οικογένεια εσωτερικών συνόλων $(A_n)_{n\in{}^\sigma\mathbb{N}}$. Ζητάμε να βρούμε μια εσωτερική ακολουθία $A : {}^*\mathbb{N} \to {}^*V(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $A(n) \equiv A_n$ για κάθε $n \in {}^\sigma\mathbb{N}$. Αξίζει να σημειώσουμε ότι η αρχή της μεταφοράς δεν προσφέρει στην περίπτωσή μας καμιά βοήθεια, αφού η οντότητα $(A_n)_{n\in{}^\sigma\mathbb{N}}$ είναι εξωτερική ακόμα και στην περίπτωση που το A_n είναι εσωτερικό σύνολο για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό συμβαίνει γιατί το ${}^\sigma\mathbb{N}$ είναι εξωτερικό. Ετσι η ακόλουθη πρόταση είναι αναγκαία.

8.4.17 Θεώρημα. (Αριθμήσιμη Ευρύτητα). *Για κάθε εσωτερικό σύνολο A και για κάθε συνάρτηση $f : {}^\sigma\mathbb{N} \to A$, υπάρχει μια εσωτερική συνάρτηση $g : {}^*\mathbb{N} \to A$ που είναι επέκταση της f.*

Απόδ. Αφού το A είναι εσωτερικό, θα έχουμε $A \in {}^*(V_k(\mathbb{R}), \quad k \geq 1$. Εστω λοιπόν $f = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $A_n \in {}^*(V_k(\mathbb{R})$. Αφού τα A_n είναι εσωτερικά σύνολα έχουν την μορφή,

$$A_n = m([B_i^n]) \quad \text{με} \quad [B_i^n] \in V_k(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M$$

Ορίζουμε τώρα την ακολουθία,

$$\begin{aligned} B_i : \mathbb{N} &\to V_k(\mathbb{R}) \\ n &\to B_i(n) := B_i^n \end{aligned}$$

όπου B_i^n είναι ένας αντιπρόσωπος της κλάσης $[B_i^n]$. Αν τώρα θέσουμε, $g := m([B_i])$ τότε η συνάρτηση

$$g : {}^*\mathbb{N} \to V({}^*\mathbb{R})$$

είναι εσωτερική εξ ορισμού και,

$$g(n) := ([B_i(n)]) = m([B_i^n]) = A_n \qquad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ετσι η συνάρτηση g είναι η ζητούμενη. ⊣□

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς: Για $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}[0,n] &:= \{k \in \mathbb{N} | 0 \leq k \leq n\}, \\ \mathbb{N}[n,\infty) &:= \mathbb{N} - \mathbb{N}[0,n-1] \\ {}^*\mathbb{N}[n,H] &:= \{k \in {}^*\mathbb{N} | n \leq k \leq H\} \qquad \text{και} \\ {}^*\mathbb{N}(\infty,H] &:= \{k \in {}^*\mathbb{N} | k \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N} \& k \leq H\} \end{aligned}$$

Το ακόλουθο θεώρημα είναι γνωστό σαν **Αρχή της Υπερχείλισης** (overflow principle) και είναι μια προς τα πάνω αρχή προέκτασης.

8.4.18 Θεώρημα. (Αρχή της υπερχείλισης). *Εστω A ένα εσωτερικό υποσύνολο του ${}^*\mathbb{N}$. Αν για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mathbb{N}[n_0, \infty) \subseteq A$ τότε υπάρχει ένας άπειρα μεγάλος φυσικός $H \in {}^*\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε ${}^*\mathbb{N}[n_0, H] \subseteq A$. Για $n_0 = 0$, η αρχή λέει ότι αν το A είναι εσωτερικό και ${}^\sigma\mathbb{N} \subseteq A$ τότε το A περιέχει ένα άπειρα μεγάλο φυσικό $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$.*

Απόδ. Επειδή το A είναι ένα εσωτερικό υποσύνολο του ${}^*\mathbb{N}$, τότε και το ${}^*\mathbb{N} - A$ θα είναι εσωτερικό από την ΑΕΟ και

$$ {}^*\mathbb{N} - A \subseteq {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}[n_0, \infty) = ({}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}) \cup \mathbb{N}[0, n-1] $$

Αν το A είναι μη−φραγμένο στο ${}^*\mathbb{N}$ τότε δεν υπάρχει τίποτα για απόδειξη. Αν το A είναι φραγμένο εκ των άνω τότε το εσωτερικό σύνολο ${}^*\mathbb{N} - A$ περιέχει άπειρα μεγάλους ακέραιους. Από την αρχή της $*$-καλής διάταξης (Πρόταση 8.4.8(ii)) υπάρχει το

$$ H + 1 := \min\{k : n_0 < k, k \in {}^*\mathbb{N} - A\} $$

Αρα το $H \in A$ και $H \in \mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ ⊣

8.4.19 Θεώρημα. (Αρχή της υπο-Διαρροής(*underflow*)**).** *Εστω A ένα εσωτερικό υποσύνολο του ${}^*\mathbb{N}$. Αν για κάποιο άπειρα μεγάλο φυσικό $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ έχουμε ${}^*\mathbb{N}(\infty, H] \subseteq A$ τότε υπάρχει πεπερασμένο $n_0 \in \mathbb{N}$ με ${}^*\mathbb{N}[n_0, H] \subseteq A$.*

Απόδ. Είναι δυνατόν να παρατηρήσει κανείς ότι η αρχή της υποχείλισης είναι η αντίθετο-αντίστροφη (contrapositive) της αρχής της υπερχείλισης. Θα δώσουμε όμως και μια ανεξάρτητη απόδειξη, με την εις άτοπο απαγωγή. Εστω ότι για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}[n_0, \infty) \cap A = \emptyset$. Τότε $\mathbb{N}[n_0, \infty) \subseteq A^c$. Αλλά το A^c είναι εσωτερικό από την ΑΕΟ, έτσι από την αρχή της υπερχείλισης, υπάρχει $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, ${}^*\mathbb{N}[n_0, H] \subseteq A^c$. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί το A περιέχει όλους τους υπερακαίρεους ${}^*\mathbb{N}(\infty, H]$ για κάποιο $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$. ⊣

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το Ακολουθιακό Λήμμα του Robinson, το οποίο μας λέει ότι μια εσωτερική ακολουθία απειροστών προεκτείνεται σαν απειροστική ακολουθία και για άπειρα μεγάλους υπερφυσικούς δείκτες.

8.4.20 Θεώρημα. (Ακολουθιακό Λήμμα του Robinson). *Εστω $(a_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$ μια εσωτερική ακολουθία στο ${}^*\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $a_n \approx 0$ για κάθε $n \in {}^\sigma\mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένας άπειρα μεγάλος υπερφυσικός $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ έτσι ώστε,*

$$ a_n \approx 0 \quad \text{για κάθε} \quad n \leq H $$

Απόδ. Εστω το σύνολο,

$$A = \{n \in {}^*\mathbb{N} : (\forall k^*\mathbb{N})[k \leq n \to k \in \mathrm{dom}(a) \wedge |a| < \frac{1}{k}]\}$$

Το σύνολο A είναι εσωτερικό από την ΑΕΟ και περιέχει το σύνολο των φυσικών ${}^\sigma\mathbb{N}$ εξ ορισμού. Από την αρχή της υπερχείλισης, περιέχει έναν υπερφυσικό $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ με $|a_n| < \frac{1}{n} \approx 0$ για κάθε άπειρα μεγάλο υπερφυσικό $n \leq H$. ⊣∎

8.4.21 Θεώρημα. **(i)** *Κάθε αριθμήσιμη ακολουθία* $(a)_{n \in {}^\sigma\mathbb{N}}$ *θετικών απειροστών έχει ένα απειροστικό άνω φράγμα.*

(ii) *Κάθε αριθμήσιμη ακολουθία* $(b_n)_{n \in {}^\sigma\mathbb{N}}$, *θετικών άπειρων υπερπραγματικών έχει ένα άπειρα μεγάλο κάτω φράγμα.*

Απόδ.

(i) Από την Αριθμήσιμη Ευρύτητα (Θεώρημα 8.4.17), η ακολουθία $(a_n)_{n \in {}^\sigma\mathbb{N}}$ μπορεί να επεκταθεί σε μια εσωτερική ακολουθία $(a_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}$. Αλλά για κάθε $n \in {}^\sigma\mathbb{N}$ έχουμε ότι,

$$a_n \approx 0$$

επομένως από το Ακολουθιακό Λήμμα του Robinson (Θεώρημα 8.4.20), υπάρχει $H \in {}^*\mathbb{N} - {}^\sigma\mathbb{N}$ με $a_n \approx 0$ για κάθε $0 \leq n \leq H$. Αρα το σύνολο $a_0, a_1, \ldots, a_H\}$ είναι ένα υπερπεπερασμένο σύνολο και επομένως το $max_{1 \leq n \leq H} a_n$ υπάρχει πάντοτε. ⊣□

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) στην ακολουθία $(\frac{1}{b_n})_n \in {}^\sigma\mathbb{N}$. ⊣∎

8.4.22 Θεώρημα.

(i) **Απειροστική υπερχείλιση***(overflow). Αν ένα εσωτερικό υποσύνολο του* ${}^*\mathbb{R}$ *περιέχει κάθε θετικό απειροστό, τότε το* A *περιέχει επίσης και έναν θετικό συμβατικό πραγματικό. Δηλαδή :* $A \subseteq {}^*\mathbb{R}, A$ *εσωτερικό και* $m(0)^+ \subseteq A \Rightarrow (\exists \delta^\sigma\mathbb{R}^+[{}^*(0,\delta) \subseteq A]$.

(ii) **Απειροστική υπο - διαρροή***(underflow). Αν ένα εσωτερικό σύνολο* A *περιέχει κάθε συμβατικό θετικό πραγματικό αριθμό, τότε το* A *περιέχει επίσης κάποιο θετικό απειροστό. Δηλαδή: Αν* $(0, x] \subseteq A$ *για κάθε* $x \in {}^\sigma\mathbb{R}^+$ *τότε υπάρχει* $\varepsilon \in m(0)^+$ *με* $[\varepsilon, x] \subseteq {}^\sigma\mathbb{R}^+$.

Απόδ. Οι αποδείξεις και των δύο προτάσεων ανάγονται στις αντίστοιχες προτάσεις της υπο-διαρροής και της υπερχείλισης. Για παράδειγμα για την (i) εφαρμόζουμε την αρχή της υποχείλισης στο σύνολο,

$$A' = \{n \in {}^*\mathbb{N} | (\forall k \in {}^*\mathbb{N})[n \leq k \rightarrow a_n < \frac{1}{k}\}$$

το οποίο είναι εσωτερικό από την ΑΕΟ. ⊣▮

Μια διαφορετική απόδειξη χρησιμοποιεί την $*$ - πληρότητα (Πρόταση 8.4.8(ii)) και το Θεώρημα 8.4.21, και έχει ως εξής:

Αν ένα εσωτερικό σύνολο περιέχει κάθε θετικό απειροστό, αλλά δεν περιέχει ένα συμβατικό θετικό πραγματικό, τότε το A θα ήταν ένα εσωτερικό υποσύνολο του $^*\mathbb{R}$ φραγμένο εκ των άνω αλλά χωρίς ελάχιστο άνω φράγμα. ⊣▮

8.4.23 Παράδειγμα. Εστω f και g δύο εσωτερικές συναρτήσεις. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $t \in {}^*[0, 1]$, υπάρχει ένα απειροστό $\delta_t > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(t) - g(t)| < \delta t$$

Να ευρεθεί μια **ομοιόμορφη εκτίμηση** $\delta > 0$ με

$$|f(t) - g(t)| < \delta \text{για κάθε } t \in {}^*[0, 1]$$

Εστω

$$A = \{x \in {}^*\mathbb{R} | x > 0 \wedge (\forall t \in {}^*[0, 1])[|f(t) - g(t)| < x]\}$$

Το σύνολο A είναι εσωτερικό από την ΑΕΟ και περιέχει κάθε θετικό συμβατικό αριθμό. Ετσι από την αρχή της Απειροστικής υποχείλισης υπάρχει θετικό απειροστό $\delta > 0$ με $\delta \in A$, το οποίο είναι η ζητούμενη ομοιόμορφη εκτίμηση.

8.5 Η «αληθής μεταφυσική» των Μιγαδικών Αριθμών και του Χώρου

8.5.1 Οι Μιγαδικοί Αριθμοί

Στόχος μας στο τμήμα αυτό, δεν είναι μια πλήρης διαπραγμάτευση των μιγαδικών αριθμών, αλλά κυρίως να εισάγουμε ποια κατά τη γνώμη μας ήταν «η αληθής μεταφυσική» των μιγαδικών αριθμών και του χώρου που αναφέρει ο Gauss στο ακόλουθο απόσπασμα. Η ορθή άποψη για τους μιγαδικούς αριθμούς θα είναι αποτέλεσμα της σύγκρισης των μιγαδικών αριθμών και των μη-συμβατικών μεθόδων που έχουν ήδη αναπτυχθεί. Και το Τμήμα αυτό έχει ληφθεί από το [67], για την αυτονομία του βιβλίου αυτού. Εξ' άλλου τεχνικές αναπτύξεις των μιγαδικών αριθμών υπάρχουν σ' όλα τα σχετικά βιβλία.

Αν εξετάσει κανείς ιστορικά την εισαγωγή νέων εννοιών και ειδικά εννοιών αριθμών όπως π.χ. οι άρρητοι, οι αρνητικοί αριθμοί, και τέλος οι μιγαδικοί αριθμοί, θα παρατηρήσει ότι μετά την εισαγωγή τους ακολουθούν δύο φάσεις:

(i) Η μεταβατική φάση της αμφισβήτησης, και τέλος,

(ii) Η φάση της αυστηρής εισαγωγής και αποδοχής της έννοιας.

Ίσως η πρώτη αναφορά στην τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού να είναι η παράσταση $\sqrt{81-144}$, που εμφανίζεται στην Στερεομετρία του Ήρωνος του Αλεξανδρέως. Η επόμενη εμφάνιση είναι στην προσπάθεια του Διόφαντου να λύσει την εξίσωση $336x^2+24=172x$, στη λύση της οποίας εμφανίζεται η ποσότητα $\sqrt{1.849-2.016}$.

Η ουσιαστική φάση (i) στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών, η αρχίζει όμως με τον Ινδό Mahavira (850) και τον Girolamo Cardano(1501–1576) και φθάνει μέχρι τα τέλη του $18^{ου}$ αιώνα. Η (ii) φάση αρχίζει με τους Wallis (1616-1703), Wessel (1745-1818) και Argand (1768-1822) οι οποίοι συσχέτισαν τους μιγαδικούς αριθμούς με σημεία του επιπέδου $\mathbb{R}^2$, και τελειώνει με την αυστηρή εισαγωγή τους με γεωμετρικό τρόπο από τον Hamilton (1805-1865) και με αλγεβρικό τρόπο από τον Cauchy (1789-1857). Σημαντικό ρόλο στην καθιέρωση των μιγαδικών αριθμών έπαιξαν οι Euler, Gauss, και Riemann. Η αμφισβήτηση των μιγαδικών αριθμών φαίνεται καθαρά και από τα κατά καιρούς ονόματα που χρησιμοποιήθηκαν. Στην αρχή ο Gardano τους ονόμασε «quantitas sophistica», που θα μπορούσε να αποδοθεί ως «τυπικές ποσότητες», στη συνέχεια τους ονόμασαν «αδύνατες ποσότητες» (impossible quantities) και τέλος «μιγαδικούς αριθμούς». Η αμφισβήτηση των μιγαδικών αριθμών φαίνεται καθαρά και από ένα απόσπασμα γράμματος του Gauss στον Hansen το 1825 βλ. [102, σελ. 112]: «...Αυτές οι έρευνες διαπερνούν σε βάθος πολλά άλλα πεδία, θα μπορούσα ακόμα να πω και τη μεταφυσική του χώρου, απ' όπου μόνον με δυσκολία κρατώ τον εαυτό μου μακριά από σχετικά αποτελέσματα που προκύπτουν από κει, όπως για παράδειγμα, η αληθής μεταφυσική των αρνητικών και φανταστικών μεγεθών. Το αληθές νόημα του $\sqrt{-1}$ βρίσκεται πολύ ζωντανό μπροστά στο πνεύμα μου, αλλά θα είναι πολύ δύσκολο να το εκφράσω με λόγια, που δε θα μπορούσαν να δώσουν παρά μόνο μια αόριστη φευγαλέα εικόνα.» [1]

Ακόμη και το 1867 ο Hankel γράφει βλ. [70, Υποσημείωση σελ.62] «Δε νομίζω ότι υπερβάλλω με το να ονομάζω αυτό [δηλ. το $\sqrt{-1}$] ένα προσβλητικό λογοπαίγνιο, μαθηματικά που γίνονται άρρωστα, που ωστόσο είναι περήφανα και δικαίως, για την καθαρότητα και την πειστικότητα των εννοιών τους»

Κάθε νέα έννοια εισάγεται πάντοτε βασιζόμενη πάνω σε άλλες ήδη γνωστές και κατανοητές έννοιες. Ο ορισμός των μιγαδικών αριθμών ως διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών και η γεωμετρική ερμηνεία τους ως σημείου του επιπέδου, ανάγουν πράγματι του μιγαδικούς αριθμούς στους πραγματικούς, που υποθέτουμε ότι είναι πλήρως κατανοητοί.

Υπάρχει όμως ακόμη ένα εννοιολογικό πρόβλημα με τους μιγαδικούς αριθμούς. *Αυτό σχετίζεται με την «πληρότητα» των πραγματικών αριθμών και*

[1] «...Those investingations penetrate deeply into many others, I may even say into the metaphysics of the theory of space, and only with difficulty can I tear myself away from such results arising therefrom, as, for example, the true metaphysics of negative and imaginary quantities. The true meaning of $\sqrt{-1}$ stands very vividly before my soul, but it will be very difficult to put it into words, which can only give but a vague fleeting image.»

με το γεγονός ότι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι διδιάστατοι ενώ η εξίσωση $z^2 + 1 = 0$ της οποίας γυρεύουμε λύσεις, είναι μιας μεταβλητής, και θα έπρεπε κανονικά να αναφέρεται στην μονοδιάστατη ευθεία και όχι στο επίπεδο. Ο μόνος τρόπος που αυτό είναι δυνατόν να συμβαίνει είναι πραγματικά ο άξονας των μιγαδικών αριθμών να φανερώνει μικροσκοπικές λεπτομέρειες ενός άλλου φανταστικού «μικροσκοπικού επίπεδου».

Ας δούμε όμως τα πράγματα από την αρχή. Αρχίζοντας από τους φυσικούς αριθμούς $\mathbb{N}$ και με την απαίτηση οι εξισώσεις:

$$x + n = 0, \quad a \cdot x = 0, \quad x^2 - a = 0,\ a \geq 0$$

να έχουν λύση οδηγούμαστε διαδοχικά στις δομές αριθμών $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Ταυτόχρονα έχουμε και μια γεωμετρική αναπαράσταση αυτών των αριθμητικών συστημάτων όπου κάθε φορά τα σημεία το άξονα αναπαράστασης πυκνώνουν, έτσι ώστε το τελικό προϊόν οι πραγματικοί αριθμοί να είναι ένα πλήρες σώμα, ένα συνεχές. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν άλλες «μακροσκοπικές θέσεις» προς κατάληψη. Όπως όμως το $\mathbb{R}$ παρ' όλο που είναι πλήρες επιδέχεται μία επέκταση την $^*\mathbb{R}$ που περιέχει απειροστά και που δεν είναι πλήρης[2]. Εννοιολογικά το $^*\mathbb{R}$ το αντιλαμβανόμαστε με την προσάρτηση και άλλων επιπέδων πραγματικότητας. Εκτός δηλαδή του μακροσκοπικού έχουμε τώρα και ένα μικροσκοπικό καθώς επίσης και ένα μεγασκοπικό επίπεδο. Το συμπέρασμα από το Κεφ. 3 είναι: Όταν έχουμε το «πλήρες» σώμα $\mathbb{R}$ το οποίο δε διαθέτει άλλες «μακροσκοπικές θέσεις προς κατάληψη» από νέους αριθμούς, τότε εννοιολογικά, ο μόνος τρόπος να προσαρτήσουμε νέους αριθμούς στην ήδη πλήρη ευθεία είναι να θεωρήσουμε και άλλα επίπεδα πραγματικότητας, με τον ίδιο τρόπο που μια υλική εμπειρική ευθεία, π.χ. μια ευθεία στην υψηλής ανάλυσης οθόνη του υπολογιστή, που αποτελείται από αδιάκριτα μεταξύ τους μόρια (pixels), έχει μικροσκοπική δομή που αποτελείται από σωμάτια. Για άλλη μια φορά τα μαθηματικά αντικείμενα, που έχουν προκύψει από την αφαίρεση μακροσκοπικών υλικών αντικειμένων, κληρονομούν μέσα από τη διαλεκτική της αφαίρεσης, ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των «φυσικών» ή «υλικών» αντικειμένων.

Από το πιο πάνω απόσπασμα του Gauss, αλλά και από το γεγονός ότι οι όροι «φανταστικός», «μιγαδικός» αλλά και «πραγματικός» αριθμός ως αντίθεση του φανταστικού, εισήχθηκαν απ' αυτόν, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι, κατά πάσαν πιθανότητα ο Gauss είχε την αντίληψη ότι ο φανταστικός άξονας, φανερώνει μια θέαση της «εσωτερικής δομής» των πραγματικών αριθμών. Απλά αυτό το φανταστικό επίπεδο είναι ισόμορφο με ένα συνηθισμένο επίπεδο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τις συνηθισμένες πράξεις των μιγαδικών αριθμών. Την εποχή όμως του Gauss, δεν υπήρχαν μη-συμβατικά μαθηματικά, και οποιαδήποτε προσπάθεια περιγραφής διαφορετικών επιπέδων πραγματικότητας στα μαθηματικά, ήταν καταδικασμένη. Ίσως και σήμερα μια τέτοια προσπάθεια

[2] Η πληρότητα είναι μία ιδιότητα δεύτερης τάξης και γι' αυτό δε διατηρείται στις στοιχειωδώς ισοδύναμες επεκτάσεις

να έχει πολλές δυσκολίες αποδοχής, γι' αυτό στη συνέχεια θα σχολιάσουμε λεπτομερέστερα την έννοια του χώρου. Με την προϋπόθεση της αποδοχής διαφορετικών επιπέδων πραγματικότητας, αίρεται το παράδοξο κατά το οποίο ενώ επεκτείναμε το $\mathbb{R}$ ώστε η **μιας μεταβλητής εξίσωση** $z^2+1=0$ να έχει λύση, ξαφνικά και αναπάντεχα η λύση αυτή είναι δύο διαστάσεων $z=(x,y)$! Απλά η λύση αυτή είναι λύση ενός άλλου επιπέδου πραγματικότητας, του μιγαδικού, αλλά ωστόσο αναφέρεται στην μακροσκοπικά μονοδιάστατη ευθεία των πραγματικών αριθμών μαζί με τις κατάλληλες μικροσκοπικές λεπτομέρειές της! Επί πλέον αν εξετάσουμε τις ομοιότητες του μοντέλου $^*\mathbb{R}$, στο οποίο τα επίπεδα πραγματικότητας έχουν εισαχθεί με ένα τελείως φυσιολογικό και καθαρό τρόπο, και του αλγεβρικού μοντέλου των μιγαδικών αριθμών του Cauchy (βλ. συνέχεια), θα δούμε ότι:

$$\begin{array}{ccc} {}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}_M & \Leftrightarrow & \mathbb{C} := \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \\ \text{δακτύλιος } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \Leftrightarrow & \text{δακτύλιος } \mathbb{R}[x] \\ \text{υπερφίλτρο } \mathscr{F}_M & \Leftrightarrow & \text{μεγιστικό ιδεώδες } (x^2+1) \\ \text{Ο φανταστικός άξονας} & & \text{Ο φανταστικός άξονας} \\ \text{είναι δακτύκλιος} & \Leftrightarrow & \text{είναι σώμα} \end{array}$$

Όπου $\mathbb{R}[x]$ είναι ο δακτύλιος των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με συντελεστές από το $\mathbb{R}$, που εδώ μπορούν να ταυτιστούν με πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, το δε (x^2+1) συμβολίζει το ιδεώδες[3] που παράγεται από το πολυώνυμο x^2+1. Μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε το (x^2+1) σαν όλες τις πολυωνυμικές συνεπαγωγές της εξίσωσης $x^2+1=0$. Είναι ακόμα φανερό ότι αντί για το υπερφίλτρο $\mathscr{F}_M$ θα μπορούσαμε, για λόγους ομοιομορφίας, να θεωρήσουμε τη δυϊκή του έννοια που είναι αυτή του μεγιστικού ιδεώδους.

Η κατασκευή των μιγαδικών αριθμών με πολυωνυμικές επεκτάσεις του $\mathbb{R}$ έχει ως ακολούθως: Ένα πολυώνυμο μιας μεταβλητής με συντελεστές από το $\mathbb{R}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια ακολουθία πραγματικών αριθμών της μορφής $a:=(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,0,\ldots)$. Αν $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ είναι το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών με όλους τους όρους ίσους με μηδέν, εκτός πεπερασμένου αριθμού όρων. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις:

$$\begin{aligned} a+b &:= (a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n, \ldots) \\ a\cdot b &:= (c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots) \quad \text{με} \quad c_m := \sum_{i=0}^{m} a_i b_{n-i} \\ 1 &:= (1,0,0\ldots,) \quad (\text{μηδενικομελής πράξη}) \end{aligned}$$

είναι ένας δακτύλιος με μονάδα, ισόμορφος με των δακτύλιο των πολυωνύμων $\mathbb{R}[x]$, βλ. [7, σελ.351]. Αξίζει ακόμα να παρατηρήσει κανείς ότι το σύνολο $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ταυτίζεται με την κλάση ισοδυμαμίας $[0]_N$ (σελ. 65).

[3] Το ιδεώδες είναι η δυϊκή έννοια του φίλτρου που εισήχθηκε στο Τμήμα 6.2, εκφρασμένης στο περιβάλλον των δακτυλίων.

Από το Θεώρημα του Υπολοίπου, για κάθε πολυώνυμο $f \in \mathbb{R}[x]$ υπάρχουν πολυώνυμα $g, r \in \mathbb{R}[x]$ έτσι ώστε,

$$f(x) = g(x) \cdot (x^2 + 1) + r(x) \quad \text{με} \quad \deg(r) < 2$$

Τα υπόλοιπα πολυώνυμα $r(x)$ λοιπόν είναι της μορφής $r(x) = a + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}$. Αν, $r(x) = a + bx, \; s(x) = u + vx$ είναι δύο τέτοια πολυώνυμα τότε ορίζουμε τις πράξεις:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{άθροισμα} & r(x) + s(x) & := & (a+u) + (b+v)x \quad [\bmod(x^2+1)] \\
\text{γινόμενο} & r(x) \cdot s(x) & := & (au) + (av+bu)x + bvu^2 \quad [\bmod(x^2+1)] \\
 & & = & (au) + (av+bu)x + bv(x^2+1) - bv \quad [\bmod(x^2+1)] \\
 & & = & (au - bv) + (av+bu)x \quad [\bmod(x^2+1)]
\end{array}$$

Οι παραπάνω πράξεις είναι ακριβώς οι συνηθισμένες πράξεις των μιγαδικών αριθμών (βλ. Ορισμός 8.5.1) ειδικά δε,

$$x^2 = (x^2 + 1) - 1 = -1 \quad [\bmod(x^2 + 1)]$$

Στο δακτύλιο $\mathbb{R}[x]$, το πολυώνυμο $x^2 + 1$ είναι ανάγωγο και παράγει το κύριο πρώτο ιδεώδες

$$I \equiv (x^2 + 1) := \{f(x) \cdot (x^2 + 1) \mid f \in \mathbb{R}[x]\}$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε σώμα F ο δακτύλιος $F[x]$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών ή κύριος δακτύλιος, και έτσι κάθε πρώτο ιδεώδες στο $F[x]$ είναι μεγιστικό ιδεώδες, με αποτέλεσμα το $\mathbb{R}[x]/I$ να είναι σώμα, το σώμα των μιγαδικών αριθμών.

Από τα παραπάνω συμπεραίνει κανείς ότι *το σώμα των μιγαδικών αριθμών αποτελείται από τη «μακροσκοπική» ευθεία των πραγματικών αριθμών, μαζί με μικροσκοπικές (≡ φανταστικές) λεπτομέρειες που εισάγουν φανταστικά σημεία, τα οποία καθιστούν δυνατή τη λύση της εξίσωσης* $x^2 + 1 = 0$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια η φανταστική μονάδα i μπορεί να εκλαμβάνεται ως περιστροφή 90^o κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Συμπερασματικά λοιπόν, οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν ένα «μονοδιάστατο» σύστημα, που αποτελείται από την μακροσκοπική του εκδοχή, τους πραγματικούς αριθμούς, $\mathbb{R}$, και την μικροσκοπική του εκδοχή τους φανταστικούς αριθμούς που καθιστούν δυνατή την λύση της εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$.

Στη συνέχεια θα δώσουμε δύο ακόμα ορισμούς των μιγαδικών αριθμών και έτσι θα συμπληρωθεί η εννοιολογική ανάλυση που προηγήθηκε.

8.5.1 Ορισμός. Οι μιγαδικοί αριθμοί, που θα τους συμβολίζουμε με $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ορίζονται ως η δομή,

$$(\mathbb{C}, \cdot, +)$$

όπου,

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)+(x_2,y_2) &:= (x_1+x_2,y_1+y_2)\\ (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) &:= (x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+y_1x_2)\end{aligned}$$

Μπορεί επίσης να δει κανείς ότι οι μιγαδικοί είναι ένας διδιάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος.

Ο γεωμετρικός τρόπος παράστασης των μιγαδικών αριθμών των Argand-Gauss μπορεί να γενικευτεί αν ορίσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς ως 2×2 πραγματικούς πίνακες. Έστω,

$$\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \;:\; a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

Ορίζουμε την παρακάτω αντιστοιχία,

$$M:\mathbb{C}\longrightarrow \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}) \;/\!\!/\; c=a+ib\mapsto \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

Τότε έχουμε:

$$M(ac+a'c')=aM(c)+a'M(c'),\quad M(c\cdot c')=M(c)\odot M(c'),\quad a,a'\in\mathbb{R};\ c,c'\in\mathbb{C}$$

όπου $M(c)\odot M(c')$ είναι ο πολλαπλασιασμός πινάκων. Αν τώρα ορίσουμε το σύνολο,

$$\mathcal{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix} \;:\; a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων, τότε η $\mathbb{R}$-γραμμική συνάρτηση,

$$M:\mathbb{C}\longrightarrow \mathcal{C} \;/\!\!/\; c=a+ib\mapsto \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

είναι ένας ισομορφισμός σωμάτων, με $M(i)=I:=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ και $I^2 = -E = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = M(1)$. Η εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών με 2×2 πίνακες υπερτερεί του ορισμού με διατεταγμένα ζεύγη, αφού και ο πολλαπλασιασμός, ως πολλαπλασιασμός πινάκων, δε φαίνεται αυθαίρετος, αλλά και λόγω της προηγούμενης δουλειάς μας εδώ, είναι δυνατόν για παράδειγμα να δούμε ότι η φανταστική μονάδα μπορεί να ταυστιστεί, λόγω του ισομορφισμού, με το πίνακα $\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ που είναι μια στροφή κατά μια ορθή γωνία προς την αντίθετη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Βεβαίως η σημασία του

$i^2 = -1$ σημαίνει ότι αν κάνουμε μια επί πλέον στροφή κατά μία ορθή γωνία θα βρεθούμε ακριβώς στο -1. Γενικά έχουμε:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cong a + ib$$

όπου $\mathcal{R} := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a, \in \mathbb{R} \right\}$ είναι ένα σύνολο ισόμορφο με τους πραγματικούς αριθμούς. Βλέπουμε λοιπόν ότι, *παρ' όλο που οι πραγματικοί αριθμοί θεωρούνται σταθεροί, οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν ως μεταβαλλόμενοι, δηλ. ως μετασχηματισμοί του επιπέδου.* Η φύση των μιγαδικών αριθμών ως μετασχηματισμών του επιπέδου, φαίνεται καλλίτερα αν παραστήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με πολικές συντεταγμένες: $z := |z|(\cos\theta + i\,\sin\theta)$.

Στην περίπτωση αυτή, αν

$$z_1 := |z_1|(\cos\vartheta_1 + i\,\sin\vartheta_1), \quad z_2 := |z_2|(\cos\vartheta_2 + i\,\sin\vartheta_2)$$

είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε το γινόμενό τους είναι ο

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos[\vartheta_1 + \vartheta_2] + i\,\sin[\vartheta_1 + \vartheta_2]\right),$$

δηλαδή ο z_1 στράφηκε κατά γωνία ϑ_2 το δε μέτρο του πολλαπλασιάστηκε με το μέτρο το z_2.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε μια τρίτη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών, ως σημείων (σταθερών) της μοναδιαίας σφαίρας, μέσω της στερεογραφικής απεικόνισης βλ. [90, σελ. 121].

Σχετικά με την αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών με 2×2 πίνακες έχουμε το ακόλουθο θεώρημα, για την απόδειξη του οποίου βλ. το [70].

8.5.2 Θεώρημα. **(i)** *Για κάθε αντιστρεπτό 2×2 πραγματικό πίνακα W η αντιστοιχία,*

$$g_w : \mathbb{C} \longrightarrow Mat(2, \mathbb{R}) \;/\!\!/\; a + bi \mapsto W \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} W^{-1}$$

είναι ένας μονομορφισμός πραγματικών αλγεβρών.

(ii) *Κάθε $\mathbb{R}$-γραμμικός ομομορφισμός $g : \mathbb{C} \longrightarrow Mat(2, \mathbb{R})$ $g \neq 0$ είναι της μορφής g_w.*

8.5.2 Ο Χώρος.

Θα τελειώσουμε το καφάλαιο αυτό με κάποια σχόλια για την έννοια του χώρου στα μαθηματικά. Για τις έννοιες του χώρου, βλ. και τις απόψεις του Poincaré, στα [146, 147].

Θα επαναλάβουμε εδώ κάποιες απόψεις που εκφράστηκαν και στο [Κεφ. 4][67]. Είναι γνωστό ότι η κλασική περιγραφή του φυσικού κόσμου έχει στηριχτεί σε μια πίστη ότι ο χρόνος και ο χώρος είναι απόλυτες έννοιες. Δηλαδή ότι υπάρχει ένα ρολόι για όλο το σύμπαν, που χτυπάει την ίδια ώρα για όλους τους παρατηρητές και ότι υπάρχει μια μοναδική μονάδα μήκους που μετράει όλες τις αποστάσεις του σύμπαντος. βλ. π.χ. [113, Κεφ. VII: Απόλυτος χώρος, απόλυτος χρόνος και οι σχέσεις τους με το Θεό, σελ.: 145-175] . Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος απόλυτος χώρος, που είναι το ίδιο με το να υποθέσουμε ότι ο χώρος συγκροτείται σε επίπεδα πραγματικότητας, τότε μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι και τα μαθηματικά αντικείμενα συγκροτούνται σε διάφορα επίπεδα πραγματικότητας, τα δε κλασσικά αντικείμενα έχουν παραχθεί από ένα είδος ειδετικής αναγωγής του φυσικού μακροκόσμου. Είναι τότε επίσης έγκυρο να υποθέσουμε ότι, τα μαθηματικά αντικείμενα κληρονομούν ιδιότητες παρόμοιες με τις ιδιότητες των υλικών μακροσωμάτων και έτσι δεν είναι δυνατόν να υπάρχει ένα απόλυτο μήκος που είναι κατάλληλη μονάδα μέτρησης για όλες τις στρωματωποιημένες πραγματικότητες και για όλα τα αντίστοιχα μήκη. Με τα ζητήματα των επιπέδων πραγματικότητας αλλά και με το βαθμό καθαρότητας των μαθηματικών αντικειμένων φαίνεται επίσης να σχετίζεται και το Αξίωμα της Επιλογής (AC). Όταν το Αξίωμα της Επιλογής (AC) έχει τιμή 1, τότε είναι σαν να είμαστε σε ένα εναργές και διαυγές μακροσκοπικό επίπεδο, ενώ όσο η τιμή αληθείας πλησιάζει το 0 τόσο το περιβάλλον ανακατεύει διάφορα επίπεδα πραγματικότητας, και τα πράγματα γίνονται περισσότερο αόριστα και ασαφή.

Τα μαθηματικά του εικοστού αιώνα χαρακτηρίζονται από μια φορμαλιστική διάθεση, που εκφράζεται με ακραία μορφή από τους Bourbaki. Αυτό στην ουσία σημαίνει ότι τα μαθηματικά έχουν σχεδόν απο-εννοιοποιηθεί, υπάρχει δε μεγάλη ευκολία σε γενικεύσεις των οποίων δεν κατανοούμε τη βαθύτερη σημασία τους.

Όλη αυτή η τάση συνοδεύεται από μια ακραία και σε μεγάλη κλίμακα αλγεβροποίηση των μαθηματικών. Η ελευθερία που κέρδισαν οι μαθηματικοί μέσω της άλγεβρας, πληρώθηκε με το χάσιμο της διαίσθησης και την απομάκρυνση των μαθηματικών από τις πραγματικές γεωμετρικές τους ρίζες. Χρειάζεται λοιπόν προσοχή στη χρήση αλγεβρικών μεθόδων, κυρίως από την άποψη της κατανόησης των εννοιών, έτσι ώστε να μην έχουμε την ακόλουθη παραλλαγή της γνωστής λαϊκής ρήσης: «Της Άλγεβρας τα καμώματα, τα βλέπει η Γεωμετρία και απορεί!». Οι εξελίξεις είναι τόσο πολλές και βαθιές, που τα Μαθηματικά αρχίζουν να φαίνονται ως ένας επί πλέον ακατανόητος «Πύργος της Βαβέλ». Αυτό είναι περισσότερο φανερό στους προχωρημένους κλάδους των μαθηματικών, όπως η Αλγεβρική Τοπολογία και η Αλγεβρική Γεωμετρία που υπάρχει η τάση να ταυτίζεται με την Αντιμεταθετική Άλγεβρα.

Ένα άλλο φαινόμενο είναι τα γνωστά αριθμητικά συστήματα. Αρχίζοντας από το μονοειδές των Φυσικών Αριθμών, το δακτύλιο των Ακεραίων, και τα σώματα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, οι μαθηματικοί προχώρησαν σε «αφηρημένες εκδοχές» αυτών των συστημάτων, οι αναπαραστάσεις ή τα διάφορα μοντέλα των οποίων, απαρτίζονταν από χώρους συναρτήσεων. Σύμφωνα με τη γενική τάση μας, να θεωρούμε τις συναρτήσεις ως τη μαθηματική έκραση «μεταβαλλόμενων σημείων-σωματίων», μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι στην ουσία η Άλγεβρα ασχολείται μα τα συστήματα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, και με τις «Πρωτεϊκές» τους μεταμορφώσεις-γενικεύσεις, που δεν είναι τίποτε άλλο παρά «διαφορετικές μικροσκοπικές θεάσεις» και κατασκευές διαφορετικών μοντέλων των «μακροσκοπικών» αυτών δομών, σε διάφορα περιβάλλοντα. Η δουλειά του Takeuti στα μοντέλα του Boole είναι αψευδής μάρτυς του ισχυρισμού αυτού, βλ.[165]. Συμπερασματικά οι διάφορες «μικροσκοπικές» εκδοχές των ακέραιων δίδουν τη γενική Θεωρία των Δακτυλίων, κ.λπ. Μπορούμε λοιπόν ως συμπέρασμα να έχουμε το ακόλουθο σύνθημα:

Οι έννοιες μπορούν να έχουν μια σταθερή σημασία (sense), αλλά μεταβαλλόμενη αναφορά (reference).

Για παράδειγμα οι «πραγματικοί αριθμοί» μπορούν να έχουν μια σταθερή σημασία (π.χ. ως τομές Dedekind) αλλά πολλές και μεταβαλλόμενες αναφορές. Έτσι οι πραγματικοί στα μοντέλα των απειροστών, ή στα μοντέλα του Boole, αναφέρονται σε διαφορετικά περιβάλλοντα, όπου στο ένα μοντέλο είναι απειροστά στο άλλο τυχαίες μεταβλητές ή και αυτοσυσυγείς τελεστές. Μια πραγματική συνεχής συνάρτηση επί ενός τοπολογικού χώρου, X μπορεί να θεωρηθεί ως «συνεχώς μεταβαλλόμενος» πραγματικός αριθμός, ο οποίος στη συνέχεια μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερός πραγματικός αριθμός επί των δραγμάτων (sheaves) $\mathrm{sh}(X)$. Συνεχίζοντας αυτόν τον τρόπο σκέψης θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι όλες *οι αφηρημένες εκδοχές της έννοιας του «χώρου» είναι ακριβώς οι διαφορετικές μικροσκοπικές θεάσεις του τρισδιάστατου χώρου, λαμβάνοντας υπ' όψιν την μεταβολλή του χρόνου.*

Ένα παράδειγμα που ενισχύει την άποψη αυτή και που δείχνει ότι, οι μη-συμβατικές νέες έννοιες στην ουσία ριζοσπαστικοποιούν και αυτές τις ίδιες τις συμβατικές έννοιες των μαθηματικώνείναι και το ακόλουθο:

Ας πάρουμε για παράδειγμα την συμβατική (μακροσκοπική) πραγματική ευθεία. Όλοι συμφωνούν ότι η διάσταση της πραγματικής ευθείας είναι 1. Ας πάρουμε τώρα και τη μη-συμβατική εκδοχή της ${}^*\mathbb{R}$ που κατασκευάσαμε στο Τμήμα 6.2. Θα ανέμενε κανείς η διάσταση της ${}^*\mathbb{R}$ να είναι επίσης μιάς διαστάσεως, αφού η ${}^*\mathbb{R}$ αποτελείται στην ουσία από την «μακροσκοπική» συμβατική ευθεία μαζύ με κάποιες «μικροσκοπικές-μεγασκοπικές» λεπτομέρειες. Ωστόσο αν θεωρήσουμε το ${}^*\mathbb{R}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{R}$ τότε ο ${}^*\mathbb{R}$ είναι ως διανυσματικός χώρος απειροδιάστατος. Αυτό φαίνεται αν λάβει κανείς υπ' όψιν του ότι κάθε πολυώνυμο έχει πεπερασμένες ρίζες και ότι κάθε $r \in {}^*\mathbb{R} - \mathbb{R}$ δεν είναι ρίζα κανενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές. Έτσι το σύνολο $\{r^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ των πεπερασμένων δυνάμεων του r αποτελεί μια βάση για τον ${}^*\mathbb{R}$ και έτσι είναι απειροδιάστατος. Δυστυχώς οι σύγχρονες έννοιες της διάστασης ενός μαθηματικού αντικειμένου δεν λαμβάνουν υπ' όψιν τους την αρχή ότι τα μαθηματικά αντικείμενα συγκροτούνται σε επίπεδα πραγματικότητας.

Για να γίνουν καλύτερα κατανοητές οι παραπάνω θέσεις, είναι αναγκαίο να διευκρινιστούν περαιτέρω οι:

- Οι έννοιες μακροσκοπικό-μικροσκοπικό και γενικά η έννοια του επιπέδου πραγματικότητας.
- Η έννοια, απόλυτος-τοπικός παρατηρητής
- Η έννοια του «σημείου» και του σχετικού συνθήματος ότι, «τα σημεία έχουν δομή».
- Οι έννοιες των απόλυτων-Καντοριανών και των τοπικών - Μη Καντοριανών μαθηματικών.

Τα πιο πάνω θα ξεκαθαριστούν με ένα χαρακτηριστικό και ζωντανό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε την «οθόνη της φαντασίας» ενός γενερικού απόλυτου παρατηρητή. Στην οθόνη αυτή «εξεικονίζονται» όλες οι απόλυτες ειδετικές αναγωγές του μακρόκοσμου που μας περιβάλλει, για κάποια εκατομμύρια χρόνια. Τα μαθηματικά που στηρίζονται σ' αυτήν την Πλατωνική-Καντοριανή πραγματικότητα είναι τα «απόλυτα μαθηματικά». Ακόμα και η έννοια της συνάρτησης εδώ εκφράζεται ως ένα οστεοποιημένο σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

Ας υποθέσουμε ακόμη ότι διαθέτουμε μια υψηλής ανάλυσης οθόνη υπολογιστή και ένα πρόγραμμα υπολογιστικής άλγεβρας, όπως τα Maple, Mathematika, κ.λπ.

Μέσω του προγράμματος υπολογιστικής άλγεβρας εξεικονίζουμε στο υπολογιστή μας διάφορες μαθηματικές έννοιες, όπως π.χ. την έννοια της συνεχούς συναρτήσεως. Πρέπει από την αρχή να σημειώσουμε ότι: Τα μαθηματικά της «οθόνης της φαντασίας μας» είναι απόλυτα Καντοριανά ενώ τα μαθηματικά της οθόνης του υπολογιστή, που σχετίζονται με της δυνατότητες διάκρισης του τοπικού παρατηρητή, είναι τοπικά μη-Καντοριανά. Με αυτό εννοούμε ότι το σύστημα «οθόνη του υπολογιστή-τοπικός παρατηρητής», χαρακτηρίζεται από τα ακόλουθα:

- Ο τοπικός παρατηρητής χαρακτηρίζεται από περιορισμούς στην όραση και στην διάκριση των φωτοστοιχείων (pixels).
- Το συνεχές πραγματώνεται ως φαινόμενο που εδράζεται στην αδυναμία διάκρισης διαδοχικών φωτοστοιχείων, το δε άπειρο εκλαμβάνεται ως «ακατανόητο», ως «πεπερασμένο»+«ασάφεια».

Στη συνέχεια θα χαρακτηρίζουμε τις καταστάσεις πάντοτε από δύο απόψεις: Την Καντοριανή, που είναι η απόλυτη άποψη του πνεύματος, και τη μη-Καντοριανή που είναι η άποψη του «πως *φαίνονται* τα πράγματα από τον τοπικό μη-Καντοριανό παρατηρητή». Η μη-Καντοριανή άποψη στηρίζεται φιλοσοφικά στην Φαινομενολογία του Husserl, και έχει πολύ καλά εκφραστεί στα [172, 173].

Τα φωτοστοιχεία είναι, από την Καντοριανή άποψη, «πεπερασμένα». Από τη μη-Καντοριανή άποψη, «απεριόριστα» (για να το διακρίνουμε από το Καντοριανό «άπειρα») είναι ένα σύνολο Καντοριανά πεπερασμένο, που δεν μπορούμε όμως να διακρίνουμε ένα φωτοστοιχείο από τα αμέσως γειτονικά του. Έτσι αν στην οθόνη του υπολογιστή μου μια συνάρτηση «φαίνεται ως συνεχής» εκλαμβάνεται τελικά ως συνεχής συνάρτηση. Το «συνεχές της οθόνης» είναι πράγματι συνεχές, αφού έτσι εκλαμβάνεται (φαίνεται) από το τοπικό παρατηρητή. Η έννοια της συνεχείας δεν είναι μια απόλυτη έννοια αλλά ένα «φαινόμενο». Δεν υπάρχουν απολύτως συνεχή αντικείμενα, αλλά αντικείμενα που «φαίνονται ως συνεχή». Η συνέχεια δηλαδή εκφράζεται ως:

Αν η σχέση, το x είναι αδιάκριτο από το x_0, συνεπάγεται ότι και για τις εικόνες έχω, ότι το $f(x)$ είναι αδιάκριτο από το $f(x_0)$, τότε λέγω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής, για κάποιον τοπικό παρατηρητή με τα κατάλληλα χαρακτηριστικά και δυνατότητες διάκρισης.

Κάθε αντικείμενο της οθόνης του υπολογιστή ή της φαντασίας, θα το ονομάζουμε «μακροσκοπικό» αφού απαρτίζεται από φωτοστοιχεία ή γενικότερα σημεία. Όπως τα υλικά μόρια έτσι και τα φωτοστοιχεία-σημεία έχουν μια μικροσκοπική δομή που απαρτίζεται από διάφορα μεταβαλλόμενα «σωμάτια», που εδώ εκφράζονται ως συναρτήσεις διαφόρων ειδών. Αν για παράδειγμα στην οθόνη του υπολογιστή μου υπάρχει η εξεικόνιση του ανοικτού διαστήματος $(0, 1)$ μπορώ εύκολα να φανταστώ ότι υπάρχει «πρώτο φωτοστοιχείο» που ανήκει στο $(0, 1)$ αλλά δεν υπάρχει «πρώτο σωμάτιο» που να ανήκει στο $(0, 1)$. Επομένως η «Αρχή τ ης Καλής Διάταξης» ισχύει αν περιοριστούμε στο «μακροσκοπικό συνεχές» που απαρτίζεται από πεπρασμένο αριθμό φωτοστοιχείων συν μη-διακριτικότητα. Μπορεί κανείς λοιπόν να ισχυριστεί ότι το Αξίωμα της Επιλογής, μας περιορίζει ουσιαστικά στα «μακροσκοπικά χαρακτηριστικά» του συνεχούς. Το ότι φανταζόμαστε ότι το $(0, 1)$ μπορεί να διχοτομείται επ' άπειρων, σημαίνει: Καντοριανά μεν ότι μπορούμε να φανταζόμαστε τη διαδικασία να φθάνει μέχρι τα μεταβαλλόμενα σωμάτια, ενώ μη-Καντοριανά μέχρι και εκεί που δεν μπορούμε να διακρίνουμε!

Έχουν ήδη αναπτυχθεί θεωρίες που υποστηρίζουν την πιο πάνω άποψη. Τέτοιες θεωρίες είναι, η μη-Καντοριανή Θεωρία Συνόλων, που ταυτίζεται με μια ανάμιξη της Εσωτερικής Θεωρίας Συνόλων του E. Nelson, βλ. το [140] και της Εναλλακτικής Θεωρίας Συνόλων του Vopěnka P. βλ. το [172, 173]. Άκόμα και η Καντοριανή θεωρία του Robinson, που μια στοιχειώδης εισαγωγή εκτίθεται εδώ, δείχνει καθαρά ότι, σε τελευταία ανάλυση και τα Καντοριανά σημεία έχουν τη δομή του δακτυλίου. Τέλος άλλες θεωρίες που στηρίζουν την άποψη ότι «τα σημεία έχουν δομή» είναι και η θεωρία των frames και locales καθώς επίσης και η Θεωρία Κατηγοριών, τόπων και μονοειδώς κλειστών κατηγοριών. Η εργασία των Baez και Dolan, Categorification, `http://math.ucr.edu/home/baez/cat.ps`, μπορεί να θεωρηθεί ως μια βασική εξέλιξη προς την κατεύθυνση του συνθήματος «τα σημεία έχουν δομή». Όλα τα πιό πάνω σχόλια θέτουν τις εννοιολογικές βάσεις για μια «Γενική Θεωρία του Σημείου», που περίπου είναι το ίδιο πράγμα με μια «Γενική

Θεωρία Μοντέλων».

Βιβλιοφραφικά Σχόλια.

- Γιά Μοντέλα και υπεργινόμενα δείτε τα: [27, 95, 156, 42]. Τα [42, 97, 98, 136, 148] είναι μεταπτυχιακού επιπέδου.
- Για Μαθηματική Λογική δείτε τα: [69, 46, 20].
- Για τη Θεωρία Μοντέλων γενικά, τα: [35, 56, 136, 156, 98, 42, 97, 148].
- Για την Απειροστική Ανάλυση: [107, 125, 94, 48, 126, 92, 109, 3, 88, 118] κλ.π.
- Για τα Θεμέλια των Μαθηματικών: [23, 39, 116, 92, 109, 173].

9

ΥΠΕΡΔΥΝΜΕΙΣ ΤΟΥ BOOLE

10

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

10.1 Ορισμός της Κατηγορίας

Η Θεωρία Κατηγοριών και Θεωρία Τόπων (ένα είδος γενικευμένης συνολοθεωρίας), είναι βασικές στην διαδικασία συνόψισης των βασικών «εννοιακών-δομικών» χαρακτηριστικών των μαθηματικών. Στην κλασική συνολοθεωρία έχουμε μια στατική έννοια της συνάρτησης (ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών), η οποία ως αντικείμενο βρίσκεται υψηλότερα στη σωρευτική ιεραρχία συνόλων, από ότι τα σύνολα του πεδίου και συν-πεδίου ορισμού. Αντίθετα στις κατηγορίες η έννοια της συνάρτησης έχει μια ισότιμη και ανεξάρτητη από τα αντικείμενα αξιωματικοποίηση, δεν ανάγεται δηλαδή η συνάρτηση στα αντικείμενα. Με τον τρόπο αυτό η κατηγορίες προσφέρονται για μια γνήσια έκφραση διαφόρων μεταβαλλόμενων αντικειμένων.

Παρ'όλο που η Συνολοθεωρία παίζει σοβαρό ρόλο στα Θεμέλια των Μαθηματικών, είναι ανάγκη να διατυπώσουμε με καθαρό και άμεσο τρόπο τις υπάρχουσες διαφορές με τη Θεωρία Κατηγοριών.

- Στη Συνολοθεωρία τα πάντα ανάγονται στην έννοια του συνόλου και της σχέσης του 'ανήκειν' $\in$. Έτσι η συνάρτηση, δυναμική έννοια στη βάση της, ανάγεται σε ένα «στατικό» σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Ο βασικός τρόπος 'σταθεροποίησης' κάθε μαθηματικού αντικειμένου είναι η ύπαρξη της σωρευτικής ιεραρχίας των συνόλων. Η κατάλληλη χρήση της έννοιας της τάξης (rank), μπορεί να εκφράσει με στατικό τρόπο κάθε μαθηματικό αντικείμενο, αρκεί να θεωρήσουμε επαρκώς μεγάλη τάξη. Ο τρόπος αυτός δίνει στο σύμπαν των συνόλων μια στατική και απόλυτη χροιά.

- Στη συνολοθεωρία δύο σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια στοιχεία. (Αξίωμα της Έκτασης). Αντίθετα τα αντικείμενα σε μια κατηγορία καθορίζονται συνήθως μέχρις ισομορφισμού, μέσα από καθολικές ιδιότητες και κατασκευές. Το αντικείμενο, με κάποια έννοια, δεν καθορίζεται με το τι 'περιέχει', αλλά με διαλεκτικό-ολιστικό τρόπο, με τις αλληλεπίδράσεις του δηλαδή με τα άλλα αντικείμενα.

- Τα αντικείμενα των κατηγοριών είναι συνήθως δομές, το δε γράφημα της κατηγορίας, καθορίζει ένα μη-καλώς θεμελιωμένο σύνολο.

Μια κάπως διαφορετική στη σύλληψη, σύγκριση μεταξύ των αναλογιών μεταξύ Συνολοθεωρίας και Θεωρίας Κατηγοριών, προέρχεται από την πρόσφατη και με λαμπρό μέλλον ιδεά της 'κατηγοριοποίησης' (categorification) βλ. [9, 10] απ' όπου και ο πιο κάτω πίνακας:

ΣΥΝΟΛΑ	**ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ**
• στοιχεία	• αντικείμενα
• εξισώσεις μεταξύ στοιχείων	• ισομορφισμοί μεταξύ αντικειμένων
• σύνολα	• κατηγορίες
• συναρτήσεις	• συναρτητές
• εξισώσεις μεταξύ συναρτήσεων	• φυσικοί ισομορφισμοί μεταξύ συναρτητών

Ένα παράδειγμα κατηγοριοποίησης είναι η κατηγοριοποίηση της έννοιας της ομάδας, η οποία δίνει αυτό που ονομάζεται **'ομαδική κατηγορία'** (groupal category). Μια ομάδα είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με συναρτήσεις $m : G \times G \longrightarrow G, e : 1 \longrightarrow G, \text{και} \mathrm{inv} : G \longrightarrow G$ έτσι ώστε να έχουμε τις γνωστές ιδιότητες. Κατηγοριοποιώντας την έννοια αυτή παίρνουμε: Μια 'ομαδική κατηγορία' είναι μια κατηγορία $\mathscr{C}_G$ εφοδιασμένη με συναρτητές, $m : \mathscr{C}_G \times \mathscr{C}_G \longrightarrow \mathscr{C}_G, \quad e : 1 \longrightarrow \mathscr{C}_G$ και $\mathrm{inv} : \mathscr{C}_G \longrightarrow \mathscr{C}_G$ που ικανοποιούν τις κατάλληλες ιδιότητες. (Ποιές κατά τη γνώμη σας;) Όμοια η **'μονοειδής κατηγορία'** $\langle \mathscr{C}_M, \otimes, e \rangle$ είναι η κατηγοριοποίηση του μονοειδούς $\langle M, \otimes, e \rangle$. Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά ότι από τις 'σταθερές' δομές μεταβαίνουμε μέσω των κατηγοριών σε 'μεταβαλλόμενες δομές'! Έτσι έχουμε το ακόλουθο,

Μεταβολή vs. σταθερότητα. *«το κεντρικό χαρακτηριστικό της Θεωρίας Κατηγοριών είναι η 'μεταβολή' και η 'αλληλεπίδραση'»*

Μεταβολή εμφανίζεται στα 'μεταβαλλόμενα στοιχεία', και στις 'γενικευμένες ιδιότητες', και τελικά, στις 'μεταβαλλόμενες δομές', 'μεταβαλλόμενες γεωμετρικές μορφές', στα 'συνεχώς μεταβαλλόμενα σύνολα' κ.λπ. Μιά κατηγορία μπορεί να θεωρηθεί ως η παρουσίαση μιας 'μορφής' ή 'έννοιας' που τελικά εκφράζονται μέσω μιας δομής. Τα αντικείμενα της κατηγορίας στην ουσία αποτελούν τα στιγμιότυπα της σχετικής 'μορφής' οι δε μορφισμοί είναι ακριβώς οι μετασχηματισμοί εκείνοι που μετασχηματίζουν την μορφή στα διάφορα στιγμιότυπά της, διατηρώντας ταυτόχρονα τα χαρακτηριστικά της μορφής αυτής. Με τον τρόπο αυτό η κατηγορία είναι όλες οι μεταμορφώσεις της δοσμένης μορφής που όμως διατηρούν τα γνωρίσματά της, και εκφράζει έτσι την μεταβολή που μπορεί να υποστεί μια δοσμένη μορφή.

Τα βασικά συστατικά μιας κατηγορίας είναι οι έννοιες:

- 'αντικείμενο',
- 'βέλος' ή 'μορφισμός',
- Οι συναρτήσεις $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$, που σε κάθε βέλος f απονέμουν το πεδίο $(\mathrm{dom}(f))$ και το συν-πεδίο ορισμού $(\mathrm{cod}(f))$,
- Η συνάρτηση όπου σε κάθε αντικείμενο A αντιστοιχεί ένα μοναδικό ταυτοτικό βέλος $1_A \equiv \mathrm{id}_A$ και
- η μερική διμελής πράξη όπου σε κάθε συνθέσιμο ζεύγος βελών (f, g) αντιστοιχεί τη σύνθεσή τους $g \circ f$.

Αν θέλουμε η κατηγορίες να αποτελέσουν ένα καλό θεμέλιο για τα μαθηματικά θα πρέπει να μπορούμε να εκφράσουμε με τις παραπάνω αρχικές έννοιες, όλα όσα εκφράζουμε στην συνολοθεωρία με την σχέση του ανήκειν $(\in)$. Αυτό στην πραγματικότητα γίνεται, και μάλιστα με τη νέα 'γλώσσα' μπορούμε να εκφράζουμε και πράγματα που δεν ήταν δυνατόν να εκφρασθούν στην συνολοθεωρία. Τέτοια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι, η σύγχρονη Αλγεβρική Γεωμετρία και η Ομολογιακή Άλγεβρα.

Η έννοια της κατηγορίας προκύπτει σαν μια υποπερίπτωση της έννοιας του κατευθυνόμενου γραφήματος και ιδιαίτερα του 'παραγωγικού συστήματος συμπερασμού' (deductive system) βλ. [117, σελ. 5].

10.1.1 Ορισμός. Μια **κατηγορία** είναι ένα σύστημα,

$$\mathscr{C} \equiv \langle \mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathrm{dom}(\cdot), \mathrm{cod}(\cdot), \circ, 1_{(\cdot)} \rangle$$

όπου $\langle \mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathrm{dom}(\cdot), \mathrm{cod}(\cdot) \rangle$ είναι το υποκείμενο προσανατολισμένο γράφημα, συμβ. $U(\mathscr{C})$, τα δε στοιχεία του γραφήματος ερμηνεύονται ως ακολούθως:

(i) $\mathscr{C}_0$ είναι μια κλάση, τα στοιχεία της οποίας αποτελούν τους 'κόμβους' του γραφήματος που εδώ θα τους ονομάζουμε απλά, **αντικείμενα της κατηγορίας $\mathscr{C}$.**

(ii) $\mathscr{C}_1$ είναι μια κλάση[1], τα στοιχεία της οποίας αποτελούν τα βέλη ή τις ακμές του γραφήματος, που εδώ θα τα ονομάζουμε **βέλη ή μορφισμούς της κατηγορίας.**

(iii) $\mathrm{dom}(\cdot) : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0 \;/\!\!/\; f \mapsto \mathrm{dom}(f)$ πεδίο ορισμού και

(iv) $\mathrm{cod}(\cdot) : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0 \;/\!\!/\; f \mapsto \mathrm{cod}(f)$ συν-πεδίο ορισμού.

Επί πλέον αν ορίσουμε την κλάση των συνθέσιμων βελών ή της τροχιές του γραφήματος $\mathscr{C}$ μήκους 2 ως,

$$\mathscr{C}_2 := \{(f,g) \in \mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_1 \,|\, \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)\}$$

έχουμε τις ακόλουθες δύο συναρτήσεις:

$$\begin{array}{rccccl} \circ : \mathscr{C}_2 & \longrightarrow & \mathscr{C}_1 & (\text{μερική διμελ. πράξη}) \quad \text{και} & 1_{(\cdot)} : \mathscr{C}_0 & \longrightarrow \ \mathscr{C}_1 \\ (f,g) & \mapsto & g \circ f & & A & \mapsto \ 1_A \end{array}$$

που ικανοποιούν τα ακόλουθα γενικευμένα αξιώματα του μονοειδούς[2]:

[2] Το μονοειδές είναι απλά μια κατηγορία με ένα αντικείμενο. Έτσι μια κατηγορία είναι ένα είδος οικογένειας ή κλάσης μονοειδών. Σχετικό είναι και ακόλουθο απόσπασμα απο το [23] το οποίο αποτελεί μια εξαιρετική εισαγωγή και σχολιασμό για τη θεμελιακή αξία της Θεωρίας των Κατηγοριών: «Μπορεί κανείς να ισχυρισθεί ότι η σχέση της Θεωρίας των Κατηγοριών με την Αφηρημένη Άλγεβρα είναι ίδια με τη σχέση της τελευταίας με τη Στοιχειώδη Άλγεβρα. Γιατί η Στοιχειώδης Άλγεβρα είναι αποτέλεσμα της αντικατάστασης σταθερών ποσοτήτων (δηλαδή των αριθμών) από μεταβλητές, διατηρώντας τις πράξεις σ' αυτές τις ποσότητες σταθερές. Η Αφηρημένη Άλγεβρα, με τη σειρά της, τα μεταφέρει αυτά ένα βήμα πιο πέρα, επιτρέποντας στις πράξεις να μεταβάλλονται, ενώ ταυτόχρονα διασφαλίζεται ότι οι προκύπτουσες μαθηματικές δομές διατηρούν μία προκαθορισμένη μορφή (ομάδες, δακτύλιοι ή οτιδήποτε έχετε). Τελικώς, η Θεωρία Κατηγοριών επιτρέπει ακόμη και τη μορφή των δομών να μεταβάλλεται, παρέχοντας έτσι μία γενική Θεωρία Μαθηματικών Δομών ή Μορφών. Έτσι, η γένεση της θεωρίας των κατηγοριών είναι μία στιγμή της διαλεκτικής διαδικασίας αντικατάστασης του σταθερού από το μεταβαλλόμενο, ένα θέμα πού θα παίξει σημαντικό ρόλο σε ό,τι πρέπει να πούμε εδώ.»

(i) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, εφ' όσον οι δύο πλευρές ορίζονται, ή με διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] \arrow[drr, dashed] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
& C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}$$

Σημειώστε ότι ο συμβολισμός $f; g \equiv g \circ f$ συνηθίζεται στην Θεωρητική Πληροφορική.

(ii) $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$, για κάθε βέλος $f : A \longrightarrow B$ ή με διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, dashed, "f = f \circ 1_A"] & \\
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "1_B \circ f = f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

(iii) Επί πλέον απαιτούμε να ισχύουν τα:

(a) $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f), \quad \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$

(b) $\mathrm{dom}(1_A) = \mathrm{cod}(1_A)$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα δεδομένα μια κατηγορίας με το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_2 \arrow[r, "\circ"] & \mathscr{C}_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{dom}"'] & \mathscr{C}_0 \arrow[l, "1_{(\cdot)}"']
\end{tikzcd}$$

και την ουσία της Θεωρίας Κατηγοριών στο ακόλουθο σλόγκαν[3], βλ. [86], από την οποία εργασία θα παίρνουμε και άλλα παρόμοια σλόγκαν ή 'δόγματα' όπως τα αποκαλεί ο Goguen.

> **Κατηγορίες.** *«Σε κάθε είδος μαθηματικής δομής αντιστοιχεί μια κατηγορία τα αντικείμενα της οποίας έχουν αυτή τη δομή, οι δε μορφισμοί της διατηρούν τη συγκεκριμένη αυτή δομή.»*

[3] Τα σλόγκανς είναι βασικές εννοιολογικές αρχές-οδηγίες, που βοηθούν κατά την εξερεύνηση του 'άγνωστου εδάφους' που λέγεται 'κατηγορίες'. Η συνήθεια αυτή μάλλον οφείλεται στον Bill Lawvere, βλ. και [86, 117].

10.1.2 Ασκήσεις. Να δειχθεί ότι το ταυτοτικό βέλος 1_A είναι το μοναδικό βέλος με τις ιδιότητες, $\mathrm{dom}(1_A) = \mathrm{cod}(1_A) = A$ και $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$ για κάθε βέλος $f : A \longrightarrow B$

10.1.3 Παρατήρηση. (i) Έχουμε χρησιμοποιήσει το συμβολισμό $\mathscr{C}_0$ για τα αντικείμενα της κατηγορίας, υποδηλώνοντας έτσι ότι η κλάση $\mathscr{C}_0$ αποτελεί το μέρος της κατηγορίας διαστάσεως μηδέν, ενώ η κλάση $\mathscr{C}_1$ των βελών ή μορφισμών της κατηγορίας, αποτελεί το μέρος της κατηγορίας διαστάσεως ένα. Όμοια τώρα το $\mathscr{C}_2$ είναι το διδιάστατο μέρος της κατηγορίας και γενικότερα, αν $\bar{f} := (f_1, f_2, \ldots, f_k)$, τότε η κλάση,

$$\mathscr{C}_k := \{\bar{f} \in \mathscr{C}_1^k \,|\, \mathrm{cod}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2), \ldots, \mathrm{cod}(f_{k-1}) = \mathrm{dom}(f_k)\,\}$$

αποτελεί το k-διάστατο μέρος της κατηγορίας. Η πεπερασμένη ακολουθία $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ λέγεται και '**k-διαδρομή ή τροχιά**' από το αντικείμενο $\mathrm{dom}(f_1)$ στο αντικείμενο $\mathrm{cod}(f_k)$. Όπως και στα γραφήματα οι δυνατές διαδρομές μιας κατηγορίας δίνουν στην κατηγορία ένα είδος 'γεωμετρικής μορφής'.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$\mathrm{Hom}(A, B) \equiv \mathscr{C}(A, B) := \{f \in \mathscr{C}_1 \,|\, \mathrm{dom}(f) = A, \mathrm{cod}(f) = B\,\}$$

Είναι φανερό τότε ότι,

$$\mathscr{C}_1 = \bigsqcup_{(A,B)\in\mathscr{C}_0\times\mathscr{C}_0} \mathrm{Hom}(A, B).$$

Η ξένη ένωση $\bigsqcup$ σηματοδοτεί ότι τα $\mathrm{Hom}(A, B)$ είναι ξένα μεταξύ τους, για διαφορετικά A, B.

(ii) Θα πρέπει ίσως εδώ να σχολιάσουμε και να αντιπαραθέσουμε την 'δομή' της κατηγορίας με τις συνολοθεωρητικές δομές. Μια γενική συνολοθεωρητική δομή, είναι ένα σύστημα $\langle A, \mathscr{F}, \mathscr{R}, \mathscr{C}\rangle$, όπου το A είναι ένα μη-κενό σύνολο, $\mathscr{F}$ είναι μια οικογένεια πράξεων επί του A, $\mathscr{R}$ είναι μια οικογένεια σχέσεων επί του A, και $\mathscr{C}$ είναι μια οικογένεια διακεκριμένων σταθερών. Ένα απλό γράφημα είναι στην ουσία ίσως η απλούστερη συνολοθεωρητική δομή, $\langle A, R\rangle$, αφού αποτελείται από ένα μη-κενό σύνολο A, τις 'κορυφές', και μια διμελή σχέση επί του A, τις 'ακμές'. Το πλειογράφημα επιτρέπει πολλαπλές ακμές μεταξύ δύο κορυφών, το οποίο εκφράζεται με τις δύο συναρτήσεις της 'αρχής' α και του 'τέλους' τ. Οι συναρτήσεις αυτές μετα δυσκολίας θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως 'δράσεις' του R επί του A, $\alpha : R \times A^0 \longrightarrow A$, όπου $A^0 \equiv 1 := \{\emptyset\}$ και $R \times 1 \cong R$. Έτσι βλέπουμε ότι η συνολοθεωρητική έννοια της δομής, ήδη γενικεύεται με το να επιτρέπει στον οπλισμό της, και γενικές συναρτήσεις. Επίσης στις κατηγορίες τα σύνολα $\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1$ μπορούν να είναι κλάσεις και όχι σύνολα. Γενικά στις κατηγορίες ο τρόπος με τον οποίο τα αντικείμενα 'δομούνται' είναι περισσότερο 'ολιστικός', δηλαδή η δομή αναδύεται μέσα από τις αλληλεπιδράσεις του αντικειμένου, μέσω των βελών της κατηγορίας, με τα άλλα αντικείμενά της. Συμπερασματικά λοιπόν ο ρόλος της έννοιας της συνάρτησης και των βελών είναι κρίσιμος στο να αποδοθεί σε κάθε αντικείμενο η κατάλληλη 'μορφή' που θα του επιτρέπει 'μαθηματικές σχέσεις' με τα άλλα αντικείμενα στο 'κοινωνικό' περιβάλλον της κατηγορίας! Ιδιότητες που αποκτούν τα αντικείμενα με την αλληεπίδρασή τους με ΟΛΑ τα αντικείμενα της κατηγορίας, λέγονται και 'καθολικές ιδιότητες', αφού τέτοιες ιδιότητες αρχίζουν πάντα με τον ποσοδείκτη 'για κάθε' ($\forall$) και έχουν τη μορφή, «για κάθε...υπάρχει μοναδικό...τέτοιο ώστε...». Καταλήγουμε έτσι στο ακόλουθο σλόγκαν της Θεωρίας Κατηγοριών,

Καθολικές Ιδιότητες. *«Η Θεωρία των Κατηγοριών είναι η μελέτη των καθολικών ιδιοτήτων και κατασκευών»*

(iii) Ο πιο πάνω ορισμός της κατηγορίας βασίζεται στη διάκριση δύο ειδών ή τύπων οντοτήτων: 'τα αντικείμενα' και τα 'βέλη'.

Ωστόσο μέσω της συνάρτησης:

$$u : \mathscr{C}_0 \hookrightarrow \mathscr{C}_1 \;\; /\!\!/ \;\; A \mapsto 1_A$$

τα αντικείμενα εμφυτεύονται στην κλάση των βελών και επομένως μπορούν να ταυτισθούν με τα ταυτοτικά βέλη, ακριβώς όπως ταυτίζουμε ένα σύνολο A με την δείκτρια ή χαρακτηριστική συνάρτηση, I_A, ή ακόμη όπως ένας φυσικός ή ακέραιος αριθμός μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας πραγματικός αριθμός και αυτό λόγω της εμφύτευσης, $i : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Έτσι λοιπόν αντί να έχουμε το, $\begin{tikzcd} \underset{A}{\bullet} \arrow[loop above, "1_A"] \end{tikzcd}$ τώρα έχουμε απλά το βέλος $\overset{1_A}{\circlearrowright}$

Αυτή η ταύτιση δημιουργεί κάποια εννοιολογικά προβλήματα: Αν π.χ. $f \in \mathscr{C}_1$, πως θα πρέπει ορίσουμε τις συναρτήσεις,

$$\mathrm{dom} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0 \quad \text{και} \quad \mathrm{cod} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0$$

αφού τώρα δεν έχουμε στη διάθεσή μας την κλάση $\mathscr{C}_0$ αλλά ένα αντίγραφό της, την κλάση $\{\, 1_A \,|\, A \in \mathscr{C}_0\}$; Έχουμε όμως,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}_1 \arrow[r, "\mathrm{dom}"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{dom}' := u \circ \mathrm{dom}"] & \mathscr{C}_0 \arrow[r, hook, "u"'] & \mathscr{C}_1 \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \mathscr{C}_1 \arrow[r, "\mathrm{cod}"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{cod}' := u \circ \mathrm{cod}"] & \mathscr{C}_0 \arrow[r, hook, "u"'] & \mathscr{C}_1 \end{tikzcd}$$

Έτσι λοιπόν αντί των συναρτήσεων $\mathrm{dom} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0$ και $\mathrm{cod} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0$ τώρα έχουμε τις ισοδύναμες εκφράσεις,

$$\mathrm{dom}' : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_1 \quad \mathrm{cod}' : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_1$$

που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{dom}' \circ \mathrm{dom}' = \mathrm{dom}' & & \mathrm{dom}' = \mathrm{cod}' \circ \mathrm{dom}' \\ & (\text{ταυτοδυναμία}) \quad \& & \\ \mathrm{cod}' \circ \mathrm{cod}' = \mathrm{cod}' & & \mathrm{cod}' = \mathrm{dom}' \circ \mathrm{cod}' \end{array}$$

Γράφοντας dom και cod αντί για dom' και cod' αντίστοιχα, καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό της κατηγορίας αποκλειστικά μέσω βελών.

10.1.4 Ορισμός. Μια κατηγορία $\mathscr{C}$ είναι μια δομή,

$$\mathscr{C} \equiv \langle \mathscr{C}_1 ; \mathrm{dom}, \mathrm{cod}; \circ \rangle$$

με,

$$\mathrm{dom} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_1, \quad \mathrm{cod} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_1, \quad \circ : \mathscr{C}_2 \longrightarrow \mathscr{C}_1$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\mathrm{dom} \circ \mathrm{dom} = \mathrm{dom} = \mathrm{cod} \circ \mathrm{dom}$ και $\mathrm{cod} \circ \mathrm{cod} = \mathrm{cod} = \mathrm{dom} \circ \mathrm{cod}$;

(ii) Αν $f, g \in \mathscr{C}_2$ τότε $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) \quad \& \quad \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$;

(iii) Αν $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f) = f$ τότε $g \circ f = g$;

(iv) Αν $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f) = g$ τότε $g \circ f = f$;

(v) Αν $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$ και $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{cod}(g)$ τότε $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

σημειώστε ότι οι **(iii)** και **(iv)** είναι μεταγραφή στο νέο συμβολισμό των σχέσεων $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$.

Μαζύ λοιπόν με τα αξιώματα εδώ έχουμε και κάποιες εννοιολογικές αρχές, που βοηθούν στην ενορατική κατανόηση των φορμαλιστικά εισαγόμενων εννοιών. Σ'αυτό το βιβλίο, επειδή δίδεται σοβαρός ρόλος στις εννοιολογικές αρχές και στην ενορατική και σε βάθος κατανόηση των μαθηματικών, οι εννοιολογικές αυτές αρχές έχουν ίσως ένα ισότιμο βάρος με τα αξιώματα!

Αξίζει ακόμη να σημειώσουμε ότι ένα σύνολο ορίζεται από το 'περιεχομενό' του, μέσω του 'Αξιώματος της Εκτάσης', ενώ στις κατηγορίες ένα αντικείμενο καθορίζεται αν γνωρίζουμε ή τα εισερχόμενα σ'αυτό βέλη ή τα εξερχόμενα, όπως θα δούμε στη συνέχεια όταν εξετάσουμε το Λήμμα του Yoneda, και ο καθορισμός αυτός γίνεται μέχρις ισομορφίας. Δηλαδή το αντικείμενο καθορίζεται 'εξωτερικά' από τις αλληλεπιδράσεις του με το περιβάλλον του, παρά συγκροτείται από μια εσωτερική αναγκαιότητα. Ο καθολικός τρόπος καθορισμού ενός αντικειμένου, γίνεται 'μέχρις ισομορφίας', δεν έχουμε δηλαδή 'ισότητα αντικειμένων' αλλα ισομορφικά αντικείμενα, σε αντίθεση με την πρακτική που ακολουθείται στη συνολοθεωρία με το Αξίωμα Έκτασης.

10.1.5 Ορισμός. Δύο αντικείμενα $A, B \in \mathscr{C}_0$ θα λέγονται **ισομορφικά**, συμβολικά, $A \cong B$ ανν υπάρχουν βέλη, $A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$ με $g \circ f = 1_A$ και $f \circ g = 1_B$. Το βέλος f λέγεται αντίστροφο του g και το g αντίστροφο του f.

Έτσι το βέλος $f : A \longrightarrow B$ είναι ισομορφισμός ανν είναι μια αμφίρριψη επί των γενικευμένων στοιχείων, $x \in^T A$ και $y \in^T B$, ακριβέστερα έχουμε, $x \in^T A \Leftrightarrow f(x) \in^T B$.

10.1.6 Πρόταση. *Αν το βέλος $f : A \longrightarrow B$ έχει αντίστροφο βέλος, τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδ. Ας υποθέσουμε ότι το f έχει δύο αντίστροφα βέλη, τα $g, g' : B \longrightarrow A$. Από τον ορισμό έχουμε, $g \circ f = g' \circ f = 1_A$ και $f \circ g = f \circ g' = 1_B$. Αλλά τότε,

$$g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ g') = g \circ g) \circ g' = 1_A \circ g' = g' \quad \dashv\!\blacksquare$$

Από την παραπάνω Πρόταση, όταν ένα βέλος έχει αντίστροφο, συμβολίζουμε, το μοναδικό αυτό αντίστροφο βέλος με f^{-1} και βεβαίως το f είναι αντίστροφο του f^{-1}, δηλ. $(f^{-1})^{-1} = f$.

Ισομορφικά Αντικείμενα. *Δυο αντικείμενα έχουν την ίδια δομή ανν είναι ισομορφικά, και ένα 'αφηρημένο αντικείμενο' είναι μια ισομορφική κλάση αντικειμένων.*

Τα ισομορφικά αντικείμενα είναι στην ουσία αδιάκριτα από την άποψη της μορφής ή δομής τους. Είναι κοινή πρακτική όταν ορίζουμε μια δομή, να ορίζουμε ταυτόχρονα και πότε τα στοιχεία της δομής είναι ίσα ή ισομορφικά.

Σχετικό με τα ισομορφικά αντικείμενα, αλλά και το γεγονός ότι το Λήμμα του Yoneda αποτελεί γενικευσή του βλ. σελ. 207, είναι και το **Θεώρημα**

Αναπαράστασης του Cayley για ομάδες, που θα εκθέσουμε στη συνέχεια.

10.1.7 Ορισμός. Έστω X ένα τυχόν σύνολο. Τότε το σύνολο,

$$\mathrm{Aut}(X) := \{\, f \in X^X \mid f \quad \text{είναι μια αμφίρριψη} \,\} \equiv \mathbf{Sym}(X)$$

θα λέγεται σύνολο **αυτομορφισμών** ή **συμμετριών** επί του X.

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η δομή $\mathbf{Aut}(X) \equiv \langle \mathrm{Aut}(X), \circ, 1_X \rangle$ είναι μια ομάδα. Μια **ομάδα μεταθέσεων** είναι ένα υποσύνολο $G \subseteq \mathrm{Aut}(X)$, που είναι υπο-ομάδα της $\mathbf{Aut}(X)$.

10.1.8 Θεώρημα. (Αναπαράστασης του Cayley) *Κάθε ομάδα $\langle G, *, e \rangle$ είναι ισομορφική με μια ομάδα μεταθέσεων.*

Απόδ. Θεωρούμε την δράση της ομάδας G πάνω στον εαυτό της, δηλαδή, εκφράζουμε την πράξη, $* : G \times G \longrightarrow G$ ως, μια δράση,

$$\alpha : G \longrightarrow G^G \;/\!\!/\; g \mapsto h_g \quad \text{με} \quad h_g : G \to G \;/\!\!/\; x \mapsto h_g(x) := g * x$$

δηλαδή h_g είναι μια τροχιά μέσα στο G. Θα δείξουμε ότι οι τροχιές αυτές είναι αμφιρρίψεις.

Πράγματι, είναι ενρίψεις αφού,

$$h_g(x) = h_g(y) \;\Rightarrow\; g * x = g * y \;\Rightarrow\; g^{-1} * (g * x) = g^{-1} * (g * y) \;\Rightarrow\; x = y.$$

Επίσης κάθε h_g είναι επιρριπτική, γιατί αν $z \in G$ τότε,

$$h_g(g^{-1} * z) := g * g^{-1} * z = z$$

έτσι το στοιχείο $g^{-1} * z$ είναι το στοιχείο που απεικονίζεται στο z. Άρα τελικά $h_g \in \mathrm{Aut}(G), \quad g \in G$. Έστω τώρα,

$$\bar{G} := \{\, h_g \mid g \in G \,\} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$$

Για να είναι η $\bar{G}$ υποομάδα της $\mathbf{Aut}(G)$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $g_1, g_2 \in G, \quad h_g * (h_g)^{-1} \in G$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι $h_g^{-1} = h_{g^{-1}}$. Πράγματι η συνάρτηση $h_{g^{-1}} := g^{-1} * x$ είναι αντίστροφη της h_g, αφού,

$$\begin{array}{rcl} h_g \circ h_g^{-1}(x) &=& h_g(h_g^{-1}(x)) \\ &=& h_g(g^{-1} * x) \\ &=& g * (g^{-1} * x) \\ &=& (g * g^{-1}) * x \\ &=& e * x \\ &=& x \end{array}$$

Άρα $h_g \circ h_{g^{-1}} = 1_G$, ομοίως $h_{g^{-1}} \circ h_g = 1_G$. Άρα $h_{g^{-1}} = h_g^{-1}$.

Έτσι,

$$\begin{aligned} h_{g_1} \circ h_{g_2}(x) &= h_{g_1}(h_{g_2}(x)) \\ &= h_{g_1}(g_2^{-1} * x) \\ &= (g_1 * g_2) * x \\ &= h_{g_1 * g_2^{-1}}(x) \end{aligned}$$

Επειδή δε το $g_1 * g_2 \in G$ σημαίνει ότι $h_{g_1 * g_2^{-1}} \in \bar{G}$.

Τέλος αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση, $\lambda : G \longrightarrow \bar{G}$ // $g \mapsto h_g$ τότε η λ είναι ισομορφισμός ομάδων αφού εύκολα κανείς συνάγει ότι, $\lambda \circ \lambda^{-1} = 1_{\bar{G}}$ και $\lambda^{-1} \circ \lambda = 1_{\bar{G}}$. ⊣▮

10.2 Παραδείγματα

(i) Ο ακόλουθος πίνακας περιέχει αρκετά παραδείγματα κατηγοριών. Ο συνεπής αναγνώστης θα πρέπει να ελέγξει κατά πόσο πράγματι αποτελούν κατηγορίες.

Κατηγ. $\mathscr{C}$	$\mathscr{C}_0$: αντικείμενα	$\mathscr{C}_1$: βέλη
Set	σύνολα	συναρτήσεις
FinSets	πεπερασμένα σύνολα	συναρτήσεις
Mon	μονοειδή	ομομορφισμοί μονοειδών
Poset	μ.δ.σ.	συναρτήσεις που διατηρούν τη διάταξη
Grp	ομάδες	ομομορφισμοί ομάδων
Vect	διανυσματικοί χώροι	γραμμικές συναρτήσεις
Top	τοπολογικοί χώροι	συνεχείς συναρτήσεις
Met	μετρικοί χώροι	συναρτήσεις συστολής
Meas	μετρήσιμοι χώροι	μετρήσιμες συναρτήσεις
$\mathscr{C}(\mathbf{P}, \leq_{\mathbf{P}})$	τα στοιχεία του μ.δ.σ. P	$x \to y$ ανν $x \leq y$
$\mathscr{C}(\mathbf{M}, *, \mathbf{e})$	ένα μοναδικό αντικείμενο, που για ομοιομορφία μπορούμε να το πάρουμε ίσο με το M	τα βέλη είναι τα στοιχεία του μονοειδούς

(ii) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια γλώσσα πρώτης τάξης με συγκεκριμένο μηλογικό οπλισμό. Τότε αν για αντικείμενα πάρουμε τους καλοσχηματισμένους τύπους της γλώσσας και στη συνέχεια ορίσουμε τη μερική διάταξη,

$$\varphi \leq \psi \quad \text{ανν} \quad \varphi \vdash \psi$$

δηλαδή υπάρχει απόδειξη από τον τύπο φ στον τύπο ψ, τότε έχουμε ένα μ.δ.σ. το οποίο όταν το παρουσιάσουμε ως κατηγορία, παίρνοντας ως αντικείμενα τα στοιχεία του μ.δ.σ. και ως βέλη το μοναδικό, όταν υπάρχει,

$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \varphi \vdash \psi.$$

Είναι φανερό ότι για κάθε τύπο φ, έχουμε $\varphi \vdash \varphi$. έτσι εξασφαλίζουμε τους ταυτοτικούς μορφισμούς για κάθε φ. Η σύνθεση των μορφισμών είναι απλά ο κανόνας modus ponens:

$$\varphi \vdash \psi \quad \& \quad \psi \vdash \omega \Rightarrow \varphi \vdash \omega$$

Γενικότερα η πιό πάνω ερμηνεία μεταφέρεται και σε τυχούσες κατηγορίες, βλ. π.χ. [117]. Μπορούμε να θεωρούμε τα αντικείμενα μιας κατηγορίας ως προτάσεις και τους μορφισμούς $f : A \longrightarrow B$, ως αποδείξεις της πρότασης B από την A. Υπάρχει τότε η ταυτοτική απόδειξη $1_A : A \longrightarrow A$ και οι αποδείξεις συντίθεται (modus ponens). Η ισότητα δηλώνει ότι κάποιες αποδείξεις θεωρούνται ισοδύναμες.

10.3 Συναρτητές, Φυσικοί Μετασχηματισμοί και Υποκατηγορίες.

Από τα μαθήματα της άλγεβρας γνωρίζουμε ότι ένα συνηθισμένο πρόγραμμα κατά την εξέταση μιας δομής, είναι να καθορίσουμε τι σημαίνει ομομορφισμός, ισομορφισμός, αυτομορφισμοί, κ.λπ. και τι σημαίνει υποδομή. Μάλιστα στις κατηγορίες ισχύει κάτι παρισσότερο, που εκφράζεται από το ακόλουθο σλόγκαν:

«Αφού οι ιδιότητες αλλά και η ταυτότητα των αντικειμένων, επάγονται ολιστικά από την αλληεπίδραση του αντικειμένου με τα άλλα αντικείμενα μέσω των βελών (καθολικές ιδιότητες), τότε για τη Θεωρία Κατηγοριών, τα μορφοποιούντα βέλη είναι σπουδαιότερης σημασίας από τα αντικείμενα!»

Επειδή όμως μια κατηγορία είναι ένα προσανατολισμένο γράφημα, είναι φανερό ότι η έννοια του ομομορφισμού γραφημάτων μεταφέρεται και στις κατηγορίες. Έστω $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ δύο κατηγορίες. Ένας 'κατηγορικός ομομορφισμός' θα πρέπει να είναι μια συνάρτηση μεταξύ των κατηγοριών που διατηρεί την κατηγορική δομή, διατηρεί δηλαδή, τα ταυτοτικά βέλη, τα $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$ και τις συνθέσεις. Επειδή δε κάθε κατηγορία έχει ένα υποκείμενο γράφημα $U(\mathscr{C})$, βλέπουμε ότι η έννοια του ομομορφισμού γραφημάτων, εξειδικεύεται στις κατηγορίες, και εδώ τον ομομοορφισμό αυτόν θα τον ονομάζουμε **συναρτητή.** Συνοψίζοντας έχουμε τον ακόλουθο ορισμό,

10.3.1 Ορισμός. Έστω $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ δύο κατηγορίες. Ένας **συναρτητής** $F \equiv (F_0, F_1)$ απαρτίζεται από ένα ζεύγος απεικονίσεων:

$$\begin{array}{rcl} F_0 : \mathscr{C}_0 & \longrightarrow & \mathscr{D}_0, \\ A & \mapsto & F_0(A) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F_1 : \mathscr{C}_1 & \longrightarrow & \mathscr{D}_1 \\ f & \mapsto & F_1(f) \end{array}$$

τέτοιων ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες,

(i) $F_1(1_A) = 1_{F_0(A)}$ ή και $F(1_A) = 1_{F(A)}$

(ii) $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$ ή και $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

που παρουσιάζονται στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[loop above, "1_A"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"] & & & & F_0(A) \arrow[loop above, "F_1(1_A)=1_{F_0(A)}"] \arrow[dl, "F_1(f)"'] \arrow[dr, dashed, "F_1(g \circ f)=F_1(g) \circ F_1(g)"] & \\
B \arrow[rr, "g"'] & & C \arrow[r, phantom, ""] & \arrow[r, "F"] & F_0(B) \arrow[rr, "F_1(g)"'] & & F_0(C)
\end{tikzcd}$$

Έτσι ο συναρτητής διατηρεί τα ταυτοτικά βέλη, $F_1(1_A) = 1_{F_0(A)}$ και τα συνθέσιμα βέλη, $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(g)$, και επομένως την κατηγορική δομή. Στη συνέχεια θα γράφουμε F και για το F_0 και για το F_1. Επίσης χρησιμοποιούμε τον ισοδύναμο συμβολισμό, FA αντί του $F(A)$ και Ff αντί του $F(f)$. Με τη χρήση γενικευμένων στοιχείων βλ. σελ. 204 και σελ. 32, το ταυτοτικό βέλος $1_A : A \to A$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα 'γενικό στοιχείο' του A χωρίς ιδιαίτερες ιδιότητες. Ένας συναρτητής λοιπόν διατηρεί τα γενικά στοιχεία και διατηρεί την έννοια της συνάρτησης επί των γενικευμένων στοιχείων, δηλαδή αν, $x \in^T A \Rightarrow f \circ x \in^T B$ τότε $F(x) \in^{F(T)} F(A) \Rightarrow F(f) \circ F(x) \in^{F(T)} F(B)$. Με την έννοια αυτή δικαίως λέγεται ο F 'συναρτητής'.

Τα πιό πάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε με τον ακόλουθο συμπαγή τρόπο. Απαιτούμε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_2 \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "F_2"'] & \mathscr{C}_1 \arrow[r, shift left=3, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right=3, "\mathrm{dom}"'] \arrow[d, "F_1"'] & \mathscr{C}_0 \arrow[l, "1_{(\cdot)}" description] \arrow[d, "F_0"] \\
\mathscr{D}_2 \arrow[r, "\circ"'] & \mathscr{D}_1 \arrow[r, shift left=3, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right=3, "\mathrm{dom}"'] & \mathscr{D}_0 \arrow[l, "1_{(\cdot)}" description]
\end{tikzcd}
$$

Όπου $F_2 : \mathscr{C}_2 \longrightarrow \mathscr{D}_2 \;/\!\!/\; (f, g) \mapsto (F_1(f), F_1(g))$.

10.3.2 Παραδείγματα. 1. Έστω η κατηγορική συνάρτηση $U : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$ όπου για κάθε τοπολογικό χώρο $\mathbf{X} \equiv \langle X, \tau \rangle$, $U(\mathbf{X}) := X$ (ο υποκείμενος φορέας της δομής). Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η κατηγορική συνάρτηση αυτή είναι ένας συναρτητής. Θα ονομάζουμε τέτοιους συναρτητές **επιλήσμονες** (forgetful), γιατί 'ξεχνούν' τη δομή. Άλλα τέτοια παραδείγματα είναι, $U : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Set}$, $U : \mathbf{Pos} \longrightarrow \mathbf{Set}$, κ.λπ. Δείξτε ότι πράγματι είναι συναρτητές.

2. **Ελεύθερος Συναρτητής.** Ας πάρουμε ένα βασικό παράδειγμα. Έστω ένα μη-κενό σύνολο X, θεωρούμενο ως αλφάβητο, και έστω το επαγόμενο μονοειδές $\langle X^*, \circ \rangle$ όπου X^* είναι η κλειστότητα του Kleene, και $\circ$ είναι η πράξη της παράθεσης. Τότε ο συναρτητής, $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Mon}$ είναι ο **ελεύθερος συναρτητής μονοειδών.** Ελεύθεροι συναρτητές υπάρχουν για κάθε δομή, π.χ. αν X θεωρούμενη ως 'βάση' και $F(X)$ είναι όλοι οι τυπικοί γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων του X, τότε μπορούμε να έχουμε μια δομή διανυσματικού χώρου επί του $F(X)$. Δηλαδή ο **ελεύθερος συναρτητής διανυσματικών χώρων** είναι ο $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Vect}$.

3. Γιά κάθε κατηγορία $\mathscr{C}$, ο **ταυτοτικός συναρτητής**, $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$, είναι ο συναρτητής που αφήνει την κατηγορία ανέπαφη, $A \mapsto 1_{\mathscr{C}}(A) := A$ και $f \mapsto 1_{\mathscr{C}}(f) := f$.

4. Αν $\mathscr{D}$ είναι μια υποκατηγορία (βλ. στη συνέχεια) της $\mathscr{C}$, τότε ο **συναρτητής εμφύτευσης** $I : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ είναι η συνάρτηση, $\mathscr{D} \ni A \mapsto I(A) \in \mathscr{C}$ και $\mathscr{D} \ni f \mapsto I(f) \in \mathscr{C}$.

5. **Δυναμοσυναρτητές.** Οι δυναμοσυναρτητές είναι γνωστοί από τη συνολοθεωρία. έχουμε,

$$
\begin{array}{rcl}
\mathscr{P}(\cdot) : \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
A & \mapsto & \mathscr{P}(A) := \{X : X \subseteq A\} \\
f : A \to B & \mapsto & \mathscr{P}(f) : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B) \\
 & & \text{με} \quad \mathscr{P}(f) := f[\cdot] \quad \text{και} \quad f[X] := \{f(x) \,|\, x \in X\}
\end{array}
$$

Πράγματι εδώ έχουμε: $\mathscr{P}(1_A) = 1_{\mathscr{P}(A)}$ και $\mathscr{P}(g \circ f) = \mathscr{P}(g) \circ \mathscr{P}(f)$. Ο συναρτητής αυτός είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής, διατηρεί δηλαδή τη φορά των βελών.

Ομοίως και για τον άλλο (ανταλλοίωτο) δυναμοσυναρτητή,

$$
\begin{array}{rcl}
\mathscr{P}^{-1}(\cdot) : \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
A & \mapsto & \mathscr{P}^{-1}(A) := \{X : X \subseteq A\} = \mathscr{P}(A) \\
f : A \to B & \mapsto & \mathscr{P}^{-1}(f) : \mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(A) \\
 & & \text{με} \quad \mathscr{P}^{-1}(f) := f^{-1}[\cdot] \\
 & & \text{και} \quad f^{-1}[Y] := \{f^{-1}(y) \,|\, y \in Y \subseteq B\}
\end{array}
$$

Ο συναρτητής αυτός είναι ένας ανταλλοίωτος συναρτητής, αντιστρέφει δηλαδή τη φορά των βελών.

Η γενίκευση αυτών των συναρτητών, καθώς και το επόμενου εκθετικού συναρτητή, σε γενικές κατηγορίες, είναι από τους βασικούς στόχους της Θεωρίας Κατηγοριών. Τέτοιες γενικεύσεις οδηγούν αναπόφευκτα στην Θεωρία Τόπων.

6. **Ο Εκθετικός Συναρτητής.** Έστω T ένα τυχόν σύνολο[4]. Ορίζουμε,

$$
\begin{array}{rcl}
E_T(\cdot) \equiv (\cdot)^T : \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
X & \mapsto & E_T(X) := X^T \\
f : X \to Y & \mapsto & E_T(f) := f^T : X^T \to Y^T \\
 & & \text{με} \quad f^T(\tau) := f \circ \tau
\end{array}
$$

Πράγματι ο E_T είναι συναρτητής αφού, $E_T(1_X) := (1_X)^T = 1_{X^T} = 1_{E_T(X)}$ και

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, dashed, "f \circ \tau := f^T(\tau)"] & \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
 & Z
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(g^T \circ f^T)(\tau) & = & g^T(f^T(\tau)) \\
 & = & g^T(f \circ \tau) \\
 & = & g \circ (f \circ \tau) \\
 & = & (g \circ f) \circ \tau \\
 & = & (g \circ f)^T(\tau)
\end{array}
$$

Άρα η συνάρτηση E_T είναι πράγματι συναρτητής. ⊣▮

Η κλάση $E_T(X)$ απαρτίζεται από όλα τα T-γενικευμένα στοιχεία του συνόλου X. Από τη άποψη αυτή είναι παρόμοιος με τον συναλλοίωτο Hom-συναρτητή. Εξετάστε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των δύο αυτών συναρτητών. Ο συναρτητής αυτός, γενικεύεται και σε άλλες, ειδικού τύπου, κατηγορίες.

[4]Χρησιμοποιούμε το γράμμα T για να μας θυμίζει ‘time’ (χρόνο).

7. **Οι Hom-συναρτητές.** Οι συναρτητές Hom είναι εξαιρετικής σημασίας για τη Θεωρία Κατηγοριών, αφού κάθε κατηγορία $\mathscr{C}$ 'απεικονίζεται' ή θεωρείται στο γνώριμο περιβάλλον της κατηγορίας **Set**. Το πολύ σπουδαίο Λήμμα του Yoneda, κάνει χρήση τέτοιων συναρτητών. Η βασική κεντρική έννοια των Hom-συναρτητών είναι ότι ασχολούνται με τα εισερχόμενα και εξερχόμενα βέλη σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο της κατηγορίας. Δηλαδή ασχολούνται με τα 'γενικευμένα στοιχεία' και τις 'γενικευμένες ιδιότητες'!. Επί πλέον οι Hom-συναρτητές μας επιτρέπουν να μεταφέρουμε, μέσω των αντιστοίχων 'ινών', έννοιες, δομές, και κατασκευές από από τη γνώριμη κατηγορία **Set** στην κατηγορία $\mathscr{C}$ πάνω στην οποία ορίζονται οι αναπαραστάσιμοι αυτοί συναρτητές.

   (i) (Συναλλοίωτοι) Hom-Συναρτητές. Έστω ένα τυχόν αλλά σταθερό αντικείμενο T μιάς τοπικά μικρής κατηγορίας $\mathscr{C}$. ($\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ είναι σύνολα για κάθε $X, Y \in \mathscr{C}_0$) Τότε,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,-) \equiv H^T(-) : \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ X & \mapsto & H^T(X) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,X) \\ f : X \to Y & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,Y) \\ & & \text{με} \quad H^T(f)(\tau) := f\circ\tau \equiv \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,f)(\tau) \end{array}$$

   Ιχνηλατείστε[5] (diagram chase) το ακόλουθο διάγραμμα για να διαπιστώσετε ότι έχουμε πράγματι έναν συναρτητή:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, dashed, "f\circ\tau := f^A(\tau)"] & \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Είναι φανερό ότι η κλάση των βελών $\mathrm{Hom}(T, X)$, αποτελείται από όλα τα εκτασιακά (λίστες, γεωμετρικά σχήματα, κ.λπ. στο X) T-γενικευμένα στοιχεία του X βλ. και το Εδάφιο 2.3.2 για μια ανάπτυξη των γενικευμένων στοιχείων και ιδιοτήτων. Τα εκτασιακά αυτά στοιχεία παρέχουν μια περαιτέρω δόμηση στο αντικείμενο X.

Για να δείξουμε ότι ο $\mathrm{Hom}(T,-)$ είναι πράγματι συναρτητής θα πρέπει να δείξουμε ότι,

$$\mathrm{Hom}(T, 1_X) = 1_{\mathrm{Hom}(T,X)},$$

και,

$$\mathrm{Hom}(T, g\circ f) = \mathrm{Hom}(T, g)\circ \mathrm{Hom}(T, f).$$

[5] Αφού τα αντιμεταθετικά διαγράμματα είναι ο τρόπος που οι κατηγορικοί εκφράζουν εξισώσεις, είναι φανερό ότι η ιχνηλάτηση δεν είναι τίποτε άλλο παρά η διαπίστωση ότι η 'εξίσωση' πράγματι ισχύει. Η ιχνηλάτηση είναι ένας βασικός τρόπος απόδειξης στις κατηγορίες.

Έστω ένα γενικευμένο στοιχείο, $x : T \longrightarrow X$ του X. Έχουμε,

$$\mathrm{Hom}(T, 1_X)(x) = 1_X \circ x = 1_{\mathrm{Hom}(T,X)}(x)$$

και,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(T, g \circ f)(x) &= (g \circ f) \circ x = \\ = g \circ (f \circ x) &= (\mathrm{Hom}(T, g) \circ \mathrm{Hom}(T, f))(x) \end{aligned}$$

Συναρτητές της μορφής, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T, -) \equiv H^T(-) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$, λέγονται **συναλλοίωτοι αναπαραστάσιμοι συναρτητές** αφού ο συναρτητής $H^T(-)$ στη ουσία αναπαρίσταται από το αντικείμενο T.

Για κάθε αντικείμενο T υπάρχει ένας διακεκριμένος συναλλοίωτος Hom-συναρτητής, $\mathrm{Hom}(T, -)$, έτσι έχουμε μια οικογένεια συναρτητών,

$$(\mathrm{Hom}(T, -))_{T \in \mathscr{C}_0} \quad \text{ή} \quad \mathscr{C}_0 \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \;/\!\!/\; T \mapsto \mathrm{Hom}(T, -).$$

(ii) Ανταλλοίωτοι Hom-Συναρτητές[6]. Έστω ένα τυχόν αλλά σταθερό αντικείμενο[7] V μιας τοπικά μικρής κατηγορίας $\mathscr{C}$. Τότε,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(-, V) \equiv H_V(-) : \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ X & \mapsto & H_V(X) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, V) \\ f : X \to Y & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f, V) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, V) \\ & & \text{με} \quad H_V(f)(\tau) := \tau \circ f \equiv \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f, V)(\tau) \end{array}$$

Ιχνηλατείστε το ακόλουθο διάγραμμα για να διαπιστώσετε ότι έχουμε πράγματι έναν συναρτητή:

$$\begin{tikzcd} Z & \\ X \arrow[u, dashed, "g \circ f"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\tau \circ f"'] & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[d, "\tau"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Είναι φανερό ότι η κλάση των βελών $\mathrm{Hom}(X, V)$, αποτελείται από όλα τα V-εντασιακά στοιχεία $\equiv$ V-γενικευμένες ιδιότητες του X, που αναδύονται από τη θεώρηση των εξερχομένων από το X βελών. Τα εντασιακά αυτά στοιχεία παρέχουν μια περαιτέρω δόμηση στο αντικείμενο X. Για κάθε αντικείμενο $V \in \mathscr{C}_0$, υπάρχει ένας διακεκριμένος ανταλλοίωτος Hom-συναρτητής, $\mathrm{Hom}(-, V)$, έτσι έχουμε μια οικογένεια συναρτητών,

$$(\mathrm{Hom}(-, V))_{V \in \mathscr{C}_0} \quad \text{ή} \quad \mathscr{C}_0 \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{op}} \;/\!\!/\; V \mapsto \mathrm{Hom}(-, V).$$

[6]Οι ανταλλοίωτοι συναρτητές θα μπορούσαν να ομομασθούν και 'συν-συναρτητές' (co-functors), αλλά το όνομα αυτό δεν είναι εύηχο.

[7]Χρησιμοποιούμε το γράμμα V για να μας θυμίζει τη διαδικασία 'απονομής αλήθειας' (valuation) για μια ιδιότητα (τύπο) της Λογικής.

Θα συμβολίζουμε τους Hom-συναρτητές[8] εναλλακτικά ως:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,-) \equiv H^T(-) \equiv \mathscr{C}(T,-), \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,V) \equiv H_V(-) \equiv \mathscr{C}(-,V)$$

Αν $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι ένας συναρτητής, η συνιστώσα συνάρτηση, $F_1 : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{D}_1$ // $f \mapsto Ff$ μπορεί να παρασταθεί πιο λεπτομεριακά και ως μια οικογένεια συναρτήσεων, $(F_{X,Y})_{X,Y\in\mathscr{C}_0}$ με,

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),F(Y)) \ /\!\!/ \ f \mapsto Ff. \tag{10.1}$$

Είναι φανερό ότι η πιό πάνω συνάρτηση, ως μια συνιστώσα συνάρτηση του συναρτητή, περιέχει χρήσιμες πληροφορίες και για τις σχέσεις των κατηγοριών $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ αλλά και για τον ίδιο τον συναρτητή.

Αν $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ είναι κατηγορίες και $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D} \xrightarrow{G} \mathscr{E}$ είναι δύο συναρτητές, τότε ορίζεται η σύνθεση των δύο συναρτητών ως σύνθεση των αντιστοίχων συναρτήσεων, δηλ.,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "F"'] \arrow[rr, bend left, "G\circ F"] & \mathscr{D} \arrow[r, "G"'] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

Με, $(G\circ F)(X) := G(F(X))$ και $(G\circ F)(f) := G(F(f))$.

Επίσης για κάθε κατηγορία $\mathscr{C}$, υπάρχει ο προφανής **ταυτοτικός συναρτητής** $1_{\mathscr{C}}$,

$$\begin{array}{rcl} 1_{\mathscr{C}}(\cdot) : \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ A & \mapsto & 1_{\mathscr{C}}(A) := A \\ f & \mapsto & 1_{\mathscr{C}}(f) := f \end{array}$$

Δημιουργείται έτσι η δυνατότητα θεώρησης δύο 'μεγάλων' κατηγοριών, **Cat**, και **CAT**. Η κατηγορία **Cat** έχει ως αντικείμενα όλες τις 'μικρές' κατηγορίες, δηλαδή κατηγορίες που η συλλογή των αντικειμένων και των βελών είναι σύνολα, και η πραγματικά τερατώδης 'κατηγορία' **CAT** που έχει ως αντικείμενα τη συλλογή όλων των κατηγοριών και βέλη όλους του συναρτητές. Η κατηγορία **Cat** δεν παρουσιάζει κανένα θεμελιακό πρόβλημα. Η κατηγορία όμως **CAT** έχει θεμελιακού τύπου προβλήματα αφού τα αντικείμενα αλλά και τα βέλη «δεν είναι κλάσεις», και επομένως δεν ικανοποιούνται τα αξιώματα της κατηγορίας. Έτσι και αλλοιώς και κλάσεις να ήταν, δεν σημαίνει ότι το μέγεθός τους θα ήταν προσιτό στην ανθρώπινη αντίληψη!

Επί πλέον τίθεται πάντοτε το ερώτημα:«Αφού η **Cat** περιέχει όλες τις κατηγορίες και η ίδια θεωρείται μια κατηγορία, τότε θα πρέπει να περιέχει και τον εαυτό της;»

Καταγεύγουμε λοιπόν σε ένα 'άλλο τέχνασμα' για να μπορούμε να θεωρούμε και την 'κατηγορία' **CAT**. Είναι γεγονός ότι η 'κατηγορία' αυτή, παρ'

[8] Ένας μνημονικός κανόνας για να θυμόμαστε τους σχετικούς ορισμούς είναι να συσχετίσουμε τον συναρτητή H^T με το εκθετικό σύμβολο B^A που συμβολίζει όλες τις συναρτήσεις από το A στο B. Έτσι $H^T(X)$ συμβολίζει τα βέλη από το αντικείμενο T στό X. Επομένως δυϊκά το σύμβολο $H_V(X)$ θα συμβολίζει τα βέλη απο X στο V.

όλα τα ιδιόμορφα στοιχεία που την χαρακτηρίζουν, «συμπεριφέρεται καλώς» και μέχρι να ανακαλύψουμε ένα καταστροφικό αντιπαράδειγμα θα συνεχίσουμε να εργαζόμαστε με αυτήν χωρίς να μας απασχολούν θεμελιακού τύπου προβλήματα. Από την άλλη μεριά τα μη-καλώς θεμελιωμένα σύνολα δείχνουν ότι πολλές φορές κάποιες αυτοαναφορές δεν είναι καταστροφικές. Έξ' άλλου, λόγω των Θεωρημάτων μη-πληρότητας του Gödel, τα αξιωματικά συστήματα δεν μπορούν να μας παράσχουν ακλόνητα θεμέλια για τα Μαθηματικά, και ίσως μια **«εκπαιδευμένη και υψηλής πιστότητας διαίσθηση»** να δίνει περισσότερη σιγουριά από οποιοδήποτε αξιωματικό σύστημα!

Ποιά όμως είναι η σημαντικότητα και η ερμηνεία ενός συναρτητή;

Διακρίνουμε τις ακόλουθες βασικές κατηγορίες συναρτητών:

(i) **Ο συναρτητής ως έκφραση μαθηματικών κατασκευών.** Πολλές σπουδαίες κατασκευές στα Μαθηματικά μπορούν να εκφρασθούν ως συναρτητές της μορφής $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathscr{C}$, και γενικότερα συναρτητές απο μια λιγότερο δομημένη κατηγορία προς μια με περισσότερη δόμηση. Παραδείγματα αποτελούν οι λεγόμενοι **'ελεύθεροι συναρτητές'**, π.χ. οι συναρτητές $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Mon}, \quad F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Vect}$, κ.λπ.

Οι δυϊκοί πρός αυτούς συναρτητές είναι αυτοί που 'αποδομούν' τα αντικείμενα της κατηγορίας, ξεχνώντας μέρος ή όλη τη δομή τους. Για το λόγο αυτό λέγονται **'επιλήσμονες συναρτητές'**.

Τη βασική αυτή ερμηνεία την συνοψίζουμε ως σλόγκαν:

> **Συναρτητές.** *Σε κάθε φυσική κατασκευή ένος νέου μαθηματικού αντικειμένου από άλλα δοσμένα αντικείμενα, αντιστοιχεί ένας συναρτητής από την κατηγορία των αντικειμένων του δοσμένου είδους στην κατηγορία των αντικειμένων του νέου είδους.*

(ii) **Συναρτητές ως αναπαραστάσεις ή μοντέλα κατηγοριών.** Μπορούμε να σκεπτόμαστε ότι κάθε συναρτητής $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ ότι μας εφοδιάζει με μια 'εικόνα' ή μια 'αναπαράσταση' της κατηγορίας $\mathscr{C}$ μέσα στην κατηγορία $\mathscr{D}$. Αυτό είναι πολύ φανερό αν θεωρήσουμε διαγράμματα $D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{C}$, όπου η 'εικόνα' του γραφήματος $\mathscr{J}$ στην $\mathscr{C}$ είναι μορφές παρόμοιων γραφημάτων μέσα στην κατηγορία $\mathscr{C}$. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο συναρτητής F ερμηνεύει την κατηγορία $\mathscr{C}$ στην κατηγορία $\mathscr{D}$. Μάλιστα αν τυχαίνει η κατηγορία $\mathscr{D}$ να είναι η $\mathbf{Set}$ τότε έχουμε ένα είδος 'σημασιολογικού συναρτητή'. Αν η κατηγορία $\mathscr{C}$

είναι όπως το Παράδειγμα (ii), σελ. 175, τότε συναρτητές της μορφής $M : \mathscr{C} \longrightarrow$ **Set** αποτελούν μοντέλα της θεωρίας της $\mathscr{C}$.

Επίσης αν G είναι μια ομάδα θεωρούμενη ως κατηγορία, τότε ένας συναρτητής $F : G \to$ **Set** που αντιστοιχεί το μοναδικό αντικείμενο σε ένα σύνολο S και κάθε μορφισμό του G σε έναν αυτομορφισμό του S, είναι μια αναπαράσταση της G με μεταθέσεις ή συμμετρίες, ενώ ένας συναρτητής $F : G \to \mathbf{Matr}_R$ είναι μια αναπαράσταση της G με πίνακες, όπου, $\mathbf{Matr}_R$ είναι η κατηγορία πινάκων, με αντικείμενα του θετικούς ακέραιους και Hom-σύνολα $\mathrm{Hom}(m,n)$ το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων πάνω στον αντιμεταθετικό δακτύλιο R, σύνθεση δε, τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Έπίσης ένας συναρτητής $F : G \to$ **Vect** είναι ομοίως μια γραμμική αναπαράσταση της ομάδας G. Γενικεύοντας την έννοια της ομάδας στην έννοια της κατηγορίας παίρνουμε και μια γενική έννοια 'αναπαράστασης'.

(iii) Τέλος κάθε συναρτητής ως μορφισμός στην κατηγορία **CAT** μπορεί να ερμηνευθεί είτε ως γενικευμένο στοιχείο, είτε ως γενικευμένη ιδιότητα. Τέτοιοι ειδικοί συναρτητές-γενικευμένα στοιχεία αποτελούν τη βάση για ένα σπουδαίο είδος συναρτητών για τα μαθηματικά που είναι γνωστοί ως 'δράγματα' (sheaves), ενώ ειδικοί συναρτητές-γενικευμένες ιδιότητες αποτελούν τη βάση για 'νηματώσεις' (fibrations). Αν π.χ. $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{V}$ είναι ένας συναρτητής-γενικευμένη ιδιότητα που ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες που να τον κάνουν μια νημάτωση τότε, κάθε αντικείμενο $V \in \mathscr{V}_0$ καθορίζει μια κατηγορία-ίνα $F^{-1}(V)$ που συνήθως τη συμβολίζουμε και με $\mathscr{C}_V$, που αποτελείται από αντικείμενα $A \in \mathscr{C}_0$ με $FA = V$ και μορφισμούς $f \in \mathscr{C}_1$ με $Ff = 1_V$. Εξερχόμενοι, ειδικοί συναρτητές, από μια κατηγορία (π.χ. νηματώσεις) , $C : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{V}$ θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν μια **θεωρία ταξινόμησης των αντικειμένων της κατηγορίας σε ίνες**. Όπως είναι ίσως γνωστό ένα από τα βασικότερα προβλήματα των μαθηματικών είναι **η ταξινόμηση των αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$ ταυτίζοντας τα ισόμορφα αντικείμενα.** Τέτοια μεγάλα επιτεύγματα των μαθηματικών του $20^{ου}$ αιώνα είναι η πλήρης ταξινόμηση των αλγεβρών Lie πεπρασμένης διάστασης από τον Cartan, και η πλήρης ταξινόμηση των πεπρασμένων ομάδων, από πολλά και διάφορα άτομα, που η πλήρης απόδειξη γεμίζει αρκετούς τόμους!

Λόγω της μεγάλης σπουδαιότητας των συναρτητών για τα μαθηματικά, είναι φυσιολογικό να τους καταστήσουμε κεντρικό θέμα μελέτης. Αυτό γίνεται θεωρώντας 'συναρτητικές κατηγορίες', κατηγορίες δηλαδή τα αντικείμενα των οποίων είναι συναρτητές! Σε τέτοιες κατηγορίες οι μορφισμοί είναι οι 'φυσικοί μετασχηματισμοί' με τους οποίους θα ασχοληθούμε στη συνέχεια. Είναι φανερό ότι η ολιστική, κατηγορική μελέτη των συναρτητών απαιτεί να έχουμε αυτούς τους μορφισμούς. *Μόνο τότε θα μπορούμε να μελετήσουμε κατηγορικά τους συναρτητές με τη χρήση 'καθολικών ιδιοτήτων'.*

Έστω λοιπόν μια μεγάλη κατηγορία (**Cat** ή **CAT**) και $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ δύο συναρτητές. Ας θεωρήσουμε ότι οι συναρτητές F, G σχηματίζουν αντίστοιχες 'εικόνες' της κατηγορίας $\mathscr{C}$ στην κατηγορία $\mathscr{D}$. Το πρόβλημα που τίθεται είναι αν είναι δυματόν να έχουμε ένα είδος ολίσθησης ή 'μορφικής' σύμπτωσης της μιας εικόνας επι της άλλης (morphing) της εικόνας που σχηματίζει δηλαδή ο συναρτητής F στην αντίστοιχη εικόνα που σχηματίζει ο συναρτητής G. Ένα χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα είναι οι ομοτοπικοί τοπολογικοί χώροι, δειτε π.χ. το εξαιρετικό βιβλιαράκι για πρωτοετείς φοιτητές, [114, pp. 33-50]. Γενικότερα ένα βέλος ή μορφισμός μεταξύ δύο συναρτητών είναι ένας τρόπος βελών, μιας μορφικής σύμπτωσης της κατασκευής που σχετίζεται με το συναρτητή F στην αντίστοιχη κατασκευή που σχετίζεται με τον συναρτητή G. Τέτοιες όμως 'μορφικές' συμπτώσεις πρέπει να μπορούν να ανάγονται στα βασικά στοιχεία μια κατηγορίας, μορφισμούς, συνθέσεις και ταυτοτικά βέλη. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

10.3.3 Ορισμός. Έστω $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ δύο συναρτητές. Ένας **φυσικός μετασχηματισμός α** (φ.μ.)[9] από τον F στόν G, συμβολικά $\alpha : F \Rightarrow G$, είναι μια οικογένεια-κλάση μορφισμών της $\mathscr{D}$,

$(\alpha_A : FA \longrightarrow GA)_{A \in \mathscr{C}_0}$ δηλ. $\alpha : \mathscr{C}_0 \longrightarrow \mathscr{D}_1$ // $A \mapsto (\alpha_A : FA \longrightarrow GA)$ με δείκτες στην κλάση $\mathscr{C}_0$ τέτοια ώστε, το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\forall f"', "\in \mathscr{C}_1,"] \\
B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, dotted] & GA \arrow[d, "Gf"] \\
FB \arrow[r, "\alpha_B"'] & GB
\end{tikzcd}
$$

δηλ. $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$.

Ως 'σλόγκαν' η πιό πάνω θεμελιακή έννοια εκφράζεται ως:

[9] Βλ. [128, p. 18] «...η έννοια της 'κατηγορίας' ορίσθηκε για να μπορέσουμε να ορίσουμε την έννοια του 'συναρτητή' και η έννοια του 'συναρτητή' για να μπορέσουμε να ορίσουμε την έννοια του 'φυσικού μετασχηματισμού'»

Φυσικοί Μετασχηματισμοί. *Σε κάθε φυσική μεταφορά από την κατασκευή, $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ στην κατασκεύη $G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, αντιστοιχεί ένας φυσικός μετασχηματισμός, $\eta : F \Rightarrow G$, που εκτελεί αυτή την μεταφορά ώστε η κατασκεύη F να συμπέσει με την κατασκεύη G.*

Συμβολικά θα αναπαριστούμε έναν φυσικό μετασχηματισμό με το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

Μπορούμε επίσης να θεωρούμε και **συναρτητικές κατηγορίες**. Αν $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ είναι κατηγορίες, τότε θεωρούμε την κατηγορία $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, τα αντικείμενα της οποίας είναι συναρτητές $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ και βέλη φυσικοί μετασχηματισμοί $\eta : F \Rightarrow G$. Αν $F, G, H \in \mathscr{D}^{\mathscr{C}}_0$, και $\tau : F \Rightarrow G$ και $\sigma : G \Rightarrow H$ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί τότε η σύνθεση των φυσικών μετασχηματισμών $\sigma \circ \tau$ ορίζεται ως εξής: Αν $(f : A \longrightarrow B) \in \mathscr{C}_1$, τότε,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\forall f"', "\in \mathscr{C}_1,"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\tau_A"'] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[rr, bend left, dashed, "\sigma_A \circ \tau_A"] & GA \arrow[r, "\sigma_A"'] \arrow[d, "Gf"] & HA \arrow[d, "Hf"] \\ FB \arrow[r, "\tau_B"] \arrow[rr, bend right, dashed, "\sigma_B \circ \tau_B"'] & GB \arrow[r, "\sigma_B"] & HB \end{tikzcd}$$

με, $(\sigma \circ \tau)_A = \sigma_A \circ \tau_A$, για $A \in \mathscr{C}_0$. Επειδή δε τα δύο τετράγωνα του πιό πάνω διαγράμματος είναι αντιμεταθετικά, έχουμε ότι: $(\sigma \circ \tau)_B \circ F(f) = G(f) \circ (\sigma \circ \tau)_A$, και έτσι η οικογένεια $(\sigma \circ \tau)_{A \in \mathscr{C}_0}$ είναι οι συνιστώσες ενός φυσικού μετασχηματισμού $\sigma \circ \tau : F \Rightarrow H$. Αυτό φαίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} H(f) \circ (\tau_A \circ \sigma_A) &= (H(f) \circ \sigma_A) \circ \tau_A \\ &= (\sigma_B \circ G(f)) \circ \tau_A \\ &= \sigma_B \circ (G(f) \circ \tau_A) \\ &= \sigma_B \circ (\tau_B \circ F(f)) \\ &= (\sigma_B \circ \tau_B) \circ F(f). \end{aligned}$$

Περισσότερο πληροφοριακά παριστάνουμε την σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών με το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, bend left=50, "F"] \arrow[rr, "G" description] \arrow[rr, bend right=50, "H"'] & & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow\tau \quad \Downarrow\sigma$$

Υπάρχει επίσης και η οριζόντια σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathscr{E} \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "H\circ F"] \arrow[r, bend right, "K\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta*\alpha"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

όπου, $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ είναι κατηγορίες, F, G, H, K είναι συναρτητές και α, β φυσικοί μετασχηματισμοί. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε το 'γινόμενο Godement' ή οριζόντια σύνθεση των φυσικών μετασχηματισμών α και β, με τον ακόλουθο τύπο:

$$\beta * \alpha : H \circ F \Rightarrow K \circ G \;\; /\!\!/ \;\; (\beta * \alpha)_A = \beta_{GA} \circ H(\alpha_A) = K(\alpha_A) \circ \beta_{FA}$$

Δείξτε ότι πράγματι ο $\beta * \alpha$ είναι φ.μ. Πολλές φορές αντί του συμβολισμού $\beta * \alpha$ χρησιμοποιείται και ο $\beta\alpha$.

Υπάρχει ανάγκη εξοικείωσης με συνθέσεις φ.μ. με συναρτητές κ.λπ. Στα ακόλουθα διαγράμματα ο αντικειμενικός μας στόχος είναι η σύνθεση συναρτητών και φ.μ.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "H"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, "K"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, οι οποίες δεν είναι συμμετρικές. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "H"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, bend left, "F\circ H"] \arrow[r, bend right, "G\circ H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha H"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

με $(\alpha H)_A := \alpha_{HA}$. Το αντιμεταθετικό τετράγωνο που πρέπει να ικανοποιεί ο φ.μ. $(\alpha H)_A$ είναι στην ουσία το αντιμεταθετικό τετράγωνο του α_A εξειδικευμένο στις συνιστώσες του $(\alpha H)_A$.
Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, "K"] & \mathscr{E} \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "K\circ F"] \arrow[r, bend right, "K\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow K\alpha"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

με $(K\alpha)_A := K(\alpha_A)$. Το αντιμεταθετικό τετράγωνο που πρέπει να ικανοποιεί ο φ.μ. $(K\alpha)_A$ είναι στην ουσία το αντιμεταθετικό τετράγωνο του α_A μεταφερμένο μέσω του συναρτητού K. Επειδή δε ο K διατηρεί τις συνθέσεις είναι και αυτό αντιμεταθετικό τετράγωνο, βλ. και [16].

Ας δούμε κάπως πιο αναλυτικά το πιο πάνω διάγραμμα. Έχουμε τον φ.μ. $\lambda : F \Rightarrow G$ με τη μορφή μιάς οικογένειας μορφισμών $(\lambda_A : F(A) \to G(A))_{A\in\mathscr{C}_0}$. Επομένως αν έχουμε και το συναρτητή $H : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, τότε για κάθε $B \in \mathscr{B}_0$, $H(B) \equiv HB \in \mathscr{C}_0$ και επομένως υπάρχει αντίστοιχη συνιστώσα λ_{HB} του φ.μ. λ. Αν τώρα επιλέξουμε όλες αυτές τις συνιστώσες από την οικογένεια $(\lambda : F(A) \to G(A))_{A\in\mathscr{C}_0}$, έχουμε τότε έναν άλλο φ.μ. (Να δειχθεί ότι είναι πράγματι φ.μ.) $(\lambda_{HA} : FHB \to GHB)_{B\in\mathscr{B}_0}$, που θα τον συμβολίζουμε με $\lambda H : FH \Rightarrow GH$. Ομοίως και για τον φ.μ. $K\lambda : KF \Rightarrow KG$.

10.3.4 Ασκήσεις. Έστω το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, "E"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left=50, "F_1"] \arrow[r, "F_2" description] \arrow[r, bend right=50, "F_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\kappa"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\lambda"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "G_1"] \arrow[r, "G_2" description] \arrow[r, bend right=50, "G_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\mu"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\nu"] & \mathscr{D} \arrow[r, "H"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $(\nu\circ\mu)(\lambda\circ\kappa) = (\nu\lambda)\circ(\mu\kappa)$.

(ii) $(H\circ G_1)\kappa = H(G_1\kappa)$.

(iii) $\mu(F_1\circ E) = (\mu F_1)E$

(iv) $G_1(\lambda\circ\kappa)E = (G_1\lambda E)\circ(G_1\kappa E)$

(v) $(\mu F_2)\circ(G_1\kappa) = (G_2\kappa)\circ(\mu F_1)$.

Θα συμβολίζουμε συνήθως τα Hom-σύνολα της κατηγορίας $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, και κάθε συναρτητικής κατηγορίας ως,

$$\mathrm{Nat}(F,G) \equiv \mathscr{D}^{\mathscr{C}}(F,G) := \{\,\eta\,|\,\eta : F \Rightarrow G\,\}.$$

Η έννοια του 'ισομορφισμού' σε συναρτητικές κατηγορίες λέγεται '**φυσικός ισομορφισμός**,' τα δε ταυτοτικά βέλη εδώ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί $1_F : F \Rightarrow F$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $A \in \mathscr{C}_0$ το ταυτοτικό βέλος, $1_{F(A)} : F(A) \longrightarrow F(A) \in \mathscr{D}_1$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός. Συνοψίζοντας, θα λέμε ότι δύο συναρτητές $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι **φυσικώς ισοδύναμοι** και θα γράφουμε $F \cong G$ ανν υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\eta : F \Rightarrow G$, δηλαδή μια οικογένεια $(\eta_A : FA \longrightarrow GA)_{A\in\mathscr{C}_0}$ με κάθε συνιστώσα η_A να είναι ισομορφισμός.

10.3.5 Σχόλιο. Αξίζει κανείς να παρατηρήσει, ότι έχουμε ήδη παραστεί μάρτυρες μιας βασικής πλευράς της εννοίας της 'μαθηματικής δομής' που αξίζει να διατυπωθεί ως σλόγκαν[10]:

> **Επίπεδα Μαθηματικών Δομών.** Τα στοιχεία έχουν δομή, και έτσι οι μαθηματικές δομές συγκροτούνται και εκτυλίσσονται, σε 'επίπεδα πραγματικότητας', που αποτελούν κατηγορίες!

Μέχρι τώρα έχουμε δεί τρία επίπεδα στα οποία εκτυλίσσονται οι 'μαθηματικές δομές'. **Το επίπεδο της κατηγορίας**, **το επίπεδο των συναρτητών** και **το επίπεδο των φυσικών μετασχηματισμών**. Δηλαδή, μια κατηγορία $\langle \mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1 \rangle$ με τα αντικείμενα και τους μορφισμούς της αποτελεί το πρώτο επίπεδο, η **CAT** ή η **Cat** με αντικείμενα κατηγορίες και βέλη συναρτητές, αποτελεί το δεύτερο επίπεδο και τέλος οι συναρτητικές κσατηγορίες, με αντικείμενα συναρτητές και βέλη φυσικούς μετασχηματισμούς, αποτελεί το τρίτο επίπεδο. Βλέπε και στη συνέχεια ότι π.χ. η **Cat** μπορεί να θεωρηθεί ως μια 2-κατηγορία με 0-στοιχεία, 1-στοιχεία και 2-στοιχεία, τις κατηγορίες, τους συναρτητές και τους Φυσικ. μετασχηματισμούς αντίστοιχα. Πολλές φορές όταν μελετάμε μια έννοια της Θεωρίας Κατηγοριών, η έννοια αυτή γίνεται πιό απλή όταν εξετάζεται από υψηλότερο δομικό επίπεδο. Η πολυεπίπεδη αυτή φύση όμως, της Θεωρίας Κατηγοριών είναι ίσως από της βασικές της δυσκολίες, που πρέπει να υπερπηδηθεί. Αυτό μπορεί να γίνει αν κάθε κατηγορική έννοια κατανοείται και ορίζεται στα διαφορετικά επίπεδα της δομής. Είναι φανερό ότι η 'κατηγορία' **CAT** θέτει ένα άνω φράγμα, και επομένως από την άποψη των αντικειμένων η κατηγορία **CAT** είναι το ανώτερο δυνατό. Από την άποψη όμως των βελών μπορούμε να θεωρούμε n-κατηγορίες, $n \in \mathbb{N}$, που συγκροτούνται από 0-στοιχεία ή 0-κελιά που είναι τα αντικείμενα της κατηγορίας $A \in \mathscr{C}_0$, από 1-στοιχεία, που είναι οι μορφισμοί, $f \in \mathscr{C}_1$, από 2-στοιχεία που είναι βέλη μεταξύ βελών, από 3-στοιχεία που είναι βέλη, μεταξύ βελών, μεταξύ βελών, κ.λπ., Έτσι η κατηγορία **Cat**, μπορεί να θεωρηθεί ως μια 2-κατηγορία, με 0-στοιχεία τις κατηγορίες, 1-στοιχεία τους συναρτητές και 2-στοιχεία τους φυσικούς μετασχηματισμούς, όσα δηλαδή είναι και τα επίπεδα δομής που έχουμε διακρίνει προηγουμένως. Η ανάγκη για μια τέτοια θεώρηση των n-κατηγοριών προέρχεται από ανάγκες της Αλγεβρικής Γεωμετρίας, της Θεωρητικής Πληροφορικής, της Λογικής, και βεβαίως της ίδιας της Θεωρίας κατηγοριών. Για το λόγο αυτό οι n-κατηγορίες αποτελούν ένα σύγχρονο αντικείμενο έρευνας, βλ. [123].

[10] Δείτε και το θαυμάσιο άρθρο [39] για μια έκθεση της παθολογίας του 'σημείου' και της μαθηματικής δομής.

Το ακόλουθο Θεώρημα σκιαγραφεί με θαυμαστό τρόπο, το ρόλο των επιπέδων δομής: Η έννοια της ισομορφίας στο επίπεδο των κατηγοριών, δίνει την **έννοια της φυσικής ισομορφίας** όταν εκφρασθεί στο επίπεδο των συναρτητών.

10.3.6 Θεώρημα. *Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\eta : F \Rightarrow G$ είναι φυσικός ισομορφισμός άνν υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\mu : G \Rightarrow F$ τέτοιος ώστε,*

$$\mu \circ \eta = 1_F \quad \& \quad \eta \circ \mu = 1_G \tag{10.2}$$

Απόδ. ($\Rightarrow$) Έστω ο φυσικός μετασχηματισμός $\eta : F \Rightarrow G$. Ορίζουμε τότε έναν άλλο φυσικό μετασχηματισμό $\mu : G \Rightarrow F$, ορίζοντας κάθε συνιστώσα του $\mu_A, \quad A \in \mathscr{C}_0$ ως εξής:

$$\mu := \eta_A^{-1} : GA \longrightarrow FA$$

Επειδή,

$$\begin{aligned}(\mu \circ \eta)_A &= \mu_A \circ \eta_A = \eta_A^{-1} \circ \eta_A = 1_{FA}\\ (\eta \circ \mu)_A &= \eta_A \circ \mu_A = \eta_A \circ \eta_A^{-1} = 1_{GA}\end{aligned}$$

έχουμε ότι, $\mu \circ \eta = 1_F$ και $\eta \circ \mu = 1_G$ ⊣□

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\mu : G \longrightarrow F$ με $\mu \circ \eta = 1_F$ και $\eta \circ \mu = 1_G$. Τότε για κάθε $A \in \mathscr{C}_0$, έχουμε,

$$\begin{aligned}\mu_A \circ \eta_A &= (\mu \circ \eta)_A = 1_{FA}\\ \eta_A \circ \mu_A &= (\eta \circ \mu)_A = 1_{GA}\end{aligned}$$

Άρα κάθε μ_A είναι ισομορφισμός. ⊣■

Ας έλθουμε τώρα στη μελέτη της εννοίας της υποκατηγορίας.

10.3.7 Ορισμός. **(i)** Μια κατηγορία $\mathscr{D}$ είναι **υποκατηγορία** της κατηγορίας $\mathscr{C}$, γράφουμε δε $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ ανν,

1. Κάθε αντικείμενο της $\mathscr{D}$ είναι και αντικείμενο της $\mathscr{C}$, δηλ. $\mathscr{D}_0 \subseteq \mathscr{C}_0$
2. Για όλα τα $\mathscr{D}$-αντικείμενα A, A', έχουμε: $\mathscr{D}(A, A') \subseteq \mathscr{C}(A, A')$, και,
3. Οι συνθέσεις και τα ταυτοτικά βέλη είναι τα ίδια στις, $\mathscr{D}$ και $\mathscr{C}$.

Έχουμε δηλαδή ότι, για κάθε $\mathscr{D}$-βέλος $f \in \mathscr{D}(A, A')$,

$$\mathrm{dom}_{\mathscr{C}}(f) = \mathrm{dom}_{\mathscr{D}}(f) \in \mathscr{D}_0, \quad \mathrm{cod}_{\mathscr{C}}(f) = \mathrm{cod}_{\mathscr{D}}(f) \in \mathscr{D}_0,$$

και για κάθε $A \in \mathscr{D}_0, \quad 1_A \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{D}_1$. Τέλος για κάθε ζεύγος $f, g \in \mathscr{D}_2$ έχουμε ότι,

$$g \circ_{\mathscr{C}} f = g \circ_{\mathscr{D}} f \in \mathscr{D}_1,$$

Δηλαδή η κατηγορία $\mathscr{D}$ είναι υποκατηγορία της $\mathscr{C}$ ανν η $\mathscr{D}$ είναι κλειστή ως πρός τις 'πράξεις' $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}, 1_{(.)}$, και $\circ$. Στο ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι η εικόνα $F[\mathscr{C}] \equiv (F_0[\mathscr{C}_0], F_1[\mathscr{C}_1])$ μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$ μέσω ενός συναρτητή $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ δεν είναι κατηγορία, πολύ δε περισσότερο υποκατηγορία της $\mathscr{D}$. Ωστόσο ο συναρτητής διατηρεί την κατηγορική δομή! (βλ. Παράδειγμα 10.3.8

Η έννοια της μεστής υποκατηγορίας και κατ' επέκταση του μεστού συναρτητού, τακτοποιεί τέτοιες άσχημες συμπεριφορές.

(ii) Μια υποκατηγορία $\mathscr{D}$ θα λέγεται, **μεστή** (full)[11] υποκατηγορία της $\mathscr{C}$ ανν για κάθε ζεύγος αντικειμένων $A, B \in \mathscr{D}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B).$$

10.3.8 Παράδειγμα. Αν $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι ένας συναρτητής, τότε η εικόνα $F[\mathscr{C}] := (F_0[\mathscr{C}_0], F_1[\mathscr{C}_1])$ δεν είναι αναγκαία κατηγορία, και έτσι ούτε υποκατηγορία της $\mathscr{D}$. Έτσι *παρ' όλο που οι συναρτητές διατηρούν την κατηγορική δομή, ωστόσο η εικόνα μια κατηγορίας μέσω ενός συναρτητού δεν είναι αναγκαία κατηγορία!.*

Λύση. Πάρτε π.χ. την κατηγορία $\mathbf{2}+\mathbf{2}$ και την κατηγορία $\mathbf{3}$. Ο κανονικός τρόπος κατασκευής της κατηγορίας $\mathbf{2}+\mathbf{2}$ είναι:

Έστω η ξένη ένωση, $\mathbf{2}+\mathbf{2} := \{2\times\{0\}\}\cup\{2\times\{1\}\} = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$. Παραλείποντας τα ταυτοτικά βέλη έχουμε την κατηγορία $\mathbf{2}+\mathbf{2}$ που συγκρο-

[11] Αποδίδουμε έτσι τον όρο full, κρατώντας το 'πλήρης' για την απόδοση του όρου 'complete'.

τείται από δύο ‘διαφορετικά’ αντίγραφα της κατηγορίας **2**, δηλ.

$$\begin{tikzcd}
(0,1) \arrow[r, "f'"] & (1,1) \\
(0,0) \arrow[r, "f"'] & (1,0)
\end{tikzcd}$$

Έστω και η κατηγορία **3**,

$$\begin{tikzcd}
 & 2 & \\
0 \arrow[ur, "\beta\circ\alpha"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & 1 \arrow[ul, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Ορίστε τώρα τον συναρτητή, $F : \mathbf{2}+\mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{3}$ ως εξής:

$$\begin{array}{lcl}
(0,0) & \mapsto & 0 \\
(1,0) & \mapsto & 1 \qquad F(f)=\alpha \\
(0,1) & \mapsto & 1 \qquad F(f')=\beta \\
(1,1) & \mapsto & 2
\end{array}$$

Τότε, $F[\mathbf{2}+\mathbf{2}]$ είναι ίση με το ακόλουθο γράφημα,

$$\begin{tikzcd}
 & F(1,1)=2 & \\
F(0,0)=0 \arrow[rr, "F(f)=\alpha"'] & & F(0,1)=1=F(1,0) \arrow[ul, "F(f')=\beta"']
\end{tikzcd}$$

αλλά το γράφημα $F[\mathbf{2}+\mathbf{2}]$ είναι ένα υπογράφημα του **3** αλλά *δεν είναι κατηγορία*, αφού $\mathrm{cod}F(f)=\mathrm{dom}F(f')$ αλλά δεν υπάρχει η σύνθεσή τους. ⊣

Επίσης η κατηγορία **FinSet** είναι μια μεστή υποκατηγορία της **Set** αφού κάθε βέλος μεταξύ αντικειμένων της **FinSet** είναι και βέλος στην κατηγορία **Set** και αντίστροφα κάθε βέλος μεταξύ πεπερασμένων συνόλων στην **Set** είναι και βέλος στην κατηγορία **FinSet**. Όμως η κατηγορία **Set** είναι απλά υποκατηγορία της κατηγορίας **Pfn**, των συνόλων και των μερικών συναρτήσεων, αλλά δεν είναι μεστή υποκατηγορία, αφού μεταξύ δύο συνόλων υπάρχουν περισσότερες μερικές συναρτήσεις από ότι συναρτήσεις. Επίσης η κατηγορία των μονοειδών **Mon** είναι μια υποκατηγορία της κατηγορίας των ημιομάδων **Smgrp** αλλά δεν είναι μεστή υποκατηγορία, αφού ένας ομομορφισμός ημιομάδων δεν διατηρεί αναγκαία τα ουδέτερα στοιχεία των μονοειδών.

10.3.9 Ασκήσεις.

1. Δώστε ένα παράδειγμα με $\mathscr{D}_0 \subseteq \mathscr{C}_0$ αλλά η $\mathscr{D}$ να μην είναι υποκατηγορία της $\mathscr{C}$.
2. Ποιές είναι οι υποκατηγορίες ενός μ.δ.σ. $\langle P, \leq\rangle$, θεωρουμένου σαν κατηγορία;
3. Εξετάστε την ίδια ερώτηση για την περίπτωση που έχουμε την κατηγορία μιάς ομάδας.

10.4 Κατηγορικές Κατασκευές

10.4.1 Διαγράμματα

Έστω, $\mathscr{I}$ και $\mathscr{C}$ δύο προσανατολισμένα γραφήματα. Ένα **διάγραμμα** στο $\mathscr{C}$ με σχήμα $\mathscr{I}$ είναι ένας ομομορφισμός γραφημάτων,

$$D : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{C}$$

Το γράφημα $\mathscr{I}$ λέγεται **διαγραμματικό σχήμα** του διαγράμματος D.

10.4.1 Παράδειγμα. Μερικά παραδείγματα διαγραμματικών σχημάτων είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & j \arrow[dl, "v"] \\ & k & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} p \arrow[r, shift left, "f"] & q \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & j \\ i \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & k \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[r, "e"] & j \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & k \end{tikzcd}$$

Όταν το συν-πεδίο ορισμού ενός διαγράμματος είναι το υποκείμενο γράφημα μιας κατηγορίας, $U(\mathscr{C})$ τότε λόγω των ιδιοτήτων της κατηγορίας μπορούμε να μιλάμε για αντιμεταθετικά διαγράμματα, που είναι ο τρόπος με τον οποίο οι κατηγορικοί εκφράζουν εξισώσεις.[12] Αυτό το τελευταίο μπορούμε να το διατυπώσουμε και ως σλόγκαν:

«Τα αντιμεταθετικά διαγράμματα, είναι ο τρόπος με τον οποίο οι κατηγορικοί εκφράζουν εξισώσεις»

Συνήθως γράφουμε $D : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{C}$ αντί του $D : \mathscr{I} \longrightarrow U(\mathscr{C})$ για ένα κατηγορικό διάγραμμα.

10.4.2 Παράδειγμα. Αντιμεταθετικά Διαγράμματα Σε ένα κατηγορικό διάγραμμα το βέλος που σηματοδοτεί την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος, συνήθως το υποδηλώνουμε νε ένα διακεκομένο βέλος.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, dashed] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "r"'] & D \end{tikzcd} \quad r \circ h = g \circ f \quad (a), \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd} \quad (b), \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd} \quad (c)$$

[12]Για περισσότερα επί των εξισώσεων και των αντικαταστάσεων, με κατηγορικό τρόπο βλ. [85]

Πότε όμως τα διαφράμματα (b) και (c) θα είναι αντιμεταθετικά; Για το (b) θα πρέπει να έχουμε: $f \circ e = g \circ e$. Το (c) είναι περισσότερο μπερδεμένο. Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν το διάγραμμα (c) είναι αντιμεταθετικό τότε,

$$g \circ f = 1_A \quad \& \quad f \circ g = 1_B$$

δηλαδή τα αντικείμενα A και B είναι ισομορφικά.

Όταν εξετάζουμε μαθηματικές δομές το ενδιαφέρον μας είναι πάντα στο πως θα κατασκευάζουμε νέες δομές από δοθείσες. Όμοια και εδώ, έχουμε τις ακόλουθες κατασκευές:

10.4.2 Ελεύθερες κατηγορίες παραγόμενες από γραφήματα.

Έστω $\mathscr{G}$ ένα γράφημα. Υπάρχει τότε κατηγορία $F(\mathscr{G})$ τα αντικείμενα της οποίας είναι οι κορυφές $\mathscr{G}_0$ του γραφήματος $\mathscr{G}$, τα δε βέλη είναι οι k-τροχιές ή k-μονοπάτια $(f_1, \ldots, f_n)$ επι του γραφήματος $\mathscr{G}$. Η σύνθεση των βελών $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ και $(f_{k+1}, \ldots, f_n)$ δίδεται από τον τύπο,

$$(f_1, f_2, \ldots, f_k) \circ (f_{k+1}, \ldots, f_n) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

Η σύνθεση αυτή είναι προσεταιριστική και για κάθε ακμή υπάρχει το ταυτοτικό βέλος 1_A που είναι η κενή ή 0-τροχιά από το A στο A.

10.4.3 Διαγραμματικές Κατηγορίες.

Έστω Σ ένα διάγραμμα και $\mathscr{C}$ μία κατηγορία. Θα συμβολίζουμε με $[\Sigma, \mathscr{C}] \equiv \mathscr{C}_{\sum}$ την κατηγορία των Σ-διαγραμμάτων στην $\mathscr{C}$. Θεωρώντας το διάγραμμα Σ ως μια μικρή κατηγορία, είναι φανερό ότι η κατηγορία $\mathscr{C}_{\sum}$ είναι μια συναρτητική κατηγορία με αντικείμενα συναρτητές και βέλη φυσικούς μετασχηματισμούς. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και οι συναρτητικές κατηγορίες που έχουμε ήδη μνημονεύσει.

10.4.4 Γινόμενο δύο Κατηγοριών

Έστω $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ δύο κατηγορίες. Το **γινόμενό τους**, που θα το συμβολίζουμε με $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$, ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
(\mathscr{C} \times \mathscr{D})_0 &:= \ \{(C, D) \,|\, C \in \mathscr{C}_0, \ D \in \mathscr{D}_0\} \quad \text{και} \\
(\mathscr{C} \times \mathscr{D})_1 &:= \ \{(f, g) \,|\, f \in \mathscr{C}_1, \ g \in \mathscr{D}_1\}
\end{aligned}$$

Η σύνθεση βελών και τα ταυτοτικά βέλη ανάγονται στις αντίστοιχες συνιστώσες:

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g) \quad \text{και} \quad 1_{(C,D)} = (1_C, 1_D)$$

Όπως πάντα όταν θεωρούμε γινόμενα έχουμε και απαραίτητες συναρτήσεις προβολών:

$$\mathscr{C} \xleftarrow{\pi_1} \mathscr{C} \times \mathscr{D} \xrightarrow{\pi_2} \mathscr{D}$$

που ορίζονται ως συνήθως: $\pi_1(C, D) := C$ και $\pi_2(C, D) := D$ και ομοίως για τα βέλη: $\pi_1(f, g) := f$ και $\pi_2(f, g) := g$. Θα μπορούσε κανείς να ορίσει το γινόμενο δύο κατηγοριών, ως το γινόμενο στη κατηγορία των κατηγοριών **CAT** το οποίο υπάρχει πάντοτε. Το ίδιο ισχύει και για άλλες κατηγορικές κατασκευές.

10.4.3 Ασκήσεις. **(i)** Έστω δύο ομάδες G και G', θεωρούμενες ως κατηγορίες με ένα μοναδικό αντικείμενο. Σχηματίστε το γινόμενο των κατηγοριών. Σχολιάστε το (τι σας θυμίζει;).
(ii) Κάντε το ίδιο με δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα (μ.δ.σ.).
(iii) Δείξτε ότι στην κατηγορία **Cat** έχουμε έναν φυσικό ισομορφισμό,

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{C} \times \mathscr{D}, \mathscr{E}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{E}^{\mathscr{D}})$$

10.4.5 Η Αντίθετη ή Δυϊκή Κατηγορία

Αν $\mathscr{C}$ είναι μια δοθείσα κατηγορία, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια άλλη κατηγορία που την συμβολίζουμε με $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, με το να «αντιστρέψουμε τα βέλη» της $\mathscr{C}$. Η **αντίθετη ή δυϊκή κατηγορία** $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$ ορίζεται ως εξής:

(i) Τα αντικείμενα της $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ είναι τα ίδια με τα αντικείμενα της $\mathscr{C}$.

(ii) Τα βέλη της $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ είναι τα ίδια με τα βέλη της κατηγορίας $\mathscr{C}$ αλλά αντεστραμμένα, δηλ. αν $(f : A \longrightarrow B) \in \mathscr{C}_1$ τότε $(f^{\mathrm{op}} : B \longrightarrow A) \in \mathscr{C}_1^{\mathrm{op}}$. Έτσι, για κάθε $A, B \in \mathscr{C}_0^{\mathrm{op}} = \mathscr{C}_0$, έχουμε $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}(A, B) = \mathscr{C}(B, A)$

(iii) Για τη σύνθεση των βελών έχουμε τα ακόλουθα διαγράμματα:

Αν

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[loop above, "1_A"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, dashed, "h=g\circ f"] & \\ B \arrow[rr, "g"'] & & C \end{tikzcd}$$

τότε

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[loop above, "1_A"] & \\ B \arrow[ur, "f^{\mathrm{op}}"] & & C \arrow[ul, dashed, "h^{\mathrm{op}}=f^{\mathrm{op}}\circ g^{\mathrm{op}}"'] \arrow[ll, "g^{\mathrm{op}}"] \end{tikzcd}$$

$\mathscr{C}$ $\qquad$ $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$

Η αντίθετη κατηγορία $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, ορίζεται σχετικά εύκολα, αλλά ο πραγματικός υπολογισμός και η κατανόηση της ουσίας των μορφισμών της $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ είναι πολλές φορές εξαιρετικά δύσκολος. Ήδη για να υπολογίσουμε την f^{op} στην περίπτωση της κατηγορίας **Set**, στο Εδάφιο 2.3.1, είδαμε πόση δουλειά χρειάζεται. Στη συνέχεια θα δώσουμε μια εναλλακτική κατασκευή της αντίθετης κατηγορίας στην περίπτωση που έχουμε κατηγορίες συνόλων.

10.4.4 Παράδειγμα. Έστω μια κατηγορία $\mathscr{C}$ συνόλων και συναρτήσεων. Έστω επίσης Ω ένα σύνολο το οποίο περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Κατασκευάζουμε μια κατηγορία $\mathscr{D}$ ως εξής: $\mathscr{D}_0 := \{\Omega^X \mid X \in \mathscr{C}_0$ και $\mathscr{D}_1 := \{\Omega^f : \Omega^X \to \Omega^Y \mid (f : X \to Y) \in \mathscr{C}_1\}$ όπου η συνάρτηση $\Omega^f(g) := g \circ f$. Τότε η έτσι κατασκευασθείσα κατηγορία είναι ισομορφική με την $\mathscr{C}^{\,\mathrm{op}}$. (Αποδείξτε το!)

Πολλά διάσημα δυϊκά θεωρήματα (Δυϊκότητα του Stone, δυϊκότητα του Gelfand, και η δυϊκότητα του Pontryagin βλ. [103]) ισχυρίζονται ότι η δυϊκή μιας κατηγορίας είναι (ή είναι φυσικά ισόμορφη) με μια άλλη συγκεκριμένη κατηγορία. Το γεγονος αυτό ενισχύει περισσότερο την άποψη ότι ο υπολογισμός της δυϊκής κατηγορίας είναι μια σοβαρή υπόθεση. Γενικώς η αντίθετη κατηγορία μιας διαισθητικά ξεκάθαρης κατηγορίας, μπορεί να μην είναι καθόλου διαισθητικά προσβάσιμη, αλλά και ο υπολογισμός της να είναι τεχνικά εξαιρετικά δύσκολος. Ένα τέτοιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η αντίθετη κατηγορία της κατηγορίας **CRng** των αντιμεταθετικών δακτυλίων με μονάδα. Αφού η κατηγορία **CRng** είναι μια καθαρά αλγεβρική κατηγορία, αναμένει κανείς ότι η αντιστροφή των βελών θα μετατρέπει 'το αλγεβρικό' σε 'γεωμετρικό'. Πράγματι η κατηγορία $\mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$ είναι ισοδύναμη με την κατηγορία των αφινικών σχημάτων (affine schemes) που αποτελούν την βάση για την σύγχρονη Αλγεβρική Γεωμετρία. Από την άλλη μεριά το πιο πάνω παράδειγμα δείχνει ταυτόχρονα και τη δύναμη της γλώσσας της Θεωρίας Κατηγοριών.

10.4.5 Παράδειγμα. Αν $\mathbb{P} \equiv \langle P, \leq \rangle$ είναι ένα μ.δ.σ. θεωρούμενο ως κατηγορία, τότε το $\mathbb{P}^{\,\mathrm{op}}$ είναι απλά το μ.δ.σ. $\mathbb{P}^{\,\mathrm{op}} = \langle P, \geq \rangle$. Για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, έστω $X := \{\,0,1,2\,\}$ και $\mathbb{P} \equiv \langle \mathscr{P}(X), \subseteq \rangle$ το μ.δ.σ. του δυναμοσυνόλου. Τότε τα δύο μ.δ.σ. $\mathbb{P}$ και $\mathbb{P}^{\,\mathrm{op}}$ παρίστανται ως ακολούθως:

$$\begin{tikzcd}
 & \{0,1,2\} & \\
\{0,1\} \arrow[ur] & \{0,2\} \arrow[u] & \{1,2\} \arrow[ul] \\
\{0\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{1\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \{0,1,2\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{0,1\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[d] \arrow[dr] & \{0,2\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \{1,2\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\{0\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[dr] & \{1\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[d] & \{2\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[dl] \\
 & \emptyset^{\,\mathrm{op}} &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}^{\,\mathrm{op}}$

10.4.6 Αρχή του Δυϊσμού. Η γλώσσα της Θεωρίας Κατηγοριών, οικοδομείται πάνω σε ένα αλφάβητο, που περιέχει τους ακόλουθους όρους:

(**αντικείμενα**)	$A, B, \ldots$
(**βέλη ή μορφισμοί**)	$f, g, \ldots$
(**Τελεστές**)	$\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f), 1_A, g \circ f$

που ικανοποιούν τα γνωστά αξιώματα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια 'πρόταση' Σ, εκφρασμένη στην στοιχειώδη γλώσσα της Θεωρίας Κατηγοριών. Μπορούμε τότε να σχηματίσουμε τη δυϊκή 'πρόταση'[13] Σ^* κάνοντας την ακόλουθη αντικατάσταση:

$$\begin{array}{ccc} g \circ f & \rightsquigarrow & f \circ g \\ \mathrm{dom} & \rightsquigarrow & \mathrm{cod} \\ \mathrm{cod} & \rightsquigarrow & \mathrm{dom} \end{array}$$

Η Λογική, (ποσοδείκτες, λογικοί σύνδεσμοι, κ.λπ.) παραμένει αμετάβλητη.

Η πιο πάνω διαδικασία αντικατάστασης, μετατρέπει μια πρόταση Σ για την κατηγορία $\mathscr{C}$, σε μια δυϊκή 'πρόταση' Σ^* που αναφέρεται ή ερμηνεύεται στην αντίθετη κατηγορία $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

Παρατηρείστε επίσης ότι τα αξιώματα της Θεωρίας Κατηγοριών (Θ.Κ.) είναι αυτοδυϊκά, δηλ.

$$\{\text{Αξιώματα Θ.Κ.}\}^* = \{\text{Αξιώματα Θ.Κ.}\}.$$

Ο πιο κάτω πίνακας συνοψίζει κάποιες βασικές δυϊκές προτάσεις:

Πρόταση Σ	**Πρόταση Σ^***
$f : A \longrightarrow B$	$f : B \longrightarrow A$
$A = \mathrm{dom} f$	$A = \mathrm{cod} f$
$i = 1_A$	$i = 1_A$
$h = g \circ f$	$h = f \circ g$
f είναι μονομορφισμός	f είναι επιμορφισμός
f είναι διασπασμένος μονομορφισμός	f είναι διασπασμένος επιμορφισμός
Η f είναι ισομορφισμός	Η f είναι ισομορφισμός
$F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι συναρτητές.	$F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι συναρτητές.
$\eta : F \Rightarrow G$ είναι φυσικός μετασχηματισμός.	$\eta : F \Rightarrow G$ είναι φυσικός μετασχηματισμός.

Για τις έννοιες του μονομορφισμού, επιμορφισμού κ.λπ. βλ. §10.5.

[13] Ο δυϊσμός εδώ αναφέρεται αυστηρά στην γλώσσα των κατηγοριών, και όχι σε κάποιο 'λογικό δυϊσμό' όπου υπάρχει εναλλαγή ποσοδεικτών, συνδέσμων κ.λπ.

Έτσι αν έχουμε λοιπόν αποδείξει, χρησιμοποιώντας μόνον τα αξιώματα τη Θ.Κ., την πρόταση φ από την Σ δηλ. $\Sigma \vdash \varphi$ τότε θα έχουμε και την $\Sigma^* \vdash \varphi^*$.

Η Αρχή του Δυϊσμού διατυπώνεται λοιπόν ως ακολουθως:

> Αν η πρόταση Σ της στοιχειώδους Θ.Κ. είναι απόρροια των αξιωμάτων της Θ.Κ. τότε το ίδιο ισχύει και για την δυϊκή πρόταση Σ^*, ή
>
> $$\text{Αν } \mathscr{C} \models \Sigma \text{ τότε } \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \models \Sigma^*$$
>
> Επειδή δε $(\Sigma^*)^* = \Sigma$ και $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathscr{C}$ έπεται ότι,
>
> $$\text{Αν } \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \models \Sigma^* \text{ τότε } \mathscr{C} \models \Sigma$$

10.4.6 Η Κατηγορία Βελών

Αν θεωρήσουμε τα πεπρασμένα διαγραματικά σχήματα **1** και **2** ή κατηγορίες, τότε $\mathscr{C}^{\mathbf{1}} \equiv \mathscr{C}$ και $\mathscr{C}^{\mathbf{2}} \equiv \mathscr{C}^{\to}$ είναι η κατηγορία των βελών της $\mathscr{C}$. Δηλαδή η κατηγορία με αντικείμενα τα βέλη της κατηγορίας $\mathscr{C}$ και άν $f : A \to B, f' : A' \to B'$ είναι δύο αντικείμενα της $\mathscr{C}^{\to}$ τότε ένα βέλος της κατηγορίας $\mathscr{C}^{\to}$ είναι ένα ζεύγος (h, k) βελών της $\mathscr{C}$ τέτοιων ώστε το ακόλουθο διάγραμμα, να αντιμετατίθεται,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dotted] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "k"'] & B' \end{tikzcd}$$

10.4.7 Οι Κατηγορίες-Τεμάχια και Οι Κόμμα Κατηγορίες

Πολλές φορές θα θέλαμε να θεωρήσουμε όλα τα γενικευμένα στοιχεία ή όλες τις γενικευμένες ιδιότητες ενός αντικειμένου $A \in \mathscr{C}_0$. Οδηγούμαστε έτσι στο να θεωρήσουμε τις ακόλουθες κατηγορίες. Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και $A \in \mathscr{C}_0$, τότε η κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C}\!\downarrow\! A$ όλων των γενικευμένων στοιχείων του αντικειμένου A, ορίζεται ως εξής:

(i) Ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{C}\!\downarrow\! A$ είναι ένα γενικευμένο στοιχείο $T \xrightarrow{x} A, \quad T \in \mathscr{C}_0$.

(ii) Ένα βέλος της κατηγορίας $\mathscr{C}\!\downarrow\! A$ από το αντικείμενο $T \xrightarrow{x} A$ στο αντικείμενο $T' \xrightarrow{x'} A$ είναι ένα βέλος $(h : T \longrightarrow T') \in \mathscr{C}_1$ τέτοιο ώστε, το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dd, dashed, "h"'] \arrow[dr, "x"] & \\ & A \\ T' \arrow[ur, "x'"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{με} \quad x = x' \circ h$$

(iii) Έστω τα αντικείμενα, $x : T \longrightarrow A$, $x' : T' \longrightarrow A$, $x'' : T'' \longrightarrow A$, και τα βέλη, $h : T \longrightarrow T'$, $h' : T' \longrightarrow T''$. Τότε η σύνθεση των βελών $h \circ h'$ δίδεται από το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "x"] \arrow[dd, dashed, bend right=60, "h' \circ h"'] & \\ & T' \arrow[r, "x'"] \arrow[d, dashed, "h'"] & A \\ & T'' \arrow[ur, "x''"'] & \end{tikzcd}$$

Πολλές φορές είναι βολικό να εκλαμβάνουμε τα αντικείμενα της $\mathscr{C}\!\downarrow\! A$ σαν ζεύγη (T, x), όπου $x : T \to A$. Η κατηγορία $\mathscr{C}\!\downarrow\! A$ όπως έχει ορισθεί, δεν είναι μια υποκατηγορία της κατηγορίας βελών $\mathscr{C}^{\to}$, της οποίας ουσιαστικά αποτελεί κομμάτι, αφού έχουν διαφορετικά βέλη. Μπορούμε ωστόσο να ταυτίζουμε ένα βέλος $h : (T_1, x_1) \to (T_2, x_2)$ με το $\mathscr{C}^{\to}$-βέλος $(h, 1_A)$. Με διαγράμματα αυτή η ταύτιση ισοδυναμεί με την ταύτιση των ακολούθων διαγραμμάτων:

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[dd, dashed, "h"'] \arrow[dr, "x_1"] & \\ & A, \\ T_2, \arrow[ur, "x_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, "x_1"] \arrow[d, dashed, "h"'] & A \arrow[d, "1_A"] \\ T_2 \arrow[r, "x_2"'] & A \end{tikzcd}$$

Έτσι η κατηγορία $\mathscr{C}\!\downarrow\! A$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια υποκατηγορία της $\mathscr{C}^{\to}$, δικαιολογώντας έτσι της ονομασία 'κατηγορία-τεμάχιο'. Μπορούμε ακόμη να θεωρούμε την κατηγορία $\mathscr{C}\downarrow A$, ως την 'έκταση' του αντικειμένου $A \in \mathscr{C}_0$ ως πρός το περιβάλλον της κατηγορίας $\mathscr{C}$. Μια άλλη ερμηνεία των αντικειμένων της κατηγορίας $\mathscr{C}\downarrow A$ είναι η παρουσίαση των αντικειμένων $T \in \mathscr{C}_0$ σαν μια οικογένεια 'ινών' ή γενικευμένων ιδιοτήτων, επί του αντικειμένου A.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε, για δοθέν αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$, τις γενικευμένες ιδιότητες $p : A \longrightarrow V, \quad V \in \mathscr{C}_0$ του αντικειμένου A. Οδηγούμαστε έτσι στη θεώρηση της κατηγορίας-συντεμάχιο $A \downarrow \mathscr{C}$, που ορίζεται ως ακολούθως:

(i) Ένα αντικείμενο της κατηγορίας $A \downarrow \mathscr{C}$ είναι μια γενικευμένη ιδιότητα $A \xrightarrow{p} V, \quad V \in \mathscr{C}_0$.

(ii) Ένα βέλος της κατηγορίας $A \downarrow \mathscr{C}$ απο το αντικείμενο $A \xrightarrow{p} V$ στο αντικείμενο $A \xrightarrow{p'} V'$ είναι ένα βέλος $(h : V \longrightarrow V') \in \mathscr{C}_1$ τέτοιο ώστε, το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dd, dashed, "h"] \\ A \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "p'"'] & \\ & V' \end{tikzcd}$$

(iii) Έστω τα αντικείμενα $p : A \longrightarrow V$, $p' : A \longrightarrow V'$, $p'' : A \longrightarrow V''$, και τα βέλη, $h : T \longrightarrow T'$, $h' : T' \longrightarrow T''$. Τότε η σύνθεση των βελών $h \circ h'$ δίδεται από το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "h"] \arrow[dd, dashed, bend left=60, "h' \circ h"] \\ A \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "p'"] \arrow[dr, "p''"'] & V' \arrow[d, "h'"] \\ & V'' \end{tikzcd}$$

Πολλές φορές, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, η μετάβαση από μια κατηγορία $\mathscr{C}$ στην κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C} \downarrow A$ γενικότερα σε μια κατηγορία βελών (συνηθισμένων βελών, συναρτητών, φυσικ. μεστσχ., και κυρίως προδραγμάτων) απλοποιεί έννοιες της κατηγορίας $\mathscr{C}$. Τέτοιου είδους μεταβάσεις έχουν να κάνουν με ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των κατηγοριών, *την μεταβλητότητα*. Η μετάβαση από μια κατηγορία $\mathscr{C}$ σε μια κατηγορία βελών, ισοδυναμεί με μια μετάβαση από ένα σχετικά σταθερό πλαίσιο αναφοράς σε ένα με περισσότερη μεταβλητότητα. Αυτό ακριβώς αποτελεί μια μέθοδο μελέτης χαρακτηριστικών της Θεωρίας Κατηγοριών. Αν για παράδειγμα έχουμε ένα μεταβαλλόμενο στοιχείο $T \to A$ στην $\mathscr{C}$ τότε η μετάβαση στην κατηγορία $\mathscr{C} \downarrow T$ μετατρέπει το μεταβαλλόμενο ή τοπικό στοιχείο x σε ολικό στοιχείο! Έτσι *η κόμμα κατηγορίες είναι χρήσιμες στο να εκφράζουμε μεταβαλλόμενες έννοιες με στατικό τρόπο.* Αυτό αντιστοιχεί με την τεχνική ‘σταματήματος’ ενός κινητού, π.χ. ενός αεροπλάνου, με το να κινείται κανείς με την ίδια ταχύτητα, δίπλα στο αεροπλάνο! Ένα άλλο μαθηματικό παράδειγμα βρίσκουμε στο [23],

> «Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την έννοια ‘συνεχής συνάρτηση με πραγματικές τιμές επί ενός τοπολογικού χώρου X’ (ερμηνευμένη

σε έναν τόπο **S** σταθερών συνόλων). Κάθε τέτοια συνάρτηση ˜πορεί να θεωρηθεί σαν ένας πραγ˜ατικός αριθ˜ός (ή ποσότητα) πού ˜εταβάλλεται συνεχώς επί του X. Ας θεωρήσου˜ε τώρα τον τόπο $\mathrm{Shv}(X)$ των δραγ˜άτων πάνω στο X. Εδώ τα πάντα ˜εταβάλλονται (συνεχώς) επί του X, έτσι η ˜ετατόπιση από τον **S** στο $\mathrm{Shv}(X)$ ουσιαστικά ισοδυνα˜εί ˜ε την ενσω˜άτωση κάποιου σε ένα πλαίσιο το όποιο είναι, σαν να λέ˜ε, αυτό το ίδιο '˜ετακινού˜ενο ˜αζί' ˜ε τη ˜εταβολή πάνω στο X των δοσ˜ένων ˜εταβαλλό˜ενων πραγ˜ατικών αριθ˜ών. Αυτό έχει ως συνέπεια να ˜ην 'παρατηρείται' η ˜εταβολή κάθε ˜εταβαλλό˜ενου πραγ˜ατικού αριθ˜ού στο $\mathrm{Shv}(X)$· Επο˜ένως θεωρείται εκεί, ότι είναι ένας σταθερός πραγ˜ατικός αριθ˜ός. Με αυτό τον τρόπο η έννοια 'πραγ˜ατική συνάρτηση συνεχής επί του X' ˜ετασχη˜ατίζεται στην έννοια 'πραγ˜ατικός αριθ˜ός' όταν ερ˜ηνεύεται στο $\mathrm{Shv}(X)$. (Για να εί˜αστε ακριβείς, τα αντικεί˜ενα στο $\mathrm{Shv}(X)$ πού ικανοποιούν τη συνθήκη να είναι (Dedekind) πραγ˜ατικοί αριθ˜οί, αντιστοιχούν, ˜έσω του γεω˜ετρικού ˜ετασχη˜ατισ˜ού $\mathbf{S} \to \mathrm{Shv}(X)$, στις πραγ˜ατικές συναρτήσεις που είναι συνεχείς επί του X). Αντίστροφα, η έννοια 'πραγ˜ατικός αριθ˜ός' ερ˜ηνευ˜ένη στον $\mathrm{Shv}(X)$, αντιστοιχεί στην έννοια 'πραγ˜ατική συνάρτηση, συνεχής επί του X' ερ˜ηνευ˜ένη στον **S**. Αυτή η παρατήρηση παρέχει τη βάση για διάφορες αποδείξεις ανεξαρτησίας στην ιντουϊσιονιστική ανάλυση (ανάλυση ερ˜ηνευ˜ένη στον $\mathrm{Shv}(X)$: βλ. [82]).»

Λόγω της γενικότερης σπουδαιότητας των κόμμα κατηγοριών θα δώσουμε στη συνέχεια την γενική κατασκευή μιας κόμμα κατηγορίας. Η γενική αυτή κατασκευή βασίζεται στην ύπαρξη συναρτητών. Επιθυμούμε να θεωρήσουμε την μεταβολή π.χ. στην κατηγορία $\mathscr{C}$. Έστω επίσης ένας συναρτητής, $F : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ μεταβαλλόμενο στοιχείο της $\mathscr{C}$ στην **Cat**. Είναι φανερό ότι η ύπαρξη του συναρτητή F περιορίζει την δυνατότητα μεταβολής στην $\mathscr{C}$. Έτσι η κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C}\downarrow A$ μπορεί να πάρει και τη μορφή $F[\mathscr{T}]\downarrow A$. Εμμέσως δηλαδή ο τύπος μεταβολής των γεν. στοιχείων του $A \in \mathscr{C}_0$ εξαρτάται ή δευσμεύεται από την κατηγορία $\mathscr{B}$ που επιβάλει τον τύπο μεταβολής. Χρειαζόμαστε ακόμα και την επιλογή του $A \in \mathscr{C}_0$. Έτσι για να ορίσουμε την κόμμα κατηγορία $(F[\mathscr{B}\,])\downarrow A \equiv F\downarrow A$, χρειαζόμαστε έναν συναρτητή $F : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ που θα καθορίζει τον τύπο μεταβολής στην κατηγορία $\mathscr{C}$ και έναν συναρτητή $\mathbb{1} \to \mathscr{C}$ που θα επιλέγει το αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$. Με διαγράμματα έχουμε,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[dr, "F"'] & & \mathbb{1} \arrow[dl, "G"] \\ & \mathscr{C} & \end{tikzcd} \qquad \text{με} \qquad \begin{array}{rcl} G : \mathbb{1} & \to & \mathscr{C} \\ * & \mapsto & G(*) = A \end{array}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να θεωρήσουμε τις γενικευμένες ιδιότητες ενός τυχόντος αντικειμένου $A \in \mathscr{C}_0$, όπου τα συν-πεδία ορισμού δευσμεύονται από έναν συναρτητή $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Τότε έχουμε $A\downarrow(G[\mathscr{D}\,]) \equiv A\downarrow G$, που εκφράζει τις γενικευμένες ιδιότητες του $A \in \mathscr{C}_0$ δοθείσης της δεύσμευσης του G. Έχουμε τότε την ακόλουθη κατάσταση,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[dr, "F"'] & & \mathscr{D} \arrow[dl, "G"] \\ & \mathscr{C} & \end{tikzcd} \qquad \text{με} \qquad \begin{array}{rcl} F : \mathbb{1} & \to & \mathscr{C} \\ * & \mapsto & F(*) = A \end{array}$$

Στη γενική περίπτωση έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

10.4.7 Ορισμός. Έστω $\mathscr{B} \xrightarrow{F} \mathscr{C} \xleftarrow{G} \mathscr{D}$ δύο συναρτητές. Η **κόμμα κατηγορία** $F{\downarrow}G$ ορίζεται ως ακολούθως:

(i) $(F{\downarrow}G)_0 := \{(A, f, B) \mid A \in \mathscr{B}_0,\ B \in \mathscr{D}_0 \quad \& \quad f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(A), G(B))\}$
Έτσι ένα αντικείμενο παρίσταται σχηματικά ως ακολούθως:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B}_0 \ni A \arrow[dr, mapsto] & (A, f, B) & B \in \mathscr{D}_0 \arrow[dl, mapsto] \\ & F(A) \arrow[r, "f \in \mathscr{C}_1"] & G(B) \end{tikzcd}$$

(ii) Οι Μορφισμοί $(F{\downarrow}G)_1$ της κατηγορίας $(F{\downarrow}G)$ αποτελούνται από ζεύγη μορφισμών $(g, h) \in \mathscr{B}_1 \times \mathscr{D}_1$ τέτοια ώστε αν $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(A, A')$ και $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B, B')$ και για κάθε ζεύγος αντικειμένων $(A, f, B), (A', f', B')$ το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, mapsto] \arrow[ddd, "g"'] & & & B \arrow[dl, mapsto] \arrow[ddd, "h"] \\ & F(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(g)"'] \arrow[dr, dotted, "\circlearrowleft" description] & G(B) \arrow[d, "G(h)"] & \\ & F(A') \arrow[r, "f'"'] & G(B') & \\ A' \arrow[ur, mapsto] & & & B' \arrow[ul, mapsto] \end{tikzcd} \qquad \text{με} \quad f' \circ F(g) = G(h) \circ f$$

Έτσι, $(F{\downarrow}G)_1 \subseteq \bigsqcup\limits_{\substack{A, A' \in \mathscr{B} \\ B, B' \in \mathscr{D}}} (\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(A, A') \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B, B'))$

Η σύνθεση των βελών ορίζεται ως,

$$(g', h') \circ (g, h) = (g' \circ g, h' \circ h) \quad \text{και} \quad 1_{(A,f,B)} = (1_A, 1_B)$$

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε και κάποιους συναρτητές-προβολές ως ακολούθως,

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : (F{\downarrow}G) & \to & \mathscr{B}, \\ (A,f,B) & \mapsto & A \\ (f,h) & \mapsto & f \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \pi_2 : (F{\downarrow}G) & \to & \mathscr{D} \\ (A,f,B) & \mapsto & B \\ (f,h) & \mapsto & h \end{array}$$

Κάνοντας χρήση του παραπάνω ορισμού (Ορισμός 10.4.7(ii)), είναι φανερό ότι μπορούμε να ορίσουμε έναν φ.μ. $\alpha : F\circ\pi_1 \Rightarrow G\circ\pi_2$ που η (A,f,B)-συνιστώσα είναι η $\alpha_{(A,f,B)} = f$. Δηλαδή ο φ.μ.,

$$\begin{tikzcd} (F{\downarrow}G) \arrow[r, bend left, "F\circ\pi_1"] \arrow[r, bend right, "G\circ\pi_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

ορίζεται από την οικογένεια βελών $(FA\xrightarrow{f}GB)_{(A,f,B)\in(F\downarrow G)_0}$.

Ειδικές Περιπτώσεις

- Αν $\mathscr{B}=\mathscr{C}$, $F=1_{\mathscr{C}}$ και $\mathscr{D}=\mathbb{1}$, $G(*)=A$ τότε γράφουμε $\mathscr{C}{\downarrow}A$ αντί για $F{\downarrow}G$, λαμβάνοντας έτσι την κατηγορία-τεμάχιο (slice category) ($\mathbb{1}$ είναι η τετριμμένη κατηγορία με ένα αντικείμενο και ένα (ταυτοτικό) βέλος.).
- Αν $\mathscr{B}=\mathbb{1}$, $F(*)=A$ και $\mathscr{D}=\mathscr{C}$, $G=1_{\mathscr{C}}$ τότε γράφουμε $A{\downarrow}\mathscr{C}$ αντί για $F{\downarrow}G$, λαμβάνοντας έτσι την κατηγορία-συντεμάχιο (coslice category).
- Αν $\mathscr{D}=\mathscr{C}$ και $G=1_{\mathscr{C}}$ γράφουμε $F{\downarrow}\mathscr{C}$ αντί για $F{\downarrow}G$.
- Αν $\mathscr{B}=\mathscr{C}$ και $F=1_{\mathscr{C}}$ τότε γράφουμε $\mathscr{C}{\downarrow}G$ αντί για $F{\downarrow}G$.
- Αν $\mathscr{D}=\mathbb{1}$ και $G(*)=A$ γράφουμε $F{\downarrow}A$ αντί για $F{\downarrow}G$.
- Αν $\mathscr{B}=\mathbb{1}$ και $F(*)=A$ γράφουμε $A{\downarrow}G$ αντί για $F{\downarrow}G$. Τέλος,
- Αν $\mathscr{B}=\mathscr{C}=\mathscr{D}$ και $F=1_{\mathscr{C}}=G$ τότε γράφουμε $\mathscr{C}{\downarrow}\mathscr{C}$ αντί για $1_{\mathscr{C}}{\downarrow}1_{\mathscr{C}}$.

10.4.8 Ασκήσεις. 1. Έστω δύο παράλληλοι συναρτητές $F,G:\mathscr{C}\to\mathscr{D}$. Να δειχθεί ότι ο $\alpha : F\Rightarrow G$ δηλαδή,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός ανν

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathscr{C} & \to & (F{\downarrow}G) \\ A & \mapsto & (\alpha_A : FA \to GA) \equiv (A, \alpha A) \\ (f : A \to B) & \mapsto & (\alpha_A, \alpha_B) \quad \text{με,} \end{array} \quad \begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\alpha_B"'] & GB \end{tikzcd} \quad \text{και} \quad Gf \circ \alpha_A = \alpha_B \circ Ff$$

είναι ένας συναρτητής τέτοιος ώστε $\pi_1 \circ \alpha = \pi_2 \circ \alpha = 1_{\mathscr{C}}$, όπου $\pi_1 : (F{\downarrow}G) \to \mathscr{C}$ και $\pi_2 : (F{\downarrow}G) \to \mathscr{C}$ είναι οι προφανείς συναρτητές-προβολές.

Η άσκηση αυτή δείχνει ότι μια μεταβλητότητα τρίτης τάξης, όπως είναι ο φ.μ. ανάγεται σε μια μεταβλητότητα δεύτερης τάξης, όπως είναι ο συναρτητής, αρκεί να μεταβούμε στην κατάλληλη κόμμα κατηγορία!

2. Αν $\mathscr{B}, \mathscr{D}$ και $\mathscr{C}$ είναι διακριτές κατηγορίες τότε η $F{\downarrow}G$ είναι μια εφέλκυση στη κατηγορία **Set**.

3. Έστω $\hat{\mathbb{2}} := \mathbf{Set}^{\mathbb{2}^{\mathrm{op}}}$, όπου $\mathbb{2}$ είναι ο διατακτικός αριθμός $2 := \{0, 1\}$, θεωρούμενος ως κατηγορία. Να δειχθεί ότι η κόμμα κατηγορία $\mathbf{Set}{\downarrow}\mathbf{Set}$ είναι ισόμορφη με την συναρτητική κατηγορία $\hat{\mathbb{2}}$

10.5 Στοιχεία, Ιδιότητες και το Λήμμα του Yoneda.

10.5.1 Γενικευμένα Στοιχεία και Ιδιότητες

Όπως έχουμε αναπτύξει ξανά στο Εδάφιο 2.3.2, η έννοια του γενικευμένου ή μεταβαλλόμενου στοιχείου και η έννοια της γενικευμένης ιδιότητας, παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των κατηγορικών εννοιών αλλά και στην κατανόηση της μετάβασης από την Απλοϊκή Συνολοθεωρία στην Θεωρία Κατηγοριών. Είναι φανερό ότι η βασική συνολοθεωρητική σχέση $x \in A$ παύει να είναι η δύναμη-οδηγός, και αντ' αυτής έχουμε τώρα τη σύνθεση βελών και την καθολικότητα.

Οι βασικές πηγές της γενίκευσης της εννοίας του σημείου και του 'χώρου' είναι βασικά τρείς:

(i) Η Αλγεβρική Γεωμετρία. Η Αλγεβρική Γεωμετρία είχε από καιρού το βασικό πρόβλημα εξισώσεων που δεν είχαν λύση. Αυτό σήμαινε ότι ότι οι χώροι που χρησιμοποιούσαν δεν περιείχαν σημεία που θα μπορούσαν να είναι λύσεις των δοσμένων εξισώσεων. Κάθε γενίκευση της έννοιας του χώρου εμπεριείχε και μια αντίστοιχη γενίκευση της έννοιας του 'σημείου' βασικού συστατικού του χώρου. Έτσι εδώ παρουσιάζονται ποικίλες μορφές 'σημείων', βλ. [152, §8.13 What is a point?] καθώς και τα [39] και [68] για μια γενική διαπραγμάτευση της Πρωτεϊκής εννοίας του σημείου.

(ii) Η Μη-Συμβατική Ανάλυση του Robinson. Η επιτυχής εισαγωγή απειροστών, σαν 'ιδεώδη' ή 'φανταστικά' σημεία των πραγματικών αριθμών, είχε ως συνέπεια τον εξαναγκασμό σε μια γενίκευση της κλασικής έννοιας του σημείου. Για παράδειγμα το σημείο $0 \in \mathbb{R}$, μεταλλάσσονταν σε δακτύλιο στο $^*\mathbb{R}$, αποκαλύπτοντας έτσι ότι, «τα σημεία έχουν δομή». Η έννοια της μονάδας (monad) ήταν κεντρική πρός την κατεύθυνση αυτή.

(iii) Τα Μοντέλα με τιμές σε μια άλγεβρα Boole (Scott-Solovay). Τα μοντέλα εξαναγκασμού του Cohen και τα ισοδύναμά τους μοντέλα με τιμές σε μια άλγεβρα Boole, ήταν άλλη μια μέθοδος εισαγωγής 'ιδεωδών' ή 'φανταστικών' στοιχείων.

Τελικά ο Grothendieck, αλλά αργότερα και οι Lawvere και Tierney, πρότειναν την έννοια του 'τόπου' ως την τελική γενίκευση της έννοιας του 'χώρου' και του μορφισμού γενικά, ως τη γενίκευση της έννοιας του 'σημείου'. Ειδικά ο Grothendieck πολλές φορές χρησιμοποιεί ως 'σημείο' έναν ειδικό συναρτητή μεταξύ τόπων. Μάλιστα αν είναι έτσι, μπορούμε να μιλάμε και για την 'ομαδα αυτομορφισμών' ενός συναρτητή-σημείου $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, δηλαδή του φυσικούς μετασχηματισμούς $\Phi : T \Rightarrow T$ που έχουν αντίστροφο. Έτσι ένα σημείο έχει ομάδα συμμετρίας! Βλ. [39].

Έστω μια τυχούσα κατηγορία $\mathscr{C}$, τότε κάθε βέλος $x : T \longrightarrow A, \quad T, A \in \mathscr{C}_0$ θα το θεωρούμε ως ένα μεταβαλλόμενο ή γενικευμένο στοιχείο του A που ορίζεται υπεράνω του 'χρονοαντικειμένου' ή 'πεδίου μεταβολής', ή 'σταδίου ορισμού' T. Πολλές φορές θα λέμε για το x ότι είναι ένα T- στοιχείο του A. Για να παρουσιάσουμε τις 'κατηγορικές ιδιότητες' σαν ένα είδος συνολοθεωρητικής γενίκευσης, πράγμα που θα διαφωτίσει διαισθητικά τη Θεωρία Κατηγοριών, θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό, $x \in^T A$ αντί του ισοδύναμου $x : T \longrightarrow A$. Αν η κατηγορία έχει 'τελικό αντικείμενο' 1, τότε γενικευμένα στοιχεία με $1 = T$ θα λέγονται **ολικά** (global) στοιχεία, και θα συμπίπτουν με τα κλασικά στοιχεία του A. Ειδικά στην κατηγορία $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, αν $F \in \mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ είναι ένα αντικείμενο-συναρτητής, τότε ένα μεταβαλλόμενο στοιχείο του F είναι απλά ένας φυσικός μετασχηματισμός, $T \Rightarrow F$, όπου T ένας τυχόν συναρτητής στην $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. Η σημασία αυτών των γενικευμένων στοιχείων, βρίσκεται στην κατανόηση του Λήμματος του Yoneda[14],

[14] Ο Καθ. Nobuo Yoneda (1930-1996), είναι στην ουσία μια άγνωστη στη δύση προσωπικότητα, παρ' όλο που το ομώνυμο λήμμα του είναι ίσως το πιό διάσημο αποτέλεσμα στη Θεωρία Κατηγοριών. Σπούδασε Μαθηματικά στο Παν/μιο του Τόκυο, στο δε τελευταίο έτος σπουδών του, παρακολούθησε το σεμινάριο του Καθηγητή Shokiti Iyanaga και έτσι ενδιαφέρθηκε για την Αλγεβρική Τοπολογία. Ο Καθ. Yoneda είχε την τύχη να συναντηθεί με τους Eilenberg και MacLane. Όταν ο Eilenberg επισκέφτηκε την Ιαπωνία, ο νεαρός τότε Yoneda είχε αναλάβει την ξενάγησή του. Αυτή ακριβώς την εποχή το βιβλίο των Cartan-Eilenberg *Homological Algebra*, Princeton, Univ. Press, Princeton, NJ, 1956, ήταν ακριβώς στο στάδιο των διορθώσεων και ο Yoneda είχε την ευκαιρία να μελετήσει αλλά και να συζητήσει με τον Eilenberg τα θέματα του βιβλίου. Αργότερα βρέθηκε με τον Eilenberg στη Γαλλία. Την εποχή αυτή επισκέθηκε την Γαλλία και ο MacLane για να συλλέξει πληροφορίες για το βιβλίο του "Categories for the Working Mathematician" που τότε έγραφε. Είχε βεβαίως και μια συνάντηση με τον Yoneda. Το αποτέλεσμα αυτής της συζήτησης, αργότερα συνοψίστηκε και ονομάστηκε από τον MacLane 'Λήμμα του Yoneda'. Οι πληροφορίες αυτές προέρχονται από Καθ. Yoshiki Kinoshita και εμφανίστηκαν στη λίστα FOM.

μέσω γενικευμένων στοιχείων, βλ. και [15, 144].

10.5.1 Ασκήσεις. Να δειχθεί ότι αν $\langle M, *, e\rangle$ είναι ένα μονοειδές τότε υπάρχει μόνον ένα ολικό στοιχείο, δηλ. το $\mathrm{Hom}(1, M)$ περιέχει ακριβώς ένα ολικό στοιχείο. Αυτό δείχνει ότι τα μονοειδή δεν έχουν αρκετά ολικά στοιχεία για να διαχωρίσουν π.χ. δύο διαφορετικούς μορφισμούς $\langle M, *, e\rangle \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \langle M', *', e'\rangle$, σε αντίθεση με την κατηγορία, **Set**.

10.5.2 Θεώρημα. *Έστω* $f : A \longrightarrow B$ *και* $g : A \longrightarrow B$ *δύο βέλη της κατηγορίας* $\mathscr{C}$. *Τότε,*

$$f = g \quad \textit{ανν} \quad (\forall T \in \mathscr{C}_0)(\forall x \in^T A)[f(x) = g(x)]$$

Δηλαδή δυό βέλη ταυτίζονται ανν συμφωνούν πάνω σε όλα τα $T-$*στοιχεία για κάθε* $T \in \mathscr{C}_0$.

Απόδ. . $(\Rightarrow)$ Έστω ότι $f = g$ τότε είναι φανερό ότι για κάθε $T \in \mathscr{C}_0$, και $x : T \to A$ έχουμε ότι, $f \circ x \equiv f(x) = g(x) \equiv g \circ x$. ⊣□
$(\Leftarrow)$ Έστω $T = A$ και $x = 1_A$ τότε εξ ορισμού έχουμε, $f(1_A) = g(1_A)$ και επομένως $f = f \circ 1_A = g \circ 1_A = g$. ⊣■

Για δύο αντικείμενα $A, B \in \mathscr{C}_0$ έχουμε,

$$A = B \Leftrightarrow 1_A = 1_B$$

και από το Θεώρημα 10.5.2 έχουμε ότι,

$$A = B \Leftrightarrow (\forall T \in \mathscr{C}_0)(\forall x \in \mathscr{C}(T, A))[x \in^T A \Leftrightarrow x \in^T B]$$

Συνάγουμε έτσι ένα είδος 'Αξιώματος Έκτασης,' δηλ. ότι,

Τα αντικείμενα $A, B \in \mathscr{C}_0$ ταυτίζονται ανν έχουν τα ίδια γενικευμένα στοιχεία, δηλαδή η ταυτότητα ενός αντικειμένου καθορίζεται από τα εισερχόμενα στο αντικείμενο βέλη! Έτσι η ταυτότητα του αντικεμένου καθρίζεται από τις 'επιδράσεις' που δέχεται από το 'κοινωνικό' περιβάλλον της κατηγορίας και είναι ανεξάρτητο από την εσωτερική συγκρότηση του αντικειμένου. Ο τρόπος αυτός ακριβώς χαρακτηρίζεται ως *ολιστικός τρόπος καθορισμού του αντικειμένου.*

Θα δούμε στη συνέχεια, ότι η παραπάνω αρχή συνδέεται στενά με το Λήμμα του Yoneda. Ιδιαίτερα το Λήμμα του Yoneda σχετίζεται περισσότερο με τα **μεταβαλλόμενα σύνολα**, ένα ειδικό τύπο 'στοιχείων'.

10.5.2 $\mathscr{C}$-Σύνολα και Κατηγορικές Δράσεις

Έστω η συναρτητική κατηγορία $\mathsf{Func}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}) \equiv \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$. Οι συναρτητές της μορφής $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$, λέγονται **προδράγματα** (presheaves) επί της $\mathscr{C}$, και εκλαμβάνονται ως 'σύνολα που μεταβάλλονται επί της $\mathscr{C}$' ή $\mathscr{C}-$σύνολα, όταν θέλουμε να τονίσουμε την δράση της $\mathscr{C}$ επί της **Set**. Ο συμβολισμός δηλαδή '$\mathscr{C}-$σύνολα' είναι ανάλογος του 'M-σύνολα' για την δράση των μονοειδών και 'G-σύνολα' για τη δράση των ομάδων. Μπορούμε δηλαδή να θεωρούμε συναρτητές του τύπου $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$, όπου $\mathscr{C}$ είναι μια μικρή κατηγορία (ένα γενικευμένο μονοειδές), ως μια δράση της $\mathscr{C}$ επί της **Set**, σαν μια γενίκευση της δράσης ένος μονοειδούς $\langle M, *, e\rangle$ επί ενός συνόλου X, δηλ. ομομορφισμών της μορφής, $\alpha : \langle M, *, e\rangle \longrightarrow \langle X^X, \circ, 1_X\rangle$, βλ. [16, σελ. 63, 64-65] για περισσότερες λεπτομέρειες. Τα αντικείμενα της $\mathscr{C}$ εκλαμβάνονται ως 'παραμετρικός χώρος' για την μεταβολή των συνόλων, και στην ουσία αποτελούν 'απόψεις' σύμφωνα με τις οποίες θεωρούνται τα μεταβαλλόμενα σύνολα, τα δε βέλη της κατηγορίας $\mathscr{C}$ εκλαμβάνονται ως αλλαγές στις θεωρήσεις ή απόψεις με τις οποίες θεωρούνται τα μεταβαλλόμενα σύνολα. Για το θέμα των δράσεων μιας κατηγορίας στην κατηγορία **Set**, βλ. το [121, σελ. 171-176].

Το κλασικό παράδειγμα προδράγματος είναι: Αν για $\mathscr{C}$, πάρουμε το μ.δ.σ. $\langle \mathscr{O}, \supseteq\rangle$, θεωρούμενου ως κατηγορία, όπου $\mathscr{O}$ είναι τα ανοικτά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου, τότε έχουμε την κλασική έννοια του προδράγματος συνόλων, ή των 'συνεχώς μεταβαλλόμενων συνόλων'.

10.5.3 Η Εμφύτευση του Yoneda

Το Λήμμα του Yoneda είναι ένα σπουδαίο αποτέλεσμα, που μας επιτρέπει να εμφυτεύσουμε μια κατηγορία $\mathscr{C}$ σε μια ειδική κατηγορία συναρτητών, που είναι 'προδράγματα' (presheaves), ή μεταβαλλόμενα σύνολα. Αυτό κάπως θυμίζει το Θεώρημα του Cayley στη Θεωρία Ομάδων, όπου μια ομάδα αναπαρίσταται με μια ομάδα μεταθέσεων ή συμμετριών, μεταβαλλόμενων σημείων δηλαδή. Αυτό μπορεί να κατανοηθεί ως ακολούθως.

Ένα **ομαδοειδές** (groupoid) είναι μια κατηγορία στην οποία κάθε μορφισμός είναι ισομορφισμός. Ένα ομαδοειδές με ένα αντικείμενο είναι μια ομάδα. Συναρτητές οριζόμενοι σε τέτοιες κατηγορίες και με τιμές στην κατηγορία **Set** είναι αυτό που ονομάζουμε G-σύνολα (G-sets). Το Λήμμα του Yoneda στην περίπτωση αυτή, συμπίπτει με το Θεώρημα Αναπαράστασης του Cayley. Ουσιαστικά λοιπόν το Λήμμα του Yoneda μας υποδεικνύει ότι αντί να μελετούμε μια (μικρή) κατηγορία $\mathscr{C}$, μπορούμε να μελετούμε την κατηγορία συναρτητών $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} \equiv \widehat{\mathscr{C}}$, από την $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ στην **Set**. Όπως είναι γνωστό ένα σύνολο συναρτήσεων με ένα συγκριμένο συν-πεδίο ορισμού, κληρονομεί με σημειακό τρόπο την δομή αυτού του συν-πεδίου. Έτσι η άγνωστη ίσως κατηγορία $\mathscr{C}$ μελετάται σε ένα 'φιλικό περιβάλλον' αυτό της **Set**, που επιπρόσθετα είναι και συν-πλήρης (υπάρχουν όλα τα συν-όρια), αλλά έχει και άλλη επί πλέον δομή. Για την μεταφορά της δομής της **Set** σ' αυτήν της $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ βλ. [162, σελ. 81]. Ακόμη και αν η $\mathscr{C}$, δεν έχει κάποια ή όλα τα συν-όρια, μπορούμε πάντοτε να την θεωρούμε ως μέρος της $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ η οποία είναι συν-πλήρης (έχει όλα τα συν-όρια). Πέρα όμως από αυτό, η εμφύτευση αυτή επιτρέπει την 'αποκάλυψη κρυμμένων στοιχείων' της κατηγορίας $\mathscr{C}$, που επιτρέπουν μια πιό ολοκληρωμένη μελέτη αυτής. Αξίζει κανείς να θυμηθεί ότι το ίδιο φαινόμενο συνέβει όταν εμφυτεύσαμε το $\mathbb{R}$ στο $^*\mathbb{R}$, βλ. [67, Κεφ. 3]. Έκεί τα 'κρυμμένα στοιχεία' ήταν τα απειροστά του $\mathbb{R}$.

Θα μπορούσε λοιπόν να πεί κανείς ότι το βαθύτερο νόημα του Λήμματος του Yoneda, είναι η 'παθολογία του σημείου', ή αλλοιώς **η Πρωτεϊκή**[15] **φύση της έννοιας του σημείου**. Για το σκοπό αυτό και η εμφύτευση πρέπει να είναι η κατάλληλη. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τα 'γενικευμένα' ή 'μεταβαλλόμενα στοιχεία' καθώς επίσης και τις 'γενικευμένες ιδιότητες' για να εκφράσουμε την ουσία του Λήμματος του Yoneda.

Πρίν προχωρήσουμε όμως, αξίζει να συνοψίσουμε τους Hom-συναρτητές σε σχέση με τα μεταβαλλόμενα στοιχεία και τις γενικευμένες ιδιότητες. Έστω μια τοπικά μικρή κατηγορία $\mathscr{C}$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις:

(i) Τυχόν αλλά σταθερό πεδίο μεταβολής T. Τότε, για τυχόν $X \in \mathscr{C}_0$, το σύνολο $H^T(X) \equiv \mathrm{Hom}(T, X)$ είναι το σύνολο των γενικευμένων στοιχείων του X με πεδίο μεταβολής T. Έχουμε τότε τον συναλλοίωτο συναρτητή,

$$\begin{aligned} H^T(-) : \mathscr{C} &\to \mathbf{Set} \\ X &\mapsto H^T(X) \equiv \mathrm{Hom}(T, X), \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\mapsto (H^T(X) \xrightarrow{H^T(f)} H^T(Y)), \end{aligned}$$

με,
$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, dashed, "y=f\circ x:=H^T(f)(x)"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

(ii) Τυχόν αλλά σταθερό συν-πεδίο μεταβολής V. Για τυχόν $X \in \mathscr{C}_0$, το σύνολο $H_V(X) \equiv \mathrm{Hom}(X, V)$ είναι το σύνολο των γενικευμένων ιδιοτήτων του X με συν-πεδίο μεταβολής V. Έχουμε τότε τον ανταλλοίωτο συναρτητή,

[15] Ο Πρωτέας είναι μια αρχαία θεότητα της θάλασσας, που ο Όμηρος τον αποκαλούσε «άλιο γέροντα», και ο οποίος είχε την ικανότητα να αλλάζει μορφές. Έτσι μια έννοια λέγεται Πρωτεϊκή αν μπορεί να εμφανίζεται με πολλές μορφές!

$$\begin{aligned} H_V(-):\mathscr{C}^{\mathrm{op}} &\to \mathbf{Set} \\ X &\mapsto H_V(X)\equiv \mathrm{Hom}(X,V), \qquad \text{με}, \\ (X\xrightarrow{f}Y) &\mapsto (H_V(Y)\xrightarrow{H_V(f)}H_V(X)), \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "H_V(f)(q):=q\circ f=p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ & V \end{tikzcd}$$

(iii) **Τυχόν αλλά σταθερό $A \in \mathscr{C}_0$ για το οποίο θέλουμε να θεωρήσουμε όλα τα γενικευμένα στοιχεία του, για τυχόντα πεδία μεταβολής** $T \in \mathscr{C}_0$. Έχουμε τότε, για τυχόν T, το σύνολο $\mathrm{Hom}(T,A) \equiv H_A(T)$ των γενικευμένων στοιχείων του A με πεδίο μεταβολής T και τον ανταλλοίωτο συναρτητή,

$$\begin{aligned} H_A(-):\mathscr{C}^{\mathrm{op}} &\to \mathbf{Set} \\ T &\mapsto H_A(T)\equiv \mathrm{Hom}(T,A), \qquad \text{με}, \\ (T_1\xrightarrow{h}T_2) &\mapsto (H_A(T_2)\xrightarrow{H_A(h)}H_A(T_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, "h"] \arrow[dr, dashed, "H_A(h)(x_2):=x_2\circ h=x_1"'] & T_2 \arrow[d, "x_2"] \\ & A \end{tikzcd}$$

(iv) **Τυχόν αλλά σταθερό $A \in \mathscr{C}_0$ για το οποίο θέλουμε να θεωρήσουμε όλες τις γενικευμένες ιδιότητές του, για τυχόντα συν-πεδία μεταβολής** $V \in \mathscr{C}_0$. Έχουμε τότε, για τυχόν V, το σύνολο $\mathrm{Hom}(A,V) \equiv H^A(V)$ των γενικευμένων ιδιοτήτων του A με συν-πεδίο μεταβολής V και τον συναλλοίωτο συναρτητή,

$$\begin{aligned} H^A(-):\mathscr{C} &\to \mathbf{Set} \\ V &\mapsto H^A(V)\equiv \mathrm{Hom}(A,V), \qquad \text{με}, \\ (V_1\xrightarrow{h}V_2) &\mapsto (H^A(V_1)\xrightarrow{H^A(h)}H^A(V_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "H^A(h)(p_1):=h\circ p_1"] & \\ V_1 \arrow[r, "h"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Πρώτα θα κατασκεύσουμε τους αντίστοιχους συναρτητές-εμφύτευσεις και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις βασικές προτάσεις.

▶ Η Εμφύτευση του Yoneda με βάση τα γενικευμένα στοιχεία.

Η περίπτωση αυτή βασίζεται στον ανταλλοίωτο Hom-συναρτητή (iii), δηλαδή τον $\mathrm{Hom}(-,A) \equiv H_A : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Ο συναρτητής αυτός ονομάζεται (κυρίως στην Αλγεβρική Γεωμετρία) και 'συναρτητής γενικευμένων ή απλά, σημείων του αντικειμένου A'.

Έστω τώρα ένα βέλος $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathscr{C}_1$, τότε έχουμε τους συναρτητές H_A και H_B, το δε βέλος $(A \xrightarrow{f} B)$ επάγει στην συναρτητική κατηγορία $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ ένα αντίστοιχο βέλος, δηλαδή έναν φ.μ. $f^{\triangleright} : H_A(-) \Rightarrow H_B(-)$ ή,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left, "H_A(-)"] \arrow[r, bend right, "H_B(-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f^{\triangleright}"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

του οποίου η T-συνιστώσα $(T \in \mathscr{C}_0)$, ορίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{array}{rcl} f^{\triangleright}_T : H_A(T) & \longrightarrow & H_B(T) \\ (T \xrightarrow{x} A) & \mapsto & (T \xrightarrow{f \circ x} B), \end{array} \quad \text{με,} \quad \begin{tikzcd} T \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, dashed, "f \circ x := f^{\triangleright}_T(x)"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Η οικογένεια $(f^{\triangleright}_T(x))_{T \in \mathscr{C}_0}$ είναι ένας φ.μ., έχουμε δηλαδή, $H_B(h) \circ f^{\triangleright}_{T_2} = f^{\triangleright}_{T_1} \circ H_A(h)$, όπου,

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[d, "\forall h"', "\in \mathscr{C}_1,"] \\ T_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_A(T_2) \arrow[r, "f^{\triangleright}_{T_2}"] \arrow[d, "H_A(h)"'] \arrow[dr, dotted] & H_B(T_2) \arrow[d, "H_B(h)"] \\ H_A(T_1) \arrow[r, "f^{\triangleright}_{T_1}"'] & H_B(T_1) \end{tikzcd} \quad \text{με,} \quad \begin{tikzcd} T_1 \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, dashed, "x_1"] \arrow[drr, dashed, bend left, "y_1 = f \circ x_1 = f^{\triangleright}_{T_1}(x_1)"] & & \\ T_2 \arrow[r, "x_2"] \arrow[rr, bend right, "y_2 = f \circ x_2 = f^{\triangleright}_{T_2}(x_2)"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Πράγματι, αν $(T_2 \xrightarrow{x_2} A) \in H_A(T_2)$ τότε,

$$\begin{aligned} (H_B(h) \circ f^{\triangleright}_{T_2})(x_2) &= H_B(h) \circ (f \circ x_2) \\ &= H_B(h)(y_2) \\ &= y_2 \circ h \\ &= y_1. \end{aligned}$$

και,

$$\begin{aligned} (f^{\triangleright}_{T_1}(x_1) \circ H_A(h))(x_2) &= f^{\triangleright}_{T_1}(H_A(h)(x_2)) \\ &= f^{\triangleright}_{T_1}(x_2 \circ h) \\ &= f^{\triangleright}_{T_1}(x_1) \\ &= f \circ x_1 = y_1 \end{aligned}$$

Έχουμε έτσι κατασκευάσει ένα συναλλοίωτο συναρτητή,

$$\begin{array}{rcl} Y^{\triangleright} : \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} \\ A & \mapsto & Y^{\triangleright}(A) := \mathrm{Hom}(-, A) \equiv H_A(-), \\ (f : A \to B) & \mapsto & (f^{\triangleright} : H_A(-) \Rightarrow H_B(-)) \end{array}$$

που θα δείξουμε ότι είναι μια εμφύτευση της $\mathscr{C}$ στην συναρτητική κατηγορία $\widehat{\mathscr{C}}$. Με βάση την εμφύτευση αυτή ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ ταυτίζεται με τον Hom-συναρτητή $\mathrm{Hom}(-, A)$, δηλαδή με όλα τα γενικευμένα στοιχεία $T \to A$ για κάθε $T \in \mathscr{C}_0$. Συμπερασματικά λοιπόν,

• **Καθορισμός ένος αντικειμένου της** $\mathscr{C}$. Για να καθορίσουμε ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ αρκεί να καθορίσουμε όλα τα γενικευμένα στοιχεία του A, δηλ. όλα τα εισερχόμενα στο A, βέλη.

• **Κατασκευή ενός βέλους της** $\mathscr{C}$. Μπορούμε επίσης να ταυτίζουμε το μορφισμό $(f : A \to B) \in \mathrm{Hom}(A, B)$ με τον αντίστοιχο μορφισμό-φ.μ. , $(f^{\triangleright} : H_A(-) \Rightarrow H_B(-)) \in \mathrm{Nat}(H_A, H_B)$, και έτσι να ταυτίζουμε επίσης, από άποψη συμβολισμού, τα $f(x)$ και $f \circ x$. Επιπρόσθετα, αντί να κατασκευάσουμε το βέλος $(f : A \to B) \in \mathscr{C}_1$ στην $\mathscr{C}$, μπορούμε να κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο μορφισμό στην $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$, όπου λόγω της επιπρόσθετης δομής που διαθέτει, η κατασκευή είναι πιό εύκολη!

► Η Εμφύτευση του Yoneda με βάση τις γενικευμένες ιδιότητες.

Η περίπτωση αυτή βασίζεται στον Hom-συναρτητή (iv). Έτσι, για κάθε $A \in \mathscr{C}_0$, ορίζουμε τον συναλλοίωτο συναρτητή, $\mathrm{Hom}(A, -) \equiv H^A : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

Έστω τώρα ένα βέλος $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathscr{C}_1$, τότε έχουμε τους συναρτητές H^A και H^B, το δε βέλος $(A \xrightarrow{f} B)$ επάγει στην συναρτητική κατηγορία $\widehat{\mathscr{C}}$ ένα αντίστοιχο βέλος, δηλαδή έναν φ.μ. $f^{\triangleleft} : H^B(-) \Rightarrow H^A(-)$ ή,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left, "H^B(-)"] \arrow[r, bend right, "H^A(-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f^{\triangleleft}"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

του οποίου η V-συνιστώσα ($V \in \mathscr{C}_0$), ορίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{array}{rcl} f^{\triangleleft}_V : H^B(V) & \longrightarrow & H^A(V) \\ (B \xrightarrow{q} V) & \mapsto & (A \xrightarrow{p = q \circ f} V), \end{array} \qquad \text{με,} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "p = q \circ f := f^{\triangleleft}_V(q)"'] & B \arrow[d, "q"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Η οικογένεια $(f^{\triangleleft}_V)_{V\in\mathscr{C}_0}$ είναι ένας φ.μ. έχουμε δηλαδή,

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[d, "\forall h"', "\in\mathscr{C}_1,"] \\ V_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^B(V_1) \arrow[r, "f^{\triangleleft}_{V_1}"] \arrow[d, "H^B(h)"'] \arrow[dr, dotted] & H^A(V_1) \arrow[d, "H^A(h)"] \\ H^B(V_2) \arrow[r, "f^{\triangleleft}_{V_2}"'] & H^A(V_2) \end{tikzcd} \qquad \text{με,} \qquad \begin{tikzcd} & & V_1 \arrow[dd, "h"] \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[urr, dotted, bend left, "p_1=q_1\circ f"] \arrow[drr, dotted, bend right, "p_2=q_2\circ f"'] & B \arrow[ur, "q_1"] \arrow[dr, "q_2=v\circ q_1"'] & \\ & & V_2 \end{tikzcd}$$

και $H^A(h)\circ f^{\triangleleft}_{V_1} = f^{\triangleleft}_{V_2}\circ H^B(h)$. Πράγματι, αν $(B\xrightarrow{q_1}V_1)\in H^B(V_1)$ τότε,

$$\begin{aligned} (H^A(h)\circ f^{\triangleleft}_{V_1})(q_1) &= H_A(h)(q_1\circ f) \\ &= h\circ(q_1\circ f) \\ &= h\circ p_1 \\ &= p_2. \end{aligned}$$

και,

$$\begin{aligned} (f^{\triangleleft}_{V_2}\circ H^B(h))(q_1) &= f^{\triangleleft}_{V_2}(H^B(h)(q_1)) \\ &= f^{\triangleleft}_{V_2}(h\circ q_1) \\ &= f^{\triangleleft}_{V_2}(q_2) \\ &= q_2\circ f = p_2 \end{aligned}$$

Το οποίο έπρεπε να δείξουμε.

Έχουμε έτσι κατασκευάσει έναν ανταλλοίωτο συναρτητή:

$$\begin{array}{rcl} Y^{\triangleleft}:\mathscr{C} & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{C}} \\ A & \mapsto & Y^{\triangleleft}(A) := H^A(-)\equiv \mathrm{Hom}(A,-) \\ (f:A\to B) & \mapsto & (f^{\triangleleft}: H^B(-)\Rightarrow H^A(-)) \end{array}$$

που θα δείξουμε ότι είναι μια εμφύτευση της $\mathscr{C}$ στην συναρτητική κατηγορία $\widehat{\mathscr{C}}$. Με βάση την εμφύτευση αυτή ένα αντικείμενο $A\in\mathscr{C}_0$ ταυτίζεται με τον Hom-συναρτητή $\mathrm{Hom}(A,-)$, δηλαδή με όλες τις γενικευμένες ιδιότητες $A\to V$ για κάθε $V\in\mathscr{C}_0$. Συμπερασματικά λοιπόν,

• **Καθορισμός ένος αντικειμένου της $\mathscr{C}$.** Για να καθορίσουμε ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ αρκεί να καθορίσουμε όλες τις γενικευμένες ιδιότητες του A, δηλ. όλα τα εξερχόμενα του A, βέλη.

• **Κατασκευή ενός βέλους της $\mathscr{C}$.** Μπορούμε επίσης να ταυτίζουμε το μορφισμό $(f : A \to B) \in \mathrm{Hom}(A, B)$ με τον αντίστοιχο μορφισμό-φ.μ., $(f^{\triangleleft} : H^B(-) \Rightarrow H^A(-)) \in \mathrm{Nat}(H_B, H_A)$, και έτσι να ταυτίζουμε επίσης, από άποψη συμβολισμού, τα $q(f)$ και $p \circ f$. Επιπρόσθετα, αντί να κατασκευάσουμε το βέλος $(f : A \to B) \in \mathscr{C}_1$ στην $\mathscr{C}$, μπορούμε να κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο μορφισμό στην $\widehat{\mathscr{C}}$, όπου λόγω της επιπρόσθετης δομής που διαθέτει, η κατασκευή είναι πιό εύκολη!

Συνοψίζοντας τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε,

• **Καθορισμός ένος αντικειμένου της $\mathscr{C}$.** Για να καθορίσουμε ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ αρκεί, ή να καθορίσουμε όλα τα γενικευμένα στοιχεία του A, δηλ. όλα τα εισερχόμενα στο A, βέλη, ή όλες τις γενικευμένες ιδιότητες του A, δηλ. όλα τα εξερχόμενα του A, βέλη.

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιους αναγκαίους ορισμούς.

10.5.3 Ορισμός. Όπως ήδη έχουμε δεί κάθε συναρτητής, $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ επάγει μιά συνάρτηση,

$$F_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FA, FB), \quad A, B \in \mathscr{C}_0.$$

(i) Ένας συναρτητής $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ θα λέγεται **πιστός** (faithful) ανν για κάθε $A, B \in \mathscr{C}_0$ η συνάρτηση F_{AB} είναι ένριψη, και

(ii) **μεστός** (full) ανν για κάθε $A, B \in \mathscr{C}_0$ η συνάρτηση F_{AB} είναι επίρριψη.

Ένας μεστός συναρτητής δεν είναι αναγκαία μια επίρριψη επί των αντικειμένων $\mathscr{C}_0$ ή επί των βελών $\mathscr{C}_1$.

Σημειώστε επίσης ότι μια μεστή υποκατηγορία $\mathscr{C}$ της $\mathscr{D}$ είναι αυτή της οποίας ο συναρτητής εμφύτευσης είναι πιστός και μεστός.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση της εμφύτευσης του Yoneda που βασίζεται στις γενικευμένες ιδιότητες. Η περίπτωση της εμφύτευσης του Yoneda που βασίζεται στα γενικευμένα στοιχεία είναι παρόμοια. Θα απόδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

10.5.4 Θεώρημα. *(* **Εμφύτευση του Yoneda** *)* *Ο συναρτητής,*

$$\begin{array}{rcl} Y^{\triangleleft} : \mathscr{C} & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{C}} \\ A & \mapsto & Y^{\triangleleft}(A) := H^A(-) \equiv \mathrm{Hom}(A, -) \\ (f : A \to B) & \mapsto & (Y^{\triangleleft}(f) \equiv f^{\triangleleft} : H^B(-) \Rightarrow H^A(-)) \end{array}$$

είναι πιστός και μεστός, δηλ. η κατηγορία $\mathscr{C}$ είναι στην ουσία μια μεστή υποκατηγορία της $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$.

Απόδ. Ο συναρτητής, $Y^{\triangleleft} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ επάγει για κάθε $A, B \in \mathscr{C}_0$ μια συνάρτηση,

$$Y^{\triangleleft}_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Nat}(Y^{\triangleleft}(B), Y^{\triangleleft}(A))$$

Για να δείξουμε ότι ο $Y^{\triangleleft}$ είναι πιστός αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $Y^{\triangleleft}_{AB}$ είναι ένριψη για κάθε $A, B \in \mathscr{C}_0$. Πράγματι, έστω $A, B \in \mathscr{C}_0$ και $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ με $f \neq g$. Τότε έχουμε, $Y^{\triangleleft}(f) \equiv f^{\triangleleft}$, η δε B-συνιστώσα του φ.μ. $f^{\triangleleft}$ είναι η,

$$f^{\triangleleft}_B : H^B(B) \longrightarrow H^B(A) \;/\!\!/\; (B \xrightarrow{h} B) \mapsto (A \xrightarrow{h \circ f} B)$$

Ειδικά για $1_B \in H^B(B)$ έχουμε, $f^{\triangleleft}_B(1_B) := 1_B \circ f = f$. Ομοίως για το $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ έχουμε το φ.μ. $g^{\triangleleft}$ του οποίου η B-συνιστώσα είναι η,

$$g^{\triangleleft}_B : H^B(B) \longrightarrow H^B(A) \;/\!\!/\; (B \xrightarrow{h} B) \mapsto (A \xrightarrow{h \circ g} B)$$

Ειδικά για $h = 1_B$, έχουμε, $g^{\triangleleft}_B(1_B) = 1_B \circ g = g$. Έτσι αν $f \neq g$ τότε και $f^{\triangleleft}_B \neq g^{\triangleleft}_B$ για κάθε $B \in \mathscr{C}_0$ και επομένως $Y^{\triangleleft}(f) = f^{\triangleleft} \neq g^{\triangleleft} = Y^{\triangleleft}(g)$. $\dashv\square$

Για να δείξουμε ότι ο συναρτητής $Y^{\triangleleft}$ είναι μεστός θα πρέπει να δείξουμε ότι αν $\varphi : H^B(-) \Rightarrow H^A(-)$ είναι ένας τυχόν φ.μ., στοιχείο του $\mathrm{Nat}(H^B, H^A)$, τότε υπάρχει βέλος $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ με $Y^{\triangleleft}(f) = \varphi$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι V-συνιστώσες, $V \in \mathscr{C}_0$ των φ.μ $f^{\triangleleft}_V$ και φ_V είναι ίσες. Ακριβέστερα θα δείξουμε ότι $\varphi_V(q) = q \circ f = f^{\triangleleft}_V(q)$ για κάποιο βέλος $f : A \to B$. Ορίζουμε λοιπόν, $f := \varphi_B(1_B)$. Επειδή ο φ είναι φ.μ. θα έχουμε το ακόλουθο 'φυσικό τετράγωνο',

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "\forall q"', ","] & H^B(B) \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[d, "H^B(q)"'] \arrow[dr, dotted] & H^A(B) \arrow[d, "H^A(q)"] & \text{με, } 1_B \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, mapsto] & & \varphi_B(1_B) = f \arrow[d, mapsto] \\
V & H^B(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & H^A(V) & H^B(q)(1_B) \arrow[r, mapsto] & \varphi_V(q) = H^A(q)(f) = q \circ f &
\end{tikzcd}$$

Έτσι με την επιλογή $f := \varphi_B(1_B) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, έχουμε ότι, $f^{\triangleleft}_V = \varphi_V$ για κάθε $V \in \mathscr{C}_0$. $\dashv\blacksquare$

10.5.4 Καθολικότητες, Αναπαραστάσιμοι Συναρτητές και Το Λήμμα του Yoneda

► Αρχικά και Τελικά Αντικείμενα. Καθολικές Ιδιότητες

Τα αρχικά και τελικά αντικείμενα είναι ένα είδος αρχετύπων για κάθε άλλο καθολικό αντικείμενο, αφού κάθε άλλο καθολικό αντικείμενο ανάγεται σ' αυτά, όπως θα γίνει φανερό στη συνέχεια.

10.5.5 Ορισμός. Ένα αντικείμενο, συμβολικά 0, σε μια κατηγορία $\mathscr{C}$ θα ονομάζεται **αρχικό αντικείμενο** ανν **για κάθε** $A \in \mathscr{C}_0$, **υπάρχει ακριβώς** ένα βέλος $0 \xrightarrow{!} A$, από το 0 στο A, δηλ. το σύνολο $\mathrm{Hom}(0, A)$ περιέχει ακριβώς ένα βέλος. Θα συμβολίζουμε στο εξής οποιοδήποτε μοναδικό βέλος με το σύμβολο !.

Δυϊκά, ένα αντικείμενο, συμβολικά 1, θα το καλούμε **τελικό αντικείμενο** ανν **για κάθε** $A \in \mathscr{C}_0$, **υπάρχει ακριβώς** ένα βέλος $A \xrightarrow{!} 1$, από το A στο 1, δηλ. το σύνολο $\mathrm{Hom}(A, 1)$ περιέχει ακριβώς ένα βέλος.

Σχηματικά παριστάνουμε το αρχικό και το τελικό αντικείμενο ως ακολούθως:

$$
\begin{tikzcd}
\forall\circ \arrow[ddr, dotted, "\exists!"] & \\
\vdots & \\
\forall\circ \arrow[r, dotted, "\exists!"] & \star \\
\vdots & \\
\forall\circ \arrow[uur, dotted, "\exists!"] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & \circ\forall \\
 & \vdots \\
\star \arrow[uur, dotted, "\exists!"] \arrow[r, dotted, "\exists!"] \arrow[ddr, dotted, "\exists!"] & \circ\forall \\
 & \vdots \\
 & \circ\forall
\end{tikzcd}
\tag{10.3}
$$

τελικό αντικείμενο Αρχικό αντικείμενο

Είναι φανερό ότι το αρχικό και τελικό αντικείμενο καθορίζονται από **καθολικές ιδιότητες**, ιδιότητες δηλαδή που έχουν τη μορφή: **«για κάθε . . ., υπάρχει μοναδικό . . ., τέτοιο ώστε, . . .»**. Εξασφαλίζεται έτσι η υπάρξη μοναδικών βελών, εισερχομένων για το τελικο και εξερχομένων για το αρχικό, **για κάθε αντικείμενο** της κατηγορίας $\mathscr{C}$, και γι' αυτό τα αντικείμενα αυτά λέγονται **καθολικά αντικείμενα.** Στα καθολικά αντικείμενα δεν μας ενδιαφέρει η 'εσωτερική σύσταση και δομή' των αντικειμένων, αλλά οι ιδιότητες που κληρονομούν απ' την αλληεπίδρασή τους με τα άλλα αντικείμενα της κατηγορίας. Για το λόγο αυτό τα καθολικά αντικείμενα ορίζονται μέχρις ισομορφισμού.

Με τη χρήση γενικευμένων στοιχείων *ένα τελικό αντικείμενο* 1 *είναι ένα 'γενικευμένο μονοσύνολο'* με την έννοια ότι για κάθε πεδίο μεταβολής $T \in \mathscr{C}_0$ περιέχει ακριβώς ένα γενικευμένο στοιχείο $T \to 1$.

10.5.6 Ασκήσεις. 1. Προσπαθείστε να διατυπώστε τον ορισμό του αρχικού και τελικού αντικειμένου στις κατηγορίες $\mathscr{C} \downarrow A$, $A \in \mathscr{C}_0$ και $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, όπου $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ μικρές κατηγορίες. *Αυτή είναι μια άσκηση που θα πρέπει να επαναλαμβάνεται για κάθε κατηγορική έννοια που ορίζουμε.*

Μια κατηγορία μπορεί να έχει ένα, πολλά ή κανένα, αρχικό ή τελικό αντικείμενο. Αν όμως έχει ένα τα άλλα είναι ισόμορφα με αυτό.

10.5.7 Πρόταση. *Αν* $1, 1'$ *είναι δύο τελικά αντικείμενα στην κατηγορία* $\mathscr{C}$, *τότε τα αντικείμενα* $1, 1'$ *είναι ισομορφικά, δηλ.* $1 \cong 1'$.

Απόδ. Αφού το 1 είναι τελικό αντικείμενο και το $1' \in \mathscr{C}_0$, έχουμε εξ' ορισμού ότι υπάρχει μοναδικό βέλος $1 \xrightarrow{f} 1'$. Εναλλάσοντας τα $1'$ και 1 υπάρχει μοναδικό βέλος $1' \xrightarrow{g} 1$. Αλλά αφού τα f, g είναι μοναδικά έχουμε ότι και το $g \circ f : 1 \to 1$ είναι μοναδικό. Μοναδικό επίσης είναι και το βέλος $1_1 : 1 \to 1$, άρα έχουμε ότι: $g \circ f = 1_1$. Ομοίως $f \circ g = 1_{1'}$. Έτσι $1 \cong 1'$. ⊣∎

10.5.8 Παράδειγμα. 1. Στην κατηγορία **Set**, το κενό σύνολο $0 := \emptyset$ είναι το μοναδικό αρχικό αντικείμενο. Κάθε δε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι τελικό αντικείμενο. Για κάθε σύνολο X υπάρχει μια μοναδική (σταθερή) συνάρτηση $X \xrightarrow{!} \{x\}$. Είναι επίσης ανάγκη να πεισθεί κανείς ότι, δοθέντος ενός συνόλου

X υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση από το $\emptyset$ στο X. Πράγματι το γράφημα μιας τέτοιας συνάρτησης θα είναι ένα υποσύνολο του $\emptyset \times X = \emptyset$. Αλλά το μοναδικό τέτοιο υποσύνολο είναι το $\emptyset$. Τη μοναδική αυτή συνάρτηση $\langle \emptyset, G_! = \emptyset, X \rangle$ θα τη συμβολίζουμε με $\emptyset \xrightarrow{!} X$. Το ίδιο ισχύει και για την κατηγορία των τοπολογικών χώρων, **Top**.

2. Σε ένα μ.δ.σ. θεωρούμενο ως κατηγορία, αν υπάρχει το κάτω στοιχείο (minimum) 0 και το άνω στοιχείο 1 (maximum) τότε είναι φανερό ότι το 0 είναι αρχικό και το 1 τελικό αντικείμενο. Γενικά 'μεγάλες' κατηγορίες συνήθως έχουν αρχικά και τελικά αντικείμενα, ενώ 'μικρές' κατηγορίες δεν έχουν.
3. Στήν κατηγορία **Vect**, ο μηδενικός υπόχωρος $\{0\}$ είναι και αρχικό και τελικό αντικείμενο. Το ίδιο συμβαίνει και τις κατηγορίες, των ομάδων **Grp**, των Αβελιανών ομάδων **Ab**, κ.λπ. 4. Στην κατηγορία **Mon**, το μονοειδές με ένα στοιχείο, είναι και αρχικό και τελικό αντικείμενο, στην κατηγορία όμως των ημιομάδων **Sem** η κενή ημιομάδα είναι το αρχικό και κάθε ημιομάδα με ένα στοιχείο είναι τελικό αντικείμενο.

Είναι φενερό ότι οι έννοιες 'αρχικό' και 'τελικό' αντικείμενο είναι δυϊκές και ότι αν 0^{op} είναι τελικό αντικείμενο στην $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ τότε το 0 είναι αρχικό αντικείμενο στην $\mathscr{C}$ και αντιστρόφως.

10.5.9 *Ασκήσεις.* 1. Να δειχθεί ότι αν 1 είναι τελικό αντικείμενο και $f : 1 \to T$ είναι ένας ισομορφισμός τότε και το αντικείμενο T είναι ένα τελικό αντικείμενο.

2. Βρείτε τα τελικά και αρχικά αντικείμενα στις κατηγορίες $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$, και $\mathbf{Set}^{\to}$.

3. Δείξτε ότι αν τα $1, 0$ είναι τελικό και αρχικό αντικείμενο αντίστοιχα σε μια κατηγορία $\mathscr{C}$, τότε κάθε βέλος $1 \xrightarrow{\varphi} A$ είναι μονομορφισμός και κάθε βέλος $A \xrightarrow{\psi} 0$ είναι επιμορφισμός.

4. Δείξτε ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες, βλ. [111, σελ. 136] κάθε μεταβαλλόμενο στοιχείο, $x : T \to A \in \mathscr{C}_1$ είναι ολικό στοιχείο στην κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C} \downarrow T$.

5. Αν $A \in \mathscr{C}_0$ τότε η κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C} \downarrow A$, έχει το 1_A ως τελικό αντικείμενο.
6. Έστω $\mathbf{Ring}^+$ η κατηγορία των δακτυλίων με μονάδα. Τότε ο δακτύλιος $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ είναι αρχικό αντικείμενο στην κατηγορία $\mathbf{Ring}^+$. Δεν υπάρχει τελικό αντικείμενο στην κατηγορία $\mathbf{Ring}^+$. Ωστόσο στην κατηγορία **Ring** χωρίς απαραίτητα με μονάδα το $\{0\}$ είναι και αρχικό και τελικό αντικείμενο.

Υποδ. Αν $\langle R, +, \cdot, 0_R, 1_R \rangle$, τότε ένας ομομορφισμός $h : \mathbb{Z} \to R$ θα διατηρεί τα μοναδιαία στοιχεία και έτσι $h(1) = 1_R$ και $h(n) = nh(1)$, από την οποία συνάγουμε την μοναδικότητα του h.
7. Μια δομή $\langle X, s_X, 0_X \rangle$, όπου,

$$s_X : X \longrightarrow X \quad \text{και} \quad 0_X \in X$$

θα λέγεται δομή Peano, ανν

(P1) Για κάθε $x \in X$, $\quad s_X(x) \neq 0_X$

(P2) Για κάθε $x, y \in X$, αν $x \neq y$ τότε $s_X(x) \neq s_X(y)$

(P3) Αν $A \subseteq X$ με

(i) $0_X \in A$ και

(ii) Για κάθε $x \in A$, έχουμε και $s_X(x) \in A$ τότε $A = X$.

Έστω τώρα $\mathscr{P}$ η κατηγορία των δομών Peano, με βέλη τους αντίστοιχους ομομορφισμούς. Να δειχθεί ότι οι φυσικοί αριθμοί $\langle \mathbb{N}, s, 0 \rangle$ με $s(n) := n + 1, \quad n = 0, 1, \ldots$ είναι αρχικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{P}$.

▶ Καθολικότητες παρουσία Συναρτητών

Στη συνέχεια θέλουμε να εξετάσουμε βέλη από ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ σε ένα συναρτητή $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$, καθώς επίσης και καθολικά τέτοια βέλη. Είναι φανερό ότι θα πρέπει να θεωρήσουμε την κόμμα κατηγορία, βλ. σελ. **??**, $A{\downarrow}G$ που αντιστοιχεί στην ακόλουθη περίπτωση,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[dr, "F"'] & & \mathscr{D} \arrow[dl, "G"] \\ & \mathscr{C} & \end{tikzcd} \qquad \text{με} \qquad \begin{array}{rcl} F : \mathbb{1} & \to & \mathscr{C} \\ * & \mapsto & F(*) = A \end{array}$$

Πολλές φορές θα συμβολίζουμε με A ή και με $\ulcorner A \urcorner$ τον συναρτητή

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{1} & \to & \mathscr{C} \\ * & \mapsto & F(*) = A \end{array} .$$

10.5.10 Ορισμός. **(i)** **Ένα καθολικό βέλος** από το $A \in \mathscr{C}_0$ στον συναρτητή G είναι ένα ζεύγος (D_A, u_A), που αποτελείται από ένα αντικείμενο $D_A \in \mathscr{D}_0$ και ένα βέλος $(u_A : A \to GD_A) \in \mathscr{C}_1$, τέτοιο ώστε για κάθε $D \in \mathscr{D}_0$ και για κάθε $(h : A \to GD) \in \mathscr{C}_1$, υπάρχει μοναδικό βέλος $(\hat{h} : D_A \to V) \in \mathscr{D}_1$ τέτοιο ώστε $G\hat{h} \circ u_A = h$, δηλαδή κάθε βέλος $(h : A \to GD) \in \mathscr{C}_1$ παραγοντοποιείται μέσω του καθολικού βέλους $(u_A : A \to GD_A)$, με άλλα λόγια το καθολικό βέλος $(D_A, u_A : A \to GD_A)$ είναι αρχικό στοιχείο στην κόμμα κατηγορία $(A{\downarrow}G)$, με αντικείμενα (D, f), $\quad f : A \longrightarrow GD$, $D \in \mathscr{D}_0$ και βέλη από το (D, f) στο (D', f'), μορφισμοί $(h : D \to D') \in \mathscr{D}_1$, τέτοια ώστε $f' = Gh \circ f$. Διαγραμματικά, έχουμε,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dotted, "u_A"] \arrow[dr, "\forall h"'] & GD_A \arrow[d, dashed, "\exists !\, G\hat{h}"] \\ & GD \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D_A \arrow[d, "\exists !\, \hat{h}"'] \\ \forall\, D \end{tikzcd},$$

Όπως με όλα τα αρχικά αντικείμενα, το καθολικό βέλος είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού. Το καθολικό βέλος (D_A, u_A), και κυρίως το GD_A λέγεται και **το ελεύθερα παραγόμενο αντικείμενο με γεννήτορες από το** A **ως πρός τον συναρτητή** G, το δε καθολικό βέλος η_A αναφέρεται και ως **εμφύτευση των γεννητόρων.** Η έννοια αυτή παίζει κεντρικό ρόλο και στην έννοια της προσάρτησης που θα μελετήσουμε αργότερα.

(ii) Ένα ζεύγος (D, x) με $D \in \mathscr{D}_0$ και $x \in GD$ λέγεται **καθολικό αντικείμενο** του συναρτητή $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ ανν για κάθε $Y \in \mathscr{D}_0$ και $y \in GY$ υπάρχει μοναδικό βέλος $(f : D \to Y) \in \mathscr{D}_1$ τέτοιο ώστε, $Gf(x) = y$ ή με διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} GD \ni x \arrow[d, "Gf"'] \arrow[d, mapsto, shift left=8ex] \\ GY \ni y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[d, "\exists ! f"'] \\ \forall\, Y \end{tikzcd}$$

Αν τώρα $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ είναι ένας συναρτητής, τότε ως γνωστόν η κόμμα κατηγορία, $\mathscr{C}{\downarrow}G$ ορίζεται ως εξής:

(α) **Αντικείμενα της** $\mathscr{C}{\downarrow}G$: $(\mathscr{C}{\downarrow}G)_0 := \{(D, x) \,|\, D \in \mathscr{D}_0, \ \& \ x \in GD\}$

(β) **Βέλη της** $\mathscr{C}{\downarrow}G$: Παίρνουμε τα βέλη $f : D \to Y$ της $\mathscr{D}$ με την ιδιότητα, $Gf(x) = y$, δηλαδή για $D, Y \in \mathscr{D}_0 \quad x \in D, y \in Y$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}\downarrow G}((D, x), (Y, y)) := \{\, f \in \mathrm{Hom}(D, Y) \,|\, \text{με}, \quad Gf(x) = y \,\}$$

τότε το ζεύγος (D, x) με $D \in \mathscr{D}_0$ και $x \in GA$ λέγεται **καθολικό αντικείμενο** του συναρτητή $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ ανν το στοιχείο (D, x) είναι αρχικό αντικείμενο στην κατηγορία $\mathscr{C}{\downarrow}G$.

(iii) Έστω $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ ένας συναρτητής και $D \in \mathscr{D}_0$. Τότε ως γνωστόν η κόμμα κατηγορία, $D{\downarrow}G$ ορίζεται ως εξής:

(α) **Αντικείμενα της** $D{\downarrow}G$:

$$(T{\downarrow}G_0) := \{(X, y), \mid X \in \mathscr{D}_0, \ \& \ (y : T \to GX) \in \mathscr{C}_1\}$$

(β) **Βέλη της** $T{\downarrow}G$: Παίρνουμε τα βέλη $(h : D \to D') \in \mathscr{D}_1$ με την ιδιότητα, $y' = Gh \circ y$, ή με διαγράμματα,

$$D \xrightarrow{h} D', \qquad \begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "y"'] \arrow[dr, dashed, "y'=Gh\circ y"] & \\ GD \arrow[rr, "Gh"'] & & GD' \end{tikzcd}$$

10.6 Μονομορφισμοί και Επιμορφισμοί

Με τη χρήση των γενικευμένων στοιχείων οι γνώριμοι ορισμοί από την Απλοϊκή Συνολοθεωρία γενικεύονται εύκολα και στην κατηγορική περίπτωση.

Στην Συνολοθεωρία γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ θα είναι ένριψη ή μονοσυνάρτηση ανν $(\forall x, y \in A)[f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$. Ο ίδιος ορισμός περίπου ισχύει και στις κατηγορίες, μόνον που αντί των ολικών στοιχείων θα θεωρούμε τώρα γενικευμένα στοιχεία.

10.6.1 Ορισμός. Ένα βέλος $f : A \longrightarrow B$ μιας κατηγορίας θα λέγεται **μονομορφισμός** ανν $(\forall x, y \in^T A)[f \circ x = f \circ y \Rightarrow x = y]$. Συνήθως γράφουμε και εδώ $f(x)$ αντί $f \circ x$. Στην ουσία ο ορισμός αυτός μας λέει ότι τα 'εκτασιακά χαρακτηριστικά' του A και του B είναι σε $1 - 1$ αντιστοιχία. Κάθε φορά που ένα γενικευμένο στοιχείο x 'σχεδιάζει' μια καμπύλη, ή γενικότερα ένα εκτασιακό στοιχείο στο αντικείμενο A τότε το γενικευμένο στοιχείο $f \circ x$ του B θα σχεδιάζει ένα αντίστοιχο εκτασιακό στοιχείο στο B. Αυτό γίνεται περισσότερο φανερό αν για κάθε $T \in \mathscr{C}_0$, θεωρήσουμε την αντιστοιχία των εκτασιακών στοιχείων του A και του B με 'στάδιο ορισμού' T, $\lambda : \mathrm{Hom}(T, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T, B)$ με $\lambda(x) := f \circ x$. Τότε από τον πιο πάνω ορισμό, η συνάρτηση λ είναι πράγματι ένριψη.

Ο παραπάνω ορισμός, παρουσιάζεται γραφικά ως εξής:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] \arrow[rr, bend left, dashed, "f\circ x"] \arrow[rr, bend right, dashed, "f\circ y"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}, \quad f \circ x = f \circ y \Rightarrow \ x = y$$

Για μονομορφισμούς θα χρησιμοποούμε το συμβολισμό $\rightarrowtail$.

Ο ορισμός του επιμορφισμού είναι τώρα εύκολος, αν σκεφθεί κανείς ότι επιμορφισμός στην κατηγορία $\mathscr{C}$ είναι το ίδιο με την έννοια του μονομορφισμού στην αντίθετη κατηγορία $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Με τον τρόπο αυτό οι ορισμοί ελαττώνονται στο μισό! Κρίνεται ωστόσο ότι θα έπρεπε να δοθεί με σαφήνεια ο ορισμός του επιμορφισμού, για να φανεί ο ρόλος των γενικευμένων ιδιοτήτων που είναι δυϊκός των γενικευμένων στοιχείων.

10.6.2 Ορισμός. Ένα βέλος $f : A \longrightarrow B$ μιας κατηγορίας θα λέγεται **επιμορφισμός** ανν $(\forall p, q \in_V B)[p \circ f = q \circ f \;\Rightarrow\; p = q]$. Ο συμβολισμός $p \in_V B$ σημαίνει $p : B \longrightarrow V$, δηλαδή μια γενικευμένη ιδιότητα. Στην ουσία ο ορισμός αυτός μας λέει ότι τα 'εντασιακά χαρακτηριστικά' του B και του A είναι σε $1-1$ αντιστοιχία. Κάθε φορά που μια γενικευμένη ιδιότητα p των στοιχείων του B διαμερίζει το B σε 'ινες', τότε και η γενικευμένη ιδιότητα $p \circ f$ διαμερίζει το B σε αντίστοιχες 'ίνες'. Αυτό γίνεται περισσότερο φανερό αν για κάθε $V \in \mathscr{C}_0$, θεωρήσουμε την αντιστοιχία των εντασιακών στοιχείων του B και του A με 'στάδιο ορισμού' V, $\lambda : \mathrm{Hom}(B, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, V)$ με $\lambda(x) := p \circ f$. Τότε από τον πιο πάνω ορισμό, η συνάρτηση λ είναι πράγματι ένριψη, δηλαδή τα εντασιακά χαρακτηριστικά του B και του A βρίσκονται σε $1-1$ αντιστοιχία.

Ο παραπάνω ορισμός, παρουσιάζεται γραφικά ως εξής:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, dashed, "p \circ f"] \arrow[rr, bend right, dashed, "q \circ f"'] & B \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & V \end{tikzcd}, \quad p \circ f = q \circ f \;\Rightarrow\; p = q$$

Για επιμορφισμούς θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\twoheadrightarrow$.

Παρ' όλο τον ορισμό που δόθηκε, μπαίνει κανείς στον πειρασμό να εξετάσει και τον ακόλουθο ορισμό:

10.6.3 Ορισμός. Ένα βέλος $f : A \longrightarrow B$ μιας κατηγορίας θα λέγεται **επίρριψη επί των γενικευμένων στοιχείων** ανν για κάθε στάδιο ορισμού $T \in \mathscr{C}_0$ και για κάθε $y \in^T B$ υπάρχει κάποιο $x \in^T A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Η έννοια της 'επίρριψης επί των γενικευμένων στοιχείων' είναι πιο ισχυρή από την έννοια του επιμορφισμού, όπως δείχνει το ακόλουθο Θεώρημα.

10.6.4 Θεώρημα. *Ένα βέλος $f : A \longrightarrow B$ είναι μια επίρριψη επί των γενικευμένων στοιχείων ανν υπάρχει κάποιο βέλος $g : B \longrightarrow A$ με $f \circ g = 1_B$*

Απόδ. ($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχει ένα τέτοιο βέλος g με $f \circ g = 1_B$. Τότε για κάθε $y \in^T B$, το T-στοιχείο $g(y)$ του A έχει την ιδιότητα $f(g(y)) = y$, άρα η f είναι μια επίρριψη επί των γενικευμένων στοιχείων. $\dashv\Box$
($\Rightarrow$) Ας υποθέσουμε ότι το βέλος f είναι μια επίρριψη επί των γενικευμένων στοιχείων. Αν πάρουμε το ολικό στοιχείο 1_B του B, τότε από την υπόθεσή μας υπάρχει γενεικευμένο στοιχείο $g \in^B A$ με $f(g) = 1_B$. $\dashv\blacksquare$

Παρ' όλο το πιό πάνω Θεώρημα, μπορεί κανείς να δείξει ότι ένας συναρτητής είναι μονομορφισμός στην κατηγορία **CAT** ανν είναι μια ένριψη και στα αντικείμενα και στα βέλη.

Όταν έχουμε $f \circ g = 1_B$ θα καλούμε το g **'δεξιό αντίστροφο'** του f, ή και **'διατομή'**[16] (section) του f και το f **'αριστερό αντίστροφο'** του g ή και **'αναστολή'** (retraction). Τα δεξιά αντίστροφα βέλη δεν είναι μοναδικά. Ένα βέλος που έχει δεξιό αντίστροφο λέγεται και **'διασπασμένος επιμορφισμός'.** Έτσι βλέπουμε ότι οι έννοιες η f είναι 'διασπασμένος επιμορφισμός' και η f έχει δεξιό αντίστροφο συμπίπτουν. Είναι φανερό ότι κάθε ισομορφισμός είναι διασπασμένος επιμορφισμός (ελέγξετο το!).

Επειδή οι συναρτητές διατηρούν τα ταυτοτικά βέλη θα διατηρούν και τους διασπασμένους επιμορφισμούς και τους διασπασμένους μονομορφισμούς (μορφισμούς δηλαδή που έχουν αριστερό αντίστροφο). Ωστόσο όπως είδαμε ο επιλήσμων συναρτητής $F : \mathbf{Mon} \longrightarrow \mathbf{Set}$ δεν διατηρεί τους επιμορφισμούς, π.χ. τον $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle \overset{i}{\hookrightarrow} \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ βλ. Θεώρημα 10.6.4.

Οι έννοιες 'επίρριψη' και 'επιμορφισμός' διαφέρουν δραστικά όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα,

10.6.5 Παράδειγμα. Έστω η κατηγορία **Mon** των μονοειδών. Έστω ακόμη τα ακόλουθα δύο αντικείμενα, $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle \in \mathbf{Mon}_0$. Ας θεωρήσουμε τώρα την εμφύτευση,

$$\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle \overset{i}{\hookrightarrow} \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$$

Η εμφύτευση αυτή αναμένουμε να είναι μονομορφισμός, όπως εξ' άλλου συμβαίνει και σε αντίστοιχες καταστάσεις στη συνολοθεωρία. Πράγματι η i είναι μονομορφισμός. Αυτό που δεν αναμένει κανείς είναι η εμφύτευση i να είναι και επιμορφισμός! Αλλά στην πραγματικότητα είναι! Ας θεωρήσουμε δύο

[16] Στην Ελληνική ορολογία έχει επικρατήσει να αποδίδουμε τον όρο 'intersection' με 'τομή' και έτσι αποδίδει κανείς το 'section' ως διατομή, ενώ θα έπρεπε να ήταν αντίστροφα.

γενικευμένες ιδιότητες p, q του $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, έστω δηλαδή,

$$\begin{tikzcd} \langle \mathbb{N},+,0\rangle \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, dashed, bend left, "p\circ i"] \arrow[rr, dashed, bend right, "q\circ i"'] & \langle \mathbb{Z},+,0\rangle \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \langle M,*,e\rangle \end{tikzcd}$$

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $p \circ i = q \circ i$ συνεπάγεται ότι $p = q$. Πράγματι έστω $z \in \mathbb{Z}$. Αν $z \geq 0$, η συνάρτηση i είναι ταυτοτική επί των θετικών τιμών και επομένως αναμένουμε να μην υπάρχει πρόβλημα. Πράγματι, $p(z) = p(i(z)) = q(i(z)) = q(z)$. Έτσι η συνθήκη ισχύει. Έστω τώρα ότι $z < 0$, τότε $-z \geq 0$ και $-z \in \mathbb{N}$. Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{array}{rcl} p(z) & = & p(z) * e \\ & = & p(z) * q(0) \\ & = & p(z) * q(-z + z) \\ & = & p(z) * (q(-z) * q(z)) \\ & = & (p(z) * q(-z)) * q(z) \\ & = & (p(z) * p(i(-z))) * q(z) \\ & = & (p(z) * p(-z)) * q(z) \\ & = & p(z + -z) * q(z) \\ & = & p(0) * q(z) \\ & = & e * q(z) \\ & = & q(z) \end{array}$$

Άρα και στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $p = q$ ⊣

Το παραπάνω παράδειγμα θέτει το πρόβλημα των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των υποκειμένων συναρτήσεων, που ορίζονται επί των φορέων των δομών (επιρρίψεις, ενρίψεις, κ.λπ.), και των βελών (επιμορφισμοί, μονομορφισμοί κ.λπ.), τυχόντων συγκεκριμένων κατηγοριών (κατηγοριών δηλαδή που τα αντικείμενά τους είναι σύνολα εφοδιασμένα με κάποια δομή, τα δε βέλη τους είναι συναρτήσεις που διατηρούν τη δομή.) Αξίζει να σημειώσει κανείς ότι το πιο πάνω παράδειγμα αποτελεί και ένα αντιπαράδειγμα, ότι ένας μονοφορφισμός που είναι ταυτόχρονα και επιμορφισμός δεν είναι πάντοτε ισομορφισμός. Γενικά έχουμε,

Σε κάθε συγκεκριμένη κατηγορία, οι ομομορφικές ενρίψεις είναι μονομορφισμοί και αντιστρόφως, οι ομομορφικές επιρρίψεις είναι επιμορφισμοί αλλά το αντίστροφο ισχύει π.χ. για την κατηγορία Grp αλλά όχι για την κατηγορία Mon.

Έχουμε όμως την ακόλουθη πρόταση,

10.6.6 Πρόταση. *Στην κατηγορία των μονοειδών, ένα βέλος είναι μονομορφισμός ανν είναι ενριπτικός ομομορφισμός.*

Απόδ. Έστω $\mathbb{M}_1 \equiv \langle M_1, *_1, e_1\rangle$ και $\mathbb{M}_2 \equiv \langle M_2, *_2, e_2\rangle$, δύο μονοειδή, και $h : \mathbb{M}_1 \longrightarrow \mathbb{M}_2$ ένας ενριπτικός ομομορφισμός. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in^T M_1$ με $h(x) = h(y)$ έχουμε ότι, $x = y$. Πράγματι για κάθε $t \in T$, έχουμε, $h(x(t)) = h(y(t))$, έτσι $x(t) = y(t)$ αφού η h είναι ένριψη. Άρα $x = y$, και έτσι ο h είναι μονομορφισμός. ⊣▯

Αντίστροφα αν $h : \mathbb{M}_1 \longrightarrow \mathbb{M}_2$ είναι ένας μονομορφισμός, τότε είναι ομομορφισμός και επιλέγοντας ολικά στοιχεία $x, y \in^1 M_1$ βλέπουμε ότι είναι και ένριψη. ⊣▮

Η ίδια απόδειξη δουλεύει και σε οποιαδήποτε άλλη συγκεκριμένη κατηγορία.

10.6.7 Ασκήσεις. 1. Να δειχθεί ότι αν $\langle X, \tau_X\rangle$ και $\langle Y, \tau_Y\rangle$ είναι τοπολογικοί χώροι του Hausdorff, τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \langle X, \tau_X\rangle \longrightarrow \langle Y, \tau_Y\rangle$ της οποίας η εικόνα $f[X]$ είναι πυκνή στον $\langle Y, \tau_Y\rangle$, είναι επιμορφισμός.

2. Να δειχθεί ότι οι επιμορφισμοί είναι επιρρίψεις στίς ακόλουθες κατηγορίες: **Pos**,**Vect**, **Ab**

3. Να δειχθεί ότι η εμφύτευση, $\langle \mathbb{Z}, \cdot, 1\rangle \xhookrightarrow{i} \langle \mathbb{Q}, \cdot, 1\rangle$ στην κατηγορία **Mon**, είναι επιμορφισμός, παρ' όλο που δεν είναι επίρριψη.

Τέλος υπάρχει ένα ακόμα πρόβλημα: Πως συγκρίνονται οι έννοιες του 'ισομορφισμού' και των εννοιών, 'επιμορφισμός' και 'μονομορφισμός'; Είναι ένας ισομορφισμός, απλά μονομορφισμός και επιμορφισμός;

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση,

10.6.8 Πρόταση. *Αν $f : A \longrightarrow B$ είναι ισομορφισμός τότε είναι και μονομορφισμός και επιμορφισμός. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.*

Απόδ. Αφού η $f : A \longrightarrow B$ είναι ισομορφισμός τότε υπάρχει βέλος $g : B \longrightarrow A$ με $g \circ f = 1_A$ και $f \circ g = 1_B$. Έστω τώρα δύο γενικευμένα στοιχεία του A, $T \overset{x}{\underset{y}{\rightrightarrows}} A$ με $f \circ x = f \circ y$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι $x = y$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} x = 1_A \circ x &= (g \circ f) \circ x \\ &= g \circ (f \circ x) \\ &= g \circ (f \circ y) \\ &= (g \circ f) \circ y \\ &= 1_A \circ y = y \end{aligned}$$

Άρα η f είναι μονομορφισμός. Επειδή η έννοια του ισομορφισμού είναι αυτοδυϊκή έννοια, η πιο πάνω απόδειξη μεταγραμμένη στην αντίθετη κατηγορία μας λέει ότι η f είναι επίσης επιμορφισμός. Το ότι το αντίστροφο δεν ισχύει φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα. ⊣

10.6.9 Παράδειγμα. ''Εστω $\mathbb{P} \equiv \langle P, \leq \rangle$ ένα μ.δ.σ. θεωρούμενο ως κατηγορία. 'Εχουμε ότι $f : p \longrightarrow q$ ανν $p \leq q$. Θα δείξουμε ότι κάθε βέλος $f : p \longrightarrow q$ είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός αλλά τα μόνα βέλη που είναι ισομορφισμοί είναι τα ταυτοτικά βέλη. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι σε κάθε μ.δ.σ. υπάρχει το πολύ ένα βέλος μεταξύ δύο στοιχείων, έτσι ο ορισμός του μονομορφισμού ικανοποιείται τετριμμένα. Το ίδιο συμβαίνει και με την περίπτωση του επιμορφισμού. 'Εστω τώρα ότι το βέλος $f : p \longrightarrow q$ έχει αντίστροφο, $f^{-1} : q \longrightarrow p$, δηλαδή, $p \leq q$ και $q \leq p$, οπότε $p = q$. Αλλά τότε το f πρέπει να είναι το μοναδικό ταυτοτικό βέλος 1_p . Αρα το f είναι ισομορφισμός.

Είναι σχετικά εύκολο να δείξει κανείς το ακόλουθο Θεώρημα,

10.6.10 Θεώρημα. *'Ενα βέλος σε μια κατηγορία $\mathscr{C}$ είναι ισομορφισμός αν είναι αμφίρριφη (1-1 και επί) επί των γενικευμένων στοιχείων.*

10.6.11 Ασκήσεις. 1. 'Εστω το ακόλουθο διάγραμμα σε μια οποιαδήποτε κατηγορία,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Να δειχθεί ότι:

(i) Αν f και g είναι ισομορφισμοί (αντ. μονομορφισμοί, επιμορφισμοί) τότε και η σύνθεση $g \circ f$ είναι ισομορφισμός (αντ. μονομορφισμός, επιμορφισμός)

(ii) Αν το βέλος h είναι μονομορφισμός τότε το ίδιο είναι και το βέλος f.

(iii) Αν το βέλος h είναι επιμορφισμός τότε το ίδιο ισχύει και για το βέλος g.

(iv) Δώστε ένα αντιπαράδειγμα που το h να είναι μονομορφισμός αλλά το g να μην είναι.

2. 'Εστω $(f : A \longrightarrow B) \in \mathscr{C}_1$, τότε να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Το βέλος f είναι ισομορφισμός.

(ii) Το βέλος f είναι και μονομορφισμός και διασπασμένος επιμορφισμός.

(iii) Το βέλος f είναι και διασπασμένος μονομορφισμός και επιμορφισμός.

(iv) Το βέλος f είναι και διασπασμένος μονομορφισμός και διασπασμένος επιμορφισμός.

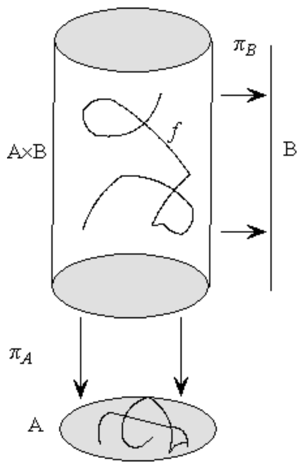
3. Δείξτε ότι, στην κατηγορία **Rng** των δακτυλίων και των ομομορφισμών δακτυλίων, η εμφύτευση $\mathbb{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$ είναι και μονομορφισμός και επιμορφισμός αλλά δεν είναι ισομορφισμός.
4. Δείξτε ότι κάθε διατομή είναι μονομορφισμός και κάθε αναστολή είναι επιμορφισμός.

10.7 Πεπερασμένα Όρια

Συνήθως τα πεπερασμένα όρια απαντώνται σαν δύο δυϊκοί τύποι: Τα **όρια** (αντίστροφα ή προβολικά όρια) και τα **συνόρια** (επαγωγικά ή ευθεία όρια). Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν μεταξύ άλλων τα: 'τελικά αντικείμενα', 'γινόμενα', 'εξισωτές' και 'εφελύσεις' (pullbacks) ή ινώδη γινόμενα (fibered products). Οι δυϊκές έννοιες αυτών, 'αρχικά αντικείμενα', 'συνγινόμενα', 'συνεξισωτές', και 'εξωθήσεις'(pushouts), αποτελούν τα συνόρια. Η έννοια του 'ορίου' είναι μια κατηγορική εκδοχή της εννοίας ενός υποσυνόλου, $X \subseteq A \times B$, που ορίζεται με εξισώσεις. Από την άλλη μεριά η έννοια του συνορίου είναι η κατηγορική εκδοχή του 'πηλίκου' ένος αθροίσματος $A + B/\approx$ ως προς μια σχέση ισοδυναμίας $\approx$.

10.7.1 Γινόμενα

Το παράδειγμα στο Σχήμα 10.1, βλ. [121, p.63], αποτελεί ίσως το αρχέτυπο παράδειγμα για την γενικότερη έννοια του γινομένου σε κατηγορίες. Το σύνολο A συμβολίζει τη βάση του κυλίνδρου, και το σύνολο B τη γενέ-



Σχήμα 10.1: Το αρχέτυπο παράδειγμα γινομένου

τειρα της εκ περιστροφής επιφάνειας του κυλίνδρου. Έστω $C := A \times B$ το συνολοθεωρητικό Καρτεσιανό γινόμενο και οι συναρτήσεις προβολών, $\pi_A : A \times B \longrightarrow A$ // $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, και $\pi_B : A \times B \longrightarrow B$ // $(x, y, z) \mapsto z$.

Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε την κίνηση Brawn ενός σωματιδίου που κινείται στο C. Έστω $f : T \to C$ μια τροχιά (ένα γενικευμένο στοιχείο του C) του σωματιδίου. Είναι φανερό ότι μπορούμε να περιγράψουμε την τροχιά f του σωματιδίου αν γνωρίζουμε τις προβολές της $f_A := \pi_A \circ f$, και $f_B := \pi_B \circ f$, και αντίστροφα, **για κάθε** $f_A : T \to A$ **και για κάθε** $f_B : T \to B$, **υπάρχει ένα μοναδικό μεταβαλλόμενο στοιχείο** $f : T \to A \times B$, **τέτοιο ώστε** $f_A = \pi_A \circ f$ **και** $f_B = \pi_B \circ f$. Η πρόταση όμως αυτή έχει ακριβώς τη μορφή μιας **καθολικής ιδιότητας**. Είναι ακριβώς η καθολική ιδιότητα που ορίζει το γινόμενο $A \times B$. Κάθε δηλαδή ζευγάρι $(x : T \to A, y : T \to B)$ εκτασιακών χαρακτηριστικών του A και του B αντίστοιχα, καθορίζει ένα μοναδικό εκτασιακό χαρακτηριστικό $f := (x, y)$ του γινομένου $A \times B$.

10.7.1 Ορισμός. Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και $A, B \in \mathscr{C}_0$. Μια τριάδα (P, π_A, π_B) με $P \in \mathscr{C}_0$ και $\pi_A : P \to A, \pi_B : P \to B \in \mathscr{C}_1$, θα λέγεται **γινόμενο** των A και B στην $\mathscr{C}$ ανν γιά κάθε $T \in \mathscr{C}_0$ και για κάθε ζευγάρι μορφισμών (μεταβαλλόμενων στοιχείων) $x : T \to A, y : T \to B$ υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός (μεταβαλλόμενο στοιχείο του P), $f := (x, y) : T \to P$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd}
 & & \bullet B \\
\forall\, T \circ \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\forall y"] \arrow[drr, dotted, bend right, "\forall x"'] & P \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\
 & & \bullet A
\end{tikzcd}$$

Καθολική ιδιότητα Γινομένου

Σημειώστε ότι οι μορφισμοί π_A, π_B, που λέγονται 'προβολές' δεν είναι αναγκαστικά επιμορφισμοί, σε αντίθεση με αυτό που συμβαίνει στα σύνολα. Επίσης το γινόμενο αφού ορίζεται με καθολική ιδιότητα, ορίζεται μέχρις ισομορφισμού. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι το γινόμενο ανάγεται σε ένα τελικό αντικείμενο μιας κατάλληλης διαγραμματικής κατηγορίας, καί ως έκ τούτου δύο γινόμενα είναι ισομορφικά. Στο εξής θα επιλέξουμε ένα τέτοιο γινόμενο και θα το συμβολίζουμε ως, $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$. Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι οι προβολές π_A, π_B εξαρτώνται στην ουσία από καθολικό αντικείμενο $A \times B$. Έτσι ένας περισσότερο συνεπής συμβολισμός θα ήταν $\pi_1^{A\times B}, \pi_2^{A\times B}$.

Με τη χρήση των γενικευμένων στοιχείων μπορούμε να εκφράσουμε το γινόμενο, με έναν τρόπο που θυμίζει τον αντίστοιχο της συνολοθεωρίας: Για κάθε $T \in \mathscr{C}_0$,

$$(x, y) \in^T A \times B \quad \text{ανν} \quad x \in^T A, \text{ και } y \in^T B,$$

υπάρχει δηλαδή κανονική αμφίρριψη μεταξύ μεταβαλλόμενων στοιχείων της

μορφής
$$T \longrightarrow A \times B$$
και ζευγών μεταβαλλόμενων στοιχείων της μορφής,
$$T \longrightarrow A, \quad \& \quad T \longrightarrow B.$$
Αυτό θα το παριστάνουμε με περισσότερο συμπαγή τρόπο ως,
$$\mathrm{Hom}(T, A \times B) \cong \mathrm{Hom}(T, A) \times \mathrm{Hom}(T, B)$$
ή και,
$$\frac{T \longrightarrow A \times B}{T \longrightarrow A,\ T \longrightarrow B}$$
Αν $f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ και $f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$ τότε ορίζουμε,

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f_1 \times f_2 := (f_1 \circ \pi_1^A, f_2 \circ \pi_2^A) : A_1 \times A_2 & \to & B_1 \times B_2 \\ (x, y) & \mapsto & (f_1 \times f_2)(x, y) = (f_1(x), f_2(y)) \end{array}}$$

Ο πιο πάνω ορισμός τεκμηριώνεται από το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
 & & A_1 \arrow[rr, "f_1"] & & B_1 \\
\forall\, T \arrow[r, dashed, "\exists!(x,y)"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\forall x"] \arrow[drr, dotted, bend right, "\forall y"'] & A_1 \times A_2 \arrow[ur, "\pi_1^A"] \arrow[dr, "\pi_2^A"'] \arrow[rr, dashed, "\exists! f_1 \times f_2"] & & B_1 \times B_2 \arrow[ur, "\pi_1^B"] \arrow[dr, "\pi_2^B"'] & \\
 & & A_2 \arrow[rr, "f_2"'] & & B_2
\end{tikzcd}$$

Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τα βέλη $f_1 \circ \pi_1^A$ και $f_2 \circ \pi_2^A$, τότε από την καθολική ιδιότητα του γινομένου $(B_1 \times B_2, \pi_1^B, \pi_2^B)$, έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό βέλος $(f_1 \circ \pi_1^A, f_2 \circ \pi_2^A)$ με,

$$\boxed{\pi_1^B \circ (f_1 \circ \pi_1^A, f_2 \circ \pi_2^A) = f_1 \circ \pi_1^A \quad \text{και} \quad \pi_2^B \circ (f_1 \circ \pi_1^A, f_2 \circ \pi_2^A) = f_2 \circ \pi_2^A}$$

Έτσι δικαιολογείται πλήρως ο ορισμός $f_1 \times f_2 := (f_1 \circ \pi_1^A, f_2 \circ \pi_2^A)$. Ομοίως αν θεωρήσουμε τα βέλη $f_1 \circ x$ και $f_2 \circ y$ τότε πάλι από την καθολική ιδιότητα του γινομένου $(B_1 \times B_2, \pi_1^B, \pi_2^B)$, έχουμε ότι,

$$\boxed{(f_1 \times f_2) \circ (x, y) = (f_1 \circ x, f_2 \circ y) \quad \text{ή και} \quad (f_1 \times f_2)(x, y) = (f_1(x), f_2(y))}$$

Αν υποθέσουμε δε το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[rrrr, dotted, bend left, "g_1 \circ f_1"] & & B_1 \arrow[rr, "g_1"] & & C_1 \\
A_1 \times A_2 \arrow[ur, "\pi_1^A"] \arrow[dr, "\pi_2^A"'] \arrow[rr, dashed, "\exists! f_1 \times f_2"] & & B_1 \times B_2 \arrow[ur, "\pi_1^B"] \arrow[dr, "\pi_2^B"'] \arrow[rr, dashed, "\exists! g_1 \times g_2"] & & C_1 \times C_2 \arrow[ur, "\pi_1^C"'] \arrow[dr, "\pi_2^C"] & \\
 & A_2 A_1 \arrow[rr, "f_2"'] \arrow[rrrr, dotted, bend right, "g_2 \circ f_2"'] & & B_2 \arrow[rr, "g_2"'] & & C_2
\end{tikzcd}$$

έχουμε τότε (να δειχθεί!),

$$\boxed{(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) = (g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2)}$$

Στη συνέχεια θα ανάγουμε το 'γινόμενο' σε τελικό αντικείμενο μιας διαγραμματικής κατηγορίας. Έστω $A, B \in \mathscr{C}_0$ δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathscr{C}$ το γινόμενο των οποίων θέλουμε να μελετήσουμε. Θα συμβολίζουμε με '$\circ$' ένα αντικείμενο μεταβλητή, ένω με '$\bullet$' ένα σταθερό αντικείμενο. Θεωρώντας τα αντικείμενα A, B σταθερά, το ερώτημά μας είναι αν υπάρχει αντικείμενο $X \in \mathscr{C}_0$ που να ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα που ορίζει το γινόμενο. Επομένως είμαστε αναγκασμένοι θα θεωρήσουμε διαγράμματα της μορφής,

$$\begin{tikzcd} & & \bullet A \\ \Sigma_X : & X \circ \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \bullet B \end{tikzcd}$$

Θεωρούμε λοιπόν την διαγραμματική κατηγορία, με αντικείμενα,

$$\mathscr{C}_\Sigma := \{\, \Sigma_X \mid X \in \mathscr{C}\}$$

και βέλη, $h : \Sigma_{X'} \longrightarrow \Sigma_X$ τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} & & \bullet A \\ X' \circ \arrow[r, "h"] \arrow[urr] \arrow[drr] & X \circ \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \bullet B \end{tikzcd}$$

Έτσι τελικά το γινόμενο των $A, B \in \mathscr{C}$ στην $\mathscr{C}$ ορίζεται ως το τελικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{C}_\Sigma$, όπως φαίνεται και από το ακόλουθο διάγραμμα, όπου για κάθε αντικείμενο $\Sigma_X \in \mathscr{C}_\Sigma$ υπάρχει ακριβώς ένα βέλος $h : \Sigma_X \longrightarrow \Sigma_P$ στο αντικείμενο Σ_P,

$$\begin{tikzcd} & & & & \bullet A \\ \cdots X' \circ \arrow[urrrr] \arrow[drrrr] \arrow[rrr, dashed, bend left, "h'"] & \cdots & X \circ \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[urr] \arrow[drr] & P \circ \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ & & & & \bullet B \end{tikzcd}$$

Από την Πρόταση 10.5.7 έχουμε ότι το γινόμενο δύο αντικειμένων των $A, B \in \mathscr{C}_0$ είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού.

Την έννοια του γινομένου καθώς επίσης και όλων των κατασκευών που ορίζονται με καθολικές ιδιότητες, μπορούμε να την εκφράσουμε με τη χρήση της έννοιας του αναπαραστάσιμου συναρτητή. Γενικά αναπαραστάσιμοι συναρτητές και καθολικές ιδιότητες είναι ισοδύμαμες έννοιες.

Έστω δύο αντικειμένα $A, B \in \mathscr{C}_0$. Ορίζουμε τον συναρτητή,

$$F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set} \;\not\!/\!\!/\; B \mapsto \{(f_1, f_2) \,|\, f_i \in \mathrm{Hom}(B, B_i),\ i = 1, 2\,\}$$

Αν αυτός ο συναρτητής είναι αναπαραστάσιμος, τότε το αναπαριστόν αντικείμενο, που είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού, συμβολικά $B_1 \times B_2$, είναι το γινόμενο των B_1 και B_1. Το καθολικό αντικείμενο (π_1, π_2) του F είναι τα βέλη προβολών. (Ελέγξτε την ισοδυναμία των ορισμών!)

Η έννοια του συν-γινομένου δύο αντικειμένων των $A, B \in \mathscr{C}_0$, ορίζεται δυϊκά ως το γινόμενο των $A, B \in \mathscr{C}_0^{\mathrm{op}}$ στην αντίθετη κατηγορία $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Η καθολική ιδιότητα που ορίζει το συν-γινόμενο περγράφεται με το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, dotted, bend left, "\forall"] & & \\
& \star \arrow[r, dashed, "\exists!"] & \circ\,\forall \\
\bullet \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[urr, dotted, bend right, "\forall"'] & &
\end{tikzcd}$$

Καθολική ιδιότητα Συν-γινομένου

10.7.2 Παράδειγμα. 1. Σε ένα μ.δ.σ. θεωρούμενο ως κατηγορία, το ελάχιστο $x \wedge y$ και μέγιστο $x \vee y$ όταν υπάρχουν, είναι το γινόμενο αντίστοιχα συν-γινόμενο.

2. Το ευθύ γινόμενο δύο ομάδων είναι το γινόμενο στην κατηγορία **Grp**.

3. Το Καρτεσιανό γινόμενο δύο τοπολογικών χώρων, εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο είναι το γινόμενο στην κατηγορία **Top.**

4. Το συν-γινόμενο δύο συνόλων A, B, στην κατηγορία **Set**, είναι η **ξένη ένωση** $A + B$ των A και B, που ορίζεται ως,

$$A + B := (A \times 1) \cup (B \times 2) = \{(a, 1) \,|\, a \in A\,\} \cup \{\,(b, 2) \,|\, b \in B\,\}$$

με εμφυτεύσεις ή συν-προβολές,

$$i_A(a) := (a, 1), \quad i_B(b) := (b, 2).$$

Στην κατηγορία **Set** συνήθως γράφουμε,

$$A \cong 1 + 1 + \cdots + 1, \quad \text{n-φορές}$$

αν το A είναι πεπρασμένο με n στοιχεία. Έτσι $2 \cong 1 + 1$ ή και $2 = 1 + 1$.

5. Αν $F(A)$ και $F(B)$ είναι τα ελεύθερα μονοειδή που παράγονται από τα σύνολα A και B, τότε στην κατηγορία **Mon**,

$$F(A) + F(B) \cong F(A + B)$$

όπως φαίνεται και από την ακόλουθη καθολική ιδιότητα,

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[dr, "i_A"] \arrow[drr, dotted, bend left, "\forall f"] & & \\
& F(A+B) \arrow[r, dashed, "\exists ! [f,g]"] & M \\
F(B) \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, dotted, bend right, "\forall g"'] & &
\end{tikzcd}$$

10.7.2 Εξισωτές και Συνεξισωτές

Η έννοια του εξισωτή είναι μια γενίκευση της έννοιας του πυρήνα των ομομορφισμών των ομάδων. Έστω $h : \langle G, *_G, e_G \rangle \longrightarrow \langle H, *_H, e_H \rangle$ ένας ομομορφισμός ομάδων, τότε ο πυρήνας του h, συμβολικά, $\ker h$, ορίζεται ως ακολούθως:

$$\ker h := \{\, x \in G \mid h(x) = e_H \,\}$$

Ο πυρήνας $\ker h$ είναι μια υποομάδα της G, και εξ ορισμού έχουμε ότι, $h(e_G) = e_H$ και $x \in \ker h \;\Leftrightarrow\; h(x) = h(e_G)$. Αν τώρα έχουμε δύο ομομορφισμούς $f, g : G \longrightarrow H$, και ορίσουμε $h := f * g^{-1}$ τότε $\ker(f, g) := \ker h$, δηλ. ο πυρήνας $\ker(f, g)$ ορίζεται ως ακολούθως:

$$\ker h \equiv \ker(f, g) := \{\, x \in G \mid f(a) = g(a) \,\}$$

Όμοια στην κατηγορία **Set** ο εξισωτής δύο παράλληλων συναρτήσεων $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ είναι το υποσύνολο του A, $\{\, x \in A \mid f(x) = g(x) \,\} \subseteq A$. Το ίδιο συμβαίνει και σε άλλες συγκεκριμένες κατηγορίες. Τα παραπάνω παραδείγματα γενικεύονται σε τυχούσες κατηγορίες μέσω καθολικών ιδιοτήτων.

Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ δύο παράλληλα βέλη. Ένα βέλος $e : E \to A$ θα λέμε ότι **εξισώνει** τα f, g ανν $f \circ e = g \circ e$.

10.7.3 Ορισμός. Με τα δεδομένα της προηγουμένης παραγράφου, ένας **εξισωτής** των $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ αποτελείται από ένα αντικείμενο E και ένα βέλος $e : E \to A$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $f \circ e = g \circ g$.

(ii) Για κάθε βέλος $x : T \to A$ με $f \circ x = g \circ x$ υπάρχει μοναδικό βέλος,

$$k : T \to E$$

τέτοιο ώστε, $e \circ k = x$, δηλαδή απαιτούμε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, dotted, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
T \arrow[u, dashed, "\exists! k"] \arrow[ur, dotted, "\forall x"'] & &
\end{tikzcd}$$

Σημειώστε ότι τά καθολικά βέλη, μέσα από τα οποία παραγοντοποιούνται τα άλλα βέλη με συγκεκριμένες ιδιότητες ($\cdots\cdots>$), θα τα παριστούμε στα διαγράμματα με $::::::>$, ενώ τα μοναδικά υπάρχοντα βέλη με $\dashrightarrow$.

Μπορούμε και εδώ να ορίσουμε τον εξισωτή με τη χρήση των αναπαραστάσιμων συναρτητών. Έστω,

$$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

δύο μορφισμοί της κατηγορίας, $\mathscr{C}$. Ορίζουμε τον συναρτητή,

$$F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set} \;\; /\!\!/ \;\; T \mapsto F(T) := \{\, x \in \mathrm{Hom}(T, A) \mid f \circ x = g \circ x \,\}$$

Ο συναρτητής αυτός είναι ανταλλοίωτος. Αν είναι και αναπαραστάσιμος τότε το αναπαριστόν αντικείμενο E μαζύ με το καθολικό στοιχείο του F, $E \overset{e}{::::>} A$ είναι ο εξισωτής των f και g.

Ο ορισμός του συνεξισωτή είναι δυϊκός του εξισωτή, δηλαδή ο συνεξισωτής είναι εξισωτής στην αντίθετη κατηγορία. Η αντίστοιχη καθολική ιδιότητα του συνεξισωτή δίνεται από το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \arrow[r, dotted] \arrow[dr, dotted, "\forall"'] & \star \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\
 & & \circ
\end{tikzcd}$$

Παρ' όλη την αναγωγή του συνεξισωτή στην έννοια του εξισωτή είναι ανάγκη να μελετήσει κανείς την σημασία του συνεξισωτή για διάφορες βασικές κατηγορίες. Αυτό θα γίνει μέσα από αρκετά παραδείγματα. Πρώτα όμως κάποιες βασικές προτάσεις.

Το γεγονός ότι ο εξισωτής και συνεξισωτής ορίζονται μέσα από καθολικές ιδιότητες, μας κάνει να αναμένουμε ότι ορίζονται μέχρις ισομορφισμού. Θα ανάγουμε και δω την απόδειξη στην αντίστοιχη για τα τελικά και αρχικά αντικείμενα. Έστω το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\Sigma_X : \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted, "x"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

με $f \circ x = g \circ x$. Ορίζουμε μια κατηγορία $\mathscr{C}_\Sigma$ με αντικείμενα τα διαγράμματα Σ_X, $X \in \mathscr{C}$ και βέλη $h : \Sigma_X \to \Sigma_Y$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, dotted, "y"] & & \\ & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X \arrow[uu, dashed, "h"] \arrow[ur, dotted, "x"'] & & \end{tikzcd}$$

Τότε είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η $\mathscr{C}_\Sigma$ είναι πράγματι μια κατηγορία, το τελικό αντικείμενο της οποίας είναι εξισωτής των f και g. Επειδή δε τα τελικά αντικέιμενα ορίζονται μέχρις ισομορφισμού το ίδιο θα συμβαίνει και για τους εξισωτές.

Πολλοί συγγραφείς συμβολίζουν τον μέχρις ισομορφισμού μοναδικό εξισωτή του παράλληλου ζεύγους f, g και ως $\ker(f, g)$.

10.7.4 Πρόταση. *Έστω ότι $e : E \to A$ είναι ένας εξισωτής του παράλληλου ζεύγους,*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

τότε το βέλος e είναι μονομορφισμός.

Απόδ. Έστω $\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & E \end{tikzcd}$ δύο γενικευμένα στοιχεία του E, με $e \circ x = e \circ y = h$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι $x = y$. Πράγματι, το βέλος h εξισώνει τα f και g, αφού,

$$\begin{aligned} f \circ h &= f \circ (e \circ x) \\ &= (f \circ e) \circ x \\ &= (g \circ e) \circ x \\ &= g \circ (e \circ x) \\ &= g \circ h \end{aligned}$$

Άρα από την καθολική ιδιότητα του $e : E \to A$, υπάρχει μοναδικό βέλος $k : T \to E$, τέτοιο ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dotted, tail, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ T \arrow[u, dashed, "\exists ! k"] \arrow[ur, dotted, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Λόγω της μοναδικότητας του βέλους k και του γεγονότος ότι και τα βέλη $x, y : T \to E$ κάνουν και αυτά το πιο πάνω διάγραμμα αντιμεταθετικό, έχουμε ότι, $k = x = y$. Άρα το βέλος $e : E \to A$, είναι μονομορφισμός. ⊣▮

10.7.5 Παράδειγμα. 1. Στήν κατηγορία **Set** ένας εξισωτής E των παράλληλων συναρτήσεων, $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) := x^2 + y^2$ και $g(x, y) := 1$ είναι ο κύκλος $E := \{\, (x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1 \,\}$ το δε βέλος $e : E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι απλά η εμφύτευση του κύκλου στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
2. Γνωρίζουμε ότι κάθε μορφισμός $f : A \to B$ με αριστερό αντίστροφο(αναστολή), $g : B \to A$, είναι μονομορφισμός. Θα δείξουμε ότι είναι και εξισωτής.

Απόδ. Πράγματι, αν $f : A \to B$ εχει μια αναστολή τότε υπάρχει $g : B \to A$ τέτοιο ώστε $g \circ f = 1_A$. Ας θεωρήσουμε τώρα τα βέλη, $f \circ g$ και 1_B, τότε το βέλος $f : A \to B$ είναι είναι ένας εξισωτής τους. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dotted, tail, "f"] & B \arrow[r, shift left, "f \circ g"] \arrow[r, shift right, "1_B"'] & B \\ T \arrow[u, dashed, "\exists ! k"] \arrow[ur, dotted, "\forall x"'] & & \end{tikzcd} \tag{$*$}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι, $(f \circ g) \circ f = 1_B \circ f$, και κάθε άλλο βέλος με την ίδια ιδιότητα παραγοντοποιείται μέσω του f. Έχουμε, $(f \circ g) \circ f = f \circ 1_A = f$ και $1_B \circ f = f$, άρα $(f \circ g) \circ f = 1_B \circ f$. Αν τώρα $x : T \to B$ είναι τέτοιο ώστε, $(f \circ g) \circ x = 1_B \circ x$ τότε αν πάρουμε ως $k := g \circ x$, τότε $f \circ (g \circ x) = (f \circ g) \circ x = 1_B \circ x = x$. Το βέλος k είναι το μοναδικό βέλος που κάνει το διάγραμμα $(*)$ αντιμεταθετικό, γιατί αν υπήρχε και ένα άλλο, έστω το $k' : T \to A$ τότε,θα είχαμε $x = f \circ k'$. Επειδή όμως το βέλος f είναι μονομορφισμός, από τη σχέση, $f \circ k = f \circ k' = x$ έχουμε ότι, $k = k'$. Άρα το βέλος f είναι εξισωτής των παράλληλων βελών, $f \circ g$ και 1_B. ⊣▮

10.7.6 Ορισμός. Ένας μονομορφισμός $e : T \to A$ θα λέγεται **ομαλός** (regular) ανν είναι εξισωτής ενός ζεύγους βελών.

10.7.7 Ασκήσεις. 1. Δείξτε ότι οι ενρίψεις στην **Set** είναι ομαλοί μονομορφισμοί.

2. Ένα βέλος σε μια κατηγορία που είναι και επιμορφισμός και ομαλός μονομορφισμός είναι ένας ισομορφισμός.
3. Δείξτε ότι στην κατηγορία **Mon** κάθε ζευγάρι παράλληλων βελών έχει έναν εξισωτή.
Σε ένα μ.δ.σ. οι μόνοι εξισωτές είναι τα ταυτοτικά βέλη.

Ας έλθουμε τώρα στους συνεξισωτές. Δυϊκά οι συνεξισωτές είναι επιμορφισμοί, και ένας μονομορφισμός και συνεξισωτής είναι ισομορφισμός.

Αν οι εξισωτές ορίζονται με μια καθολική ιδιότητα πάνω σε γενικευμένα στοιχεία, οι συνεξισωτές ορίζονται με μια καθολική ιδιότητα πάνω σε γενικευμένες ιδιότητες. Ας δούμε ξανά το διάγραμμα της καθολικής ιδιότητας για τους συνεξισωτές.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[dr, dotted, "\forall p"'] & Q \arrow[d, dashed, "\exists ! \bar{p}"] \\ & & V \end{tikzcd}$$

Βλέπουμε ότι κάθε γενικευμένη ιδιότητα του $p : B \to V$, παραγοντοποιείται μέσω της καθολικής ιδιότητας, $B \overset{q}{\dashrightarrow} Q$. Η καθολική ιδιότητα $B \overset{q}{\dashrightarrow} Q$ είναι φανερό ότι θα επάγει επί του B ίνες, που τουλάχιστον στην κατηγορία **Set** αποτελούν τις κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσεως ισοδυμαμίας. Συνεχίζοντας να σκεπτόμαστε στην κατηγορία **Set** βλέπουμε ότι από την άλλη μεριά το παράλληλο ζεύγος f, g καθορίζει μια σχέση $R \subseteq B \times B$ μεσω του συνόλου $\{\, (f(a), g(a)) \,|\, a \in A \,\}$. Η σχέση $\bar{p} \circ f = \bar{p} \circ g$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση, $p(t_1) = p(t_2)$ για κάθε $(t_1, t_2) \in R$. Τη σχέση R μπορούμε να την κάνουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\bar{R}$. Αν τώρα $B/\bar{R}$ είναι το σύνολο-πηλίκο τότε η συνάρτηση $q : B \to B/\bar{R}$ είναι συνεξισωτής των f, g, βλ. και Θεώρημα 2.3.3 καθώς επίσης και το [5, σελ. 16-22, 54-58] για περισσότερες λεπτομέρειες. Το συμπέρασμα είναι ότι οι συνεξισωτές σχετίζονται με γενικευμένες ιδιότητες και σχέσεις ισοδυμαμίας. Για έναν γενικό ορισμό της σχέσεως ισοδυναμίας σε μια κατηγορία βλ. [15, Ex. 1.7 #18, σελ. 44].

10.7.3 Εφελκύσεις και Εξωθήσεις

Η εφέλυση είναι ένα είδος γενικευμένης αντίστροφης εικόνας. Ας δούμε πιό λεπτομερειακά την γενίκευση αυτή της αντίστροφης εικόνας στα σύνολα. Η δυϊκή έννοια της συνάρτησης $f : A \to V$ βλ. σελ. 27, δίνεται με βάση τις ίνες $f^{-1}(v)$, $v \in V$ που αποτελούν μια διαμέριση του A. Αν τώρα έχουμε δύο συναρτήσεις (ιδιότητες) $f : A \to V$ και $g : B \to V$ τότε έχουμε για κάθε $v \in V$ δύο συλλογές ινών,

$$\{\, f^{-1}(v) \,\}_{v \in V} := \{\, A_v, \}_{v \in V} \quad \text{και} \quad \{\, g^{-1}(v) \,\}_{v \in V} := \{\, B_v, \}_{v \in V}$$

Οι ίνες ως υποσύνολα του A μπορούν να θεωρηθούν ως 'ιδιότητες' του A. Με αυτήν την έννοια η εφέλκυση δέχεται μια ερμηνεία με όρους γενικευμένων ιδιοτήτων. Κάθε όμως βέλος $f : A \to V$ μπορεί να έχει δύο δυϊκές ερμηνείες: Μία ως γενικευμένη ιδιότητα του A και μία ως γενικευμένο στοιχείο του V με πεδίο μεταβολής το αντικείμενο A.

Μπορούμε τώρα να πάρουμε το καρτεσιανό γινόμενο τον ινών,

$$A \times_V B := \bigcup_{v \in V} (A_v \times B_v).$$

Με άλλα λόγια, το $A \times_V B$ είναι το ινώδες σύνολο του οποίου η ίνα πάνω σε κάθε $v \in V$ είναι το γινόμενο των ινών $A_v \times B_v$, και συμπίπτει με την εφέλκυση των f και g επί του V. Από δω προέρχεται και ο όρος 'ινώδες γινόμενο' για την εφέλκυση.

Γενικότερα ο ορισμός της εφέλκυσης (pullback) δίνεται με την ακόλουθη καθολική ιδιότητα.

10.7.8 Ορισμός. Έστω μια κατηγορία $\mathscr{C}$ και $f, g \in \mathscr{C}_1$ με $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$, δηλαδή,

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, "g"] & \\
& V \\
A \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Μια **εφέλκυση** των f, g αποτελείται από ένα σύστημα βελών,

$$\begin{tikzcd}
& B \\
P \arrow[ur, dotted, "p_2"] \arrow[dr, dotted, "p_1"'] & \\
& A
\end{tikzcd}$$

που είναι καθολικό ως προς την ιδιότητα $f \circ p_1 = g \circ p_2$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd}
& & B \arrow[dr, "g"] & \\
T \arrow[r, dashed, "\exists ! u"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\forall y"] \arrow[drr, dotted, bend right, "\forall x"'] & P \arrow[ur, dotted, "p_2"] \arrow[dr, dotted, "p_1"'] & & V \\
& & A \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Εφέλκυση.

Δηλαδή έχουμε, $x = p_1 \circ u \quad y = p_2 \circ u$, και βέλη x, y έχουν την ιδιότητα $f \circ x = g \circ y$,

$$\begin{aligned}
f \circ x &= f \circ (p_1 \circ u) \\
&= (f \circ p_1) \circ u \\
&= g \circ (p_2 \circ y \\
&= g \circ y
\end{aligned}$$

Με όρους γενικευμένων στοιχείων, για κάθε, $T \in \mathscr{C}$, $(x, y) \in^T A \times_V B$, ανν $x \in^T A$ και $y \in^T B$. Επιπρόσθετα λόγω της δυϊκότητας της ερμηνείας των γενικευμένων στοιχείων ή ιδιοτήτων θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την εφέλκυση με γενικευμένα στοιχεία. Έστω το ακόλουθο διάγρμμα:

$$\begin{tikzcd}
& & T_2 \arrow[dr, "x_2"] & \\
T' \arrow[r, dashed, "\exists ! u"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\forall y"] \arrow[drr, dotted, bend right, "\forall x"'] & T \arrow[ur, dotted, "p_2"] \arrow[dr, dotted, "p_1"'] & & A \\
& & T_1 \arrow[ur, "x_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Αν λοιπόν έχουμε δύο γενικευμένα στοιχεία του A, $T_1 \xrightarrow{x_1} A, \quad T_2 \xrightarrow{x_2} A$ με πεδία μεταβολής T_1 και T_2 αντίστοιχα, τότε υπάρχει καθολικά καθορισμένο ενιαίο πεδίο ματαβολής T, ως προς το οποίο εκφράζονται, με καθολικό τρόπο, τα επι μέρους γενικευμένα στοιχεία $x_1 \in^{T_1} A, \quad x_2 \in^{T_2} A$, δηλαδή,

$$x_1 \circ p_1 \in^T A, \quad x_2 \circ p_2 \in^T A.$$

Το καθολικό αυτό πεδίο μεταβολής T είναι το 'ελάχιστο δυνατό' με την έννοια ότι κάθε άλλο ενιαίο πεδίο μεταβολής T' παραγοντοποιείται μέσω του T.

Παρ᾽ όλο που η πιό πάνω παρουσίαση της εφέλκυσης κάνει πιό φανερή την φυσική διαδιασία του «τραβάω προς τα πίσω», είναι πιό σύνηθες, και ιδίως όταν μιλάμε για την εφέλκυση της g κατα μήκος της f, που είναι η p_1, το διάγραμμα της καθολικής ιδιότητας της εφέλκυσης να το παρουσιάζουμε ως,

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, dotted, bend left, "y"] \arrow[ddr, dotted, bend right, "x"'] & & \\
& P \arrow[r, dotted, "p_2"] \arrow[d, dotted, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

Είναι φανερό ότι αν θεωρήσουμε το διάγραμμα,

$$\Sigma : \quad \begin{tikzcd}
& B \\
X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& A
\end{tikzcd}$$

και την διαγραμματική κατηγορία $\mathscr{C}_\Sigma$, τότε η εφέλκυση του ζεύγους f, g είναι το τελικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{C}_\Sigma$ και έτσι η εφέλκυση, ως τελικό αντικείμενο, ορίζεται μέχρις ισομορφισμού.

Σχηματικά λοιπόν η καθολική ιδιότητα της εφέλκυσης, παρουσιάζεται με ένα από τα δύο διαγράμματα,

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[dr] & \\
\circ \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\forall y"] \arrow[drr, dotted, bend right, "\forall x"'] & \star \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & & \bullet \\
& & \bullet \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\circ \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, dotted, bend left, "\forall y"] \arrow[ddr, dotted, bend right, "\forall x"'] & & \\
& \star \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & \bullet \arrow[d] \\
& \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Θα λέμε ότι **μια κατηγορία έχει εφελκύσεις** ανν υπάρχει η εφέλκυση για κάθε ζεύγος βελών με κοινό συν-πεδίο ορισμού, δηλ. της μορφής,

$$A \xrightarrow{f} V \xleftarrow{g} B.$$

10.7.9 Παράδειγμα. **1.** Στην κατηγορία **Set** η εφέλκυση των f, g είναι το ζευγάρι $(p_A : D \to A,\ p_B : D \to B)$ με,

$$D := \{\, (x, y) \mid f(x) = g(y) \,\} \subseteq A \times B,$$

έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "(x,y)"] \arrow[drr, dotted, bend left, "y"] \arrow[ddr, dotted, bend right, "x"'] & & \\ & D \arrow[r, dotted, "p_B"] \arrow[d, dotted, "p_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

2. Αντίστροφες εικόνες στην Set. Έστω $f : A \to B,\ A, B \in \mathbf{Set}_0$ και $Y \subseteq B$. Θεωρούμε την εφέλκυση στην **Set** του ακόλουθου ζεύγους βελών,

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, hook, "i"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Έστω $D := \{(x, y) \,|\, f(x) = i(y)\} = \{(x, f(x)) \,|\, x \in f^{-1}[Y]\,\}$. Έστω ακόμη οι συναρτήσεις προβολών $p_A : D \to A,\ p_Y : D \to Y$ και οι ακόλουθες συναρτήσεις,

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}[Y] & \xrightarrow{f^*} & Y \\ x & \mapsto & f^*(x) \equiv f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f^{-1}[Y] & \xrightarrow{j} & A \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

τότε η εφέλκυση των f και i δίδεται από το ακόλουθο διάγραμμα, με $k : f^{-1}[Y] \to D$ // $x \mapsto (x, f(x))$,

$$\begin{tikzcd} f^{-1}[Y] \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, dotted, bend left, "f^*"] \arrow[ddr, dotted, bend right, "j"'] & & \\ & D \arrow[r, dotted, "p_Y"] \arrow[d, dotted, "p_A"'] & Y \arrow[d, hook, "i"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Πράγματι, $i \circ p_Y = f \circ p_A$ γιατί, $i \circ p_Y((x, y)) = i(p_Y((x, y))) = i(y) = y$ και $f \circ p_A((x, y)) = f(p_A((x, y))) = f(x)$ αλλά επί του D έχουμε $i(y) = f(x)$. Επίσης, $i \circ f^* = f \circ j$, γιατί αν $x \in f^{-1}[Y]$ τότε $i \circ f^*(x) = f(x)$ και $f \circ j(x) = f(x)$.

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι $p_Y \circ k = f^*$ και $p_A \circ k = j$. Πράγματι, για $x \in f^{-1}[Y]$,

$$(p_Y \circ k)(x) = p_Y(k(x)) = p_Y((x, f(x)) = f(x) \equiv f^*(x)$$

και,

$$(p_A \circ k)(x) = p_A(k(x)) = p_A((x, f(x)) = x = j(x)$$

Έτσι $k : f^{-1}[Y] \cong D$. ⊣▌

3. Στο Εδάφιο 2.3.1 σελ. 25, μελετήσαμε τον πυρήμα ισοδυμαμίας $\approx_f$ μιας συνάρτησης f. Έστω $R_f \equiv \approx_f$. Τότε ο πυρήνας ισοδυναμίας μπορεί να ληφθεί και ως μια ειδική εφέλκυση του ακόλουθου τετραγώνου,

$$\begin{tikzcd} R_f \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \text{με} \quad p_i(x,y) := \begin{cases} x & \text{αν i=1} \\ y & \text{αν i=2} \end{cases}$$

Δείξτε ότι πράγματι το πιο πάνω τετράγωνο είναι μια εφέλκυση.

4. Έστω μια κατηγορία $\mathscr{C}$ με εφελκύσεις. Τότε κάθε βέλος $A \xrightarrow{f} B$ επάγει, τον ούτως ονομαζόμενο, **συναρτητή εφέλκυσης** $f^* : \mathscr{C}{\downarrow}B \longrightarrow \mathscr{C}{\downarrow}A$ μεταξύ των κατηγοριών $\mathscr{C}{\downarrow}B$ και $\mathscr{C}{\downarrow}A$ ο οποίος γενικεύει τον $f^{-1} : \mathscr{P}(B) \longrightarrow \mathscr{P}(A)$, ως ακολούθως:

$$\begin{array}{rcl} f^* : \mathscr{C}{\downarrow}B & \longrightarrow & \mathscr{C}{\downarrow}A \\ (S \xrightarrow{y} B) & \mapsto & (T \xrightarrow{x} A) \\ (S \xrightarrow{h} S') & \mapsto & (T \xrightarrow{f^*(h)} T') \end{array}$$

όπου $T \xrightarrow{x} A$ η εφέλκυση του $S \xrightarrow{y} B$ κατά μήκος του $A \xrightarrow{f} B$ και $T \xrightarrow{f^*(h)} T'$ είναι η εφέλκυση του $S \xrightarrow{h} S'$ κατά μήκος του $T \longrightarrow S$, έτσι τα ακόλουθα διαγράμματα είναι εφέλκυσεις:

$$\begin{tikzcd} & T' \arrow[rr, dotted, "f''"] \arrow[dd, dotted, "x'"] & & S' \arrow[dd, "y'"] \\ T \arrow[ur, dotted, "f^*(h)"] \arrow[rr, dotted, "f'"] \arrow[dr, dotted, "f^*(y)=x"'] & & S \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "y"] & \\ & A \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}$$

10.7.10 Παρατήρηση. **1.** Έστω το ακόλουθο τετράγωνο εφέλκυσης,

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

Αν η κατηγορία στην οποία θεωρούμε το πιο πάνω τετράγωνο, έχει τελικό αντικείμενο, και θέσουμε $V = 1$ τότε η εφέλκυση (D, p_A, p_B) είναι ουσιαστικά το γινόμενο, $(A \times B, p_A, p_B)$, γιατί $D = \{\, (x, y) \mid f(x) = g(y) = 1 \,\} = A \times B$.

2. Στην κατηγορία των συνόλων **Set**, αν $A \subseteq V$ και $B \subseteq V$, τότε το ακόλουθο τετράγωνο εφέλκυσης εκφράζει την τομή $A \cap B$.

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, hook, "i_B"] \arrow[d, hook, "i_A"'] & B \arrow[d, hook, "j"] \\ A \arrow[r, hook, "i"'] & V \end{tikzcd}$$

3. Σε κάθε κατηγορία, αν το ακόλουθο τετράγωνο είναι εφέλκυση,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

τότε το βέλος $i : E \to A$ είναι ο εξισωτής των f, g (Δείξτε το!).

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ορισμένες βασικές προτάσεις για την εφέλκυση.

10.7.11 Πρόταση. *Έστω το ακόλουθο τετράγωνο εφέλκυσης.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow"] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

Αν το βέλος $B \rightarrowtail^{g} V$ *είναι μονομορφισμός τότε και το* $P \rightarrowtail^{p_1} A$, *η εφέλκυση του* g *κατά μήκος του* f *είναι επίσης μονομορφισμός.*

Απόδ. Έστω δύο μεταβαλλόμενα στοιχεία $T \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} P$ του P, με $p_1 \circ x = p_1 \circ y$, θέλουμε να δείξουμε ότι, $x = y$. Αφού όμως $f \circ p_1 = g \circ p_2$, έχουμε ότι, $g \circ p_2 \circ x = g \circ p_2 \circ y$, όπως δείχνουν οι ακόλουθες σχέσεις,

$$\begin{aligned} (g \circ p_2) \circ x &= (f \circ p_1) \circ x \\ &= f \circ (p_1 \circ y) \\ &= (g \circ p_2) \circ y \end{aligned}$$

Επειδή η g έχει υποτεθεί μονομορφισμός, και $g \circ (p_2 \circ x) = g \circ (p_2 \circ y)$ έχουμε ότι, $p_2 \circ x = p_2 \circ y$. Έτσι για τα x, y έχουμε $p_1 \circ x = p_1 \circ y$ και $p_2 \circ x = p_2 \circ y$. Αλλά το δοθέν τετράγωνο είναι εφέλκυση και υπάρχει μοναδικό βέλος $k : T \to P$ με $p_1 \circ (p_1 \circ x) = k = p_2 \circ (p_2 \circ y)$, άρα $x = y$. ⊣

10.7.12 Πρόταση. *Έστω το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα.*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "I"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "II"] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Τότε,

(i) *Αν τα τετράγωνα (I) και (II) είναι εφελκύσεις τότε και το εξωτερικό τετράγωνο (I)+(II) είναι επίσης εφέλκυση.*

(ii) *Αν το εξωτερικό (I)+(II) και το (II) είναι εφελκύσεις τότε και το (I) είναι εφέλκυση.*

Απόδ. Η απόδειξη είναι μια καλή εξάσκηση στην ιχνηλάτηση διαγραμμάτων. Έστω το ακόλουθο διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\exists ! x"'] \arrow[drr, dashed, "\exists ! y"] \arrow[drrr, dotted, "\forall p"] \arrow[ddr, dotted, "\forall q"'] & & & \\
& A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & C \arrow[d, "w"] \\
& D \arrow[r, "m"'] & E \arrow[r, "n"'] & F
\end{tikzcd}$$

(i) Έστω ότι τα τετράγωνα (I) και (II) είναι εφελκύσεις. Θα δείξουμε ότι και το τετράγωνο (I)+(II) είναι εφέλκυση. Πράγματι, από το (II) έχουμε ότι, $w \circ k = n \circ t$, από δε το (I), $t \circ h = m \circ s$. Άρα, $w \circ k \circ h = (w \circ k) \circ h = (n \circ t) \circ h = n \circ (t \circ h) = n \circ (m \circ s)$. Έτσι,

$$w \circ k \circ h = n \circ m \circ s.$$

Έστω τώρα τα βέλη $p : T \to C$ και $q : T \to D$ τέτοια ώστε,

$$w \circ = n \circ m \circ q \tag{1}$$

πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένα βέλος $x : T \to A$ τέτοιο ώστε,

$$p = k \circ h \circ x \quad \& \tag{2}$$

$$q = s \circ x \tag{3}$$

Επειδή το (II) είναι εφέλκυση και $w \circ p = n \circ m \circ q$ υπάρχει μοναδικό βέλος $y : T \to B$ με,

$$p = k \circ y \qquad (4) \qquad\qquad \& \qquad m \circ q = t \circ y \qquad (5)$$

Αλλά το (I) είναι εφέλκυση, και έτσι από την (5) έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό βέλος $x : T \to A$ με

$$y = h \circ x \qquad (6) \qquad\qquad \& \qquad q = s \circ x \qquad (7)$$

Αλλά τότε $(2 + (4) + (6) \Rightarrow p = k \circ y = k \circ h \circ x$ και από την (7) $q = s \circ x$. Αρκεί να δείξουμε ότι το βέλος $x : T \to A$ είναι μοναδικό. Πράγματι αν $x' : T \to A$ είναι ένα άλλο βέλος με τις ιδιότητες του x δηλ. $p = k \circ y = k \circ h \circ x'$ και $q = s \circ x'$ τότε λόγω της μοναδικότητας του y από το (II) είναι και $t \circ h \circ x' = m \circ s \circ x' = m \circ q$ δηλαδή θα έχουμε $h \circ x' = y \quad \& \quad s \circ x' = q$, λόγω δε της μοναδικότητας του x από το (I), είναι $x = x'$ και άρα το (I)+(II) είναι εφέλκυση. $\dashv\square$

(ii) Ομοίως. $\dashv\blacksquare$

10.7.13 Ασκήσεις. 1. Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και $A \in \mathscr{C}_0$. Να δειχθεί ότι το γινόμενο δύο αντικειμένων στην κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C}{\downarrow}A$ είναι η εξώθησή των επί του A στην $\mathscr{C}$.

10.8 Ισόμορφες, Ισοδύναμες και Προσαρτημένες Κατηγορίες

10.8.1 Ισόμορφες Κατηγορίες

Στη Θεωρία Κατηγοριών η έννοια της ισότητας μεταξύ δύο αντικειμένων είναι ήσσονος σημασίας. Αντίθετα η έννοια σύγκρισης που κυριαρχεί στα μαθηματικά και στις Κατηγορίες είναι αυτή του ισομορφισμού. Για παράδειγμα όλα τα αντικείμενα που ορίζονται με καθολικές ιδιότητες (αρχικά, τελικά κ.λπ.) ορίζονται μέχρις ισομορφισμού. Τα ισομορφικά αντικείμενα, αφού είναι αδύνατος ο δομικός τους διαχωρισμός, ταυτίζονται μεταξύ τους.

Στο πρώτο επίπεδο δομής, αυτό της κατηγορίας, δύο αντικείμενα μπορούν να είναι μόνον ισόμορφα ή ίσα. Στην κατηγορία **Cat** όμως δύο κατηγορίες μπορούν να είναι (με φθίνουσα σειρά ισχύος) ισόμορφες, ισοδύναμες ή προσαρτημένες. Η προσάρτηση ενώ είναι η πιό αδύνατη σχέση μεταξύ κατηγοριών, είναι ταυτόχρονα και η πιο ενδιαφέρουσα όπως θα δούμε στη συνέχεια!

Θα ακολουθήσουμε την πιο κάτω πορεία,

ισόμορφες κατηγορίες

$\Downarrow$

ισοδύναμες κατηγορίες

$\Downarrow$

προσαρτημένες κατηγορίες

για την τελική εισαγωγή της σπουδαίας εννοίας της ‘προσάρτησης’, ακολουθώντας πάντοτε την επιταγή της κατηγοριοποίησης:

• ισότητες μεταξύ στοιχείων	• ισομορφισμοί μεταξύ αντικειμένων
• ισότητες μεταξύ συναρτήσεων	• φυσικοί ισομορφισμοί μεταξύ συναρτητών

Ας δούμε όμως πρώτα την έννοια της ισομορφίας μεταξύ κατηγοριών. Επειδή έχουμε ήδη δώσει τον ορισμό, πότε δύο αντικείμενα μια κατηγορίας είναι ισόμορφα. Αρκεί να εφαρμόσουμε τον ορισμό αυτό στην περίπτωση της κατηγορίας **CAT**. Έτσι δύο κατηγορίες $\mathscr{C}$ και $\mathscr{D}$ είναι ισόμορφες ανν υπάρχουν συναρτητές,

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}, \quad \text{με}, \quad G \circ F = 1_{\mathscr{C}} \quad \text{και} \quad F \circ G = 1_{\mathscr{D}} \quad (*)$$

Ο ισομορφισμός αυτός είναι μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ κατηγοριών.

10.8.1 Παράδειγμα. Έστω δύο κατηγορίες $\mathscr{C}$ και $\mathscr{D}$ και έστω,

$$\begin{array}{rcl} F : \mathscr{C} \times \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathscr{D} \times \mathscr{C} \\ (A, B) & \mapsto & F(A, B) := (B, A) \\ (f, g) & \mapsto & F(f, g) := (g, f) \end{array}$$

Έστω επίσης,

$$\begin{array}{rcl} G : \mathscr{D} \times \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C} \times \mathscr{D} \\ (B, A) & \mapsto & F(B, A) := (A, B) \\ (g, f) & \mapsto & F(f, g) := (f, g) \end{array}$$

Τότε είναι φανερό ότι $F \circ G = 1_{\mathscr{D} \times \mathscr{C}}$ και $G \circ F = 1_{\mathscr{C} \times \mathscr{D}}$, άρα $\mathscr{C} \times \mathscr{D} \cong \mathscr{D} \times \mathscr{C}$.

Στη σχέση $(*)$ παρατηρούμε ότι ο ισομορφισμός μεταξύ δύο κατηγοριών εκφράζεται συναρτήσει της ‘ισότητας’ στην κλάση της κατηγορίας των συναρτητών, $G \circ F = 1_{\mathscr{C}}$ και $F \circ G = 1_{\mathscr{D}}$. Η ισότητα ‘=’ για την κατηγορική αντίληψη είναι εξαιρετικά αυστηρή και εναρμονίζεται περισσότερο με στατικές καταστάσεις παρά με μεταβαλλόμενες και δυναμικές που είναι το βασικό θέμα της Θεωρίας Κατηγοριών. Ακολουθώντας λοιπόν την γενική τάση να αντικαθιστούμε την ‘ισότητα’ με ’ισομορφισμούς’ οδηγούμαστε σε μια χρήσιμη έννοια ‘δομικής ομοιότητας’ δύο κατηγοριών που είναι ασθενέστερη της ισομορφίας αλλά που στην ουσία διατηρεί όλες τις ‘καλές’ κατηγορικές ιδιότητες.

10.8.2 Ισοδύναμες Κατηγορίες

10.8.2 Ορισμός. Δύο κατηγορίες $\mathscr{C}$ και $\mathscr{D}$ θα είναι **ισοδύναμες** ανν υπάρχουν συναρτητές F, G με,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathscr{D} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}, \quad \text{με,} \quad G \circ F \cong 1_{\mathscr{C}} \quad \text{και} \quad F \circ G \cong 1_{\mathscr{D}} \quad (*)$$

δηλαδή *δυο κατηγορίες είναι ισοδύναμες αν είναι 'ισόμορφες μέχρις ισομορφισμού'*. Ας δούμε όμως πιο αναλυτικά τον ορισμό της ισοδυναμίας. Οι σχέσεις $G \circ F \cong 1_{\mathscr{C}}$ και $F \circ G \cong 1_{\mathscr{D}}$, πραγματώνονται μέσω των μοναδιαίων φυσικών μετασχηματισμών $\eta : 1_{\mathscr{D}} \Rightarrow FG$ και $\varepsilon : GF \Rightarrow 1_{\mathscr{C}}$. Μπορούμε λοιπόν πιο αναλυτικά να πούμε ότι η τετράδα $\langle F, G; \eta, \varepsilon \rangle$ αποτελεί μια 'ισοδυναμία' ανν έχουμε τα ακόλουθα:

(i) Για το φυσικό μετασχηματισμό, $(\varepsilon_C : G(F(C)) \longrightarrow C)_{C \in \mathscr{C}_0}$ να έχουμε για κάθε $C \in \mathscr{C}_0$, η συνιστώσα $\varepsilon_C : G(F(C)) \longrightarrow C$ να είναι ισομορφισμός στην $\mathscr{C}$.

(ii) Ομοίως για το φυσικό μετασχηματισμό $(\eta_D : D \longrightarrow F(G(D)))_{D \in \mathscr{D}_0}$ θα πρέπει να έχουμε ότι κάθε συνιστώσα $\eta_D : D \longrightarrow F(G(D))$ να είναι ισομορφισμός στην $\mathscr{D}$.

Μια ισοδυναμία λοιπόν των κατηγοριών $\mathscr{D}$ και $\mathscr{C}$ καθορίζεται από μια τετράδα $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle$ όπου

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

είναι συναρτητές με,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D} \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, dashed, "FG \cong 1_{\mathscr{D}}"] & \\ \mathscr{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, dashed, "1_{\mathscr{C}} \cong GF"'] & \mathscr{D} \arrow[d, "G"] \\ & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

και

$$\eta : 1_{\mathscr{D}} \Rightarrow FG, \ \varepsilon : GF \Rightarrow 1_{\mathscr{C}},$$

είναι φυσικοί μετασχηματισμοί που οι συνιστώσες τους είναι ισομορφισμοί, δηλ. $G \circ F \cong 1_{\mathscr{C}}$ και $1_{\mathscr{D}} \cong F \circ G$.

Ήδη η σχέση της ισοδυμαμίας δύο κατηγοριών είναι μια ειδική σχέση προσάρτησης, ο δε συναρτητής G είναι και δεξιά και αριστερά προσαρτημένος του συναρτητή F, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Η έννοια της ισοδυναμίας μεταξύ κατηγοριών, είναι η κατάλληλη έννοια που εκφράζει την ταυτότητα δύο κατηγοριών αναφορικά με την 'μορφή' τους.

10.8.3 Παράδειγμα. Για κάθε κατηγορία $\mathscr{C}$ ένας **σκελετός της** $\mathscr{C}$ είναι μια μεστή υποκατηγορία $\mathscr{S}$ της $\mathscr{C}$, τέτοια ώστε κάθε αντικείμενο της $\mathscr{C}$ να είναι ισομορφικό (στη $\mathscr{C}$) με ακριβώς ένα αντικείμενο της $\mathscr{S}$. Τότε η κατηγορία $\mathscr{S}$ είναι ισοδύναμη της $\mathscr{C}$ και η εμφύτευση $\mathscr{S} \xhookrightarrow{I} \mathscr{C}$ είναι μια ισοδυναμία. Πράγματι, αφού για κάθε $C \in \mathscr{C}_0$ υπάρχει ένα μοναδικό αντικείμενο $S \in \mathscr{S}_0$ με $C \cong S$, μπορούμε να ορίσουμε ένα συναρτητή, $G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}$ // $C \mapsto S, (f : C \to C') \mapsto (f' : S \to S')$, και ένα φυσικό μετασχηματισμό $(\eta_C)_{C \in \mathscr{C}_0}$ με $\eta_C \cong GC$ και $\eta : 1_{\mathscr{C}} \cong IG$. Επί πλέον $GI \cong 1_{\mathscr{S}}$ και επομένως ο συναρτητής εμφύτευσης είναι μια ισοδυναμία.

10.8.3 Προσαρτήσεις

Η έννοια της προσάρτησης είναι το τέταρτο βασικό στοιχείο των κατηγοριών πέρα από τις έννοιες, της κατηγορίας, του συναρτητή και του φυσικού μετασχηματισμού. Το ακόλουθο σλόγκαν φανερώνει την κεντρική σημασία της έννοιας της προσάρτησης:

Οι προσαρτημένοι συναρτητές βρίθουν στα μαθηματικά!

Είναι φανερό ότι αφού η Θεωρία Κατηγοριών αναπτύσσεται γύρω από την κεντρική ιδέα της 'μεταβολής', θα πρέπει να υπάρχει μια κατηγορική έννοια που θα εκφράζει ένα είδος 'σύνθεσης' στη διαλεκτική που διαφαίνεται από την υπάρχουσα μεταβολή. Η διαλεκτική αυτή της μεταβολής εκφράζεται από την προσάρτηση! Βλ. και [116] για το θέμα 'Διαλεκτική και Προσάρτηση' και τα [67, 23, Κεφ. 3] για τη διαλεκτική του 'σταθερού vs. μεταβαλλόμενου'. Η έννοια της προσάρτησης λοιπόν εκφράζει την **καθολική συνθετική λύση**, σε αντιτιθέμενες κατασκευές και προβλήματα, που το ένα στοχεύει στην κατασκευή μεγιστικών αντικειμένων ενώ το άλλο στην κατασκεύη ελαχιστικών αντικειμένων. Οι ελεύθεροι συναρτητές, για παράδειγμα, στοχεύουν σε μεγιστικές κατασκεύες, διευρύνοντας το αντικείμενο των γενητόρων, ενώ οι εξερχόμενοι από μια κατηγορία συναρτητές ('παρατήρηση' της κατηγορίας) ανασυγκροτούν την κατηγορία σε μια ελαχιστική κατηγορία παρατηρούμενων 'ινών'.

Λόγω της σπουδαιότητας της εννοίας αυτής, θα την εξετάσουμε πρώτα στα μ.δ.σ. και στα μονοειδή, θεωρούμενα ως κατηγορίες.

(ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ!!!)

Η Πορεία Προς τους Ελέφαντες

Βήμα 1^o

• F. William Lawvere and S. Schanuel, *Conceptual Mathematics: A first introduction to categories*, Cambridge 1997
• F. William Lawvere and R. Rosebrugh, *Sets for Mathematics*, Cambridge 2003

⇊

Βήμα 2^o

• Barr M. and C. Wells, *Category Theory for Computing Science* 2nd Ed. Prentice Hall, 1995
• Goldblatt, R., *Topoi: the categorical analysis of logic.* North-Holland, 1979.
• McLarty, C., *Elementary Categories, Elementary Toposes.* Oxford, 1995.

⇊

Βήμα 3^o

• MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician,* 2nd Ed. Springer, 1998
• MacLane, S., and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Springer, 1992

⇊

Βήμα 4^o

• F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra* 3 vols, Cabridge Uviv. Press
• P. Johnstone, *The Sketch of an Elephant.* 3 vols, Oxford

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] P. Aczel. *Non–well Founded Sets.* CSLI, Stanfod, 1988.

[2] J. Adámek, H. Herrlich, and G. Stecker, *Abstract and Concrete Categories* J. Wiley and Sons, 1990.

[3] Albeverio S., J. E. Fenstad, R. H. Krohn and T. Lindstrom, *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics.* Academic Press, 1986.

[4] Αξελός, Κ. *Ο Ηράκλειτος και η Φιλοσοφία*, Εξάντας, Αθήνα, 1974.

[5] M. A. Arbib and E. G. Manes, *Arrows, Structures, and Functors: The Categorical Imperative.* Academic Press 1975.

[6] Αξελός, Κ. *Ο Ηράκλειτος και η Φιλοσοφία*, Εξάντας, Αθήνα, 1974.

[7] Artin, M., *Algebra.* Prentice–Hall, Inc. 1991.

[8] S. Awodey, *Categories for Everybody.* Διαθέσιμο από:
`http://www.andrew.cmu.edu/course/80-413-713/notes/catbook.pdf`

[9] J. Baez and J. Dolan, Categorification,in *Higher Category Theory*, eds. Ezra Getzler and Mikhail Kapranov, Contemporary Mathematics vol. 230, American Mathematical Society, Providence, 1998, pp. 1-36. Also at
http://front.math.ucdavis.edu/math.QA/9802029

[10] John Baez and James Dolan, From finite sets to Feynman diagrams, in *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*, vol. 1, eds. Bj"orn Engquist and Wilfried Schmid, Springer, Berlin, 2001, pp. 29-50. Also at
`http://front.math.ucdavis.edu/math.QA/0004133`

[11] Ballard, D. and K. Hrbacek, Standard foundations for nonstandard analysis. *The Journal of Symbolic Logic* **57** (1992), 741-748.

[12] Barnes D. W. and J. M. Mack, *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic.* Graduate Text in Math, # 22, Springer 1975

[13] Baron, M. *The Origins of the Infinitesimal Analysis.* 1969, Dover:1987.

[14] Barnes D. W. and J. M. Mack, *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic.* Graduate Text in Math, # 22, Springer 1975

[15] Barr M. and C. Wells, *Toposes, Triples and Theories* Springer, 1985. Διαθέσιμο από:

`http://www.cwru.edu/artsci/math/wells/pub/ttt.html`

[16] Barr M. and C. Wells, *Category Theory for Computing Science* 2nd Ed. Prentice Hall, 1995

[17] J. Barwise. *Admissible Sets and Structures.* Springer, Heidelberg, 1975.

[18] J. Barwise and L. Moss. Hypersets. *Math. Intelligencer*, 13:31–41, 1991.

[19] J. Barwise and J. Etchemendy. *The Liar.* Oxford University Press, Oxford, 1987.

[20] Bell, J.L. and M.Machover, *A course in Mathematical Logic.* North Holland, 1977.

[21] Bell, J. L., Categories, Toposes, and Sets, *Synthese*, **69**, 409-426

[22] Bell, J. L., *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.* (Second edition). Clarendon Press, Oxford, 1985.

[23] Bell, J. L., From absolute to Local Mathematics. *Synthese*, **69** (1986), 409-26.

Υπάρχει και Ελληνική μετάφραση, διαθέσιμη από:

`www.math.upatras.gr/~cdrossos/Docs/BellFA2LM.pdf`

βλ. επίσης, `http://publish.uwo.ca/~jbell/`, για πολύ και ενδιαφέρον υλικό!

[24] Bell, J. L., Infinitesimals. *Synthese*, **75** (1988), 285-315.

[25] Bell, J. L., *Toposes and Local Set Theories,* Oxford, 1998.

[26] Bell, J. L., A Primer of Infinitesimal Analysis. Cambridge 1998.

[27] Bell, J. L. and A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts,* North-Holland, 1971.

[28] Bénabou, J., Fibered categories and the foundations of naive category theory. *Journal of Symbolic Logic*, **50,**(1985), 10-37.

[29] E. Beth. *The Foundations of Mathematics.* North-Holland, 1968.

[30] Blitz, D. *Emergent Evolution: Qualitative Novelty and the Levels of Reality,* EPISTEME, Vol. 19, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1992.

[31] T. S. Blyth and M. F. Janowitz. *Residuation Theory.* Pergamon press 1972.

[32] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra* 3 vols, Cabridge Uviv. Press 1994

[33] Boyer, C. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Columbia Univ. Press 1939, Dover, 1959.

[34] Bradshaw, J. L. and Nettleton, N. C, The nature o hemispheric specialization in man. *The Behavioral and Brain Sciences*, **4**, 51-91 (1981).

[35] Bridge, J. *Beginning model theory: the completeness theorem and some consequences,* Oxford 1977.

[36] Bucur, I. and Deleanu A.,*Imtroduction to the Theory of Categories and Functors.* Wiley 1968.

[37] Mario Cáccamo, *Lecture Notes in Category Theory.* 2002 Διαθέσιμο από:

`http://www.itu.dk/~birkedal/teaching/category-theory-Fall--2000/catnotes.ps.gz`

[38] Carsten Butz, *Regular Categories and Regular Logic.* October 1998. Διαθέσιμο από:

`http://www.brics.dk/LS/98/2/BRICS-LS-98-2.pdf`

[39] Pierre CARTIER, A MAD DAY'S WORK: From Grothendieck to Connes and Kontsevich. The Evolution of Concepts of Space and Symmetry. *BULLETIN (New Series) of the AMS* Vol. 38, No 4, pp. 389-408.

[40] C. C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics. *Trans. of AMS*, **88**, 1957, 467-490.

[41] C. C. Chang. A new proof of the completeness of Łukasiewicz axioms. *Trans. of AMS*, **93**, 1958, 74-80.

[42] C. C. Chang and H. J. Keisler : *Model theory.* North Holland, 3rd Ed. (1990).

[43] K. Ciesielski, *Set Theory for the Working Mathematician* Cambridge 1997.

[44] Cignoli R., D' Ottaviano I., Mundici D.: *Algebraic Foundations of many-valued Reasoning* Kluwer Acad. Publ., Trends in Logic Vol. 7, Dordrecht, 1999.

[45] P. J. Cohen and R. Hersh. Non-cantorian set theory. *Scientific American*, 217, December:104–116, 1967.

[46] Cori R. and D. Lascar, *Mathematical Logic: A Course with Exercises, vol. I, vol II* Oxford, 2000, 2001

[47] Courant, R. and H. Robbins, *What is Mathematics ?* Oxford Univ. Press, 1978.

[48] Cutland, N. J., Nonstandard measure theory and its applications. *Bull. London Math. Soc.*, **15** (1983)

[49] D. van Dalen, H. C. Doets and H. de Swart, *Sets: Naive, Axiomatic and Applied.* Pergamon Press 1978

[50] Dauben, J. W. and A. Robinson, *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis: A Personal and Mathematical Odyssey.* 1995.

[51] Davey, B. A. and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order.* Cambridge 1990.

[52] Davis, M. *Applied Nonstandard Analysis.* Wiley, 1977.

[53] K. Devlin. *The Joy of Sets.* Springer, Heidelberg, 1993.

[54] Diener F. and M. Diener (Eds), *Nonstndard Analysis in Practice.* Springer, Universitext 1995.

[55] Diener, F. and K. D. Stroyan, Syntactical methods in infinitesimal analysis. In N. Cutland : *Nonstandard Analysis and its Applications*, p. 258-282. Cambridge University Press, 1988.

[56] Kees Doets, *Basic Model Theory*, CSLI Publications, 1996

[57] Kosta Došen, Functions Redefined, *The Amer. Math. Monthly,* vol. 107, # 7 (1998). pp. 631-635.

[58] Kosta Došen, *Cut Elimination in Categories,* Kluwer, 1999

[59] Drossos, C. A., Foundations of Fuzzy Sets. A nonstandard approach. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. **37**, p. 287-307, 1990.

[60] Drossos, C. A. and G. Markakis, Boolean powers and stochastic spaces. *Mathematica Slovaca*, vol. **44**, 1-19, 1994.

[61] Drossos, C. A., *Algebraic Structures of Generalized Many-Valued Logics,* Seminar Notes, Patras 1997. Διαθέσιμο από:

`www.math.upatras.gr/~cdrossos/Docs/monoids_ps.zip`

[62] C. A. Drossos and P. Theodoropoulos. $\mathbb{B}$-fuzzy probability *Fuzzy Sets and Systems,* **78** (1996), 355-369.

[63] C. A. Drossos and P. Karazeris. Coupling an MV-algebra with a Boolean Algebra. Intern. Journal of Approx Reasoning, 18 (1998) 231-238.

[64] C. A. Drossos, G. Markakis and P.theodoropoulos, $\mathbb{B}$-Stochastics. In: M.L. Puri (Ed.), *Asymptotics in Statistics and Probability*, VSP 2000 (A volume in honour of G. G. Roussas).

[65] Δρόσος Α. Κώστας, *Εισαγωγή στα απειροστά και την Απειροστική Πιθανότητα.* Πάτρα, 1988.

[66] Δρόσος Α. Κώστας, *Στοιχεία Θεωρίας Μοντέλων & Απειροστικής Ανάλυσης.* Πάτρα, 2003. Διαθέσιμο από:

`www.math.upatras.gr/~cdrossos/Docs/`

[67] Δρόσος Α. Κώστας *Εισαγωγή στη Μαθηματική σκέψη: Τομ.* $1^{ος}$*ΜαθηματικςΠεριηγσεις*. Πάτρα 1999.

[68] Drossos, C. A., 'Structures, Points and Levels of Reality'. In: G. Sica (Ed.) *Essays on the Foundations of Mathematics and Logic*, Polimetrica International Scientific Publisher Monza/Italy 2005

[69] Ebbinghauss , Flumm , Thomas, *Mathematical Logic*, 2nd edition, Springer, 1984

[70] Ebbinhaus, H. -D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J. , Prestel A., and R. Remmert, *Numbers.* Graduate Text in Mathematics, Springer, 1990.

[71] Edwards, C. H. Jr., and C. H. Esward, *The Historical Development of the Calculus.* Springer, 1994.

[72] Enderton, H. B. *Elements of Set Theory,* Academic Press, 1996

[73] Enderton, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, 1997

[74] Engels, F, *Αντι-Ντύρινγκ.* Εκδ. Αναγνωστίδη, 1963.

[75] Edwards, C. H. Jr., and C. H. Esward, *The Historical Development of the Calculus.* Springer, 1994.

[76] M. Erné, J. Kolowski, A. Melton, G. E. Stecker, A primer on Galois conections. In: *Papers on General Topology and Applications* (Madison Wisc. 1991), *Ann. New York Acad. Sci.*, # 704, N.Y. Acad. Sci. 1993, pp. 103-125.

[77] Petr Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer (1998).

[78] A. G. Hamilton, *Logic for Mathematicians*, Cambridge University Press; Revised edition (January 1989)

[79] A. G. Hamilton, *Numbers, Sets and Axioms:the apparatus of mathematics.* Cambridge University Press 1982

[80] R. Herch. Some proposals for reviving the philoshophy of mathematics. *Advances in Math.*, 31:31–50, 1979.

[81] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, and A. Levy. *Foundations of Set Theory.* Noth-Holland, second edition, 1973.

[82] Fourman, M.P. and J. Hyland (1979). őSheaf Models for Analysisǜ, In: Applications of Sheaves, Lecture Notes in Mathematics # 753, Springer-Verlag, Berlin.

[83] Jean Gallier, *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving* Ηλεκτρονική έκδοση 2003, Διαθέσιμο από:

`http://www.cis.upenn.edu/ jean/gbooks/logic.html`

[84] Robert Geroch, *Mathematical Physics*

Χρησιμοποιεί την Θεωρία Κατηγοριών ως μια ενοποιούσα αρχή και τεχνικά και ενορατικά στη μαθηματική φυσική.

[85] J. A. Goguen, What is Unification? A Categorical View of Substitution, Equation and Solution, In Maurice Nivat and Hassan Aït-Kac Eds *Resolution of Equations in Algebraic Structures, Volume 1: Algebraic Techniques* pp. 217–261, Academic Press 1989. `url = citeseer.nj.nec.com/166243.html`

[86] J. A. Goguen, A Categorical Manifesto. *Mathematical Structures in Computer Science*, volume 1, number 1, pages 49- 67, March 1991.

[87] Goldblatt, R., *Topoi: the categorical analysis of logic.* North-Holland, 1979.

[88] Goldblatt, R., *Lectures on the Hyperreals.* Springer, 1998.

[89] Rami Grossberg, *A Course in Model Theory*, Βιβλίο σε εξέλιξη. Δές και: `www.math.cmu..edu/~rami`

[90] Hahn, Liang-shin *Complex Numbers & Geometry.* The Math. Assoc. of Amarica, 1994.

[91] A. G. Hamilton, *Logic for Mathematicians*, Cambridge University Press; Revised edition (January 1989)

[92] Hatcher, W. Calculus is algebra. *Amer. Math. Monthly*, **89** (1982), 362-370.

[93] Heath, T. L. *A Manual of Greek Mathematics.* Dover, 1963.

[94] Henson, C. W. Foundations of Nonstandard Analysis. In: L. Arkeryd, N. Cutland, C. Ward Henson (Eds), *Nonstandard Analysis: Theory and Applications.* Kluwer NATO ASI Series C, 1997.

[95] Henson, C. W. *Model Theory,* Σημειώσεις, διαθέσιμες από: `http://www.math.uiuc.edu/~henson/papers/411notes.ps`

[96] Hersh, R. *What Is Mathematics Really?.* Oxford Univ. Press 1997.

[97] Hodges, W., *Model Theory,* Encyclopedia of Mathematics and its applications, 42, Cambridge Uviv. Press, 1993

[98] Hodges, W., *A Shorter Model Theory,* Cambridge Uviv. Press, 1997

[99] Hurd, A. and P. Loeb, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis.* Academic Press 1985.

[100] Jech, T., *Set Theory* 3rd rev. ed. Springer 2003.

[101] Jech, T. Boolean-Valued Models.In J. Donald Monk and R. Bonnet, (Eds) *Handbook of Boolean Algebras*, *3*, Ch. 27, pp. 1197-1211.

[102] Johnson, D. M., The Problem of Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology, Part I. *Archive for History of Exact Sciences*, **20**(2), 1979, 97–188.

[103] P. Johnstone, *Stone Spaces,* Cambridge Univ. Press, 1982.

[104] W. Just ans M. Weese, *Discovering Modern Set Theory. I: The Basics, II:Set Theoretic Tools for Every Mathematician* AMS,1996, 1997. S. Fajardo and H. J. Keisler, *Model Thoery of Stochastic Processes,* Assoc. for Symbolic Logic, 2002.

[105] Kanamori, A., *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, 2nd ed. Springer 2003.

[106] Kappos, D.: *Probability Algebras and Stochastic spaces.* Academic Press, (1969).

[107] Keisler, H. J. *Elementary Calculus.* Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[108] Keisler, H. J., *Foundations of Infinitesimal Calculus.* Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[109] Keisler, H. J., The hyperreal line. In: P. Ehrlich(ed.) *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Kluwer Acad. Publ. 1994.

[110] P. Kitcher. *Mathematical Knowledge.* Oxford Univ. Press, 1984.

[111] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry,* Cambridge Univ. Press 1981.

[112] S. Körner. *The Philosophy of Mathematics.* Harper Torchbooks, 1960.

[113] Κοϋρέ, Αλέξανδρος, *Από τον Κλειστό Κόσμο στο Άπειρο Σύμπαν.* Εκδόσεις «Ευρύαλος», Αθήνα 1986. (Αρχική δημοσίευση: John Hopkins Univ. Press 1957.)

[114] M. Kuga, *Galois' Gream: Group Theory and Differential Equations*, Birkhäuser, 1993.

[115] Kusraev, A. and S. S. Kutateladze, *Nonstandard Methods of Analysis.* Kluwer 1994.

[116] Lambek, J. The influence of Heraclitus on modern Mathemativs. In: J. Agassi and R. S. Cohen (Eds), *Scientific Philosophy Today.* Reidel, 1981, 111-114.

[117] Lambek, J. and P. J. Scott, *Introduction to Higher Order Categorical logic,* Cambridge Univ. Press, 1986.

[118] Landers, D. and L. Rogge, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis.* Academic Press, New York, 1985.

[119] Lindstrøm, T., An invitation to nonstandard analysis. In, N. J. Cutland (Ed.) *Nonstandard Analysis and its Applications,* Cambridge Univ. Press, *L.M.S. Student Texts*, vol. **10**, p.1-105, 1988.

[120] F. William Lawvere and S. Schanuel, *Conceptual Mathematics: A first introduction to categories*, Cambridge 1997

[121] F. William Lawvere and R. Rosebrugh, *Sets for Mathematics*, Cambridge 2003

[122] T. Leinster, *Category Theory Notes* Διαθέσιμο από:

`http://www.maths.gla.ac.uk/~tl/categories/index.html`

[123] T. Leinster, *Higher Operads, Higher Categories*, Cambridge Univ. Press 2003. Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από:

`http://arxiv.org/abs/math.CT/0305049`

[124] Luxemburg, W. A. L. What is non-standard analysis. *Amar. Math. Monthly*, **80** (1973), 38-67.

[125] Lindstrøm, T., An invitation to nonstandard analysis. In, N. J. Cutland (Ed.) *Nonstandard Analysis and its Applications,* Cambridge Univ. Press, *L.M.S. Student Texts*, vol. **10**, p.1-105, 1988.

[126] Luxemburg, W. A. L. What is non-standard analysis. *Amar. Math. Monthly*, **80** (1973), 38-67.

[127] A. Macintyre, Model Theory: Geometrical and set theoretical aspects and prospects. *The Bull. of Symbolic Logic,* vol. 9, # 2, 2003.

[128] MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician,* 2nd Ed. Springer, 1998.

[129] MacLane, S., and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Springer, 1992.

[130] McLarty, C., *Elementary Catewgories, Elementary Toposes.* Oxford, 1995.

[131] Maria Manzano, *Model Theory*, Oxford, 1999.

[132] Mentzeniotis, D. *Three Views Concerning Continuity and Infinitesimals: Non-Standard Analysis, Topos Theory, and Intuitionism.* Ph.D Thesis, Department of Philosophy, Logic and Scientific Method, The London School of Economics and Political Science, 1986.

[133] P. Maddy. *Realism in Mathematics.* Oxford Univrsity Press, Oxford, 1990.

[134] Maddy, P., *Naturalism.* Oxford Univ. Press, 1997.

[135] R. Mansfield and G. Weitkamp. *Recursive Aspects of Set Theory.* Oxford Univ. Press, New York, 1985.

[136] David Marker *Model Theory: An Introduction*, Springer Verlag; 1st edition (August 21, 2002)

[137] Y. Moschovakis. *Notes on Set Theory.* Springer, Heidelberg, 1993.

[138] Nelson, E., Internal Set Theory, a new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the A. M. S.*, vol. **83**, n. 6, 1977.

[139] Nelson, E., *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton Univ. Press, 1987

[140] Nelson, E., *Nonstandard Analysis*, Βιβλίο σε εξέλιξη. Διαθέσιμο από: `www.math.princeton.edu/~nelson/index.html`.

[141] Jaap van Oosten, *Basic Category Theory.* January 1995. vi+75 pp. Διαθέσιμο από:

`http://www.brics.dk/LS/Abs/BRICS-LS-Abs/BRICS-LS-95-1.ps.gz`

[142] Palmgren, E. A sheaf-theoretic foundation for nonstandard analysis. *Annals of Pure and Applied Logic*, **85**, 69-86.

[143] B. C. Pierce, *Basic Category Theory.* The MIT Press 1991.

[144] A. Poigné, *Basic Category Theory.* In: S. Abramsky et al., *Handbook of Logic in Computer Science* Vol 1, pp.413-640, Oxford Univ. Press 199?.

[145] Prestel, A. Nonstandard Analysis. In H.-D. Ebbinghaus et all. *Numbers.* Springer GTM # 123, 1990.

[146] Poincaré, *Η Αξία της Επιστήμης.* Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 1997. (Μετάφραση του *La Valeur da la Science.* Flammarion, 1905.)

[147] Poincaré, *Science and Hypothesis.* Dover, 1958.

[148] B. Poizat, *A Course in Model Theory,* Springer, 2000

[149] Robert, A. *Non-Standard Analysis.* Wiley, 1988.

[150] H. Putnam. *Realism and Reason: vol.3, Philosophical Papers.* Cambridge Univ. Press, 1983.

[151] H. Putnam, Models and Reality, Journal of Symb. Logic, vol. 45,# 3, (1980) 464-482

[152] Miles Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry,* Cambridge Univ. Press, 1988

[153] G. Reyes, Synthetic Reasoning and Variable Sets, In: F. W. Lawvere and S. H. Schanuel(Eds) *Categories in Continuum Physics* Springer LNM # 1174 pp. 69-82. 1982.

[154] M. La Pakme Reyes, G. e. Reyes, H. Zolfaghari, *Generic figures and their glueings: a constructive approach to functor categories*, Polimetrica, 2004.

[155] Robert, A. *Non-Standard Analysis.* Wiley, 1988.

[156] Rothmaler, P. *Introduction to Model Theory*, Gordon and Breach Science Pub. 2000

[157] J. R. Shoenfield. *Mathmetical Logic.* Addison-Wesley, 1967.

[158] J. R. Shoenfield. Axions of set theory. In J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, pages 321–344. North - Holland, Amsterdam, 1977.

[159] S. Simpson, *Model Theory,* 1998. Διαθέσιμο από:

`www.math.psu.edu/simpson/courses/math563/`

[160] M. B. Smith. Topology. In S. Abramsky D. Gabbay and T. S. E. Maibaum: *Handbook of Logic in Computer Science, vol. 1.:Background: Mathematical Structures.* pp. 641-761, Oxford Uviv. Press, 1992.

[161] T. Streicher, Category Theory and Categorical Logic. Διαθέσιμο μαζύ με άλλο ενδιαφέρον υλικό από:

`http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/`

[162] H. Schubert, *Categories.* Springer, 1972

[163] Stroyan K. and J. M. Bayod, *Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis*, Norht-Holland 1980.

[164] Sullivan, K. A. The teaching of Elementary Calculus, using the non-standard approach. *Amer. Math. Monthly,* (1976), 370-375.

[165] Takeuti, G., *Two Applications of Logic to Mathematics*, Iwanami & Princeton Univ. Press, 1978.

[166] Tall, D. Looking at graphs through infinitesimal microscopes, windows and telescopes. *The Math. Gazette,* **64** (1980), 22-48.

[167] R. Tieszen *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge.* Kluwer 1989.

[168] R. Tieszen, Gödel's Path from the Incompleteness Theorems (1931) to Phenomenology (1961), The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 4, # 2, 1998

[169] Thomas Tymoczko. *New Directions in the Philisophy of Mathematics.* Birkhäuser 1986.

[170] D. Turi, *Category Theory Lecture Notes.* 2001. Διαθέσιμο από:

`http://www.dcs.ed.ac.uk/home/dt/CT/categories.pdf`

[171] D. van Dalen, H. C. Doets, and H. de Swart. *Sets: Naive, Axiomatic and Applied.* Pergamon Press, 1978.

[172] Vopěnka P., *Mathematics in the Alternative Set Theory*, B. G. Teubner, Leipzig 1979.

[173] Vopěnka, P. The philosophical foundations of alternative set theory. *Int. J. General Systems*, **20** (1991), 115-126.

[174] W. Weiss and Ch. D'Mello, *Fundamentals of Model Theory,* Διαθέσιμο από:

`http://www.math.toronto.edu/weiss/model_theory.html`

[175] David N. Yetter, *Functorial Knot Theory.* World Scientific Pub Co.

[176] Zilber B. *Notes on Model Theory.* Διαθέσιμο μαζύ μέ άλλο ενδιαφέρον υλικό από:`http://www.maths.ox.ac.uk/~zilber/`