Κώστας Α. ΔΡΟΣΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΑ ΘΕΜΕΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διαθέσιμο από:

`www.math.upatras.gr/~cdrossos/Docs/`

Έκδοση 3η: Μάρτιος 2004

Πάτρα 2004

ISBN ....

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 0

ΘΕΜΕΛΙΑΚΑ ΖΗΤΗΜΑΤΑ

Αντί Εισαγωγής.

Το Φεβρουάριο του 1990, στην ετήσια συνάντηση της American Association for the Advancement of Science, στην Νέα Ορλεάνη, υπήρχε μια σύνοδος με τον τίτλο "New Directions in the Philosophy of Mathematics"(«Νέες κατευθύνσεις στη φιλοσοφία των Μαθηματικών») στο πρόγραμμα της οποίας υπήρχε το ακόλουθο: «Η φιλοσοφία των μαθηματικών αρχίζει να δείχνει μια νέα ζωή, μετά από δεκαετίες στασιμότητας. Τα τρία κλασσικά προγράμματα - Φορμαλισμός, Λογικισμός, και Ιντουϊσιονισμός - που η εισαγωγή τους χρονολογείται στις αρχές του ($20^{ου}$) αιώνα ή και πιο πριν, έχουν προ πολλού φθάσει σε αδιέξοδο κατά την αναζητησή τους για ακλόνητα μαθηματικά θεμέλια. Αυτή η εμπειρία είναι μία από τις κύριες αιτίες για την αναζήτηση νέων κατευθύνσεων. Η δεύτερη αιτία είναι η τρέχουσα ενσωμάτωση-ολοκλήρωση της πληροφορικής στην καθαρή μαθηματική έρευνα, που είναι ασυμβίβαστη με της παραδοσιακές αντιλήψεις περί μαθηματικής αλήθειας και βεβαιότητας. Συνακόλουθα αναπτύσσεται μια αναζήτηση για μια φιλοσοφία των μαθηματικών που θα αποδέχεται το 'σφάλμα'[1] στα μαθηματικά, που θα θεμελιώνονται πάνω σε μια ρεαλιστική εικόνα των μαθηματικών, και που θα περιλαμβάνει όχι μόνον την καθαρή μαθηματική έρευνα, αλλά και την διδασκαλία και τις εφαρμογές των μαθηματικών.»

Τα Θεμέλια των Μαθηματικών είναι η μελέτη των πιό βασικών εννοιών-και

[1]Είναι ανάγκη να διευκρινήσουμε την χρήση που θα κάνουμε στα εισαγωγικά. Κάθε σύγχρονος Έλληνας που γράφει με κάποιο είδος ψηφιακής στοιχειοθεσίας, έχει στη διαθεσή του τα Ελληνικά εισαγωγικά '«','»', και τα αγγλικά εισαγωγικά ", ", ', '. Για λόγους κυρίως αισθητικούς θα χρησιμοποιούμε τα Ελληνικά εισαγωγικά για Ελληνικά τμήματα κειμένου, με περισσότερες από μία λέξεις, τα Αγγλικά διπλά εισαγωγικά για αντίστοιχα Αγγλικά κείμενα, και για όρους ή λέξεις σε εισαγωγικά (Ελληνικούς ή Αγγλικούς) τα μονά Αγγλικά, π.χ. 'truth', 'τιμή αλήθειας' κ.λπ.

τεχνικά αλλά και φιλοσοφικά-πάνω στις οποίες οικοδομείται το όλο οικοδόμημα των Μαθηματικών. Επί πλέον τα Θεμέλια των Μαθηματικών εξετάζουν τη Λογική δομή των Μαθηματικών καθώς επίσης και την σχεση τους με την γενικότερη ανθρώπινη γνώση. Έτσι ο βασικός στόχος των Θεμελίων των Μαθηματικών είναι να εφοδιάσει τα Μαθηματικά με τις βάσεις εκείνες που θα επιτρέπουν την χωρίς αντιφάσεις ανάπτυξη των Μαθηματικών (Ορισμοί, αποδείξεις, λογική και λογικοί κανόνες συμπερασμού, κ.λπ.). **Ο Θεμελιωτισμός** είναι μια αρχή κατα την οποία η 'γνώση' είναι ένα οικοδόμημα που στηρίζεται σε κάποια θεμέλια τα οποία όμως δεν έχουν ανάγκη από οποιοδήποτε στήριγμα ή δικαίωση έκτός ίσως της διαίσθησης.

Συνήθως ένα τέτοιο οικοδόμημα στηρίζεται, από τη μιά μεριά πάνω στην 'Μαθηματική διαίσθηση' και από την άλλη πάνω στη έννοια των 'αξιωματικών συστημάτων' που συλλαμβάνουν και εκφράζουν πιστά την διαίσθηση αυτή.

Μερικές από τις βασικές έννοιες, που είναι ίσως κοινά αποδεκτές, είναι: 'αριθμός', 'γεωμετρικό σχήμα', 'σύνολο', 'συνάρτηση', 'αλγόριθμος', 'αξιωματικό σύστημα', 'ορισμός', 'μαθηματική απόδειξη', 'συνεχές-διακριτό', 'πεπερασμένο-άπειρο', 'σταθερό-μεταβαλλόμενο', 'συμβατικό-μή συμβατικό', 'επίπεδο πραγματικότητας', ανεξάρτητα αξιώματα, κ.λπ.

Συνέπεια των Θεωρημάτων μη-Πληρότητας είναι ότι, με οποιοδήποτε είδους θεμέλιου και αν ξεκινήσουμε, που τουλάχιστον να διαπραγματεύονται τους φυσικούς αριθμούς, δεν θα έχουμε κανενός είδους εγγύηση, ότι τα Μαθηματικά, δεν θα οδηγήσουν σε κάποια παράδοξα ή αντιφάσεις.

Σχετικά με τα παραπάνω είναι και τα Θεωρήματα μη-πληρότητας του Gödel. **Το Πρώτο Θεώρημα μη-Πληρότητας**, μπορεί να διατυπωθεί ως εξης:

«Καμμία τυπική θεωρία, στην οποία μπορεί να εκφραστεί η αριθμητική, δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα συνεπής και πλήρης.»

Το Δεύτερο Θεώρημα μη-Πληρότητας, μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

«Με την προϋπόθεση ότι η συνέπεια μιας θεωρίας έχει τυποποιηθεί κατάλληλα σε μια θεωρία ενός αξιωματικού συστήματος, τότε αυτή η συνέπεια θα είναι αποδείξιμη στη θεωρία αυτή μόνον άν η θεωρία αυτή είναι στην πραγματικότητα, ασυνεπής (δηλ. μπορούμε να αποδείξουμε κάθε πρόταση του αξιωματικού συστήματος!)».

Έτσι τα Θεωρήματα μη-Πληρότητας του Gödel, μας λένε ότι μια απόδειξη συνέπειας π.χ. της συνολοθεωρίας, αλλά και οποιουδήποτε αξιωματικού συστήματος που περιέχει την αριθμητική, είναι αδύνατη! Μιά επί πλέον συνέπεια του Πρώτου Θεωρήματος μη-Πληρότητας, είναι και η **ύπαρξη μη-συμβατικών μοντέλων**.

Τα πιό πάνω Θεωρήματα μη-Πληρότητας, καθώς και τα Θεωρήματα των Löwenheim-Skolem, [85], έχουν σαν μοναδική δυνατότητα την προσφυγή στην 'μαθηματική διαίσθηση' είτε για την παραγωγή νέων, ριζοσπαστικών, αξιωμάτων, είτε για μια ημιτυπική αξιωματική Θεμελίωση των Μαθηματικών, όπου η 'μαθηματική διαίσθηση' θα συμβάλλει στα αξιώματα, με 'εννοιολογικές αρχές', στις οποίες θα βασίζεται κάθε διαισθητική-νοηματική εξήγηση των μαθηματικών.

Υποθέτουμε ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος έχει ήδη αναπτυχθεί μέσα από εκατομμύρια χρόνια, ακριβώς για να μπορεί να συλλαμβάνει και κατανοεί αυτήν τη συγκεκριμένη πραγματικότητα προϊόν της οποίας είναι και το ίδιο. Υπάρχουν λοιπόν δοσμένες νοητικές δομές και ιδιότητες με τις οποίες ο νούς προσπαθεί να κατανοήσει κάθε νέα κατάσταση. Αυτές οι μορφές και οι ιδέες έχουν ένα Πλατωνικό χαρακτήρα, μπορούν όμως να τροποποιούνται και τελικά να αλλάζουν, όταν τούτο απαιτήται.
Τελική Θέση: Τα μαθηματικά αντικείμενα, ως διαλεκτική σύνθεση της εμπειρικής υλικής πραγματικότητας, και της ήδη υπάρχουσας νοητικής πραγματικότητας, κληρονομούν και ιδιότητες που είναι αφαιρέσεις της υλικής πραγματικότητας, αλλά και ιδιότητες που τις επιβάλλει ο νούς στην προσπάθειά του να κατανοήσει τα δεδομένα της εμπειρίας, στη βάση των ήδη υπαρχουσών δομών. Τα δεδομένα όμως της εμπειρίας βασίζονται και εξαρτώνται από κάποιο συγκεκριμένο τρόπο 'παρατήρησης' της φυσικής πραγματικότητας. Στα έτσι παραγόμενα μαθηματικά αντικείμενα, αναμένουμε να έχουμε:

(i) Αξιώματα που θα συλλαμβάνουν και θα εκφράζουν τη νοητική πραγματικότητα. Τα αξιώματα αυτά αναμένεται να είναι συντακτικού χαρακτήρα, αφού η καλλίτερη έκφραση των νοητικών συλλήψεων είναι μέσω της 'γλώσσας'.

(ii) Ανεξάρτητα Αξιώματα που εκφράζουν τον τρόπο παρατήρησης της 'πραγματηκότητας' και,

(iii) Εννοιολογικές Αρχές και Αιτήματα, πού εκφράζουν ιδιότητες και κατηγορίες που χαρακτηρίζουν την υλική πραγματικότητα και έχουν ανταναλκλασθεί στα μαθηματικά αντικείμενα. Τέτοια π.χ. αρχή είναι η 'Τα μαθηματικά αντικείμενα συγκροτούνται σε επίπεδα πραγματικότητας, όπως ακριβώς και τα υλικά αντικείμενα'. Δέστε π.χ. το [41, Κεφ. 3, & §2.5] και το [113], για χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Αν κανείς δεχθεί την υπόθεση αυτή, τότε είναι λογικό να αναμένει ότι και τα αξιώματα των μαθηματικών συστημάτων θα πρέπει να είναι δύο ειδών: **Αυτά που συλλαμβάνουν το νοητικό μέρος των μαθηματικών αντικειμένων και αυτά που εκφράζουν το τρόπο με τον οποίο παρατηρείται η φυσική πραγματικότητα.** Αυτά τα δεύτερα αξιώματα παρουσιάζονται σαν 'ανεξάρτητα αξιώματα' των μαθηματικών συστημάτων. Επί πλέον έχουμε και τις **εννοιολογικές αρχές**, που εκφράζουν υλικές ιδιότητες που έχουν ανταναλκλασθεί στα μαθηματικά αντικείμενα.

Κεφάλαιο 1

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

1.1 Προσανατολισμένα Γραφήματα.

Τελευταία, η θεωρία των προσανατολισμένων (oriented) ή κατευθυνόμενων (directed) γραφημάτων (graphs), έχει καταλάβει μια κεντρικά θεμελιακή θέση για τα μαθηματικά. Αυτό κύρια οφείλεται στην ένταση που προκαλεί η ανάπτυξη της πληροφορικής κοινωνίας, έτσι ώστε από την μια μεριά να υπάρχει ανάγκη μαθηματικής διαπραγμάτευσης, προβλημάτων που θέτει αυτή η ίδια η πληροφορική αλλά και οι μη-σκληρές επιστήμες[1] (Γνωστικές Επιστήμες, Τεχνητή Νοημοσύνη, Κοινωνιολογία, κ.λπ.) και από την άλλη η ανάγκη για ουσιαστική αλλαγή και αναθεώρηση και των θεμελίων αλλά και της ουσίας των μαθηματικών. Αυτές οι ριζικές αλλαγές των μαθηματικών, κατευθύνονται μάλλον προς μια μη-Καντοριανή, τοποθεωρητική αντίληψη για τα μαθηματικά. Μια αντίληψη δηλαδή που απ' τη μία μεριά θα ενσωματώνει την μεταβολή και την διϋκές της έννοιες, την ασάφεια και την αοριστία, σαν σύμφυτα στοιχεία των μαθηματικών και από την άλλη οι πλειότιμες λογικές θα γενικεύουν την δίτιμη λογική.

Η μεταβολή φαίνεται καθαρότερα αν θεωρήσουμε ότι τα κλασικά μαθηματικά ασχολούνται με τα αντικείμενα της **πλασματικής πραγματικότητας** της ανθρώπινης σκέψης, που τα αντιλαμβανόμαστε στην «οθόνη της ανθρώπινης φαντασίας» , ενώ τα μη-Καντοριανά μαθηματικά ασχολούνται με αντικείμενα που τα αντιλαμβανόμαστε στην «εικονική πραγματικότητα», π.χ. της οθόνης ενός υπολογιστή.

Τα προσανατολισμένα γραφήματα αποτελούν την πρωταρχική έννοια και στοιχειώδη δομή από την οποία απορρέουν και η κλασσική συνολοθεωρία αλλά

[1]Με τον όρο μη-σκληρές επιστήμες αποδίδεται ο όρος 'soft sciences'. Ισως θα μπορούσε να αποδοθεί και ως 'ευέλικτες ή ήπιες επιστήμες' αλλά μάλλον όχι 'μαλακές επιστήμες'. Ο όρος 'σκληρές επιστήμες' (hard sciences) περιλαμβάνει την Φυσική, Χημεία, κ.λπ.

και η θεωρία των υπερσυνόλων (hypersets) ή μη-καλώς εδραιωμένων συνόλων (non-well -founded sets). Τα υπερσύνολα είναι μια έννοια, η εισαγωγή της οποίας επιβλήθηκε από ανάγκες της πληροφορικής βλ. [8]. Εξ άλλου τα κατευθυνόμενα γραφήματα βρίσκονται στη βάση της θεωρία κατηγοριών, τα δε υπερσύνολα περιγράφουν καλύτερα τα αντικείμενα αλλά και αυτές τις ίδιες τις κατηγορίες.

Στο κεφάλαιο αυτό θα δώσουμε μια μικρή εισαγωγή της Θεωρίας των Προσανατολισμένων Γραφημάτων, για να εξυπηρετήσουμε κυρίως τις παιδαγωγικές ανάγκες της εισαγωγής των κατηγορικών εννοιών, καθώς επίσης και κάποιων στοιχείων της Θεωρίας των Υπερσυνόλων.

1.1.1 Ορισμός. Ενα **προσανατολισμένο γράφημα** $\vec{G}$ είναι ένα δομημένο σύνολο, $\vec{G} = \langle G_0, R_{G_0} \rangle$ τέτοιο ώστε:

(i) G_0 είναι μια κλάση, τα στοιχεία της οποίας λέγονται **κόμβοι** (nodes) του γραφήματος και,

(ii) $R_{G_0} \subseteq G_0 \times G_0$ είναι μια διμελής σχέση στο σύνολο των κόμβων G_0, τα στοιχεία της οποίας λέγονται **ακμές** (edges) ή βέλη (arrows) του γραφήματος.

Στο εξής θα λέμε απλά γράφημα G ή $\vec{G}$ αντί προσανατολισμένο γράφημα $\vec{G}$.

Αν $(x, y) \in R_{G_0}$, συνήθως το x λέγεται **προηγούμενο** του y και το δε y **επόμενο** του x. Χρησιμοποιούμε όμως και μια πιο ανθρωπομορφική ορολογία: το x λέγεται και **γονέας** (parent) του y, το δε y **παιδί** (child) του x.

Αν υπάρχει τροχιά

$$\underset{n_k}{\bullet} \longrightarrow \underset{n_{k+1}}{\bullet} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{n_m}{\bullet}$$

τότε ο κόμβος n_k λέγεται **πρόγονος του** n_m, ο δε κόμβος n_m **απόγονος του** n_k.

Τα στοιχεία του G_1, συνηθίζεται να παριστάνονται γεωμετρικά ως εξής:

$$(x, y) \in R_{G_0} \iff x \bullet \longrightarrow \bullet\, y.$$

1.1.2 Σχόλιο. (i) Τα G_0 και R_{G_0} μπορούν να είναι, κενά σύνολα, απειροσύνολα αλλά και κλάσεις, όπως π.χ. η κλάση $R := \{x | x \notin x\}$ του Russell. Γενικά μια κλάση ορίζεται ως: $C := \{x | \varphi(x)\}$ όπου $\varphi(x)$ ένας τύπος της γλώσσας της συνολοθεωρίας (μια οριστική συνθήκη). Για τις κλάσεις μπορούμε να ορίσουμε πράξεις κ.λπ. όπως και στα σύνολα. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα δύο πιο γνωστά αξιωματικά συστήματα για την συνολοθεωρία είναι:

(α) Το σύστημα των Zermelo - Fraenkel, (ZF) το οποίο δέχεται σαν μοναδικό τύπο αντικειμένων τα σύνολα και (β) Το σύστημα NGB (von Neumann - Gödel - Bernays) που δέχεται δύο τύπους αντικειμένων, τα σύνολα και τις κλάσεις. Σύνολο δε είναι η κλάση που είναι μέλος κάποιας άλλης κλάσης.

(ii) Ο Ορισμός 1.1.1, επιτρέπει ανάμεσα σε δύο κόμβους μόνον μια ακμή, μόνο μια επικοινωνία, ωστόσο και στις κατηγορίες αλλά και σε διάφορες εφαρμογές, υπάρχει ανάγκη να έχουμε γραφήματα με ζεύγη κόμβων, που συνδέονται με περισσότερα από δύο βέλη. Θα μπορούσαμε λοιπόν, αντί η σχέση R_{G_0} να είναι ένα σύνολο, οπότε θα υπάρχει το πολύ ένα βέλος μεταξύ δύο ακμών, να θεωρήσουμε την R_{G_0} σαν μια οικογένεια στοιχείων του $G_0 \times G_0$, δηλαδή σαν μια συνάρτηση $I \to G_0 \times G_0$, οπότε τότε είναι δυνατόν να έχουμε περισσότερα του ενός βέλη μεταξύ δύο κόμβων. Μάλιστα, για να μην εισάγουμε περιττά στοιχεία στον ορισμό, μπορούμε κάλλιστα να επιλέξουμε για σύνολο δεικτών αντί του I, το σύνολο των ακμών έτσι ώστε η συνάρτηση για κάθε ακμή να μας δίδει τον κόμβο της αρχής και τον κόμβο του τέλους της. Ετσι οδηγούμαστε στο γενικότερο ορισμό, γνωστόν και σαν **πλειογράφημα** (multigraph), που ωστόσο θα συνεχίσουμε να το ονομάζουμε γράφημα.

1.1.3 Ορισμός. Ενα **γράφημα** είναι μια διατεταγμένη τριάδα:

$$\vec{G} := \langle G_0, G_1, (\alpha, \tau) \rangle$$

όπου

(i) G_0 είναι μια κλάση, τα στοιχεία της οποίας ονομάζονται **κόμβοι** του γραφήματος

(ii) G_1 είναι μια κλάση ($G_0 \cap G_1 = \emptyset$), τα στοιχεία της οποίας ονομάζονται **ακμές** ή **βέλη** του γραφήματος, και

(iii) $(,)$ είναι μια συνάρτηση:

$$\begin{array}{rcccl} (\alpha(\cdot), \tau(\cdot)) & : & G_1 & \to & G_0 \times G_0 \\ & & f & \mapsto & (\alpha(f), \tau(f)) \end{array}$$

η οποία αντιστοιχεί σε κάθε ακμή $f \in G_1$ μια **αρχή ή αφετηρία** $\alpha(f)$ και ένα **τέλος** ή **κόμβο άφιξης** (f).

1.1.4 Σχόλιο. (i) Θα συνεχίσουμε να συμβολίζουμε μια ακμή με το διαταγμένο ζεύγος κόμβων $(\alpha(f), \tau(f))$. Οταν δε το ίδιο ζεύγος κόμβων αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία ακμές, θα διαφοροποιούμε τα ζεύγη με ένα επιπρόσθετο σημάδι.

(ii) Ο συμβολισμός G_0, G_1 για την κλάση των κόμβων και των ακμών, δικαιολογείται, αφού κάθε κόμβος θεωρείται σαν μηδενικής διαστάσεως αντικείμενο, ενώ κάθε ακμή σαν μονοδιάστατο αντικείμενο.Γενικότερα θα συμβολίζουμε με $G_n(x,y)$ το σύνολο των n-τροχιών ή n-μονοπατιών, από την κορυφή $x \in G_0$ στήν κορυφή $y \in G_0$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} G_n(x,y) \quad := \quad & \{(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in G_1^n \,|\, \alpha(f_1) = x, \tau(f_n) = y \quad \text{και} \\ & \tau(f_i) = \alpha(f_{i+1}) \quad \text{για} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.\} \end{aligned}$$

1.1.5 Ορισμός. Ενα γράφημα θα λέγεται:

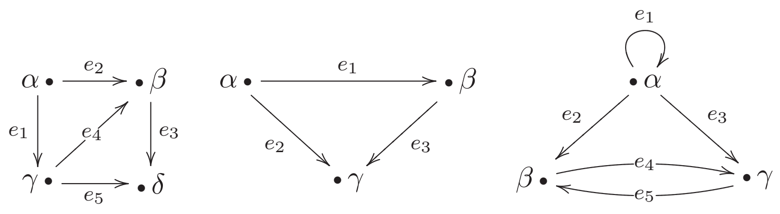
(i) **διακριτό** ανν $G_1 = \emptyset$

(ii) **κενό** ανν $G_0 = \emptyset$ και $G_1 = \emptyset$

(iii) **πεπερασμένο** ανν ο αριθμός των κόμβων είναι πεπερασμένος.

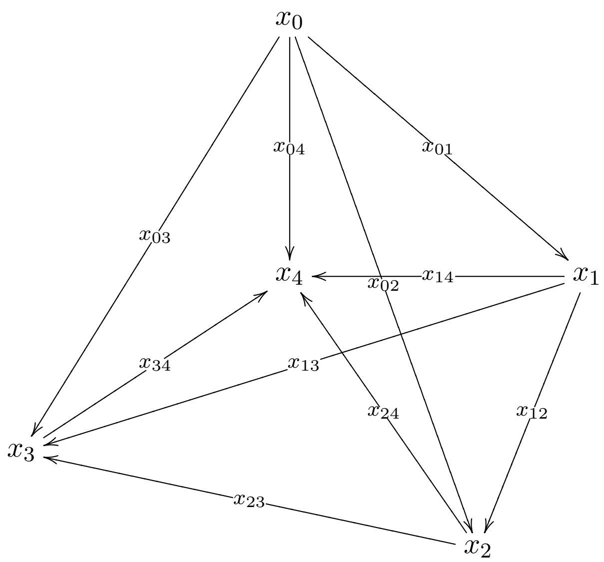
1.1.6 Σχόλιο. Ενα διακριτό γράφημα στην ουσία είναι μια αφηρημένη συλλογή, και πολλές φορές θα ταυτίζουμε ένα διακριτό γράφημα με την αφηρημένη συλλογή των κόμβων του. Η έννοια της αφηρημένης συλλογής είναι πολύ κοντά στήν *έννοια του αφηρημένου συνόλου*, όπου όμως διατηρούνται τα ‘εξωτερικά βέλη’ ενός αιχμηρού γραφήματος (βλ., Ορισμός 1.2.14). Είναι φανερό λοιπόν ότι κάθε μη - διακριτό μη - κενό γράφημα απεικονίζει ένα δομημένο σύνολο του οποίου η γεωμετρική μορφή ή αλγεβρική δομή καθορίζεται από τα υπάρχοντα βέλη. Η μαθηματική δομή και η γεωμετρική μορφή είναι δύο δυϊκοί τρόποι έκφρασης ενός και του αυτού πράγματος. Ετσι κάθε γράφημα έχει κάποια συγκεκριμένη γεωμετρική μορφή-μαθηματική δομή. Τα διάφορα γραφήματα με απλά γεωμετρικά σχήματα θα τα χρησιμοποιούμε αργότερα για την μορφοποίηση και δόμηση των αφηρημένων συνόλων.

1.1.7 Παράδειγμα. **(1)** Για παραδείγματα γραφημάτων, βλ. Σχήμα 1.1. ´Ενα



Σχήμα 1.1: Παραδείγματα γραφημάτων.

περισσότερο πολύπλοκο παράδειγμα είναι το ακόλουθο:



(2) Τα γράφημα $\vec{G} = \langle G_0, G_1, (\alpha, \tau) \rangle$ όπου,

- G_0 είναι η κλάση όλων των αφηρημένων συνόλων
- G_1 είναι η κλάση όλων των συναρτήσεων
- Για κάθε $f \in G_1$,
- $\alpha(f)$ είναι το πεδίο ορισμού (domain) της f, συμβολικά $\text{dom}(f)$, και,
- $\tau(f)$ είναι το πεδίο τιμών ή συν-πεδίο ορισμού (co-domain), συμβολικά $\text{cod}(f)$,.

Είναι φανερό ότι τα G_0, G_1, δεν είναι σύνολα αλλά κλάσεις. Τέτοια γραφήματα θα λέγονται **μεγάλα γραφήματα**, ενώ αν G_0, G_1 είναι σύνολα θα λέγονται **μικρά γραφήματα**. Γενικότερα κάθε μαθηματική δομή της οποίας ο φορέας είναι κλάση, θα λέγεται **μεγάλη** ενώ αν είναι σύνολο θα λέγεται **μικρή**. Αξίζει ακόμα να σχολιάσουμε ότι η κλάση των αφηρημένων συνόλων ορίζεται παρακάτω (Ορισμός 1.2.14).

1.1.1 Ομομορφισμοί γραφημάτων

Οπως σημειώσαμε ήδη σε προηγούμενο σχόλιο μας, κάθε γράφημα παριστάνει μια μαθηματική δομή. Αυτό γίνεται καλύτερα κατανοητό αν σκεφθεί κανείς ότι μια μαθηματική δομή απαρτίζεται από ένα αφηρημένο σύνολο, τον φορέα της δομής, και από μια οικογένεια σχέσεων. Οι σχέσεις όπως γνωρίζουμε, παριστάνονται πάντοτε με ένα γράφημα, στο οποίο συνυπάρχουν και ο φορέας, σαν το σύνολο των κόμβων, αλλά και η δομή, σαν το σύνολο των ακμών.

Ετσι ένας ομομορφισμός μεταξύ γραφημάτων είναι μια συνάρτηση που διατηρεί την 'δομή' δηλαδή την αφηρημένη γεωμετρική μορφή του γραφήματος. Ακριβέστερα έχουμε:

$$G: \quad \underset{1}{\bullet} \longrightarrow \underset{N}{\bullet} \longrightarrow \underset{N}{\bullet}$$

Σχήμα 1.2: Φυσικοί αριθμοί

1.1.8 Ορισμός. Ενας **ομομορφισμός** $h : G \longrightarrow H$, από το γράφημα $G = \langle G_0, G_1, (\alpha_G, \tau_G)\rangle$ στο γράφημα $H = \langle H_0, H_1, (\alpha, \tau_H)\rangle$ είναι ένα ζεύγος αντιστοιχιών.

$$h_0 : G_0 \longrightarrow H_0 \qquad h_1 : G_1 \longrightarrow H_1$$

με την ιδιότητα, αν $f : k \to \ell$ είναι ένα βέλος του G τότε $h_1(f) : h_0(k) \to h_0(\ell)$ είναι ένα βέλος του H. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι (h_0, h_1) είναι ένας ομομορφισμός ανν

$$a_H \circ h_1(f) = h_0 \circ a_G(f) \qquad \tau_H \circ h_1(f) = h_0 \circ \tau_G(f)$$

για κάθε $f \in G_1$

Πολλές φορές είναι βολικό να αναφερόμαστε στην συνάρτηση h σαν ομομορφισμό χωρίς πάντοτε να αναφερόμαστε στις συνιστώσες h_0, h_1.

Αν οι συναρτήσεις h_0, h_1 είναι $1-1$ και επί τότε η h λέγεται **ισομορφισμός** των γραφημάτων G και H.

1.1.9 Παράδειγμα. **(1)** Εστω H ένα γράφημα και $n \in H_0$ είναι ένας τυχόν κόμβος που περιέχει ένα βρόγχο u, δηλαδή $u : n \to n$. Εστω τώρα ένα άλλο τυχόν γράφημα G. Τότε υπάρχει ένας ομομορφισμός τέτοιος ώστε να αντιστοιχεί κάθε κόμβο του G στον κόμβο $n \in H_0$, και κάθε βέλος $f \in G_1$ στο βρόγχο $u \in H_1$. Ελέγξτε ότι μια τέτοια αντιστοιχία είναι ομομορφισμός.

(2) Το ακόλουθο γράφημα παριστάνει την δομή των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, ορίζοντας το μηδέν και την συνάρτηση του επομένου S.

Συνήθως το 1 παίζει ένα σοβαρό ρόλο στη συνέχεια, και σαν σύμβολο το χρησιμοποιούμε στην συνολοθεωρία, για το σύνολο που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο.

Για να δούμε ότι το γράφημα του σχήματος 1.2 παριστάνει πράγματι τους φυσικούς αριθμούς, θα ορίσουμε ένα ομομορφισμό από το γράφημα G στο γράφημα των συνόλων και των συναρτήσεων. Ο ομομορφισμός ορίζεται ως ακολούθως.

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \mapsto & \{\emptyset\} \\ N & \mapsto & \mathbb{N} \\ (N \xrightarrow{\quad s \quad} N) & \mapsto & (\mathbb{N} \xrightarrow{\quad succ \quad} \mathbb{N}) \end{array} \right.$$

Το βέλος $1 \xrightarrow{0} N$ ερμηνεύεται μέσω του ομομορφισμού με την συνάρτηση,

$$\begin{array}{ccc} \{\emptyset\} & \to & \mathbb{N} \\ \emptyset & \mapsto & 0 \end{array}$$

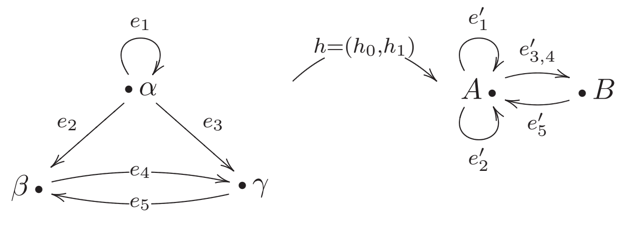
που απλά επιλέγει τον αριθμό $0 \in \mathbb{N}$.

Το βέλος $N \xrightarrow{s} N$ ερμηνεύεται με την συνάρτηση του επομένου,

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & succ(n) := n+1 \end{array}$$

Ετσι βλέπουμε ότι ο ομομορφισμός φ αποτελεί ταυτόχρονα και μια σημασιολογική ερμηνεία του αφηρημένου γραφήματος G.

(3) Εστω τα γραφήματα που εικονίζονται στό Σχήμα 1.3,



Σχήμα 1.3: Ομομορφισμός Γραφημάτων

τότε η ακόλουθη αντιστοιχία αποτελεί ένα ομομορφισμό.

$$\begin{array}{lcl} \alpha & \mapsto & h_0(\alpha) = A \\ \beta & \mapsto & h_0(\beta) = A \\ \gamma & \mapsto & h_0(\gamma) = B \\ & & \\ & & \\ & (h_0) & \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} e_1 & \mapsto & h_1(e_1) = e'_1 \\ e_2 & \mapsto & h_1(e_2) = e'_2 \\ e_3 & \mapsto & h_1(e_3) = e'_{3,4} \\ e_4 & \mapsto & h_1(e_4) = e'_{3,4} \\ e_5 & \mapsto & h_1(e_5) = e'_5 \\ & (h_1) & \end{array}$$

1.1.10 Ασκήσεις. Να δειχτεί ότι αν $\varphi : G \to H$ και $\psi : H \to K$ είναι ομομορφισμοί των γραφημάτων G, H και H, K τότε η σύνθεση $\psi \circ \varphi : G \to K$, είναι ομομορφισμός, όπου,

$$(\psi \circ \varphi)_0 = \psi_0 \circ \varphi_0 \quad \text{και} \quad (\psi \circ \varphi)_1 = \psi_1 \circ \varphi_1$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε ένα είδος γραφημάτων που αποτελεί τη βάση για μια γραφοθεωρητική θεώρηση της έννοιας της κατηγορίας.

1.1.11 Ορισμός. Ενα ***παραγωγικό σύστημα συμπερασμού*** (deductive system) είναι ένα γράφημα G στο οποίο έχουμε:

(i) Για κάθε $A \in G_0$ υπάρχει αυτοβέλος $(1_A : A \to A) \in G_1$, που θα το ονομάζουμε και **ταυτοτικό βέλος** και

(ii) Για κάθε ζευγάρι βελών $f : A \to B$ και $g : B \to C$ υπάρχει η σύνθεση των δύο βελών, $g \circ f : A \to C$.

Η συνθήκη (ii) μπορεί να ερμηνευθεί 'λογικώς', από αυτήν δε την ερμηνεία προέρχεται και το όνομα 'παραγωγικό σύστημα συμπερασμού'. Θεωρούμε ότι οι κόμβοι του γραφήματος είναι 'λογικές προτάσεις' ή 'λογικοί τύποι' οι δε ακμές ή βέλη ότι είναι συμπερασμοί ή αποδείξεις. Τότε η ιδιότητα (ii) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{f : A \to B \quad g : B \to C}{g \circ f : A \to C}$$

που δεν είναι παρά ο βασικός κανόνας συμπερασμού, γνωστός σαν modus ponens. Με την ερμηνεία των βελών και ιδιαίτερα των συναρτήσεων σαν μια έννοια λογικής συνεπαγωγής, θα ασχοληθούμε και παρακάτω.

1.2 Εννοιες Συνόλου.

Στο Τμήμα αυτό δεν πρόκειται να κάνουμε μια επίσημη και πλήρη εισαγωγή στη Θεωρία Συνόλων, αλλά απλά θα θίξουμε κάποια ζητήματα που θα μας χρειασθούν στη συνέχεια. Για μια καλή εισαγωγή στη Θεωρία Συνόλων, δείτε π.χ. τα: [97, 31]. Για μεγάλους πληθάριθμους το [63] είναι ίσως το πιό πλήρες. Το [60] είναι ίσως το πιό πλήρες βιβλίο συνολοθεωρίας. Δείτε επίσης τα [78, 23, 62]. Τέλος για μια κατηγορική προσέγγιση στα σύνολα δείτε το [131].

Η πιο επικρατέστερη έννοια συνόλου, είναι αυτή που εκφράζεται μέσα από τα αξιώματα των Zernelo - Fraenkel (ZF).

Αν θέλαμε να δούμε, τη διαισθητική σημασία και το νόημα της έννοιας του συνόλου που συλλαμβάνεται και εκφράζεται από τα αξιώματα ZF, τότε οδηγούμαστε σε μια συγκεκριμένη έννοια που εκφράζεται μέσα από μια **σταδιακή επαναληπτική διαδικασία συλλόγισης**, και υλοποιείται π.χ. με το σύμπαν του von - Neumann. Το αξίωμα της θεμελίωσης παίζει πρωταρχικό ρόλο για την κατασκευή του σύμπαντος του von - Neumann. Ωστόσο τελευταία, κάτω από την πίεση για μαθηματικοποίηση των νέων αντικειμένων που εμφανίστηκαν στην πληροφορική εισήχθηκαν νέα αντικείμενα-σύνολα, τα ονομαζόμενα και υπερσύνολα ή μη-καλά θεμελιωμένα σύνολα, που ακριβώς στηρίζονται στην αμφισβήτηση του Αξιώματος της Θεμελίωσης. Ας δούμε όμως συνοπτικά τις δύο αυτές θεμελιώδεις έννοιες συνόλων.

1.2.1 Η επαναληπτική αντίληψη του συνόλου

Η επαναληπτική αντίληψη ή κατακόρυφη έννοια του συνόλου, εκφράζεται μέσα από αξιωματικά συστήματα όπως τα ZF, von Neumann - Bernays - Gödel (NBG), Morse - Kelley κ.α.

Πριν όμως περιγράψουμε την διαδικασία που στηρίζεται η επαναληπτική αντίληψη του συνόλου, είναι απαραίτητο να σχολιάσουμε κάπως την έννοια του πρωτοστοιχείου (urelement) ή ατόμου (atom). Πρωτοστοιχεία είναι κάποια δεδομένα αντικείμενα, τα οποία υποθέτουμε ότι δεν έχουν συνολοθεωρητική δομή, δεν είναι δηλαδή σύνολα, η δε ύπαρξή τους δεν εξαρτάται από συνολοθεωρητικές κατασκευές. Ετσι αν V_U είναι ένα σύμπαν συνόλων με πρωτοστοιχεία U τότε η κλασσική σχέση του 'ανήκειν', '$\in$' τροποποιείται σε μια σχέση '$\in_U$' που ορίζεται ως ακολούθως: $(\forall u \in U)(\forall x \in V_U)[x \notin_U u]$, για τα σύνολα $V_U - U$ η σχέση του ανήκειν παραμένει η κλασσική. Μπορούμε για παράδειγμα να θεωρούμε ότι οι φυσικοί, ή οι πραγματικοί αριθμοί, μας έχουν δοθεί εκ των προτέρων, τα δε στοιχεία τους εκλαμβάνονται σαν πρωτοστοιχεία. Πολλές φορές παρ'όλο που το κενό σύνολο είναι σύνολο, το θεωρούμε και σαν άτομο αφού ισχύει η σχέση $x \notin \emptyset$ ισχύει για κάθε x. Η έννοια του πρωτοστοιχείου δεν είναι απόλυτη, είναι μάλλον μια σύμβαση που από τη μια μεριά μας διευκολύνει και από την άλλη **εμπεριέχει έμμεσα την ύπαρξη ενός επιπέδου πραγματικότητας, όπου τα πρωτοστοιχεία παίζουν τον ρόλο των 'μακρομορίων'.** Ταυτόχρονα η ύπαρξη πρωτοστοιχείων εναρμονίζεται και με την προτροπή που εκφράζεται από το λεγόμενο, «ξυράφι του Occam» (Occam's razor): "Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem" δηλ. σε ελεύθερη μετάφραση, «Δεν πρέπει να εισάγονται οντότητες που δεν είναι αναγκαίες».

Στην συνολοθεωρία ZF, λόγω των αξιωμάτων του δυναμοσυνόλου και της αντικατάστασης (δηλ. για κάθε σύνολο A και για κάθε οριστικό τελεστή μιας μεταβλητής H, η εικόνα $H[A] := \{H(x)|x \in A\}$ είναι σύνολο) είναι δυνατός ο εξοβελισμός των πρωτοστοιχείων από την θεωρία μας. Δηλαδή η ύπαρξη των ατόμων είναι μια περιττή υπόθεση. Υπάρχουν όμως ασθενέστερα αξιωματικά συστήματα συνολοθεωρίας όπως το σύστημα Kripke - Platek (KP), βλ. π.χ. [7, 77], όπου η υπόθεση της ύπαρξης πρωτοστοιχείων είναι βασικής σημασίας.

Μια διαισθητική περιγραφή της επαναληπτικής αντίληψης είναι η ακόλουθη: **Αρχίζουμε με μια συλλογή πρωτοστοιχείων. Στη συνέχεια σχηματίζουμε σύνολα σε διαδοχικά στάδια. Σε κάθε στάδιο m έχουμε στη διάθεσή μας τα πρωτοστοιχεία και όλα τα σύνολα που έχουν ήδη δημιουργηθεί σε προηγούμενα στάδια. Στη συνέχεια σχηματίζουμε όλες τις δυνατές συλλογές αυτών των αντικειμένων, τις οποίες τις θεωρούμε σαν τα σύνολα που δημιουργήθηκαν στο στάδιο m+1. Μια συλλογή αντικειμένων θα είναι σύνολο αν και μόνον αν (ανν) έχει δημιουργηθεί σε κάποιο στάδιο, αυτής επαναληπτικής διαδικασίας**. Για μια υλοποίηση αυτής της διαδικασίας, βλ. π.χ. [88, 89]

Μεταφορικά η επαναληπτική αντίληψη του συνόλου, είναι μια σταδιακή διαδικασία συλλόγισης, που θα τη συμβολίζουμε με $\{\cdots\}$, όπου μέσα στο κουτί $\{\cdots\}$ τοποθετούμε τα αντικείμενα $a, b, \ldots$ που έχουμε ήδη κατανοήσει σαν ολότητα στο προηγούμενο βήμα, και που τελικά δίνει ένα νέο σύνολο, το $\{a, b, \cdots\}$. Υπάρχουν βεβαίως συλλογές που είναι αδύνατο να κατανοηθούν σαν τελειωμένες ολότητες, όπως π.χ. 'η συλλογή όλων των συνόλων', και οι οποίες συλλογές οδηγούν στην **έννοια της κλάσης.**

Το Αξίωμα της Θεμελίωσης (για κάθε μη-κενό σύνολο x, υπάρχει σύνολο

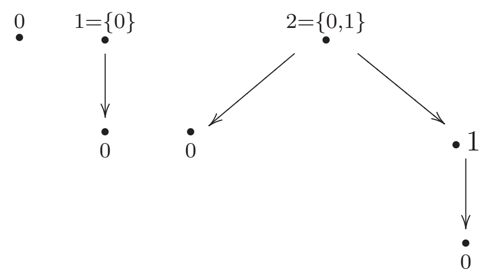
$\alpha \in x$, τέτοιο ώστε $\alpha \cap x = \emptyset$ ή ισοδύναμα ότι η σχέση του ανήκειν, $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη) επιτρέπει σε κάθε σύνολο που έχει δημιουργηθεί σε κάποιο στάδιο της επαναληπτικής διαδικασίας να πραγματώνεται σαν ένα στοιχείο του ακόλουθου σύμπαντος, που είναι γνωστό και ως σύμπαν του von Newmann:

$$\begin{aligned} V_0 &:= U \quad (\text{U είναι το σύνολο των ατόμων ή πρωτοστοιχείων}) \\ V_{n+1} &:= V_n \cup \mathscr{P}(V_n), \quad n \in \mathbb{N} \\ V_a &:= \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta \quad (\text{αν α είναι ένας οριακός διατακτικός αριθμός}) \text{ και} \\ V_U &:= \bigcup_{a \in \mathrm{ON}} V_a \quad \text{όπου ON είναι η κλάση των διατακτικών αριθμών} \end{aligned}$$

Αν $U = \emptyset$, τότε το σύμπαν που προκύπτει, λέγεται σύμπαν των **καθαρών ή γνήσιων συνόλων**. Από την άλλη μεριά το Αξίωμα της Θεμελίωσης απαγορεύει την ύπαρξη βρόγχων ή κύκλων, δηλαδή συνόλων όπως π.χ. το $\Omega = \{\Omega\}$, που περιέχουν τον εαυτό τους.

Το αξίωμα της θεμελίωσης μας επιτρέπει επίσης να παριστάνουμε τα σύνολα σαν δέντρα χωρίς άπειρες τροχιές και έτσι χωρίς βρόγχους ή αυτοβέλη. Αν λοιπόν είναι σωστή η άποψη ότι «τα πάντα είναι σύνολα», άλλο τόσο σωστή είναι και η ισοδύναμη της άποψη ότι «τα πάντα είναι δέντρα».

1.2.1 Παράδειγμα. Μερικές γραφικές απεικονίσεις συνόλων, με κατωφερή δένδρα δίδονται στο Σχήμα 1.4



Σχήμα 1.4: Σύνολα σαν αιχμηρά κατωφερή δένδρα

Σημειώνουμε ότι ο συμβολισμός $a \longrightarrow b$ σημαίνει ότι, το σύνολο b είναι μέλος του συνόλου a, και ότι,

$$0 = \emptyset, \quad 2 := \{0, 1\}, \ldots, n := \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

1.2.2 Ορισμός. (i) Μια τροχιά σε ένα γράφημα είναι μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία κόμβων τέτοια ώστε, εκτός του πρώτου κόμβου όλοι οι άλλοι είναι επόμενοι κάποιου κόμβου στην τροχιά, σχηματικά:

$$\underset{n_0}{\bullet} \longrightarrow \underset{n_1}{\bullet} \longrightarrow \cdots$$

(ii) Ενα γράφημα G θα λέγεται **αιχμηρό** (pointed) ανν υπάρχει ένας μοναδικός κόμβος n_0, που ονομάζεται **αιχμή ή ρίζα ή κορυφή** του γραφήματος, έτσι ώστε όλοι οι άλλοι κόμβοι να είναι απόγονοι του n_0. Κάθε αιχμηρό γράφημα θα το συμβολίζουμε και ως: $\langle G, n_0 \rangle$, όπου $G = \langle G_0, G_1, ((\cdot), (\cdot)) \rangle$.

(iii) Ενα **δέντρο** είναι ένα αιχμηρό γράφημα $\langle G, n_o \rangle$, τέτοιο ώστε για κάθε κόμβο n υπάρχει μια μοναδική τροχιά με αρχή την αιχμή n_0 και τέλος τον κόμβο n.

Συνοψίζοντας λοιπόν, τα κλασικά σύνολα μπορούν να παρασταθούν με γραφήματα που είναι καλά θεμελιωμένα, δηλαδή δεν περιέχουν άπειρες τροχιές ή βρόγχους. Ας έλθουμε τώρα στην δεύτερη βασική αντίληψη της έννοιας σύνολο.

1.2.2 Υπερσύνολα.

Για μιά πληρέστερη εισαγωγή στα υπερσύνολα δείτε τα [8, 31], τα οποία ακολουθούμε εδώ. Δείτε επίσης τα, [3, 9, 4]

Για την εισαγωγή των υπερσυνόλων, το μόνο αξίωμα το οποίο δεν υποθέτουμε ότι ισχύει, είναι το Αξίωμα της Θεμελίωσης. Επομένως η οποιαδήποτε νέα διαίσθηση προέρχεται ακριβώς από την μη - ισχύ του αξιώματος αυτού. Ολες οι άλλες ερμηνείες και σημασίες ισχύουν και στην περίπτωση των υπερσυνόλων.

Το αξίωμα της Αντιθεμελίωσης

Η έννοια του υπερσυνόλου, βασίζεται στην αντίληψη ότι ένα σύνολο θα έπρεπε να είναι προϊόν που προέρχεται από γενικότερα γραφήματα, και όχι αναγκαία από καλά εδραιωμένα. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την κατάσταση, πρέπει πρώτα να δώσουμε κάποιους ορισμούς. Εστω $\mathcal{A}$ το σύνολο των ατόμων και έστω ότι εργαζόμαστε στο σύστημα $ZFCA^-$, δηλαδή το ZF με το αξίωμα της επιλογής (AC), με άτομα $\mathcal{A}$ και χωρίς το αξίωμα της θεμελίωσης.

1.2.3 Ορισμός. Εστω $\langle G, n_0 \rangle$ ένα αιχμηρό γράφημα.

(i) Μια **σήμανση** (tagging) του G, είναι μια συνάρτηση tag$(\cdot)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των κόμβων χωρίς παιδιά και τιμές στο σύνολο $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$

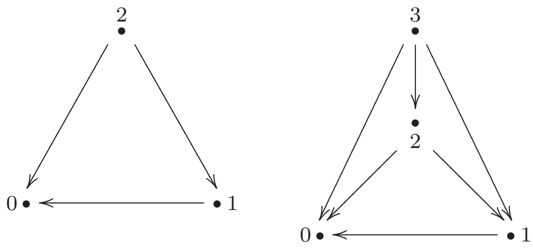
(ii) Μια **διακόσμηση ως προς την σήμανση tag** είναι μια συνάρτηση d με πεδίο ορισμού το G_0 και τέτοιο ώστε

(1) αν $n \in G_0$ δεν έχει παιδιά, τότε $d(n) = tag(n)$

(2) αν $n \in G_0$ έχει παιδιά τότε,

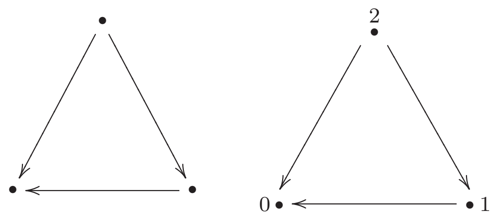
$$d(n) := \{d(n') | n \longrightarrow n'\}$$

Η



Σχήμα 1.5: Διακοσμημένα γραφήματα

Η



Σχήμα 1.6: Διακόσμιση γραφημάτος

1.2.4 Παράδειγμα. Εστω τα ακόλουθα αιχμηρά γραφήματα:

Παρατηρούμε ότι το δεξί γράφημα αποτελεί διακόσμηση του αριστερού. Πράγματι ο κάτω αριστερός κόμβος δεν έχει καθόλου παιδιά, και τον διακοσμούμε με το κενό σύνολο $\emptyset \equiv 0$. Για τους άλλους κόμβους έχουμε:

$$\begin{array}{lcll} 1 & := & \{0\} & \text{αφού} \quad 1 \longrightarrow 0 \\ 2 & := & \{0,1\} & \text{αφού} \quad 2 \longrightarrow 0, \quad 2 \longrightarrow 1 \\ 3 & := & \{0,1,2\} & \text{αφού} \quad 3 \longrightarrow 0, \quad 3 \longrightarrow 1, \quad 3 \longrightarrow 2 \end{array}$$

1.2.5 Θεώρημα. *(Το Λήμμα Σύνθλιψης του Mostowski) Κάθε εδραιωμένο και σεσημασμένο γράφημα έχει μια μοναδική διακόσμηση στο σύμπαν των εδραιωμένων συνόλων.*

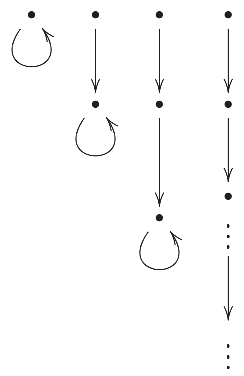
1.2.6 Παρατήρηση. Για να πάρουμε την ζητούμενη συνάρτηση, εφαρμόζουμε τον ορισμό με αναδρομή πάνω στην καλά θεμελιωμένη σχέση που συνεπάγεται κάθε εδραιωμένο γράφημα.

1.2.7 Ορισμός. Δοθέντος ενός συνόλου x, κάθε σεσημασμένο αιχμηρό γράφημα που δέχεται μια διακόσμηση τέτοια ώστε το x να είναι η αιχμή του γραφήματος, λέγεται **εικόνα του** x.

Από το Θεώρημα 1.2.5 είναι φανερό ότι κάθε εδραιωμένο γράφημα είναι εικόνα ενός μοναδικού συνόλου.

Αν ερμηνεύσουμε την σχέση του ανήκειν σε ένα σύνολο ως: $n \longrightarrow n'$ ανν $n' \in n$, βλέπουμε ότι κάθε σύνολο έχει τουλάχιστον μια εικόνα.

Η



Σχήμα 1.7: Ανάπτυξη ενός βρόγχου

1.2.8 Λήμμα. *Κάθε σύνολο μπορεί να εικονιστεί με ένα δέντρο.*

Απόδ. Δες [31].

Το αξίωμα τώρα της αντιθεμελίωσης είναι απλά η γενίκευση του Λήμματος Σύνθλιψης του Mostowski, πέρα από τον περιορισμό της καλής θεμελίωσης η εδραίωσης. Ετσι αφού το Θεώρημα 1.2.5 συσχετίζει εδραιωμένα και σεσημασμένα γραφήματα με εδραιωμένα σύνολα, είναι φυσικό να εισάγουμε τη *γενίκευση που συσχετίζει γενικά γραφήματα και υπερσύνολα.*

1.2.9 . Αξίωμα της Αντιθεμελίωσης (AFA) *Κάθε σεσημασμένο γράφημα έχει μια μοναδική διακόσμηση στο σύμπαν των υπερσυνόλων.*

1.2.10 Παράδειγμα. Εστω τα γραφήματα:

Είναι προφανές ότι αυτά δεν μπορούν να διακοσμηθούν με εδραιωμένα σύνολα. Χρησιμοποιώντας όμως το μη εδραιωμένο σύνολο $\Omega = \{\Omega\}$, έχουμε την ακόλουθη διακόσμηση:

Ισότητα δύο υπερσυνόλων

Είναι γνωστό ότι στην περίπτωση των εδραιωμένων συνόλων, δύο σύνολα είναι ίσα ανν έχουν τα ίδια στοιχεία (Αξίωμα της Εκτασης). Στην περίπτωση όμως των υπερσυνόλων, το Αξίωμα της Εκτασης πολλές φορές δεν οδηγεί πουθενά.

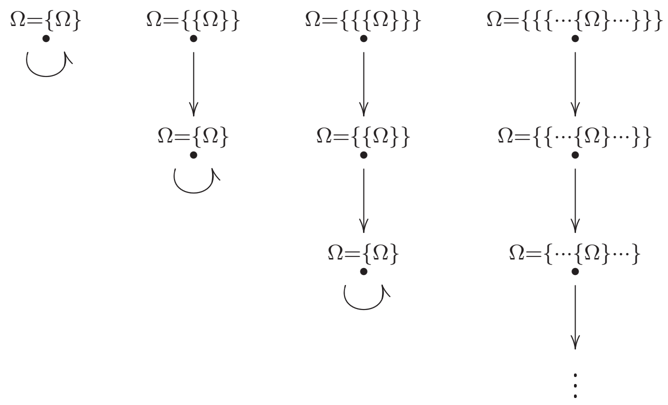
Εστω για παράδειγμα τα υπερσύνολα:

$$\begin{aligned} a &= \{\text{Αριστοτέλης}, a\} \\ b &= \{\text{Αριστοτέλης}, b\} \end{aligned}$$

τότε το Αξίωμα της Εκτασης μας δίνει:

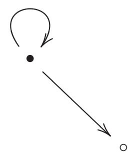
$$a = b \Longleftrightarrow a = b$$

Η



Σχήμα 1.8: Διακοσμήσεις ενός βρόγχου

Η



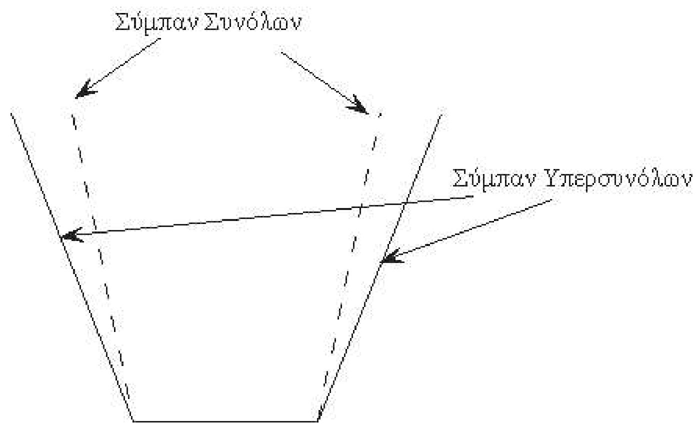
Ετσι η ισότητα δύο υπερσυνόλων πρέπει να βασιστεί σε κάποια άλλη αρχή. Σκεπτόμενος αναλογικά οδηγείται κανείς στην αρχή, που επιτυχώς θα αντικαταστήσει την Αξίωμα της Εκτασης.

1.2.11 . Αρχή Ισότητας Υπερσυνόλων. *Δύο υπερσύνολα είναι ίσα ανν εικονίζονται με το ίδιο γράφημα.*

Επιστρέφοντας στο προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι το γράφημα:

μπορεί να διακοσμηθεί είτε με το σύνολο a είτε με το b. Αρα τα σύνολα a και b είναι ίσα.

Μπορεί να δειχτεί ότι το σύμπαν των υπερσυνόλων είναι μια επέκταση του σύμπαντος των συνόλων.



Σχήμα 1.9: Το Σύμπαν των Υπερσυνόλων.

Το γεγονός βεβαίως ότι υπάρχουν περισσότερα του ενός γραφήματα που εικονίζουν το ίδιο σύνολο, είναι μια κάπως ενοχλητική κατάσταση. Αυτό όμως λύνεται ορίζοντας μια κατάλληλη κλάση ισοδυναμίας στην κλάση των σεσημασμένων αιχμηρών γραφημάτων, βλ. π.χ. [78, σελ.280]

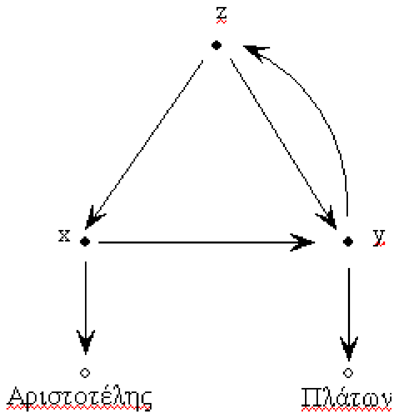
Το Λήμμα της Επίλυσης. (The Solution Lemma)

Μια από τις σπουδαιότερες επιπτώσεις του AFA είναι και η εξασφάλιση λύσης σε συστήματα εξισώσεων που περιέχουν για αγνώστους σύνολα.

Για παράδειγμα έστω ότι x, y, z παριστάνουν άγνωστα σύνολα και έστω το σύστημα:

$$\begin{aligned} x &= \{\text{Αριστοτέλης}, y\} \\ y &= \{\text{Αριστοτέλης}, z\} \\ z &= \{x, y\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Μπορούμε να παραστήσουμε το σύστημα (1.1) με ένα γράφημα:



Σχήμα 1.10: Παράσταση συστήματος.

Από το AFA, το σεσημασμένο αιχμηρό γράφημα έχει μια μοναδική διακόσμηση. Ετσι αν

$$d(x) = A, \quad d(y) = B \quad \text{και} \quad d(z) = C$$

τότε τα σύνολα A, B, C είναι λύση του συστήματος (1.1). Αν $\mathcal{X}$ είναι ένα σύνολο αγνώστων και $\mathcal{U}$ ένα σύνολο πρωτοστοιχείων, τότε ορίζουμε το σύμπαν

$$V_{\mathcal{U}}[\mathcal{X}] := V_{\mathcal{U} \cup \mathcal{X}}$$

όπου $V_{\mathcal{U} \cup \mathcal{X}}$ είναι το σύμπαν των υπερσυνόλων της θεωρίας $ZFCA^{-} + AFA$, που ορίζονται με άτομα τα $\mathcal{A} \cup \mathcal{X}$. τότε (βλ. [31]) έχουμε:

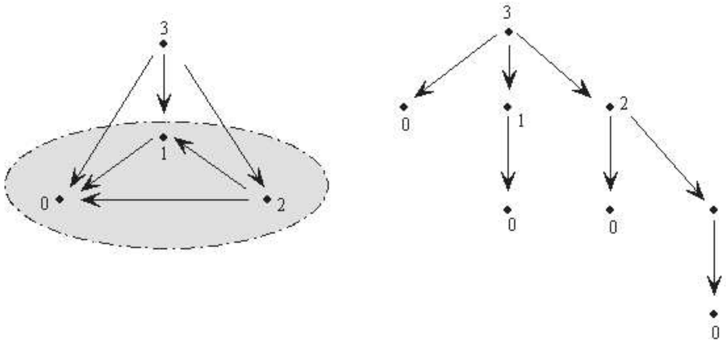
1.2.12 Θεώρημα. (Το Λήμμα της επίλυσης.) *Κάθε σύστημα εξισώσεων με αγνώστους από το $\mathcal{X}$, και συντελεστές από το σύμπαν $V_{\mathcal{U}}$ έχει μια μοναδική λύση .*

Αναδρομικοί Ορισμοί, και Επαγωγικές Αποδείξεις.

Από τη στιγμή που δεν έχουμε στη διάθεσή μας το Αξίωμα της Θεμελίωσης, είναι αδύνατο να εφαρμόζουμε επαγωγικές μεθόδους. Γενικεύουμε τις διαδικασίες αυτές μέσα από σταθερά σημεία συνεχών συνολοσυναρτήσεων, βλ. [31, σελ.159,169], οδηγούμαστε στο γεγονός ότι «**Ο ρόλος της αρχής της αναδρομής στην ZF, τώρα αντικαθίσταται από των συνδυασμό του Λήμματος της Επίλυσης και του Θεωρήματος συν-Επαγωγικής Κλειστότητας**» (co-Inductive Closure Theorem). Για λεπτομέρειες βλ. την προηγούμενη παραπομή.

1.2.3 Αφηρημένα Σύνολα: Σύνολα Παραγόμενα από Γραφήματα.

Είδαμε ότι ένα εδραιωμένο σύνολο μπορεί να παρασταθεί σαν το στοιχείο από το σύμπαν του von-Neumann που διακοσμεί την αιχμή ενός εδραιωμένου αιχμηρού γραφήματος. Οπότε το εν λόγω σύνολο ή κατανοείται με έναν ολιστικό τρόπο, ως η αιχμή του γραφήματος ή με έναν αναλυτικό τρόπο ως το σύνολο των υπολοίπων κόμβων (εκτός αιχμής) μαζί με τα βέλη του γραφήματος. Για παράδειγμα από το γράφημα του Σχήματος 1.11, έχουμε το σύνολο 3 δηλ. το $\{0, 1, 2\}$ μαζί με τα βέλη του.



Σχήμα 1.11: Το αριθμός 'τρία' ως γράφημα και ως αιχμηρό δένδρο.

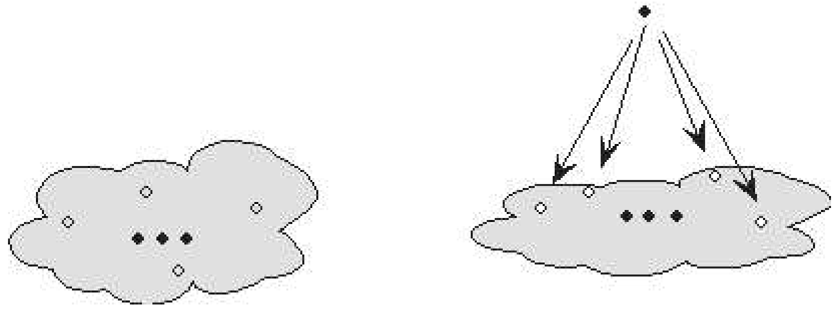
Από τη στιγμή όμως που συμπεριλαμβάνουμε βέλη, τα σύνολα δεν είναι αδόμητες συλλογές αλλά δομές. Με τον τρόπο αυτό μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι όλα τα 'σύνολα' π.χ. που ανήκουν στο σύμπαν του von-Neumann, δεν είναι αφηρημένα σύνολα αλλά δομημένα σύνολα, **η δε θέση του συνόλου στην επαναληπτική ιεραρχία καθορίζει και τον βαθμό δόμησής του**.

Κατά συνέπεια λοιπόν τίθεται το ερώτημα: Τι είναι ένα **αφηρημένο σύνολο;**.

Σύμφωνα με τον Lawvere[2] «Με ένα αφηρημένο σύνολο καταλαβαίνουμε μια συλλογή στοιχείων η οποία δεν έχει εσωτερική ιδιότητα ή δομή. Ετσι η μόνη εξωτερική ιδιότητα την οποία το A έχει από μόνο του, είναι ο 'αριθμός' αυτών των στοιχείων. Ωστόσο το A έχει μια εσωτερική ιδιότητα την οποία δεν έχει ένας αριθμός, συγκεκριμένα την ισότητα ή ανισότητα των στοιχείων.» Ετσι λοιπόν κάθε αφηρημένο σύνολο υποτίθεται ότι έχει στοιχεία, κάθε ένα από τα οποία δεν έχει δομή, και σαν συλλογή το A υποτίθεται ότι δεν έχει καμιά **εσωτερική δομή**, εκτός του ότι περιέχει τα στοιχεία του, που μπορούν να διακριθούν σαν ίσα ή άνισα. Επιπρόσθετα το A δεν έχει **εξωτερική δομή** (ή μορφή) εκτός το ότι μπορούμε να αποφανθούμε για τον πληθάριθμό του.

Σύμφωνα με το πιο πάνω ορισμό, εφ' όσον τα στοιχεία των αφηρημένων συνόλων δεν έχουν δομή, θα πρέπει να θεωρηθούν ότι είναι πρωτοστοιχεία ή άτομα. Ετσι ένα αφηρημένο σύνολο A μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας «νοητικός, χωρίς σχήμα σάκος» που περιέχει κόμβους ή στιγμές,

[2]F. W. Lawvere : Theory of Categories over a Base Topos, p.1 (Teoria delle Categorie sopra un Topos di Base, University of Perugia Lecture Notes, 1973.)



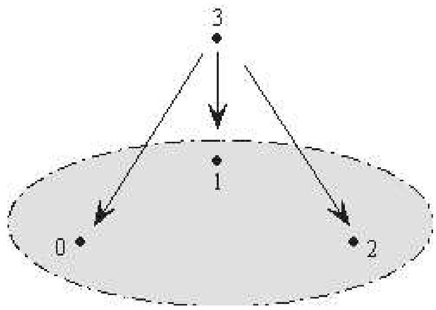
Σχήμα 1.12: Αφηρημένα σύνολα.

Αυτό παριστάνεται καλύτερα με τη χρήση αιχμηρών γραφημάτων όπως το δεξιό σχήμα.

Ετσι τα μόνα βέλη που επιτρέπονται είναι αυτά που υποδηλώνουν συμμετοχή των πρωτοστοιχείων στο αφηρημένο σύνολο A. Κάθε ύπαρξη βέλους μεταξύ των πρωτοστοιχείων, προσδίδει στο σύνολο A μια εσωτερική δομή και έτσι το A παύει να είναι αφηρημένο σύνολο.

1.2.13 Παράδειγμα. Εστω το σύνολο 3, βλ. Σχήμα 1.11.

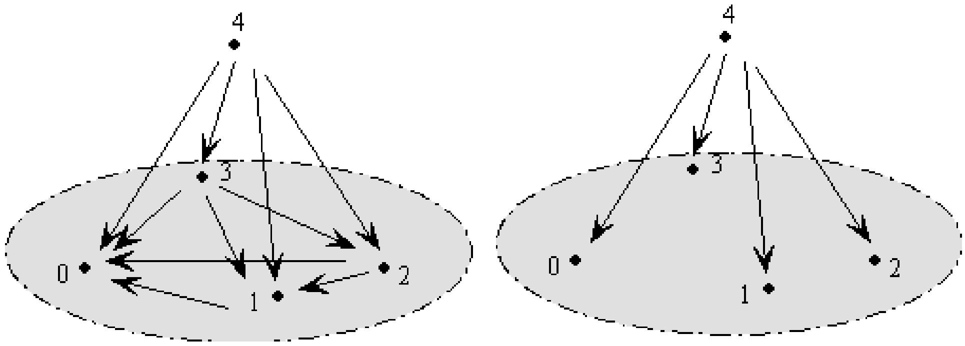
Είναι φανερό ότι το 3 είναι ένα δομημένο σύνολο, λόγω των βελών. Αν όμως 'ξεχάσουμε' τα βέλη που δίνουν στο 3 μια εσωτερική δομή και θεωρήσουμε τα $0, 1, 2$ σαν άτομα τότε οδηγούμαστε στο ακόλουθο γράφημα:



Σχήμα 1.13: Ο αριθμός 'τρία' ως αφηρημένο σύνολο.

που πράγματι παριστάνει ένα αφηρημένο σύνολο.

Ομοια, το 4 παριστάνεται όπως στο Σχήμα 1.14.



Σχήμα 1.14: Ο αριθμός ‘τεσσαρα’.

Ξεχνώντας τα βέλη οδηγούμαστε στο σύνολο που παριστάνει το δεξιό σχήμα, που είναι ένα αφηρημένο σύνολο. Συμπερασματικά λοιπόν, όταν το σύνολο δίδεται σαν δέντρο, τότε η θεώρηση κάποιων κόμβων σαν πρωτοστοιχεία, χωρίς εσωτερική δομή μας οδηγεί στην έννοια του αφηρημένου συνόλου. Από την άλλη μεριά, όταν το σύνολο παριστάνεται σαν αιχμηρό, προσανατολισμένο γράφημα, η παράληψη όλων των ‘εσωτερικών’ βελών (εκτός αυτών που έχουν σαν αφετηρία την αιχμή) οδηγούν σε ένα αφηρημένο σύνολο.

Ολα τα παραπάνω μας οδηγούνε σε μια νέα αντίληψη συνόλου, διαφορετική από αυτήν της ιεραρχικής επαναληπτικής (κατακόρυφης) αντίληψης. Η νέα αυτή αντίληψη είναι η έννοια του αφηρημένου (ή οριζόντιου) συνόλου, και προέρχεται από τα αιχμηρά και προσανατολισμένα γραφήματα, με μια επιλήσμονα διαδικασία, που ‘ξεχνά’ **τα εσωτερικά βέλη του γραφήματος**, δηλαδή όλα τα βέλη, εκτός από αυτά που έχουν αφετηρία την αιχμή του γραφήματος. Ετσι έχουμε.

1.2.14 Ορισμός. Εστω $\mathscr{G}$ η κλάση όλων των αιχμηρών προσανατολισμένων γραφημάτων. Τα στοιχεία του $\mathscr{G}$ είναι γραφήματα $\langle G, n_G\rangle \equiv \langle G_0, G_1, (\alpha, \tau); n_G\rangle$. Τότε η κλάση των αφηρημένων συνόλων είναι η εικόνα $\mathscr{F}[\mathscr{G}]$, του τελεστού.

$$\begin{array}{rrcl} \mathscr{F} \;: & \mathscr{G} & \to & \mathscr{F}[\mathscr{G}] \\ & (G, n_G) & \mapsto & G_0 - \{n_G\} \end{array}$$

Ο τελεστής $\mathscr{F}$ λέγεται και **επιλήσμων τελεστής** (forgetfull operator) αφού ‘ξεχνάει’ την δομή του G, δηλαδή τα εσωτερικά βέλη του γραφήματος.

Πρέπει ακόμα να σημειώσουμε ότι αιχμηρά γραφήματα, δέντρα, κ.λπ. εμφανίζονται και αλλού εκτός των συνόλων. Δηλαδή ένα αιχμηρό γράφημα μπορεί να ‘διακοσμηθεί’ και με άλλα αντικείμενα, π.χ. προτάσεις λογικής, γεωμετρικά αντικείμενα κ.λπ. **οι κόμβοι σε ένα αιχμηρό γράφημα είναι μάλλον «κενές θέσεις προς κατάληψη» από οποιαδήποτε αντικείμενα τυχαίνει να μας ενδιαφέρουν. Από την άποψη αυτή το αδιακόσμητο αιχμηρό γράφημα είναι ένα**

είδος αφηρημένης δομής. Η πιό πάνω άποψη θέτει στό κέντρο του ενδιαφέροντός μας, όχι την κλασσική έννοια του συνόλου, αλλά μιά θεωρία αφηρημένων-δομημένων αντικειμένων.

Αυτό το είδος της αφηρημένης δομής καθώς επίσης και των αφηρημένων συνόλων θα μας απασχολήσουν σ' αυτή την εισαγωγή στη θεωρία των κατηγοριών. Αξίζει κάνεις να σημειώσει ότι η έννοια του συνόλου που εναρμονίζεται καλλίτερα με τα αντικείμενα της κατηγορία **Set**, είναι ακριβώς η έννοια του αφηρημένου συνόλου, και λιγώτερο η επαναληπτική έννοια συνόλου.

1.3 Η Εννοια της Συνάρτησης και της Συναρτησιακής Εκφρασης.

Η έννοια της συνάρτησης είναι ίσως η πιο βασική έννοια στα μαθηματικά. Το γεγονός αυτό ενισχύεται και από το ότι η συνάρτηση είναι μια περισσότερο γενική έννοια από το ότι το σύνολο. Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι αν είναι ένα μη-κενό σύνολο τότε,

$$\mathscr{P}(X) \cong 2^X$$

Αν τώρα θεωρήσουμε γενικότερες συναρτήσεις, από ότι οι δείκτριες συναρτήσεις $I_A : X \to 2 \equiv \{0, 1\}$, τότε είναι φανερό ότι μια γενική συνάρτηση $f : X \to B$ μπορεί να εκφράζει γενικότερες έννοιες συνόλων. Αν π.χ. το είναι μια πλήρης άλγεβρα του Boole $\mathbb{B}$ τότε η f εκφράζει ένα **$\mathbb{B}$-σύνολο**, όπως συνήθως αποκαλούνται στα μοντέλα του Boole. Αν $B = [0, 1]$ τότε έχουμε την περίπτωση ενός **ασαφούς συνόλου** αν $B = \mathscr{P}(Y)$ και ο X είναι ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, τότε η f είναι ένα **τυχαίο σύνολο** (random set). Είναι φανερό ωστόσο ότι, π.χ. *το σύμπαν του von Newmann περιέχει μόνον κλασσικά δίτιμα σύνολα, δεν περιέχει ούτε $\mathbb{B}$-σύνολα ούτε ασαφή σύνολα, ούτε τυχαία σύνολα. Περιέχει όμως συνολοθεωρητικές αναπαραστάσεις τέτοιων αντικειμένων* π.χ. *η συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$ είναι ένα καλά ορισμένο συνολοθεωρητικό αντικείμενο το οποίο συνήθως ερμηνεύεται ως ασαφές σύνολο.* Επίσης στο κλασσικό σύμπαν δεν υπάρχουν υπερσύνολα, λόγω του Αξιώματος της Θεμελίωσης, όμως υπάρχουν συνολοθεωρητικές αναπαραστάσεις ενός προσανατολισμένου αιχμηρού γραφήματος με βρόγχους. Οι παραπάνω φαινομενικά αντιφατικές καταστάσεις απαιτούν:

(i) Προσεκτικότερη ανάλυση της έννοιας της συνάρτησης.

(ii) Κατασκευή μη-κλασσικών συμπάντων, τα στοιχεία των οποίων να είναι συνολοθεωρητικές αναπαραστάσεις, των εννοιών των οποίων η 'ερμηνεία' είναι μη-κλασσική.

Ετσι για τα $\mathbb{B}$-σύνολα θα χρειαστούμε ένα σύμπαν του Boole, $V^{(\mathbb{B})}$, και γενικά **τα μη-κλασσικά σύμπαντα έχουν σαν δομικό λίθο την έννοια της συνάρτησης**. Μόνο με αυτόν τον τρόπο θα εκλείψει *η φαινομενική αντίφαση μεταξύ συνολοθεωρητικής αναπαράστασης και διαισθητικής ερμηνείας.*

Ενα άλλος λόγος που επιβάλλει την ανάγκη προσεκτικής ανάλυσης της έννοιας της συνάρτησης και του σύμπαντος στο οποίο εργαζόμαστε και με βάση το οποίο αποκτούν μια σημασία οι μαθηματικές έννοιες, είναι ακριβώς αυτή η σχετικότητα των συνολοθεωρητικών εννοιών. Ετσι αν V είναι το κλασσικό σύμπαν του von Newmann, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο του Boole $V^{(\mathbb{B})}$ που είναι μια καλώς ορισμένη κλάση μέσα στο V:

$$V^{(\mathbb{B})} \subseteq V$$

Αλλά από την άλλη μεριά $V \cong V^{(2)}$ και έτσι το $V^{(\mathbb{B})}$ είναι μια επέκταση του V, αφού $V^{(2)} \cong V^{(\mathbb{B})}$. Τελικά μπορούμε να έχουμε

$$V_0 \equiv V \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$$

Ετσι **η έννοια σύνολο, παρ' όλο που θεωρούμε ότι έχει μια συγκεκριμένη και οριστική έκταση, ωστόσο αυτή η έκταση εξαρτάται από το σύμπαν μέσα στο οποίο θεωρούμε το σύνολο.**

Για το παρατηρητή που είναι ενσωματωμένος στο σύμπαν V_1 ή V_1-παρατηρητή, οι κλάσεις του V_0-παρατηρητή είναι σύνολα, οι δε κλάσεις του V_1-παρατηρητή είναι σύνολα για τον V_2-παρατηρητή, κ.λπ. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι έννοιες του συνόλου και της κλάσης είναι **'περιβαλλοντολογικά ευαίσθητες'** έννοιες.

Τέλος η Θεωρία των Κατηγοριών αναγνωρίζοντας την αυτόνομη ύπαρξη και σημασία της έννοιας της συνάρτησης, κάνει μια ανεξάρτητη αξιωματικοποίηση για την έννοια αυτή.

Υπάρχει λοιπόν ανάγκη για μια προσεκτική μελέτη της έννοιας της συνάρτησης.

1.3.1 Οι Δυϊκές Εννοιες της Συνάρτησης.

Η συνολοθεωρητική έννοια της συνάρτησης, έχει ένα στατικό χαρακτήρα, αφού στην ουσία ταυτίζεται με κάποιο σύνολο διαταγμένων ζευγών. Ακριβέστερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

1.3.1 Ορισμός. Μια συνάρτηση f **με πεδίο ορισμού** A και **πεδίο τιμών ή συνπεδίο ορισμού** B είναι μια διατεταγμένη τριάδα $f = (A, G_f, B)$ τέτοια ώστε

(i) $G_f \subseteq A \times B$ και,

(ii) $(x, y_1), (x, y_2) \in G_f \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2$

Το σύνολο G_f **λέγεται γράφημα της f**, αν δε $(x, y) \in G_f$ τότε γράφουμε συνήθως $y = f(x)$. Τη συνάρτηση $f = (A, G_f, B)$ την παριστάνουμε συνήθως και ως : $f : A \to B$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι αν $f = (A, G_f, B)$ είναι μια συνάρτηση, τότε το γράφημά της $G_f := \{(\alpha, f(\alpha)) : \alpha \in A\} \subseteq A \times B$ καθορίζει μοναδικά το πεδίο ορισμού, αλλά το πεδίο τιμών μένει ακαθόριστο. Αυτή εξ άλλου είναι και η αιτία για τον συμβολισμό (A, G_f, B). Θα μπορούσαμε ίσως να γράφουμε και

(G_f, B) αφού το A καθορίζεται μοναδικά από την G_f αλλά για λόγους συμμετρίας στον συμβολισμό, και δυϊσμού των εννοιων 'πεδίο ορισμού' και 'συν-πεδίο ορισμού' προτιμούμε τον (A, G_f, B). Για να εκτιμήσει κανείς τη διαφορά δύο συναρτήσεων (A, G_f, B_1) και (A, G_f, B_2) με $B_1 \subseteq B_2$, αρκεί προς στιγμήν να εκλάβουμε την συνάρτηση με γράφημα G_f, ότι εκφράζει μια επιλογή κάποιων αντικειμένων του πεδίου τιμών. Έτσι η επιλογή $f(x),\ x \in A$, είναι τελείως διαφορετικό πράγμα από την ίδια επιλογή, αλλά με περισσότερες δυνατότητες επιλογής! Τελευταία, κυρίως στη Θεωρητική Πληροφορική υπάρχει η ανάγκη θεώρησης **'μερικών συναρτήσεων'** συναρτήσεων δηλαδή $f : A \longrightarrow B$ με $\mathrm{dom}(f) \subsetneqq A$.

Μπορούμε να εκφράσουμε το γεγονός ότι η $f : A \to B$ είναι συνάρτηση, πιο συμπαγώς [104] με την απαίτηση η σύνθεση $\pi_A \circ i$ να είναι ισομορφισμός, όπου

$$\begin{array}{rcrcl} i & : & G_f & \hookrightarrow & A \times B \\ & & (x, y) & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

είναι **η συνάρτηση του περιέχεσθαι**, και η συνάρτηση,

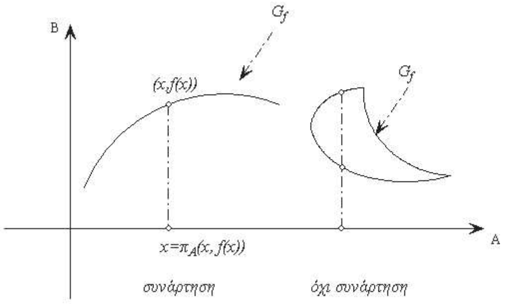
$$\begin{array}{rcrcl} \pi_A & : & A \times B & \to & A \\ & & (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

είναι **η συνάρτηση προβολής στο A**, με άλλα λόγια απαιτούμε ο περιορισμός της π_A στο G_f, συμβολικά $\pi_A \restriction G_f := \pi_A \circ i$, να είναι 1-1 και επί. Τα παραπάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε με την απαίτηση το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & & A \\ A \arrow[r, hook, "G_f"] \arrow[urr, bend left, "1_A"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & A \times B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

δηλ. $G_g \equiv \langle 1_A, f \rangle$ και $\pi_A \circ G_g = 1_A \ \ \&\ \ \pi_B \circ G_f = f$.

Περισσότερο παραδοσιακά έχουμε το Σχήμα 1.15.



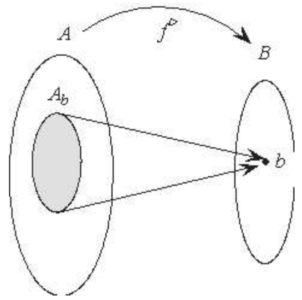
Σχήμα 1.15: Συνάρτηση και όχι συνάρτηση.

Πρίν προχωρήσουμε στον δυϊκό ορισμό της συνάρτησης θα μελετήσουμε τη σχέση ισοδυναμίας που επάγει μια συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της, η οποία λέγεται **'πηρήνας ισοδύναμίας της f'.**(equivalence kernel)

Έστω $f : A \longrightarrow B$ μια συνάρτηση. Επί του A ορίζουμε μια διμελή σχέση ως εξής:

$$a_1 \approx_f a_2 \qquad \text{ανν} \qquad f(a_1) = f(a_2)$$

Η σχέση $\approx_f$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας, όπως εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει. Η σχέση ισοδυναμίας αυτή λέγεται **πηρήνας ισοδυναμίας της** f.



Σχήμα 1.16: πηρήνας ισοδυναμίας της f

Έστω τώρα $A_b := \{\, a \in A \,|\, f(a) = b \,\}$ $\; b \in B$ οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\approx_f$. Έχουμε ότι,

$$A_b \cap A_{b'} = \emptyset, \quad b \neq b' \qquad \text{και} \qquad \bigcup_{b \in B} A_b = A$$

Μια συνάρτηση λοιπόν μπορεί να εκφρασθεί ισοδύναμα και σαν μια οικογένεια $(A_b)_{b\in B}$ ινών (δηλ. $A_b \equiv f^{-1}(\{b\}), \quad b \in B$) που διαμερίζουν το A.

Η συνάρτηση $\pi : A \longrightarrow A/\approx_f$ // $a \mapsto \pi(a) := [a]$ όπου $[a] := \{\, x \in A \,|\, x \approx_f a \,\}$ και $A/\approx_f := \{\, [a] \,|\, a \in A \,\}$ είναι το σύνολο-πηλίκο, λέγεται **κανονικός μετασχηματισμός** ή **προβολή του** A **επί του** $A/\approx_f$, και είναι πάντοτε επίρριψη. Ο κανονικός μετασχηματισμός λέγεται και 'αφαίρεση' αφού τα στοιχεία κάθε κλάσης ισοδυναμίας είναι για την συνάρτηση αυτή αδιάκριτα στοιχεία. Μπορούμε επίσης να θεωρούμε μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ ως ένα είδος 'παρατήρησης' του A με βάση το B, οπότε τα στοιχεία των κλάσεων ισοδυναμίας ταυτίζονται για την παρατήρηση f. Στη σύγχρονη Θεωρία Μοντέλων, οι κλάσεις ισοδυμαμίας $[a]$ λέγονται και 'φανταστικά στοιχεία' αφού για την παρατήρηση f οι κλάσεις ισοδυναμίας $[a]$ αποτελούν ακατανόητα στοιχεία!

Σχετικό με την παραπάνω ανάλυση είναι και το ακόλουθο Θεμελιώδες Θεώρημα των Συναρτήσεων:

1.3.2 Πρόταση. *Για κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ υπάρχει μια μοναδική αμφιρριπτική ($1-1$ και επί) συνάρτηση,*

$$\hat{f} : A/\approx_f \to f[A] \qquad [a] \mapsto \hat{f}([a]) := f(a)$$

τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "c"'] & B \\ A/\approx_f \arrow[r, tail, two heads, "\hat{f}"'] & f[A] \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

δηλ. $f =: i \circ \hat{f} \circ c$, *όπου* c *είναι επίρριψη,* $\hat{f}$ *είναι αμφίρριψη και τέλος η* i *είναι ένριψη.*

Είναι φανερό από το πιο πάνω θεώρημα, ότι έχουμε και την ακόλουθη **καθολική ιδιότητα**:

1.3.3 Θεώρημα. *Έστω* E *μια σχέση ισοδυναμίας επί του* A *και έστω* $\pi_E : A \longrightarrow A/E$ *η κανονική συνάρτηση. Τότε το ζεύγος* $(\pi_E, A/E)$ *είναι καθολικό, με την έννοια ότι κάθε συνάρτηση,* $f : A \longrightarrow B$ *με την ιδιότητα,* $xEy \Rightarrow f(x) = f(y)$, *παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω του* A/E, *δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi_E"] \arrow[dr, "(g\circ\pi_E=)f"'] & A/E \arrow[d, dashed, "\exists\, !\, g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

(**i**) Για την ένριψη (1-1) $:\rightarrowtail$ ή $\hookrightarrow$

(**i**) Για την επίρριψη (επί) $:\twoheadrightarrow$

(**i**) Για την αμφίρριψη(1-1 & επί) $:\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow$

Ας δούμε τώρα τον δυϊκό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης.

Εστω $f : A \to B$ μια συνάρτηση με την έννοια που ο Ορισμός 1.3.1 συνεπάγεται. Επί του πεδίου ορισμού μπορούμε πάντοτε να ορίζουμε την ακόλουθη διμελή σχέση:

Για κάθε $a_1, a_2 \in A$,

$$a_1 \approx_f a_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f(a_1) = f(a_2) \qquad (*)$$

Το γεγονός ότι η σχέση G_f είναι συναρτησιακή, συνεπάγεται ότι η σχέση $(*)$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Ετσι η οικογένεια $(A_b)_{b\in B}$ όπου $A_b := \{a \in |f(a) = b\} \equiv f^{-1}(\{b\})$, αποτελεί μια διαμέριση του A. Αρα η συνάρτηση $f = (A, G_f, B)$ μπορεί να εκφραστεί σαν μια οικογένεια $(A_b)_{b\in B}$ υποσυνόλων του A (μεταβαλλόμενο υποσύνολο του A με χρονοσύνολο το B) που αποτελούν μια διαμέριση του A. Δεχόμαστε ότι είναι δυνατόν μερικά από τα $A_b = \emptyset$ όταν $f^{-1}(b) = \emptyset$. Ετσι έχουμε την συνάρτηση,

$$\begin{array}{rrcl} f^{\triangleleft}: & B & \to & \mathscr{P}(A) \\ & b & \mapsto & A(b) \end{array} \qquad (**)$$

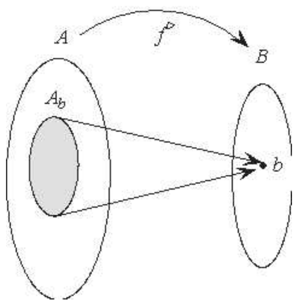
Αντίστροφα, αν έχουμε μια συνάρτηση όπως η $(**)$, τέτοια ώστε,

$$\bigcup_{b\in B} A_b = A \quad \text{και} \quad A_{b_1} \cap A_{b_2} = \emptyset, \quad b_1 \neq b_2,$$

τότε καθορίζεται μοναδικά μια σημειοσυνάρτηση

$$\begin{array}{rrcl} f^{\triangleright}: & A & \to & B \\ & a & \mapsto & b \end{array}$$

τέτοια ώστε $f(a) = b$ για κάθε $a \in A_b \neq \emptyset$. Η συνάρτηση $(**)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση και δεν έχει σχέση με μια συνάρτηση $f : A \to B$ όπου σε κάθε b αντιστοιχεί πολλά στοιχεία A_b. Στη συνάρτηση $(**)$ το A_b είναι μοναδικό στοιχείο του $\mathscr{P}(A)$.



Εστω $B^A \equiv \mathrm{Hom}(A, B)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο B και,

$$B[\mathscr{P}(A)] := \{f \in \mathscr{P}(A)^B : f(b_1) \cap f(b_2) = \emptyset,\ b_1 \neq b_2 \ \ \& \ \ \bigcup_{b\in B} f(b) = A\}$$

δηλαδή το $B[\mathscr{P}(A)]$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων

$$f : B \to \mathscr{P}(A)$$

που διαμερίζουν το A. Τότε έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

1.3.4 Πρόταση. *(i)* $B^A \simeq B[\mathscr{P}(A)]$, *δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων* $f : A \to B$, *είναι ισόμορφο με το σύνολο των συναρτήσεων* $B[\mathscr{P}(A)]$.

(ii) $\mathscr{P}(A \times B) \simeq \mathscr{P}(A)^B$ *δηλαδή μια γενική συνάρτηση της μορφής* $h : B \to \mathscr{P}(A)$, *που δεν ανήκει αναγκαστικά στο* $B[\mathscr{P}(A)]$ *αντιστοιχεί σε μια γενική σχέση, όχι αναγκαστικά συναρτησιακή.*

Απόδ.

(i) Εστω,
$$\begin{array}{rccl} \lambda: & B^A & \to & B[\mathscr{P}(A)] \\ & f & \mapsto & \lambda(f) := f^{\lhd} \end{array}$$
όπου $f^{\lhd} : B \to \mathscr{P}(A)$ με $B \mapsto A_b$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η λ είναι 1-1 και επί. ⊣□

(ii) Παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής,
$$\varphi : B \to \mathscr{P}(A)$$
μπορεί να αντιστοιχιθεί με μια μοναδικά ορισμένη διμελή σχέση.
$$R_\varphi := \{(a, b) \in A \times B \mid a \in \varphi(b)\}$$
και αντίστροφα, αν $R \subseteq A \times B$ είναι μια διμελής σχέση, τότε ορίζουμε την συνάρτηση,
$$\begin{array}{rccl} \varphi_R: & B & \to & \mathscr{P}(A) \\ & b & \mapsto & \varphi_R(b) := \{a \in \ \mid aRb\} \end{array}$$
Ετσι υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των $\mathscr{P}(A \times B)$ και $\mathscr{P}(A)^B$. ⊣▮

Το επόμενο ερώτημα είναι το κατά πόσο μπορούμε να δούμε ότι πράγματι η συνάρτηση
$$\begin{array}{rccl} f^{\lhd}: & B & \to & \mathscr{P}(A) \\ & b & \mapsto & A_b \end{array} \qquad (*)$$
είναι δυϊκή της συνάρτησης,
$$f: \quad A \quad \to \quad B$$
είναι γνωστό ότι το πεδίο ορισμού (domain) είναι δυϊκό με το πεδίο τιμών (co-domain)[3]. ΄Ετσι αν θέλουμε να εκφράσουμε την συνάρτηση $f = (A, G_f, B)$ με δυϊκό τρόπο, θα πρέπει να εισάγουμε μια δυϊκή έννοια του γραφήματος, έστω G_f^*, οπότε η δυϊκή έκφραση θα δινόταν από την έκφραση (B, G_f^*, A).

Παρατηρούμε ότι σαν συνάρτηση η $(*)$ δίδεται από την έκφραση
$$(B, G_{f^{\lhd}}, \mathscr{P}(A))\,, \quad \text{όπου}, \quad G_{f^{\lhd}} := \{(b, A_b) : b \in B\} \qquad (**)$$
Το πρόβλημα, τώρα μετατοπίζεται στο μετασχηματισμό του $G_{f^{\lhd}}$ σε ένα δυϊκό του $G_f \subseteq A \times B$. Είναι επίσης γνωστό ότι η δυϊκή έννοια του καρτεσιανού γινομένου είναι αυτή της ξένης ή διαζευγμένης ένωσης. ΄Εστω
$$A + B := (A \times \{1\}) \sqcup (B \times \{2\})$$

[3]Για μια διαφορετική προσέγγιση στο δυϊσμό της έννοιας της συνάρτησης, βλ. [115] or [116, §2.4 Functions Redefined]

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, dashed, "\gamma\circ i"] \arrow[dr, "i"'] & & G_f^* \\
& A+B \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, dashed, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & \{(b,2),\{(a,1):a\in A_b\}\} \\
& (b,2) \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}
$$

Σχήμα 1.17: $\gamma \restriction B = \gamma \circ i$ είναι 1-1 και επί

δηλαδή κάθε στοιχείο $a \in A$ έχει 'μαρκαριστεί' με το στοιχείο 1 ενώ κάθε στοιχείο $b \in B$ με το στοιχείο 2, κατά τρόπο ώστε και αν ακόμη τα A και B δεν ήταν ξένα μεταξύ τους, με το 'μαρκάρισμα' αυτό έχουν τελικά γίνει.

Ζητάμε τώρα να εκφράσουμε την ουσία της $(**)$. Λόγω του 'μαρκαρίσματος' δεν υπάρχει ανάγκη για τη χρήση διαταγμένων ζευγών της μορφής (b, A_b) αλλά απλά συνόλων της μορφής:

$$\{(b,2),\{(a,1)a \in A_b\}\} \equiv \{\{(a,1),(b,2)\}_{a\in A_b}\} \qquad b \in B$$

Ακολουθώντας την τακτική αυτή εκφράζουμε το γράφημα $(**)$ με τον ακόλουθο τρόπο:

Καλούμε **συν-γράφημα** G_f^* της $f = (A, G_f, B)$ το εξής σύνολο:

$$G_f^* := A + B/\approx = \ \{\{(a,1),(b,2)\}_{a\in A_b}\}_{b\in B} \tag{1.2}$$

όπου $\approx$ είναι η γνωστή σχέση ισοδυναμίας που εισάγει στο πεδίο ορισμού της κάθε συνάρτηση, εκφρασμένη σύμφωνα με το 'μαρκάρισμα' των στοιχείων του A και B.

$$(a_1,1) \approx (a_2,1) \quad :\Leftrightarrow \quad (f(a_1),2) = (f(a_2,2) = (b,2)$$

Τα στοιχεία $\{(b,2) : b \in B\}$ κατατάσσονται στις κλάσεις ισοδυναμίας στοιχείων του A, για τα οποία αποτελούν, κωδικοποίηση. Αν $b \in B$, η σχετική κλάση ισοδυναμίας δίνεται από τον τύπο:

$$\{(a,1),(b,2)\}_{a\in A_b} \equiv \{(b,2),\{(a,1) : a \in A_b\}\}$$

Ορίζουμε επίσης την κανονική συνάρτηση,

$$
\begin{array}{lccll}
\gamma : & + & \longrightarrow & + \ /\approx & \\
 & (a,1) & \mapsto & \{(b,2),\{(a,1) : a \in {}_b\}\} & \text{αν } a \in {}_b \\
 & (b,2) & \mapsto & \{(b,2),\{(a,1) : a \in {}_b\}\} &
\end{array}
$$

Τέλος η συνάρτηση $f = (A, G_f, B)$ μπορεί τώρα να εκφραστεί δυϊκά ως (B, G_f^*, A), απαιτώντας η σύνθεση $\gamma \circ i$ να είναι ισομορφισμός:

Τα παραπάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε με την απαίτηση το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, hook, "i_A"] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\ & A+B \arrow[r, two heads, "G_f^*"] & B \\ B \arrow[ur, hook, "i_B"] \arrow[urr, bend right, "1_B"'] & & \end{tikzcd}$$

δηλ. $G_f^* \equiv \begin{cases} f \\ 1_B \end{cases}$, $G_f^* \circ i_A = f$ & $G_f^* \circ i_B = 1_B$, βλ. και [131].

Στην ουσία ο επιμορφισμός $A+B \overset{G_f^*}{\twoheadrightarrow} B$ στο πιο πάνω διάγραμμα εκφράζει την σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε στη σχέση (1.2).

Η δυϊκή συνάρτηση (B, G_f^*, A) εκφράζει στην ουσία την συνάρτηση $f^{\triangleleft} : B \to \mathscr{P}(A)$ με τέτοιο τρόπο, που να είναι φανερή η δυϊκότητά της με την συνάρτηση f.

1.3.5 Παράδειγμα. Εστω $f : A \to B$, όπου $= \{-2,-1,0,1,2\}$ $= \{0,1,2\}$ και $y = f(x) := |x|$.

Τότε

$$\begin{aligned} A+B &:= (A \times \{1\}) \sqcup (B \times \{2\}) = \\ &= \{(-2,1),(-1,1),(0,1),(1,1),(2,1),(0,2),(1,2),(2,2)\} \end{aligned}$$

και

$$A_0 := \{a \in A : f(a) = 0\} = \{0\}, \quad A_1 = \{-1,1\}, \quad A_2 = \{-2,2\}$$

Ετσι το συν-γράφημα G_f^* της f δίνεται από το σύνολο:

$$G_f^* = A+B/\approx = \{G_0, G_1, G_2\}$$

με

$$\begin{aligned} G_0 &:= \{(0,2),(0,1)\} \\ G_1 &:= \{(1,2),(-1,1),(1,1)\} \\ G_2 &:= \{(2,2),(-2,1),(2,1)\} \end{aligned}$$

Η δε συνάρτηση (B, G_f^*, A) καθορίζεται από την απαίτηση η ακόλουθη σύνθεση να είναι 1-1 και επί:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, dashed, "\gamma \circ i"] \arrow[dr, "i"'] & & G_f^* \\ & A+B \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[rr, dashed, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & \{(b,2), \{(a,1) : a \in A_b\}\} \\ & (b,2) \arrow[ur, mapsto] & \end{tikzcd}$$

Δηλαδή η συνάρτηση,

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \mapsto & (0,2) & \mapsto & G_0 \\ 1 & \mapsto & (1,2) & \mapsto & G_1 \\ 2 & \mapsto & (2,2) & \mapsto & G_2 \end{array}$$

να είναι 1-1 και επί, που προφανώς συμβαίνει. ⊣▮

Τελικά οι συναρτήσεις $f^{\triangleright} : A \to B$ και $f^{\triangleleft} : B \to \mathscr{P}(A)$ μπορούν να θεωρηθούν σαν διαφορετικές δυϊκές παραλλαγές του ιδίου αντικειμένου f. Οπως θα δούμε στη συνέχεια έχουμε επίσης δυο ενδιαφέρουσες ερμηνείες αντίστοιχα για τις δυο αυτές παραλλαγές.

1.3.2 Μεταβαλλόμενα ή γενικευμένα στοιχεία και γενικευμένες ιδιότητες.

Η έννοια της συνάρτησης είναι κεντρική στην ανάλυση και μελέτη της μεταβλητότητας.

Εστω,

$$f : T \to A$$

Σε μια συνάρτηση το πεδίο ορισμού T, θεωρείται σαν το πεδίο μεταβολής, του μεταβαλλόμενου στοιχείου $f(t), \in A$ $t \in T$. Το πεδίο μεταβολής ή τύπος του μεταβαλλόμενου στοιχείου, μπορεί να είναι ένα διακριτό, συνεχές, βαθμωτό, διανυσματικό, τελεστικό κ.λπ. αντικείμενο.

Η χαρακτηριστική ορίζουσα ιδιότητα της συνάρτησης, στην ουσία σημαίνει ότι ένα μεταβαλλόμενο (ή κινητό) στοιχείο δεν είναι δυνατόν να βρίσκεται σε δύο διαφορετικές 'θέσεις' την ίδια στιγμή, δηλαδή : $(t, \alpha_1), (t, \alpha_2) \in G_f \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$

Μεταβαλλόμενα στοιχεία

Θεωρούμε ότι το πεδίο μεταβολής απαρτίζεται από 'σημεία' (σημεία του χώρου, στιγμές χρόνου, σωμάτια ενός σώματος, κ.λπ.) και είναι δυνατόν να είναι ένα δομημένο σύνολο (π.χ. ένα μετρήσιμος χώρος ή χώρος πιθανότητας, μια Αλγεβρα του Boole, μια άλγεβρα Heyting, ένα δικτυωτό κ.λπ.).

Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση $f : T \to A$ σαν μια οικογένεια των θέσεων του μεταβαλλόμενου στοιχείου στον χρόνο , δηλαδή

$$f = (f(t))_{t \in T}$$

Πολλές φορές γράφουμε και $f \in^T A$, για να υπογραμμίσουμε ότι το f είναι ένα μεταβαλλόμενο ή γενικευμένο στοιχείο του A με πεδίο μεταβολής το T. Δηλαδή, ο συμβολισμός $f = (f(t))_{t \in T}$ είναι ισοδύναμος με τον $f : T \to A$. Αν $T = 1 := \{\emptyset\}$, τότε δεν υπάρχει μεταβολή και επομένως συναρτήσεις της μορφής $1 \to A$ ταυτίζονται με τα συνηθισμένα στοιχεία του A. Συνακόλουθα, **η συνηθισμένη έννοια του στοιχείου συμπίπτει με μια ειδική μορφή συναρτήσεων**.

Εστω τώρα μια συνάρτηση,

$$F : A \to B$$

Η τιμή της F στο $a \in A$ μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση συναρτήσεων και μόνον:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, dashed, "F \circ a \equiv F(a)"] & \\ A \arrow[rr, "F"'] & & B \end{tikzcd}$$

Ομοίως και με τα γενικευμένα στοιχεία,

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, dashed, "F \circ x \equiv F(x)"] & \\ A \arrow[rr, "F"'] & & B \end{tikzcd}$$

Ετσι για κάθε $x \in^T A$ υπάρχει ένα μοναδικό $F \circ x \equiv F(x) \in^T B$.

1.3.6 Ορισμός. Κάθε συνάρτηση με πεδίο τιμών το A και πεδίο ορισμού το T λέγεται **γενικευμένο στοιχείο** του A με πεδίο μεταβολής ή στάδιο ορισμού T.

Τα γενικευμένα ή μεταβαλλόμενα στοιχεία, χρησιμοποιούνται ευρέως στην καθημερινή μας ζωή: Λέμε συνήθως, **η** οικονομία της Ελλάδας το 1994 ή **η** θερμοκρασία τον μήνα Αυγουστο κ.λπ. παρ' όλο δηλαδή που έχουμε μεταβαλλόμενα στοιχεία, επιμένουμε να τα αντιλαμβανόμαστε με ένα ολιστικό τρόπο, δηλ. σαν μια τελειωμένη ολότητα.

Γενικευμένες Ιδιότητες

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.4 κάθε μεταβαλλόμενο στοιχείο $f^{\triangleright} = (f^{\triangleright}(t))_{t \in T}$ μπορεί να ερμηνευθεί δυϊκά και σαν μια γενικευμένη ιδιότητα, ή ένα μεταβαλλόμενο υποσύνολο του T,

$$\begin{array}{rccc} f^{\triangleleft}: & A & \to & \mathscr{P}(T) \\ & a & \mapsto & T_a \end{array} \tag{$*$}$$

δηλαδή, $f^{\triangleleft} = (f^{\triangleleft}(a))_{a \in A}$ όπου κάθε $f^{\triangleleft}(a) \equiv T_a$ παριστάνει το συνολικό χρόνο που το σύστημά μας $f^{\triangleright}$ παρέμεινε στην κατάσταση $a \in A$.

Η συνάρτηση $(*)$ είναι φανερό ότι αποτελεί μια γενικευμένη ιδιότητα, αφού μια οριστική ιδιότητα είναι στην ουσία μια δείκτρια ή χαρακτηριστική συνάρτηση,

$$I_B : A \to 2 \equiv \{0, 1\}$$

και κάθε άλγεβρα Boole $\mathscr{P}(T)$ ή $\mathbb{B}$, καθώς επίσης και κάθε σύνολο με περισσότερα των δύο στοιχεία, το οποίο περιέχει την τετριμένη άλγεβρα Boole $\mathbf{2}$, μπορεί να θεωρηθεί σαν γενίκευση αυτής της τετριμμένης άλγεβρας του Boole **2**. Γενικότερα όμως **κάθε συνάρτηση που έχει σαν αφετηρία το** A **αναφέρεται σε κάποια ιδιότητα των στοιχείων του** A**.**

1.3.7 Ορισμός. Κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A και τιμές σε ένα οποιοδήποτε σύνολο που περιέχει το 2 μπορεί να θεωρηθεί σαν μια **γενικευμένη ιδιότητα**.

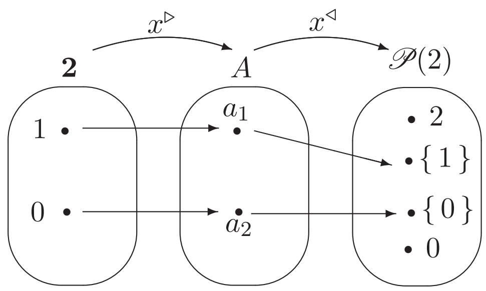
1.3.8 Παράδειγμα. 1) Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.4 κάθε ολικό στοιχείο $a^{\triangleright} : 1 \to A$ εκφράζεται δυϊκά με την συνάρτηση

$$\begin{array}{rcl} a^{\triangleleft} \;:\; A & \to & 2 \\ x & \mapsto & a^{\triangleleft}(x) := \begin{cases} 1, & x = a, \\ 0, & x \neq a, \end{cases} \end{array}$$

Σημειώνεται ότι $2 = \mathscr{P}(1) = \mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Δηλαδή

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{a^{\triangleright}} & A & \xrightarrow{a^{\triangleleft}} & 2 \\ 0 & \mapsto & a & \mapsto & a^{\triangleleft}(x) \end{array}$$

2) Εστω, το γενικευμένο στοιχείο $2 \xrightarrow{x^{\triangleright}} A$ του Σχήματος 1.18.



Σχήμα 1.18: Η συνάρτηση $2 \xrightarrow{x^{\triangleright}} A$ vs. $A \xrightarrow{x^{\triangleleft}} \mathscr{P}(2)$

Το γενικευμένο λοιπόν στοιχείο $x^{\triangleright}$, επιλέγει δύο στοιχεία του A, αποτελεί δηλαδή μια λίστα δύο στοιχείων του A, και έτσι είναι ένα **εκτασιακό χαρακτηριστικό του** . Δυϊκά έχουμε τη γενικευμένη ιδιότητα $A \xrightarrow{x^{\triangleleft}} \mathscr{P}(2)$, με

$$x^{\triangleleft}(y) := \begin{cases} \{1\}, & y = a_1, \\ \{0\}, & y = a_2 \end{cases}$$

3) Εστω $T_\Omega = (\Omega, \mathscr{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας, και

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

μια διακριτική τυχαία μεταβλητή, με τιμές $x_1, x_2, \ldots$ Εκφράζουμε τον T_Ω με έναν 'ελεύθερο σημείων' τρόπο:

Για κάθε $A, B \in \mathscr{A}$, ορίζουμε

$$A \approx B \quad \text{ανν} \quad P(A \bigtriangleup B) = 0$$

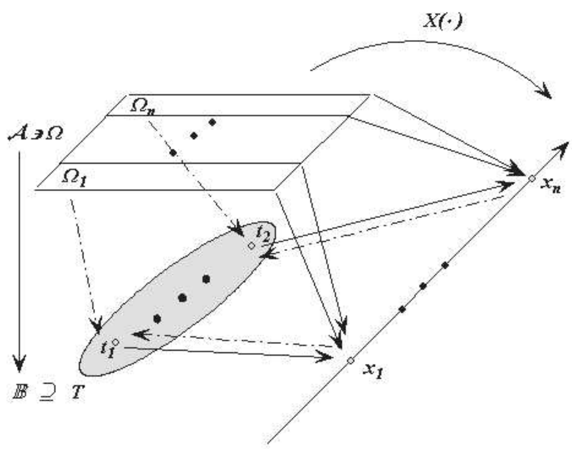
Εστω $\mathbb{B} := \mathscr{A}/\approx$ και

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathscr{A} & \rightarrow & \mathbb{B} \\ & A & \mapsto & a := A/\approx \end{array}$$

ο κανονικός μετασχηματισμός. Επειδή η κλάση των P-μηδενικών ενδεχομένων $\mathscr{N}_0$ είναι ένα σ-ιδεώδες, δηλαδή :

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & A \in \mathscr{N}_0 \;\; \& \;\; B \subseteq A & \Rightarrow & B \in \mathscr{N}_0 \\ \text{(ii)} & A_i \in \mathscr{N}_0 \;\; i = 1, 2 & \Rightarrow & \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{N}_0 \end{array}$$

έχουμε ότι η σχέση $\approx$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας ο δε κανονικός μετασχηματισμός είναι ένας σ-ομομορφισμός.



Σχήμα 1.19: Διαμερίσεις στο Ω και στην $\mathbb{B}$

Ετσι η διαμέριση $\Omega_i := \{\omega \in \Omega \mid x(\omega) = x_i\}\,, \;\; i = 1, 2 \ldots$ του Ω επάγει μια διαμέριση της μονάδας $1_{\mathbb{B}} := \gamma(\Omega)$, $t_i := \gamma \in (\Omega_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ βλ. Σχήμα 1.19, δηλαδή:

$$t_i \wedge t_j = 0_{\mathbb{B}} := \gamma(\emptyset) \quad i \neq j \quad \text{και} \quad \bigvee_{i=1}^{\infty} t_i = 1_{\mathbb{B}}$$

και έτσι η τ.μ $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ έχει μια ελεύθερη σημείων αναπαράσταση,

$$\begin{array}{rccc} x : & T & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & t_i & \mapsto & x_i \end{array}$$

όπου $T = \{t_i : i \geq 1\}$. Είναι φανερό ότι από τον τρόπο κατασκευής, υπάρχει και η αντίστροφη συνάρτηση,

$$\begin{array}{rcl} x^{\triangleleft}: \ \mathbb{R} & \rightarrow & T \subseteq \mathbb{B} \\ y & \mapsto & x^{\triangleleft} := \begin{cases} t_i, & \text{αν} \quad y = x_i, \quad i \geq 1 \\ 0_{\mathbb{B}}, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \end{array}$$

Ο στοιχειώδης στοχαστικός χώρος,

$$\mathscr{E} := \{x \mid x : T \rightarrow \mathbb{R},\ T \in \mathscr{T}(\mathbb{B})\}$$

όπου $\mathscr{T}(\mathbb{B})$ είναι το σύνολο όλων των διαμερίσεων της μονάδας της $\mathbb{B}$, περιλαμβάνει όλα τα εκτασιακά χαρακτηριστικά του $\mathbb{R}$ αναφορικά με χρόνους $T \in \mathscr{T}(\mathbb{B})$. Οι δε αντίστροφες συναρτήσεις $x^{\triangleleft}$ δηλ. τα εντασιακά χαρακτηριστικά ή οι γενικευμένες ιδιότητες του $\mathbb{R}$, περιλαμβάνονται στο σύνολο, που θα το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}[\mathbb{B}]$ και το οποίο ορίζεται ως:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}[\mathbb{B}] & := & \{f \in \mathbb{B}^{\mathbb{R}} \mid (\forall x, y \in \mathbb{R})[x \neq y \rightarrow f(x) \wedge f(y) = 0_{\mathbb{B}}] \\ & & \qquad \& \displaystyle\bigvee_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1_{\mathbb{B}}\} \end{array}$$

και λέγεται **δύναμη του Boole** του $\mathbb{R}$. Ενας πληρέστερος ορισμός θα απαιτούσε και τον ορισμό των πράξεων επί των $\mathbb{R}[\mathbb{B}]$ καθώς επίσης και της σχετικής συντακτικής δομής.

Μπορεί κανείς να δείξει, βλ. [35], ότι :

$$\mathscr{E} \cong \mathbb{R}[\mathbb{B}] \qquad (*)$$

Η $(*)$ αποτελεί μια γενίκευση της σχέσης στήν Πρόταση 1.3.4(i), και αποτελεί μιά ακόμη χαρακτηριστική στιγμή, του βασικού φαινομένου της Θεωρίας Κατηγοριών (βλ. τη συνέχεια), «της αντιστροφής των βελών» το οποίο εκφράζει την **αρχή του δυϊσμού: έκταση-ένταση**. Σύμφωνα με την αρχή αυτή **αντιστρέφοντας τα βέλη σε μιά κατηγορία, κάθε εκτασιακό χαρακτηριστικό μετατρέπεται σε εντασιακό και αντιστόφως**.Περισσότερα όμως επ' αυτού στο Κεφάλαιο για τις Κατηγορίες.

Κεφάλαιο 2

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

2.1 Ορισμός της Κατηγορίας

Η Θεωρία Κατηγοριών και Θεωρία Τόπων (ένα είδος γενικευμένης συνολοθεωρίας), είναι βασικές στην διαδικασία συνόψισης των βασικών «εννοιακών-δομικών» χαρακτηριστικών των μαθηματικών. Στην κλασική συνολοθεωρία έχουμε μια στατική έννοια της συνάρτησης (ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών), η οποία ως αντικείμενο βρίσκεται υψηλότερα στη σωρευτική ιεραρχία συνόλων, από ότι τα σύνολα του πεδίου και συν-πεδίου ορισμού. Αντίθετα στις κατηγορίες η έννοια της συνάρτησης έχει μια ισότιμη και ανεξάρτητη από τα αντικείμενα αξιωματικοποίηση, δεν ανάγεται δηλαδή η συνάρτηση στα αντικείμενα. Με τον τρόπο αυτό η κατηγορίες προσφέρονται για μια γνήσια έκφραση διαφόρων μεταβαλλόμενων αντικειμένων.

Παρ'όλο που η Συνολοθεωρία παίζει σοβαρό ρόλο στα Θεμέλια των Μαθηματικών, είναι ανάγκη να διατυπώσουμε με καθαρό και άμεσο τρόπο τις υπάρχουσες διαφορές με τη Θεωρία Κατηγοριών.

- Στη Συνολοθεωρία τα πάντα ανάγονται στην έννοια του συνόλου και της σχέσης του 'ανήκειν' $\in$. Έτσι η συνάρτηση, δυναμική έννοια στη βάση της, ανάγεται σε ένα «στατικό» σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Ο βασικός τρόπος 'σταθεροποίησης' κάθε μαθηματικού αντικειμένου είναι η ύπαρξη της σωρευτικής ιεραρχίας των συνόλων. Η κατάλληλη χρήση της έννοιας της τάξης (rank), μπορεί να εκφράσει με στατικό τρόπο κάθε μαθηματικό αντικείμενο, αρκεί να θεωρήσουμε επαρκώς μεγάλη τάξη. Ο τρόπος αυτός δίνει στο σύμπαν των συνόλων μια στατική και απόλυτη χροιά.

- Στη συνολοθεωρία δύο σύνολα είναι ίσα αν έχουν τα ίδια στοιχεία. (Αξίωμα της Έκτασης). Αντίθετα τα αντικείμενα σε μια κατηγορία καθορίζονται συνήθως μέχρις ισομορφισμού, μέσα από καθολικές ιδιότητες και κατασκευές. Το αντικείμενο, με κάποια έννοια, δεν καθορίζεται με το τι ‘περιέχει’, αλλά με διαλεκτικό-ολιστικό τρόπο, με τις αλληλεπίδράσεις του δηλαδή με τα άλλα αντικείμενα.

- Τα αντικείμενα των κατηγοριών είναι συνήθως δομές, το δε γράφημα της κατηγορίας, καθορίζει ένα μη-καλώς θεμελιωμένο σύνολο.

Μια κάπως διαφορετική στη σύλληψη, σύγκριση μεταξύ των αναλογιών μεταξύ Συνολοθεωρίας και Θεωρίας Κατηγοριών, προέρχεται από την πρόσφατη και με λαμπρό μέλλον ιδεά της ‘κατηγοριοποίησης’ (categorification) βλ. [102, 103] απ’ όπου και ο πιο κάτω πίνακας:

ΣΥΝΟΛΑ	**ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ**
• στοιχεία	• αντικείμενα
• εξισώσεις μεταξύ στοιχείων	• ισομορφισμοί μεταξύ αντικειμένων
• σύνολα	• κατηγορίες
• συναρτήσεις	• συναρτητές
• εξισώσεις μεταξύ συναρτήσεων	• φυσικοί ισομορφισμοί μεταξύ συναρτητών

Ένα παράδειγμα κατηγοριοποίησης είναι η κατηγοριοποίηση της έννοιας της ομάδας, η οποία δίνει αυτό που ονομάζεται **‘ομαδική κατηγορία’** (groupal category). Μια ομάδα είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με συναρτήσεις $m : G \times G \longrightarrow G, e : 1 \longrightarrow G, \mathrm{inv} : G \longrightarrow G$ έτσι ώστε να έχουμε τις γνωστές ιδιότητες. Κατηγοριοποιώντας την έννοια αυτή παίρνουμε: Μια ‘ομαδική κατηγορία’ είναι μια κατηγορία $\mathscr{C}_G$ εφοδιασμένη με συναρτητές, $m : \mathscr{C}_G \times \mathscr{C}_G \longrightarrow \mathscr{C}_G, \quad e : 1 \longrightarrow \mathscr{C}_G$ και $\mathrm{inv} : \mathscr{C}_G \longrightarrow \mathscr{C}_G$ που ικανοποιούν τις κατάλληλες ιδιότητες. (Ποιές κατά τη γνώμη σας;) Όμοια η **‘μονοειδής κατηγορία’** $\langle \mathscr{C}_M, \otimes, e \rangle$ είναι η κατηγοριοποίηση του μονοειδούς $\langle M, \otimes, e \rangle$. Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά ότι από τις ‘σταθερές’ δομές μεταβαίνουμε μέσω των κατηγοριών σε ‘μεταβαλλόμενες δομές’! Έτσι έχουμε το ακόλουθο,

> **Μεταβολή vs. σταθερότητα.** *«το κεντρικό χαρακτηριστικό της Θεωρίας Κατηγοριών είναι η ‘μεταβολή’ και η ‘αλληλεπίδραση’»*

Μεταβολή εμφανίζεται στα ‘μεταβαλλόμενα στοιχεία’, και στις ‘γενικευμένες ιδιότητες’, και τελικά, στις ‘μεταβαλλόμενες δομές’, ‘μεταβαλλόμενες γεωμετρικές μορφές’, στα ‘συνεχώς μεταβαλλόμενα σύνολα’ κ.λπ.

Τα βασικά συστατικά μιας κατηγορίας είναι οι έννοιες:

- ‘αντικείμενο’,
- ‘βέλος’ ή ‘μορφισμός’,

- Οι συναρτήσεις $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$, που σε κάθε βέλος f απονέμουν το πεδίο ($\mathrm{dom}(f)$) και το συν-πεδίο ορισμού ($\mathrm{cod}(f)$),
- Η συνάρτηση όπου σε κάθε αντικείμενο A αντιστοιχεί ένα μοναδικό ταυτοτικό βέλος $1_A \equiv \mathrm{id}_A$ και
- η μερική διμελής πράξη όπου σε κάθε συνθέσιμο ζεύγος βελών (f, g) αντιστοιχεί τη σύνθεσή τους $g \circ f$.

Αν θέλουμε η κατηγορίες να αποτελέσουν ένα καλό θεμέλιο για τα μαθηματικά θα πρέπει να μπορούμε να εκφράσουμε με τις παραπάνω αρχικές έννοιες, όλα όσα εκφράζουμε στην συνολοθεωρία με την σχέση του ανήκειν ($\in$). Αυτό στην πραγματικότητα γίνεται, και μάλιστα με τη νέα 'γλώσσα' μπορούμε να εκφράζουμε και πράγματα που δεν ήταν δυνατόν να εκφρασθούν στην συνολοθεωρία. Τέτοια χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι, η σύγχρονη Αλγεβρική Γεωμετρία και η Ομολογιακή Άλγεβρα.

Η έννοια της κατηγορίας προκύπτει σαν μια υποπερίπτωση της έννοιας του κατευθυνόμενου γραφήματος και ιδιαίτερα του 'παραγωγικού συστήματος συμπερασμού' (deductive system) βλ. [129, σελ. 5].

2.1.1 Ορισμός. Μια **κατηγορία** είναι ένα σύστημα,

$$\mathscr{C} \equiv \langle \mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathrm{dom}(\cdot), \mathrm{cod}(\cdot), \circ, 1_{(\cdot)} \rangle$$

όπου $\langle \mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1, \mathrm{dom}(\cdot), \mathrm{cod}(\cdot) \rangle$ είναι το υποκείμενο προσανατολισμένο γράφημα, συμβ. $U(\mathscr{C})$, τα δε στοιχεία του γραφήματος ερμηνεύονται ως ακολούθως:

(i) $\mathscr{C}_0$ είναι μια κλάση, τα στοιχεία της οποίας αποτελούν τους 'κόμβους' του γραφήματος που εδώ θα τους ονομάζουμε απλά, **αντικείμενα της κατηγορίας $\mathscr{C}$.**

(ii) $\mathscr{C}_1$ είναι μια κλάση[1], τα στοιχεία της οποίας αποτελούν τα βέλη ή τις

[1] Γενικά στη Θεωρία Κατηγοριών, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την απλοϊκή (naive) συνολοθεωρία, χωρίς αναγκαία να κάνουμε χρήση αξιωματικών συνολοθεωριών. Η απλοϊκή συνολοθεωρία ανήκει στην τομή όλων των προσπαθειών θεμελίωσης των μαθηματικών, π.χ. Αξιωματικές Συνολοθεωρητικές θεμελιώσεις, γραφοθεωρητικές και Κατηγορικές θεμελιώσεις, κ.λπ. Η χρήση λοιπόν απλοϊκών συνολοθεωρητικών εννοιών στις κατηγορίες, δεν σημαίνει ότι οι κατηγορίες ανάγονται στη συνολοθεωρία! Αλλά ακόμη και αυτό αν δεχθούμε, πάλι η κλασσική συνολοθεωρία θα αδυνατεί να εκφράσει καταστάσεις της Αλγεβρικής Γεωμετρίας και της Αλγεβρικής Τοπολογίας, εκτός και αν χρησιμοποιήσει Θεωρία Δραγμάτων (Sheaf Theory). Τότε όμως είμαστε στο 'έδαφος' της Θεωρίας Κατηγοριών και Τόπων. Συνοψίζοντας λοιπόν, οι κλάσεις όπως χρησιμοποιούνται εδώ, ανήκουν στην απλοϊκή συνολοθεωρία, και σας τέτοιες είναι εφοδιασμένες με μια προ-αξιωματική έννοια ισότητας. Αυτή είναι η έννοια της ισότητας που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε τα αξιώματα της κατηγορίας, αλλά και άλλες έννοιες 'συνόλων' και κυρίως η σχέση του 'ανήκειν' $\in$, που εμφανίζεται εδώ και εκεί. Από την άλλη μεριά η προσπάθεια για μια ελεύθερη συνολοθεωρίας θεμελίωση της Θεωρίας Κατηγοριών, πάλι ανήκει στις ακραίες τάσεις που εμφανίζονται από καιρού είς καιρόν. Εδώ περισσότερο θέλουμε να συνειδητοποιήσουμε τις αδυναμίες «της συνολοθεωρητικής στατικής εκφραστικότητας» και να εισάγουμε τις αναγκαίες γενικεύσεις που θα μας επιτρέψουν να εκφραζόμαστε περισσότερο εννοιολογικά-συνθετικά, αλλά και ποιό παραγωγικά, βλ. και τα [109, 141] για σχετικό προβληματισμό.

ακμές του γραφήματος, που εδώ θα τα ονομάζουμε **βέλη ή μορφισμούς της κατηγορίας.**

(iii) $\mathrm{dom}(\cdot) : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0 \;/\!\!/\; f \mapsto \mathrm{dom}(f)$ πεδίο ορισμού και

(iv) $\mathrm{cod}(\cdot) : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0 \;/\!\!/\; f \mapsto \mathrm{cod}(f)$ συν-πεδίο ορισμού.

Επί πλέον αν ορίσουμε την κλάση των συνθέσιμων βελών ή της τροχιές του γραφήματος $\mathscr{C}$ μήκους 2 ως,

$$\mathscr{C}_2 := \{(f,g) \in \mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_1 \,|\, \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)\}$$

έχουμε τις ακόλουθες δύο συναρτήσεις:

$$\begin{array}{rcl} \circ\ :\mathscr{C}_2 & \longrightarrow & \mathscr{C}_1 \\ (f,g) & \mapsto & g\circ f \end{array} \quad \text{(μερική διμελ. πράξη)} \quad \text{και} \quad \begin{array}{rcl} 1_{(\cdot)}\ :\mathscr{C}_0 & \longrightarrow & \mathscr{C}_1 \\ A & \mapsto & 1_A \end{array}$$

που ικανοποιούν τα ακόλουθα γενικευμένα αξιώματα του μονοειδούς[2]:

(i) $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$, εφ' όσον οι δύο πλευρές ορίζονται, ή με διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] \arrow[drr, dashed] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\ & C \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

Σημειώστε ότι ο συμβολισμός $f;g \equiv g\circ f$ συνηθίζεται στην Θεωρητική Πληροφορική.

[2]Το μονοειδές είναι απλά μια κατηγορία με ένα αντικείμενο. Έτσι μια κατηγορία είναι ένα είδος οικογένειας ή κλάσης μονοειδών. Σχετικό είναι και ακόλουθο απόσπασμα απο το [107] το οποίο αποτελεί μια εξαιρετική εισαγωγή και σχολιασμό για τη θεμελιακή αξία της Θεωρίας των Κατηγοριών: «Μπορεί κανείς να ισχυρισθεί ότι η σχέση της Θεωρίας των Κατηγοριών με την Αφηρημένη Άλγεβρα είναι ίδια με τη σχέση της τελευταίας με τη Στοιχειώδη Άλγεβρα. Γιατί η Στοιχειώδης Άλγεβρα είναι αποτέλεσμα της αντικατάστασης σταθερών ποσοτήτων (δηλαδή των αριθμών) από μεταβλητές, διατηρώντας τις πράξεις σ' αυτές τις ποσότητες σταθερές. Η Αφηρημένη Άλγεβρα, με τη σειρά της, τα μεταφέρει αυτά ένα βήμα πιο πέρα, επιτρέποντας στις πράξεις να μεταβάλλονται, ενώ ταυτόχρονα διασφαλίζεται ότι οι προκύπτουσες μαθηματικές δομές διατηρούν μία προκαθορισμένη μορφή (ομάδες, δακτύλιοι ή οτιδήποτε έχετε). Τελικώς, η Θεωρία Κατηγοριών επιτρέπει ακόμη και τη μορφή των δομών να μεταβάλλεται, παρέχοντας έτσι μία γενική Θεωρία Μαθηματικών Δομών ή Μορφών. Έτσι, η γένεση της θεωρίας των κατηγοριών είναι μία στιγμή της διαλεκτικής διαδικασίας αντικατάστασης του σταθερού από το μεταβαλλόμενο, ένα θέμα πού θα παίξει σημαντικό ρόλο σε ό,τι πρέπει να πούμε εδώ.»

(ii) $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$, για κάθε βέλος $f : A \longrightarrow B$ ή με διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "1_A"'] \arrow[dr, dashed, "f = f\circ 1_A"] & \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "1_B \circ f = f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\ & B \end{tikzcd}$$

(iii) Επί πλέον απαιτούμε να ισχύουν τα:

(a) $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f), \quad \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$

(b) $\mathrm{dom}(1_A) = \mathrm{cod}(1_A)$

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα δεδομένα μια κατηγορίας με το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}_2 \arrow[r, "\circ"] & \mathscr{C}_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{dom}"'] & \mathscr{C}_0 \arrow[l, "1_{(\cdot)}"' description] \end{tikzcd}$$

και την ουσία της Θεωρίας Κατηγοριών στο ακόλουθο σλόγκαν[3], βλ. [120], από την οποία εργασία θα παίρνουμε και άλλα παρόμοια σλόγκαν ή 'δόγματα' όπως τα αποκαλεί ο Goguen.

> **Κατηγορίες.** *«Σε κάθε είδος μαθηματικής δομής αντιστοιχεί μια κατηγορία τα αντικείμενα της οποίας έχουν αυτή τη δομή, οι δε μορφισμοί της διατηρούν τη συγκεκριμένη αυτή δομή.»*

2.1.2 Ασκήσεις. Να δειχθεί ότι το ταυτοτικό βέλος 1_A είναι το μοναδικό βέλος με τις ιδιότητες, $\mathrm{dom}(1_A) = \mathrm{cod}(1_A) = A$ και $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$ για κάθε βέλος $f : A \longrightarrow B$

2.1.3 Παρατήρηση. **(i)** Έχουμε χρησιμοποιήσει το συμβολισμό $\mathscr{C}_0$ για τα αντικείμενα της κατηγορίας, υποδηλώνοντας έτσι ότι η κλάση $\mathscr{C}_0$ αποτελεί το μέρος της κατηγορίας διαστάσεως μηδέν, ενώ η κλάση $\mathscr{C}_1$ των βελών ή μορφισμών της κατηγορίας, αποτελεί το μέρος της κατηγορίας διαστάσεως ένα. Όμοια τώρα το $\mathscr{C}_2$ είναι το διδιάστατο μέρος της κατηγορίας και γενικότερα, αν $\bar{f} := (f_1, f_2, \ldots, f_k)$, τότε η κλάση,

$$\mathscr{C}_k := \{\bar{f} \in \mathscr{C}_1^k \,|\, \mathrm{cod}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2), \ldots, \mathrm{cod}(f_{k-1}) = \mathrm{dom}(f_k)\,\}$$

[3] Τα σλογκανς είναι βασικές εννοιολογικές αρχές-οδηγίες, που βοηθούν κατά την εξερεύνηση του 'άγνωστου εδάφους' που λέγεται 'κατηγορίες'. Η συνήθεια αυτή μάλλον οφείλεται στον Bill Lawvere, βλ. και [120, 129].

αποτελεί το k-διάστατο μέρος της κατηγορίας. Η πεπερασμένη ακολουθία $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ λέγεται και '**k-διαδρομή ή τροχιά**' από το αντικείμενο $\mathrm{dom}(f_1)$ στο αντικείμενο $\mathrm{cod}(f_k)$. Όπως και στα γραφήματα οι δυνατές διαδρομές μιας κατηγορίας δίνουν στην κατηγορία ένα είδος 'γεωμετρικής μορφής'.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$\mathrm{Hom}(A, B) \equiv \mathscr{C}(A, B) := \{ f \in \mathscr{C}_1 \mid \mathrm{dom}(f) = A, \mathrm{cod}(f) = B \}$$

Είναι φανερό τότε ότι,

$$\mathscr{C}_1 = \bigsqcup_{(A,B) \in \mathscr{C}_0 \times \mathscr{C}_0} \mathrm{Hom}(A, B).$$

Η ξένη ένωση $\bigsqcup$ σηματοδοτεί ότι τα $\mathrm{Hom}(A, B)$ είναι ξένα μεταξύ τους, για διαφορετικά A, B.

(ii) Θα πρέπει ίσως εδώ να σχολιάσουμε και να αντιπαραθέσουμε την 'δομή' της κατηγορίας με τις συνολοθεωρητικές δομές. Μια γενική συνολοθεωρητική δομή, είναι ένα σύστημα $\langle A, \mathscr{F}, \mathscr{R}, \mathscr{C} \rangle$, όπου το A είναι ένα μηκενό σύνολο, $\mathscr{F}$ είναι μια οικογένεια πράξεων επί του A, $\mathscr{R}$ είναι μια οικογένεια σχέσεων επί του A, και $\mathscr{C}$ είναι μια οικογένεια διακεκριμένων σταθερών. Ένα απλό γράφημα είναι στην ουσία ίσως η απλούστερη συνολοθεωρητική δομή, $\langle A, R \rangle$, αφού αποτελείται από ένα μη-κενό σύνολο A, τις 'κορυφές', και μια διμελή σχέση επί του A, τις 'ακμές'. Το πλειογράφημα επιτρέπει πολλαπλές ακμές μεταξύ δύο κορυφών, το οποίο εκφράζεται με τις δύο συναρτήσεις της 'αρχής' α και του 'τέλους' τ. Οι συναρτήσεις αυτές μετα δυσκολίας θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως 'δράσεις' του R επί του A, $\alpha : R \times A^0 \longrightarrow A$, όπου $A^0 \equiv 1 := \{\emptyset\}$ και $R \times 1 \cong R$. Έτσι βλέπουμε ότι η συνολοθεωρητική έννοια της δομής, ήδη γενικεύεται με το να επιτρέπει στον οπλισμό της, και γενικές συναρτήσεις. Επίσης στις κατηγορίες τα σύνολα $\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1$ μπορούν να είναι κλάσεις και όχι σύνολα. Γενικά στις κατηγορίες ο τρόπος με τον οποίο τα αντικείμενα 'δομούνται' είναι περισσότερο 'ολιστικός', δηλαδή η δομή αναδύεται μέσα από τις αλληλεπιδράσεις του αντικειμένου, μέσω των βελών της κατηγορίας, με τα άλλα αντικείμενά της. Συμπερασματικά λοιπόν ο ρόλος της έννοιας της συνάρτησης και των βελών είναι κρίσιμος στο να αποδοθεί σε κάθε αντικείμενο η κατάλληλη 'μορφή' που θα του επιτρέπει 'μαθηματικές σχέσεις' με τα άλλα αντικείμενα στο 'κοινωνικό' περιβάλλον της κατηγορίας! Ιδιότητες που αποκτούν τα αντικείμενα με την αλληεπίδρασή τους με ΟΛΑ τα αντικείμενα της κατηγορίας, λέγονται και 'καθολικές ιδιότητες', αφού τέτοιες ιδιότητες αρχίζουν πάντα με τον ποσοδείκτη 'για κάθε' ($\forall$) και έχουν τη μορφή, «για κάθε...υπάρχει μοναδικό...τέτοιο ώστε...». Καταλήγουμε έτσι στο ακόλουθο σλόγκαν της Θεωρίας Κατηγοριών,

> **Καθολικές Ιδιότητες.** *«Η Θεωρία των Κατηγοριών είναι η μελέτη των καθολικών ιδιοτήτων και κατασκευών»*

(iii) Ο πιο πάνω ορισμός της κατηγορίας βασίζεται στη διάκριση δύο ειδών ή τύπων οντοτήτων: ‘τα αντικείμενα’ και τα ‘βέλη’.

Ωστόσο μέσω της συνάρτησης:

$$u : \mathscr{C}_0 \hookrightarrow \mathscr{C}_1 \;\; /\!\!/ \;\; A \mapsto 1_A$$

τα αντικείμενα εμφυτεύονται στην κλάση των βελών και επομένως μπορούν να ταυτισθούν με τα ταυτοτικά βέλη, ακριβώς όπως ταυτίζουμε ένα σύνολο A με την δείκτρια ή χαρακτηριστική συνάρτηση, I_A, ή ακόμη όπως ένας φυσικός ή ακέραιος αριθμός μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας πραγματικός αριθμός και αυτό λόγω της εμφύτευσης, $i : \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Έτσι λοιπόν αντί να έχουμε το, $\underset{A}{\bullet} \circlearrowright^{1_A}$ τώρα έχουμε απλά το βέλος $\circlearrowright^{1_A}$

Αυτή η ταύτιση δημιουργεί κάποια εννοιολογικά προβλήματα: Αν π.χ. $f \in \mathscr{C}_1$, πως θα πρέπει ορίσουμε τις συναρτήσεις,

$$\mathrm{dom} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0 \quad \text{και} \quad \mathrm{cod} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0$$

αφού τώρα δεν έχουμε στη διάθεσή μας την κλάση $\mathscr{C}_0$ αλλά ένα αντίγραφό της, την κλάση $\{\, 1_A \mid A \in \mathscr{C}_0\}$; Έχουμε όμως,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}_1 \arrow[r, "\mathrm{dom}"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{dom}' := u \circ \mathrm{dom}"] & \mathscr{C}_0 \arrow[r, hook, "u"'] & \mathscr{C}_1 \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} \mathscr{C}_1 \arrow[r, "\mathrm{cod}"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{cod}' := u \circ \mathrm{cod}"] & \mathscr{C}_0 \arrow[r, hook, "u"'] & \mathscr{C}_1 \end{tikzcd}$$

Έτσι λοιπόν αντί των συναρτήσεων $\mathrm{dom} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0$ και $\mathrm{cod} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_0$ τώρα έχουμε τις ισοδύναμες εκφράσεις,

$$\mathrm{dom}' : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_1 \quad \mathrm{cod}' : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_1$$

που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{dom}' \circ \mathrm{dom}' = \mathrm{dom}' & & \mathrm{dom}' = \mathrm{cod}' \circ \mathrm{dom}' \\ & (\text{ταυτοδυναμία}) \;\; \& & \\ \mathrm{cod}' \circ \mathrm{cod}' = \mathrm{cod}' & & \mathrm{cod}' = \mathrm{dom}' \circ \mathrm{cod}' \end{array}$$

Γράφοντας dom και cod αντί για dom′ και cod′ αντίστοιχα, καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό της κατηγορίας αποκλειστικά μέσω βελών.

2.1.4 Ορισμός. Μια κατηγορία $\mathscr{C}$ είναι μια δομή,

$$\mathscr{C} \equiv \langle \mathscr{C}_1; \mathrm{dom}, \mathrm{cod}; \circ \rangle$$

με,

$$\mathrm{dom} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_1, \quad \mathrm{cod} : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{C}_1, \quad \circ : \mathscr{C}_2 \longrightarrow \mathscr{C}_1$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\mathrm{dom} \circ \mathrm{dom} = \mathrm{dom} = \mathrm{cod} \circ \mathrm{dom}$ και $\mathrm{cod} \circ \mathrm{cod} = \mathrm{cod} = \mathrm{dom} \circ \mathrm{cod}$;

(ii) Αν $f, g \in \mathscr{C}_2$ τότε $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) \quad \& \quad \mathrm{cod}(g \circ f) = \mathrm{cod}(g)$;

(iii) Αν $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f) = f$ τότε $g \circ f = g$;

(iv) Αν $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f) = g$ τότε $g \circ f = f$;

(v) Αν $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f)$ και $\mathrm{dom}(h) = \mathrm{cod}(g)$ τότε $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

σημειώστε ότι οι **(iii)** και **(iv)** είναι μεταγραφή στο νέο συμβολισμό των σχέσεων $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$.

Μαζύ λοιπόν με τα αξιώματα εδώ έχουμε και κάποιες εννοιολογικές αρχές, που βοηθούν στην ενορατική κατανόηση των φορμαλιστικά εισαγόμενων εννοιών. Σ'αυτό το βιβλίο, επειδή δίδεται σοβαρός ρόλος στις εννοιολογικές αρχές και στην ενορατική και σε βάθος κατανόηση των μαθηματικών, οι εννοιολογικές αυτές αρχές έχουν ίσως ένα ισότιμο βάρος με τα αξιώματα!

Αξίζει ακόμη να σημειώσουμε ότι ένα σύνολο ορίζεται από το 'περιεχομενό' του, μέσω του 'Αξιώματος της Εκτάσης', ενώ στις κατηγορίες ένα αντικείμενο καθορίζεται αν γνωρίζουμε ή τα εισερχόμενα σ'αυτό βέλη ή τα εξερχόμενα, όπως θα δούμε στη συνέχεια όταν εξετάσουμε το Λήμμα του Yoneda, και ο καθορισμός αυτός γίνεται μέχρις ισομορφίας. Δηλαδή το αντικείμενο καθορίζεται 'εξωτερικά' από τις αλληεπιδράσεις του με το περιβάλλον του, παρά συγκροτείται από μια εσωτερική αναγκαιότητα. Ο καθολικός τρόπος καθορισμού ενός αντικειμένου, γίνεται 'μέχρις ισομορφίας', δεν έχουμε δηλαδή 'ισότητα αντικειμένων' αλλα ισομορφικά αντικείμενα, σε αντίθεση με την πρακτική που ακολουθείται στη συνολοθεωρία με το Αξίωμα Έκτασης.

2.1.5 Ορισμός. Δύο αντικείμενα $A, B \in \mathscr{C}_0$ θα λέγονται **ισομορφικά**, συμβολικά, $A \cong B$ ανν υπάρχουν βέλη, $A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$ με $g \circ f = 1_A$ και $f \circ g = 1_B$. Το βέλος f λέγεται αντίστροφο του g και το g αντίστροφο του f.

'Ετσι το βέλος $f : A \longrightarrow B$ είναι ισομορφισμός ανν είναι μια αμφίρριψη επί των γενικευμένων στοιχείων, $x \in^T A$ και $y \in^T B$, ακριβέστερα έχουμε, $x \in^T A \Leftrightarrow f(x) \in^T B$.

2.1.6 Πρόταση. *Αν το βέλος $f : A \longrightarrow B$ έχει αντίστροφο βέλος, τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδ. Ας υποθέσουμε ότι το f έχει δύο αντίστροφα βέλη, τα $g, g' : B \longrightarrow A$. Από τον ορισμό έχουμε, $g \circ f = g' \circ f = 1_A$ και $f \circ g = f \circ g' = 1_B$. Αλλά τότε,

$$g = g \circ 1_B = g \circ (f \circ g') = g \circ g) \circ g' = 1_A \circ g' = g' \qquad \dashv$$

Από την παραπάνω Πρόταση, όταν ένα βέλος έχει αντίστροφο, συμβολίζουμε, το μοναδικό αυτό αντίστροφο βέλος με f^{-1} και βεβαίως το f είναι αντίστροφο του f^{-1}, δηλ. $(f^{-1})^{-1} = f$.

Ισομορφικά Αντικείμενα. *Δυο αντικείμενα έχουν την ίδια δομή ανν είναι ισομορφικά, και ένα 'αφηρημένο αντικείμενο' είναι μια ισομορφική κλάση αντικειμένων.*

Τα ισομορφικά αντικείμενα είναι στην ουσία αδιάκριτα από την άποψη της μορφής ή δομής τους. Είναι κοινή πρακτική όταν ορίζουμε μια δομή, να ορίζουμε ταυτόχρονα και πότε τα στοιχεία της δομής είναι ίσα ή ισομορφικά.

Σχετικό με τα ισομορφικά αντικείμενα, αλλά και το γεγονός ότι το Λήμμα του Yoneda αποτελεί γενικευσή του βλ. σελ. 80, είναι και το **Θεώρημα Αναπαράστασης του Cayley** για ομάδες, που θα εκθέσουμε στη συνέχεια.

2.1.7 Ορισμός. Έστω X ένα τυχόν σύνολο. Τότε το σύνολο,

$$\mathrm{Aut}(X) := \{\, f \in X^X \mid f \quad \text{είναι μια αμφίρριψη} \,\} \equiv \mathsf{Sym}(X)$$

θα λέγεται σύνολο **αυτομορφισμών** ή **συμμετριών** επί του X.

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η δομή $\mathbf{Aut}(X) \equiv \langle \mathrm{Aut}(X), \circ, 1_X \rangle$ είναι μια ομάδα. Μια **ομάδα μεταθέσεων** είναι ένα υποσύνολο $G \subseteq \mathrm{Aut}(X)$, που είναι υπο-ομάδα της $\mathbf{Aut}(X)$.

2.1.8 Θεώρημα. **(Αναπαράστασης του Cayley)** *Κάθε ομάδα $\langle G, *, e \rangle$ είναι ισομορφική με μια ομάδα μεταθέσεων.*

Απόδ. Θεωρούμε την δράση της ομάδας G πάνω στον εαυτό της, δηλαδή, εκφράζουμε την πράξη, $* : G \times G \longrightarrow G$ ως, μια δράση,

$$\alpha : G \longrightarrow G^G \;\;/\!\!/\;\; g \mapsto h_g \quad \text{με} \quad h_g : G \to G \;\;/\!\!/\;\; x \mapsto h_g(x) := g * x$$

δηλαδή h_g είναι μια τροχιά μέσα στο G. Θα δείξουμε ότι οι τροχιές αυτές είναι αμφιρρίψεις.

Πράγματι, είναι ενρίψεις αφού,

$$h_g(x) = h_g(y) \;\Rightarrow\; g * x = g * y \;\Rightarrow\; g^{-1} * (g * x) = g^{-1} * (g * y) \;\Rightarrow\; x = y.$$

Επίσης κάθε h_g είναι επιρριπτική, γιατί αν $z \in G$ τότε,

$$h_g(g^{-1} * z) := g * g^{-1} * z = z$$

έτσι το στοιχείο $g^{-1} * z$ είναι το στοιχείο που απεικονίζεται στο z. Άρα τελικά $h_g \in \mathrm{Aut}(G), \quad g \in G$. Έστω τώρα,

$$\bar{G} := \{\, h_g \,|\, g \in G \,\} \subseteq \mathrm{Aut}(G)$$

Για να είναι η $\bar{G}$ υποομάδα της $\mathbf{Aut}(G)$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $g_1, g_2 \in G, \quad h_g * (h_g)^{-1} \in G$.

Πρώτα θα δείξουμε ότι $h_g^{-1} = h_{g^{-1}}$. Πράγματι η συνάρτηση $h_{g^{-1}} := g^{-1} * x$ είναι αντίστροφη της h_g, αφού,

$$\begin{aligned} h_g \circ h_g^{-1}(x) &= h_g(h_g^{-1}(x)) \\ &= h_g(g^{-1} * x) \\ &= g * (g^{-1} * x) \\ &= (g * g^{-1}) * x \\ &= e * x \\ &= x \end{aligned}$$

Άρα $h_g \circ h_{g^{-1}} = 1_G$, ομοίως $h_{g^{-1}} \circ h_g = 1_G$. Άρα $h_{g^{-1}} = h_g^{-1}$.

Έτσι,

$$\begin{aligned} h_{g_1} \circ h_{g_2}(x) &= h_{g_1}(h_{g_2}(x)) \\ &= h_{g_1}(g_2^{-1} * x) \\ &= (g_1 * g_2) * x \\ &= h_{g_1 * g_2^{-1}}(x) \end{aligned}$$

Επειδή δε το $g_1 * g_2 \in G$ σημαίνει ότι $h_{g_1 * g_2^{-1}} \in \bar{G}$.

Τέλος αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση, $\lambda : G \longrightarrow \bar{G} \;/\!\!/\; g \mapsto h_g$ τότε η λ είναι ισομορφισμός ομάδων αφού εύκολα κανείς συνάγει ότι, $\lambda \circ \lambda^{-1} = 1_{\bar{G}}$ και $\lambda^{-1} \circ \lambda = 1_{\bar{G}}$. ⊣∎

2.2 Παραδείγματα

(i) Ο ακόλουθος πίνακας περιέχει αρκετά παραδείγματα κατηγοριών. Ο συνεπής αναγνώστης θα πρέπει να ελέγξει κατά πόσο πράγματι αποτελούν κατηγορίες.

Κατηγ. $\mathscr{C}$	$\mathscr{C}_0$: αντικείμενα	$\mathscr{C}_1$: βέλη
Set	σύνολα	συναρτήσεις
FinSets	πεπερασμένα σύνολα	συναρτήσεις
Mon	μονοειδή	ομομορφισμοί μονοειδών
Poset	μ.δ.σ.	συναρτήσεις που διατηρούν τη διάταξη
Grp	ομάδες	ομομορφισμοί ομάδων
Vect	διανυσματικοί χώροι	γραμμικές συναρτήσεις

Top	τοπολογικοί χώροι	συνεχείς συναρτήσεις
Met	μετρικοί χώροι	συναρτήσεις συστολής
Meas	μετρήσιμοι χώροι	μετρήσιμες συναρτήσεις
$\mathscr{C}(\mathbf{P}, \leq_{\mathbf{P}})$	τα στοιχεία του μ.δ.σ. P	$x \to y$ ανν $x \leq y$
$\mathscr{C}(\mathbf{M}, *, \mathbf{e})$	ένα μοναδικό αντικείμενο, που για ομοιομορφία μπορούμε να το πάρουμε ίσο με το M	τα βέλη είναι τα στοιχεία του μονοειδούς

(ii) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια γλώσσα πρώτης τάξης με συγκεκριμένο μηλογικό οπλισμό. Τότε αν για αντικείμενα πάρουμε τους καλοσχηματισμένους τύπους της γλώσσας και στη συνέχεια ορίσουμε τη μερική διάταξη,

$$\varphi \leq \psi \quad \text{ανν} \quad \varphi \vdash \psi$$

δηλαδή υπάρχει απόδειξη από τον τύπο φ στον τύπο ψ, τότε έχουμε ένα μ.δ.σ. το οποίο όταν το παρουσιάσουμε ως κατηγορία, παίρνοντας ως αντικείμενα τα στοιχεία του μ.δ.σ. και ως βέλη το μοναδικό, όταν υπάρχει,

$$\varphi \to \psi \Leftrightarrow \varphi \vdash \psi.$$

Είναι φανερό ότι για κάθε τύπο φ, έχουμε $\varphi \vdash \varphi$. έτσι εξασφαλίζουμε τους ταυτοτικούς μορφισμούς για κάθε φ. Η σύνθεση των μορφισμών είναι απλά ο κανόνας modus ponens:

$$\varphi \vdash \psi \quad \& \quad \psi \vdash \omega \Rightarrow \varphi \vdash \omega$$

Γενικότερα η πιό πάνω ερμηνεία μεταφέρεται και σε τυχούσες κατηγορίες, βλ. π.χ. [129]. Μπορούμε να θεωρούμε τα αντικείμενα μιας κατηγορίας ως προτάσεις και τους μορφισμούς $f : A \longrightarrow B$, ως αποδείξεις της πρότασης B από την A. Υπάρχει τότε η ταυτοτική απόδειξη $1_A : A \longrightarrow A$ και οι αποδείξεις συντίθεται (modus ponens). Η ισότητα δηλώνει ότι κάποιες αποδείξεις θεωρούνται ισοδύναμες.

2.3 Συναρτητές, Φυσικοί Μετασχηματισμοί και Υποκατηγορίες.

Από τα μαθήματα της άλγεβρας γνωρίζουμε ότι ένα συνηθισμένο πρόγραμμα κατά την εξέταση μιας δομής, είναι να καθορίσουμε τι σημαίνει ομομορφισμός, ισομορφισμός, αυτομορφισμοί, κ.λπ. και τι σημαίνει υποδομή. Μάλιστα στις κατηγορίες ισχύει κάτι παρισσότερο, που εκφράζεται από το ακόλουθο σλόγκαν:

> **«Αφού οι ιδιότητες αλλά και η ταυτότητα των αντικειμένων, επάγονται ολιστικά από την αλληεπίδραση του αντικειμένου με τα άλλα αντικείμενα μέσω των βελών (καθολικές ιδιότητες), τότε για τη Θεωρία Κατηγοριών, τα μορφοποιούντα βέλη είναι σπουδαιότερης σημασίας από τα αντικείμενα!»**

Επειδή όμως μια κατηγορία είναι ένα προσανατολισμένο γράφημα, είναι φανερό ότι η έννοια του ομομορφισμού γραφημάτων μεταφέρεται και στις κατηγορίες. ΄Εστω $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ δύο κατηγορίες. ΄Ενας 'κατηγορικός ομομορφισμός' θα πρέπει να είναι μια συνάρτηση μεταξύ των κατηγοριών που διατηρεί την κατηγορική δομή, διατηρεί δηλαδή, τα ταυτοτικά βέλη, τα dom, cod και τις συνθέσεις. Επειδή δε κάθε κατηγορία έχει ένα υποκείμενο γράφημα $U(\mathscr{C})$, βλέπουμε ότι η έννοια του ομομορφισμού γραφημάτων, εξειδικεύεται στις κατηγορίες, και εδώ τον ομομοορφισμό αυτόν θα τον ονομάζουμε **συναρτητή.** Συνοψίζοντας έχουμε τον ακόλουθο ορισμό,

2.3.1 Ορισμός. ΄Εστω $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ δύο κατηγορίες. ΄Ενας **συναρτητής** $F \equiv (F_0, F_1)$ απαρτίζεται από ένα ζεύγος απεικονίσεων:

$$\begin{array}{rcl} F_0 : \mathscr{C}_0 & \longrightarrow & \mathscr{D}_0, \\ A & \mapsto & F_0(A) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F_1 : \mathscr{C}_1 & \longrightarrow & \mathscr{D}_1 \\ f & \mapsto & F_1(f) \end{array}$$

τέτοιων ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες,

(i) $F_1(1_A) = 1_{F_0(A)}$ ή και $F(1_A) = 1_{F(A)}$

(ii) $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(f)$ ή και $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

που παρουσιάζονται στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[loop above, "1_A"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"] & \\ B \arrow[rr, "g"'] & & C \end{tikzcd} \quad \xrightarrow{F} \quad \begin{tikzcd} & F_0(A) \arrow[loop above, "F_1(1_A)=1_{F_0(A)}"] \arrow[dl, "F_1(f)"'] \arrow[dr, dashed, "F_1(g \circ f)=F_1(g) \circ F_1(g)"] & \\ F_0(B) \arrow[rr, "F_1(g)"'] & & F_0(C) \end{tikzcd}$$

΄Ετσι ο συναρτητής διατηρεί τα ταυτοτικά βέλη, $F_1(1_A) = 1_{F_0(A)}$ και τα συνθέσιμα βέλη, $F_1(g \circ f) = F_1(g) \circ F_1(g)$, και επομένως την κατηγορική δομή. Στη συνέχεια θα γράφουμε F και για το F_0 και για το F_1. Επίσης χρησιμοποιούμε τον ισοδύναμο συμβολισμό, FA αντί του $F(A)$ και Ff αντί του $F(f)$. Με τη χρήση γενικευμένων στοιχείων βλ. σελ. 77 και σελ. 35, το ταυτοτικό βέλος $1_A : A \to A$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα 'γενικό στοιχείο' του A χωρίς ιδιαίτερες ιδιότητες. ΄Ενας συναρτητής λοιπόν διατηρεί τα γενικά στοιχεία και διατηρεί την έννοια της συνάρτησης επί των γενικευμένων στοιχείων, δηλαδή αν, $x \in^T A \Rightarrow f \circ x \in^T B$ τότε $F(x) \in^{F(T)} F(A) \Rightarrow F(f) \circ F(x) \in^{F(T)} F(B)$. Με την έννοια αυτή δικαίως λέγεται ο F 'συναρτητής'.

Τα πιό πάνω μπορούμε να τα συνοψίσουμε με τον ακόλουθο συμπαγή τρόπο. Απαιτούμε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_2 \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "F_2"'] & \mathscr{C}_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{dom}"'] \arrow[d, "F_1"'] & \mathscr{C}_0 \arrow[l, "1_{(\cdot)}" description] \arrow[d, "F_0"] \\
\mathscr{D}_2 \arrow[r, "\circ"'] & \mathscr{D}_1 \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{dom}"'] & \mathscr{D}_0 \arrow[l, "1_{(\cdot)}" description]
\end{tikzcd}$$

Όπου $F_2 : \mathscr{C}_2 \longrightarrow \mathscr{D}_2 \;/\!\!/\; (f, g) \mapsto (F_1(f), F_1(g))$.

2.3.2 Παραδείγματα. 1. Έστω η κατηγορική συνάρτηση U : **Top** $\longrightarrow$ **Set** όπου για κάθε τοπολογικό χώρο $\mathbf{X} \equiv \langle X, \tau \rangle$, $U(\mathbf{X}) := X$ (ο υποκείμενος φορέας της δομής). Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η κατηγορική συνάρτηση αυτή είναι ένας συναρτητής. Θα ονομάζουμε τέτοιους συναρτητές **επιλήσμονες** (forgetful), γιατί 'ξεχνούν' τη δομή. Άλλα τέτοια παραδείγματα είναι, U : **Grp** $\longrightarrow$ **Set**, U : **Pos** $\longrightarrow$ **Set**, κ.λπ. Δείξτε ότι πράγματι είναι συναρτητές.

2. **Ελεύθερος Συναρτητής.** Ας πάρουμε ένα βασικό παράδειγμα. Έστω ένα μη-κενό σύνολο X, θεωρούμενο ως αλφάβητο, και έστω το επαγόμενο μονοειδές $\langle X^*, \circ \rangle$ όπου X^* είναι η κλειστότητα του Kleene, και $\circ$ είναι η πράξη της παράθεσης. Τότε ο συναρτητής, F : **Set** $\longrightarrow$ **Mon** είναι ο **ελεύθερος συναρτητής μονοειδών.** Ελεύθεροι συναρτητές υπάρχουν για κάθε δομή, π.χ. αν X θεωρούμενη ως 'βάση' και $F(X)$ είναι όλοι οι τυπικοί γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων του X, τότε μπορούμε να έχουμε μια δομή διανυσματικού χώρου επί του $F(X)$. Δηλαδή ο **ελεύθερος συναρτητής διανυσματικών χώρων** είναι ο F : **Set** $\longrightarrow$ **Vect**.

3. Γιά κάθε κατηγορία $\mathscr{C}$, ο **ταυτοτικός συναρτητής**, $1_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$, είναι ο συναρτητής που αφήνει την κατηγορία ανέπαφη, $A \mapsto 1_{\mathscr{C}}(A) := A$ και $f \mapsto 1_{\mathscr{C}}(f) := f$.

4. Αν $\mathscr{D}$ είναι μια υποκατηγορία (βλ. στη συνέχεια) της $\mathscr{C}$, τότε ο **συναρτητής εμφύτευσης** $I : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ είναι η συνάρτηση, $\mathscr{D} \ni A \mapsto I(A) \in \mathscr{C}$ και $\mathscr{D} \ni f \mapsto I(f) \in \mathscr{C}$.

5. **Δυναμοσυναρτητές.** Οι δυναμοσυναρτητές είναι γνωστοί από τη συνολοθεωρία. έχουμε,

$$\begin{array}{rcl}
\mathscr{P}(\cdot) : \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\
A & \mapsto & \mathscr{P}(A) := \{X : X \subseteq A\} \\
f : A \to B & \mapsto & \mathscr{P}(f) : \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(B) \\
 & & \text{με} \quad \mathscr{P}(f) := f[\cdot] \quad \text{και} \quad f[X] := \{f(x) \,|\, x \in X\}
\end{array}$$

Πράγματι εδώ έχουμε: $\mathscr{P}(1_A) = 1_{\mathscr{P}(A)}$ και $\mathscr{P}(g \circ f) = \mathscr{P}(g) \circ \mathscr{P}(f)$. Ο συναρτητής αυτός είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής, διατηρεί δηλαδή τη φορά των βελών.

Ομοίως και για τον άλλο (ανταλλοίωτο) δυναμοσυναρτητή,

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}^{-1}(\cdot) : \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ A & \mapsto & \mathscr{P}^{-1}(A) := \{X : X \subseteq A\} = \mathscr{P}(A) \\ f : A \to B & \mapsto & \mathscr{P}^{-1}(f) : \mathscr{P}(B) \to \mathscr{P}(A) \\ & & \text{με} \quad \mathscr{P}^{-1}(f) := f^{-1}[\cdot] \\ & & \text{και} \quad f^{-1}[Y] := \{f^{-1}(y) \,|\, y \in Y \subseteq B\} \end{array}$$

Ο συναρτητής αυτός είναι ένας ανταλλοίωτος συναρτητής, αντιστρέφει δηλαδή τη φορά των βελών.

Η γενίκευση αυτών των συναρτητών, καθώς και το επόμενου εκθετικού συναρτητή, σε γενικές κατηγορίες, είναι από τους βασικούς στόχους της Θεωρίας Κατηγοριών. Τέτοιες γενικεύσεις οδηγούν αναπόφευκτα στην Θεωρία Τόπων.

6. **Ο Εκθετικός Συναρτητής.** Έστω T ένα τυχόν σύνολο[4]. Ορίζουμε,

$$\begin{array}{rcl} E_T(\cdot) \equiv (\cdot)^T : \mathbf{Set} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ X & \mapsto & E_T(X) := X^T \\ f : X \to Y & \mapsto & E_T(f) := f^T : X^T \to Y^T \\ & & \text{με} \quad f^T(\tau) := f \circ \tau \end{array}$$

Πράγματι ο E_T είναι συναρτητής αφού, $E_T(1_X) := (1_X)^T = 1_{X^T} = 1_{E_T(X)}$ και

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, dashed, "f \circ \tau := f^T(\tau)"] & \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} (g^T \circ f^T)(\tau) & = & g^T(f^T(\tau)) \\ & = & g^T(f \circ \tau) \\ & = & g \circ (f \circ \tau) \\ & = & (g \circ f) \circ \tau \\ & = & (g \circ f)^T(\tau) \end{array}$$

Άρα η συνάρτηση E_T είναι πράγματι συναρτητής. $\dashv$

Η κλάση $E_T(X)$ απαρτίζεται από όλα τα T-γενικευμένα στοιχεία του συνόλου X. Από τη άποψη αυτή είναι παρόμοιος με τον συναλλοίωτο Hom-συναρτητή. Εξετάστε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των δύο αυτών συναρτητών. Ο συναρτητής αυτός, γενικεύεται και σε άλλες, ειδικού τύπου, κατηγορίες.

[4] Χρησιμοποιούμε το γράμμα T για να μας θυμίζει 'time' (χρόνο).

7. **Οι Hom-συναρτητές.** Οι συναρτητές Hom είναι εξαιρετικής σημασίας για τη Θεωρία Κατηγοριών, αφού κάθε κατηγορία $\mathscr{C}$ 'απεικονίζεται' ή θεωρείται στο γνώριμο περιβάλλον της κατηγορίας **Set**. Το πολύ σπουδαίο Λήμμα του Yoneda, κάνει χρήση τέτοιων συναρτητών. Η βασική κεντρική έννοια των Hom-συναρτητών είναι ότι ασχολούνται με τα εισερχόμενα και εξερχόμενα βέλη σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο της κατηγορίας. Δηλαδή ασχολούνται με τα 'γενικευμένα στοιχεία' και τις 'γενικευμένες ιδιότητες'!. Επί πλέον οι Hom-συναρτητές μας επιτρέπουν να μεταφέρουμε, μέσω των αντιστοίχων 'ινών', έννοιες, δομές, και κατασκευές από από τη γνώριμη κατηγορία **Set** στην κατηγορία $\mathscr{C}$ πάνω στην οποία ορίζονται οι αναπαραστάσιμοι αυτοί συναρτητές.

   (i) (Συναλλοίωτοι) Hom-Συναρτητές. Έστω ένα τυχόν αλλά σταθερό αντικείμενο T μιάς τοπικά μικρής κατηγορίας $\mathscr{C}$. ($\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ είναι σύνολα για κάθε $X,Y \in \mathscr{C}_0$) Τότε,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,-) \equiv H^T(-) : \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ X & \mapsto & H^T(X) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,X) \\ f : X \to Y & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,f) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,Y) \\ & & \text{με} \quad H^T(f)(\tau) := f \circ \tau \equiv \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,f)(\tau) \end{array}$$

   Ιχνηλατείστε[5] (diagram chase) το ακόλουθο διάγραμμα για να διαπιστώσετε ότι έχουμε πράγματι έναν συναρτητή:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, dashed, "f \circ \tau := f^A(\tau)"] & \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Είναι φανερό ότι η κλάση των βελών $\mathrm{Hom}(T,X)$, αποτελείται από όλα τα εκτασιακά (λίστες, γεωμετρικά σχήματα, κ.λπ. στο X) T-γενικευμένα στοιχεία του X βλ. και το Εδάφιο 1.3.2 για μια ανάπτυξη των γενικευμένων στοιχείων και ιδιοτήτων. Τα εκτασιακά αυτά στοιχεία παρέχουν μια περαιτέρω δόμηση στο αντικείμενο X.

Για να δείξουμε ότι ο $\mathrm{Hom}(T,-)$ είναι πράγματι συναρτητής θα πρέπει να δείξουμε ότι,

$$\mathrm{Hom}(T, 1_X) = 1_{\mathrm{Hom}(T,X)},$$

και,

$$\mathrm{Hom}(T, g \circ f) = \mathrm{Hom}(T,g) \circ \mathrm{Hom}(T,f).$$

[5] Αφού τα αντιμεταθετικά διαγράμματα είναι ο τρόπος που οι κατηγορικοί εκφράζουν εξισώσεις, είναι φανερό ότι η ιχνηλάτηση δεν είναι τίποτε άλλο παρά η διαπίστωση ότι η 'εξίσωση' πράγματι ισχύει. Η ιχνηλάτηση είναι ένας βασικός τρόπος απόδειξης στις κατηγορίες.

Έστω ένα γενικευμένο στοιχείο, $x : T \longrightarrow X$ του X. Έχουμε,

$$\mathrm{Hom}(T, 1_X)(x) = 1_X \circ x = 1_{\mathrm{Hom}(T,X)}(x)$$

και,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(T, g\circ f)(x) &= (g\circ f)\circ x = \\ = g\circ(f\circ x) &= (\mathrm{Hom}(T,g)\circ \mathrm{Hom}(T,f))(x) \end{aligned}$$

Συναρτητές της μορφής, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,-) \equiv H^T(-) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$, λέγονται **συναλλοίωτοι αναπαραστάσιμοι συναρτητές** αφού ο συναρτητής $H^T(-)$ στη ουσία αναπαρίσταται από το αντικείμενο T.

Για κάθε αντικείμενο T υπάρχει ένας διακεκριμένος συναλλοίωτος Hom-συναρτητής, $\mathrm{Hom}(T,-)$, έτσι έχουμε μια οικογένεια συναρτητών,

$$(\mathrm{Hom}(T,-))_{T\in\mathscr{C}_0} \quad \text{ή} \quad \mathscr{C}_0 \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \;\; /\!\!/ \;\; T \mapsto \mathrm{Hom}(T,-).$$

(ii) Ανταλλοίωτοι Hom-Συναρτητές[6]**.** Έστω ένα τυχόν αλλά σταθερό αντικείμενο[7] V μιας τοπικά μικρής κατηγορίας $\mathscr{C}$. Τότε,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(-,V) \equiv H_V(-) : \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ X & \mapsto & H_V(X) := \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,V) \\ f : X \to Y & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f,V) : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,V) \\ & & \text{με} \quad H_V(f)(\tau) := \tau\circ f \equiv \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(f,V)(\tau) \end{array}$$

Ιχνηλατείστε το ακόλουθο διάγραμμα για να διαπιστώσετε ότι έχουμε πράγματι έναν συναρτητή:

$$\begin{tikzcd} Z & \\ X \arrow[u, dashed, "g\circ f"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "\tau\circ f"'] & Y \arrow[ul, "g"'] \arrow[d, "\tau"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Είναι φανερό ότι η κλάση των βελών $\mathrm{Hom}(X,V)$, αποτελείται από όλα τα V-εντασιακά στοιχεία $\equiv V$-γενικευμένες ιδιότητες του X, που αναδύονται από τη θεώρηση των εξερχομένων από το X βελών. Τα εντασιακά αυτά στοιχεία παρέχουν μια περαιτέρω δόμηση στο αντικείμενο X. Για κάθε αντικείμενο $V \in \mathscr{C}_0$, υπάρχει ένας διακεκριμένος ανταλλοίωτος Hom-συναρτητής, $\mathrm{Hom}(-,V)$, έτσι έχουμε μια οικογένεια συναρτητών,

$$(\mathrm{Hom}(-,V))_{V\in\mathscr{C}_0} \quad \text{ή} \quad \mathscr{C}_0 \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{op}} \;\; /\!\!/ \;\; V \mapsto \mathrm{Hom}(-,V).$$

[6] Οι ανταλλοίωτοι συναρτητές θα μπορούσαν να ομομασθούν και 'συν-συναρτητές' (cofunctors), αλλά το όνομα αυτό δεν είναι εύηχο.

[7] Χρησιμοποιούμε το γράμμα V για να μας θυμίζει τη διαδικασία 'απονομής αλήθειας' (valuation) για μια ιδιότητα (τύπο) της Λογικής.

Θα συμβολίζουμε τους Hom-συναρτητές[8] εναλλακτικά ως:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(T,-) \equiv H^T(-) \equiv \mathscr{C}(T,-), \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,V) \equiv H_V(-) \equiv \mathscr{C}(-,V)$$

Αν $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι ένας συναρτητής, η συνιστώσα συνάρτηση, $F_1 : \mathscr{C}_1 \longrightarrow \mathscr{D}_1$ // $f \mapsto Ff$ μπορεί να παρασταθεί πιο λεπτομεριακά και ως μια οικογένεια συναρτήσεων, $(F_{X,Y})_{X,Y \in \mathscr{C}_0}$ με,

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),F(Y)) \ /\!\!/ \ f \mapsto Ff. \tag{2.1}$$

Είναι φανερό ότι η πιό πάνω συνάρτηση, ως μια συνιστώσα συνάρτηση του συναρτητή, περιέχει χρήσιμες πληροφορίες και για τις σχέσεις των κατηγοριών $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ αλλά και για τον ίδιο τον συναρτητή.

Αν $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ είναι κατηγορίες και $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D} \xrightarrow{G} \mathscr{E}$ είναι δύο συναρτητές, τότε ορίζεται η σύνθεση των δύο συναρτητών ως σύνθεση των αντιστοίχων συναρτήσεων, δηλ.,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, "F"'] \arrow[rr, bend left, "G \circ F"] & \mathscr{D} \arrow[r, "G"'] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

Με, $(G \circ F)(X) := G(F(X))$ και $(G \circ F)(f) := G(F(f))$.

Επίσης για κάθε κατηγορία $\mathscr{C}$, υπάρχει ο προφανής **ταυτοτικός συναρτητής** $1_{\mathscr{C}}$,

$$\begin{array}{rcl} 1_{\mathscr{C}}(\cdot) : \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C} \\ A & \mapsto & 1_{\mathscr{C}}(A) := A \\ f & \mapsto & 1_{\mathscr{C}}(f) := f \end{array}$$

Δημιουργείται έτσι η δυνατότητα θεώρησης δύο 'μεγάλων' κατηγοριών, **Cat**, και **CAT**. Η κατηγορία **Cat** έχει ως αντικείμενα όλες τις 'μικρές' κατηγορίες, δηλαδή κατηγορίες που η συλλογή των αντικειμένων και των βελών είναι σύνολα, και η πραγματικά τερατώδης 'κατηγορία' **CAT** που έχει ως αντικείμενα τη συλλογή όλων των κατηγοριών και βέλη όλους του συναρτητές. Η κατηγορία **Cat** δεν παρουσιάζει κανένα θεμελιακό πρόβλημα. Η κατηγορία όμως **CAT** έχει θεμελιακού τύπου προβλήματα αφού τα αντικείμενα αλλά και τα βέλη «δεν είναι κλάσεις», και επομένως δεν ικανοποιούνται τα αξιώματα της κατηγορίας. Έτσι και αλλιοιώς και κλάσεις να ήταν, δεν σημαίνει ότι το μέγεθός τους θα ήταν προσιτό στην ανθρώπινη αντίληψη! Καταγεύγουμε λοιπόν σε ένα 'άλλο τέχνασμα' για να μπορούμε να θεωρούμε και την 'κατηγορία' **CAT**. Είναι γεγονός ότι η 'κατηγορία' αυτή, παρ' όλα τα ιδιόμορφα στοιχεία που την χαρακτηρίζουν, «συμπεριφέρεται καλώς» και μέχρι να ανακαλύψουμε ένα καταστροφικό αντιπαράδειγμα θα συνεχίσουμε να εργαζόμαστε με αυτήν χωρίς να μας απασχολούν θεμελιακού τύπου προβλήματα. Έξ' άλλου, λόγω των Θεωρημάτων μη-πληρότητας του Gödel, τα αξιωματικά συστήματα δεν μπορούν

[8] Ένας μνημονικός κανόνας για να θυμόμαστε τους σχετικούς ορισμούς είναι να συσχετίσουμε τον συναρτητή H^T με το εκθετικό σύμβολο B^A που συμβολίζει όλες τις συναρτήσεις από το A στο B. Έτσι $H^T(X)$ συμβολίζει τα βέλη από το αντικείμενο T στό X. Επομένως δυϊκά το σύμβολο $H_V(X)$ θα συμβολίζει τα βέλη απο X στο V.

να μας παράσχουν ακλόνητα θεμέλια για τα Μαθηματικά, και ίσως μια **«εκπαιδευμένη και υψηλής πιστότητας διαίσθηση»** να δίνει περισσότερη σιγουριά από οποιοδήποτε αξιωματικό σύστημα!

Ποιά όμως είναι η σημαντικότητα και η ερμηνεία ενός συναρτητή;

Διακρίνουμε τις ακόλουθες βασικές κατηγορίες συναρτητών:

(i) **Ο συναρτητής ως έκφραση μαθηματικών κατασκευών.** Πολλές σπουδαίες κατασκευές στα Μαθηματικά μπορούν να εκφρασθούν ως συναρτητές της μορφής $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathscr{C}$, και γενικότερα συναρτητές απο μια λιγότερο δομημένη κατηγορία προς μια με περισσότερη δόμηση. Παραδείγματα αποτελούν οι λεγόμενοι **'ελεύθεροι συναρτητές'**, π.χ. οι συναρτητές $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Mon}$, $\quad F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Vect}$, κ.λπ.

Οι δυϊκοί πρός αυτούς συναρτητές είναι αυτοί που 'αποδομούν' τα αντικείμενα της κατηγορίας, ξεχνώντας μέρος ή όλη τη δομή τους. Για το λόγο αυτό λέγονται **'επιλήσμονες συναρτητές'**.

Τη βασική αυτή ερμηνεία την συνοψίζουμε ως σλόγκαν:

> **Συναρτητές.** *Σε κάθε φυσική κατασκευή πάνω σε ένα είδος δομής που παράγει ένα άλλο είδος δομής, αντιστοιχεί ένας συναρτητής από την κατηγορία των δομών του πρώτου είδους στην κατηγορία των δομών του δευτέρου είδους.*

(ii) **Συναρτητές ως αναπαραστάσεις ή μοντέλα κατηγοριών.** Μπορούμε να σκεπτόμαστε ότι κάθε συναρτητής $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ ότι μας εφοδιάζει με μια 'εικόνα' ή μια 'αναπαράσταση' της κατηγορίας $\mathscr{C}$ μέσα στην κατηγορία $\mathscr{D}$. Αυτό είναι πολύ φανερό αν θεωρήσουμε διαγράμματα $D : \mathscr{J} \longrightarrow \mathscr{C}$, όπου η 'εικόνα' του γραφήματος $\mathscr{J}$ στην $\mathscr{C}$ είναι μορφές παρόμοιων γραφημάτων μέσα στην κατηγορία $\mathscr{C}$. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο συναρτητής F ερμηνεύει την κατηγορία $\mathscr{C}$ στην κατηγορία $\mathscr{D}$. Μάλιστα αν τυχαίνει η κατηγορία $\mathscr{D}$ να είναι η **Set** τότε έχουμε ένα είδος 'σημασιολογικού συναρτητή'. Αν η κατηγορία $\mathscr{C}$ είναι όπως το Παράδειγμα (ii), σελ. 51, τότε συναρτητές της μορφής $M : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$ αποτελούν μοντέλα της θεωρίας της $\mathscr{C}$. Επίσης αν G είναι μια ομάδα θεωρούμενη ως κατηγορία, τότε ένας συναρτητής $F : G \to \mathbf{Set}$ είναι μια αναπαράσταση της G με μεταθέσεις ή συμμετρίες, ενώ ένας συναρτητής $F : G \to \mathbf{Matr}_R$ είναι μια αναπαράσταση της G με πίνακες, όπου, $\mathbf{Matr}_R$ είναι η κατηγορία πινάκων, με αντικείμενα του θετικούς ακέραιους και Hom-σύνολα $\mathrm{Hom}(m, n)$ το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων πάνω στον αντιμεταθετικό δακτύλιο R, σύνθεση δε, τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

(iii) Τέλος κάθε συναρτητής ως μορφισμός στην κατηγορία **CAT** μπορεί να ερμηνευθεί είτε ως γενικευμένο στοιχείο, είτε ως γενικευμένη ιδιότητα. Τέτοιοι ειδικοί συναρτητές-γενικευμένα στοιχεία αποτελούν τη βάση για ένα σπουδαίο είδος συναρτητών για τα μαθηματικά που είναι γνωστοί ως 'δράγματα' (sheaves), ενώ ειδικοί συναρτητές-γενικευμένες ιδιότητες αποτελούν τη βάση για 'νηματώσεις' (fibrations). Αν π.χ. $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{V}$ είναι ένας συναρτητής-γενικευμένη ιδιότητα που ικανοποιεί κάποιες ιδιότητες που να τον κάνουν μια νημάτωση τότε, κάθε αντικείμενο $V \in \mathscr{V}_0$ καθορίζει μια κατηγορία-ίνα $F^{-1}(V)$ που συνήθως τη συμβολίζουμε και με $\mathscr{C}_V$, που αποτελείται από αντικείμενα $A \in \mathscr{C}_0$ με $FA = V$ και μορφισμούς $f \in \mathscr{C}_1$ με $Ff = 1_V$. Εξερχόμενοι, ειδικοί συναρτητές, από μια κατηγορία (π.χ. νηματώσεις) , $C : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{V}$ θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σαν μια **θεωρία ταξινόμησης των αντικειμένων της κατηγορίας σε ίνες**. Όπως είναι ίσως γνωστό ένα από τα βασικότερα προβλήματα των μαθηματικών είναι **η ταξινόμηση των αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$ ταυτίζοντας τα ισόμορφα αντικείμενα.** Τέτοια μεγάλα επιτεύγματα των μαθηματικών του $20^{\text{ου}}$ αιώνα είναι η πλήρης ταξινόμηση των αλγεβρών Lie πεπρασμένης διάστασης από τον Cartan, και η πλήρης ταξινόμηση των πεπρασμένων ομάδων, από πολλά και διάφορα άτομα, που η πλήρης απόδειξη γεμίζει αρκετούς τόμους!

Λόγω της μεγάλης σπουδαιότητας των συναρτητών για τα μαθηματικά, είναι φυσιολογικό να τους καταστήσουμε κεντρικό θέμα μελέτης. Αυτό γίνεται θεωρώντας 'συναρτητικές κατηγορίες', κατηγορίες δηλαδή τα αντικείμενα των οποίων είναι συναρτητές! Σε τέτοιες κατηγορίες οι μορφισμοί είναι οι 'φυσικοί μετασχηματισμοί' με τους οποίους θα ασχοληθούμε στη συνέχεια. Είναι φανερό ότι η ολιστική, κατηγορική μελέτη των συναρτητών απαιτεί να έχουμε αυτούς τους μορφισμούς. *Μόνο τότε θα μπορούμε να μελετήσουμε κατηγορικά τους συναρτητές με τη χρήση 'καθολικών ιδιοτήτων'.*

Έστω λοιπόν μια μεγάλη κατηγορία (**Cat** ή **CAT**) και $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ δύο συναρτητές. Ας θεωρήσουμε ότι οι συναρτητές F, G σχηματίζουν αντίστοιχες 'εικόνες' της κατηγορίας $\mathscr{C}$ στην κατηγορία $\mathscr{D}$. Το πρόβλημα που τίθεται είναι αν είναι δυματόν να έχουμε ένα είδος ολίσθησης ή 'μορφικής' σύμπτωσης της μιας εικόνας επι της άλλης (morphing) της εικόνας που σχηματίζει δηλαδή ο συναρτητής F στην αντίστοιχη εικόνα που σχηματίζει ο συναρτητής G. Ένα χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα είναι οι ομοτοπικοί τοπολογικοί χώροι, δειτε π.χ. το εξαιρετικό βιβλιαράκι για πρωτοετείς φοιτητές, [124, pp. 33-50]. Γενικότερα ένα βέλος ή μορφισμός μεταξύ δύο συναρτητών είναι ένας τρόπος βελών, μιας μορφικής σύμπτωσης της κατασκευής που σχετίζεται με το συναρτητή F στην αντίστοιχη κατασκευή που σχετίζεται με τον συναρτητή G. Τέτοιες όμως 'μορφικές' συμπτώσεις πρέπει να μπορούν να ανάγονται στα βασικά στοιχεία μια κατηγορίας, μορφισμούς, συνθέσεις και ταυτοτικά βέλη. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

2.3.3 Ορισμός. Έστω $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ δύο συναρτητές. Ένας **φυσικός μετασχηματισμός α** (φ.μ.)[9] από τον F στόν G, συμβολικά $\alpha : F \Rightarrow G$, είναι μια οικογένεια-κλάση μορφισμών της $\mathscr{D}$,

$$(\alpha_A : FA \longrightarrow GA)_{A \in \mathscr{C}_0} \quad \text{δηλ.} \quad \alpha : \mathscr{C}_0 \longrightarrow \mathscr{D}_1 \ /\!\!/ \ A \mapsto (\alpha_A : FA \longrightarrow GA)$$

με δείκτες στην κλάση $\mathscr{C}_0$ τέτοια ώστε, το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\forall f"', "\in \mathscr{C}_1,"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, dotted] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\alpha_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

δηλ. $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$.

Ως 'σλόγκαν' η πιό πάνω θεμελιακή έννοια εκφράζεται ως:

> **Φυσικοί Μετασχηματισμοί.** *Σε κάθε φυσική μεταφορά από την κατασκευή, $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ στην κατασκευή $G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, αντιστοιχεί ένας φυσικός μετασχηματισμός, $\eta : F \Rightarrow G$, που εκτελεί αυτή την μεταφορά ώστε η κατασκευή F να συμπέσει με την κατασκευή G.*

Συμβολικά θα αναπαριστούμε έναν φυσικό μετασχηματισμό με το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

Μπορούμε επίσης να θεωρούμε και **συναρτητικές κατηγορίες**. Αν $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ είναι κατηγορίες, τότε θεωρούμε την κατηγορία $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, τα αντικείμενα της οποίας είναι συναρτητές $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ και βέλη φυσικοί μετασχηματισμοί $\eta : F \Rightarrow G$. Αν $F, G, H \in \mathscr{D}^{\mathscr{C}}_0$, και $\tau : F \Rightarrow G$ και $\sigma : G \Rightarrow H$ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί τότε η σύνθεση των φυσικών μετασχηματισμών $\sigma \circ \tau$ ορίζεται ως εξής: Αν $(f : A \longrightarrow B) \in \mathscr{C}_1$, τότε,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\forall f"', "\in \mathscr{C}_1,"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\tau_A"'] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[rr, bend left, dashed, "\sigma_A \circ \tau_A"] & GA \arrow[r, "\sigma_A"'] \arrow[d, "Gf"] & HA \arrow[d, "Hf"] \\ FB \arrow[r, "\tau_B"] \arrow[rr, bend right, dashed, "\sigma_B \circ \tau_B"'] & GB \arrow[r, "\sigma_B"] & HB \end{tikzcd}$$

[9] Βλ. [134, p. 18] «...η έννοια της 'κατηγορίας' ορίσθηκε για να μπορέσουμε να ορίσουμε την έννοια του 'συναρτητή' και η έννοια του 'συναρτητή' για να μπορέσουμε να ορίσουμε την έννοια του 'φυσικού μετασχηματισμού'»

με, $(\sigma\circ\tau)_A = \sigma_A\circ\tau_A$, για $A \in \mathscr{C}_0$. Επειδή δε τα δύο τετράγωνα του πιό πάνω διαγράμματος είναι αντιμεταθετικά, έχουμε ότι: $(\sigma\circ\tau)_B\circ F(f) = G(f)\circ(\sigma\circ\tau)_A$, και έτσι η οικογένεια $(\sigma\circ\tau)_{A\in\mathscr{C}_0}$ είναι οι συνιστώσες ενός φυσικού μετασχηματισμού $\sigma\circ\tau : F \Rightarrow H$. Αυτό φαίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} H(f)\circ(\tau_A\circ\sigma_A) &= (H(f)\circ\sigma_A)\circ\tau_A \\ &= (\sigma_B\circ G(f))\circ\tau_A \\ &= \sigma_B\circ(G(f)\circ\tau_A) \\ &= \sigma_B\circ(\tau_B\circ F(f)) \\ &= (\sigma_B\circ\tau_B)\circ F(f). \end{aligned}$$

Περισσότερο πληροφοριακά παριστάνουμε την σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών με το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\tau"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\sigma"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

Υπάρχει επίσης και η οριζόντια σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathscr{E} \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "H\circ F"] \arrow[r, bend right, "K\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta*\alpha"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

όπου, $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ είναι κατηγορίες, F, G, H, K είναι συναρτητές και α, β φυσικοί μετασχηματισμοί. Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε το 'γινόμενο Godement' ή οριζόντια σύνθεση των φυσικών μετασχηματισμών α και β, με τον ακόλουθο τύπο:

$$\beta * \alpha : H\circ F \Rightarrow K\circ G \;\; /\!\!/ \;\; (\beta*\alpha)_A = \beta_{GA}\circ H(\alpha_A) = K(\alpha_A)\circ\beta_{FA}$$

Δείξτε ότι πράγματι ο $\beta * \alpha$ είναι φ.μ. Πολλές φορές αντί του συμβολισμού $\beta * \alpha$ χρησιμοποιείται και ο $\beta\alpha$.

Υπάρχει ανάγκη εξοικείωσης με συνθέσεις φ.μ. με συναρτητές κ.λπ. Στα ακόλουθα διαγράμματα ο αντικειμενικός μας στόχος είναι η σύνθεση συναρτητών και φ.μ.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "H"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, "K"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, οι οποίες δεν είναι συμμετρικές. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "H"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, bend left, "F\circ H"] \arrow[r, bend right, "G\circ H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha H"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

με $(\alpha H)_A := \alpha_{HA}$. Το αντιμεταθετικό τετράγωνο που πρέπει να ικανοποιεί ο φ.μ. $(\alpha H)_A$ είναι στην ουσία το αντιμεταθετικό τετράγωνο του α_A εξειδικευμένο στις συνιστώσες του $(\alpha H)_A$.
Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, "K"] & \mathscr{E} \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "K\circ F"] \arrow[r, bend right, "K\circ G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow K\alpha"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

με $(K\alpha) := K(\alpha_A)$. Το αντιμεταθετικό τετράγωνο που πρέπει να ικανοποιεί ο φ.μ. $(K\alpha)$ είναι στην ουσία το αντιμεταθετικό τετράγωνο του α_A μεταφερμένο μέσω του συναρτητού K. Επειδή δε ο K διατηρεί τις συνθέσεις είναι και αυτό αντιμεταθετικό τετράγωνο, βλ. και [105].

Ας δούμε κάπως πιο αναλυτικά το πιο πάνω διάγραμμα. Έχουμε τον φ.μ. $\lambda : F \Rightarrow G$ με τη μορφή μιάς οικογένειας μορφισμών $(\lambda_A : F(A) \to G(A))_{A\in\mathscr{C}_0}$. Επομένως αν έχουμε και το συναρτητή $H : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, τότε για κάθε $B \in \mathscr{B}_0$, $H(B) \equiv HB \in \mathscr{C}_0$ και επομένως υπάρχει αντίστοιχη συνιστώσα λ_{HB} του φ.μ. λ. Αν τώρα επιλέξουμε όλες αυτές τις συνιστώσες από την οικογένεια $(\lambda : F(A) \to G(A))_{A\in\mathscr{C}_0}$, έχουμε τότε έναν άλλο φ.μ. (Να δειχθεί ότι είναι πράγματι φ.μ.) $(\lambda_{HA} : FHB \to GHB)_{B\in\mathscr{B}_0}$, που θα τον συμβολίζουμε με $\lambda H : FH \Rightarrow GH$. Ομοίως και για τον φ.μ. $K\lambda : KF \Rightarrow KG$.

2.3.4 Ασκήσεις. Έστω το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, "E"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left=60, "F_1"] \arrow[r, "F_2" description] \arrow[r, bend right=60, "F_3"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\kappa"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\lambda"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "G_1"] \arrow[r, "G_2" description] \arrow[r, bend right=60, "G_3"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\mu"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\nu"] & \mathscr{D} \arrow[r, "H"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

Να δειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $(\nu \circ \mu)(\lambda \circ \kappa) = (\nu\lambda) \circ (\mu\kappa)$.

(ii) $(H \circ G_1)\kappa = H(G_1\kappa)$.

(iii) $\mu(F_1 \circ E) = (\mu F_1)E$

(iv) $G_1(\lambda \circ \kappa)E = (G_1\lambda E) \circ (G_1\kappa E)$

(v) $(\mu F_2)\circ(G_1\kappa) = (G_2\kappa)\circ(\mu F_1)$.

Θα συμβολίζουμε συνήθως τα Hom-σύνολα της κατηγορίας $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, και κάθε συναρτητικής κατηγορίας ως,

$$\mathrm{Nat}(F,G) \equiv \mathscr{D}^{\mathscr{C}}(F,G) := \{\,\eta \,|\, \eta : F \Rightarrow G\,\}.$$

Η έννοια του 'ισομορφισμού' σε συναρτητικές κατηγορίες λέγεται '**φυσικός ισομορφισμός**,' τα δε ταυτοτικά βέλη εδώ είναι φυσικοί μετασχηματισμοί $1_F : F \Rightarrow F$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $A \in \mathscr{C}_0$ το ταυτοτικό βέλος, $1_{F(A)} : F(A) \longrightarrow F(A) \in \mathscr{D}_1$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός. Συνοψίζοντας, θα λέμε ότι δύο συναρτητές $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι **φυσικώς ισοδύναμοι** και θα γράφουμε $F \cong G$ ανν υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\eta : F \Rightarrow G$, δηλαδή μια οικογένεια $(\eta_A : FA \longrightarrow GA)_{A\in\mathscr{C}_0}$ με κάθε συνιστώσα η_A να είναι ισομορφισμός.

2.3.5 Σχόλιο. Αξίζει κανείς να παρατηρήσει, ότι έχουμε ήδη παραστεί μάρτυρες μιας βασικής πλευράς της εννοίας της 'μαθηματικής δομής' που αξίζει να διατυπωθεί ως σλόγκαν[10]:

> **Επίπεδα Μαθηματικών Δομών.** Τα στοιχεία έχουν δομή, και έτσι οι μαθηματικές δομές συγκροτούνται και εκτυλίσσονται, σε 'επίπεδα πραγματικότητας', που αποτελούν κατηγορίες!

Μέχρι τώρα έχουμε δεί τρία επίπεδα στα οποία εκτυλίσσονται οι 'μαθηματικές δομές'. **Το επίπεδο της κατηγορίας**, **το επίπεδο των συναρτητών** και **το επίπεδο των φυσικών μετασχηματισμών**. Δηλαδή, μια κατηγορία $\langle \mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1\rangle$ με τα αντικείμενα και τους μορφισμούς της αποτελέι το πρώτο επίπεδο, η **CAT** ή η **Cat** με αντικείμενα κατηγορίες και βέλη συναρτητές, αποτελέι το δεύτερο επίπεδο και τέλος οι συναρτητικές κσατηγορίες, με αντικείμενα συναρτητές και βέλη φυσικούς μετασχηματισμούς, αποτελεί το τρίτο επίπεδο. Βλέπε και στη συνέχεια ότι π.χ. η **Cat** μπορεί να θεωρηθεί ως μια 2-κατηγορία με 0-στοιχεία, 1-στοιχεία και 2-στοιχεία, τις κατηγορίες, τους συναρτητές και τους Φυσικ. μετασχηματισμούς αντίστοιχα. Πολλές φορές όταν μελετάμε μια έννοια της Θεωρίας Κατηγοριών, η έννοια αυτή γίνεται πιό απλή όταν εξετάζεται από υψηλότερο δομικό επίπεδο. Η πολυεπίπεδη αυτή φύση όμως, της Θεωρίας Κατηγοριών είναι ίσως από της βασικές της δυσκολίες, που πρέπει να υπερπηδηθεί. Αυτό μπορεί να γίνει αν κάθε κατηγορική έννοια κατανοείται και ορίζεται στα διαφορετικά επίπεδα της δομής. Είναι φανερό ότι η 'κατηγορία' **CAT** θέτει ένα άνω φράγμα, και επομένως από την άποψη των αντικειμένων η κατηγορία **CAT** είναι το ανώτερο δυνατό. Από την άποψη όμως των βελών μπορούμε να θεωρούμε n-κατηγορίες, $n \in \mathbb{N}$, που συγκροτούνται από 0-στοιχεία ή 0-κελιά

[10] Δείτε και το θαυμάσιο άρθρο [113] για μια έκθεση της παθολογίας του 'σημείου' και της μαθηματικής δομής.

που είναι τα αντικείμενα της κατηγορίας $A \in \mathscr{C}_0$, από 1-στοιχεία, που είναι οι μορφισμοί, $f \in \mathscr{C}_1$, από 2-στοιχεία που είναι βέλη μεταξύ βελών, από 3-στοιχεία που είναι βέλη, μεταξύ βελών, μεταξύ βελών, κ.λπ., Έτσι η κατηγορία **Cat**, μπορεί να θεωρηθεί ως μια 2-κατηγορία, με 0-στοιχεία τις κατηγορίες, 1-στοιχεία τους συναρτητές και 2-στοιχεία τους φυσικούς μετασχηματισμούς, όσα δηλαδή είναι και τα επίπεδα δομής που έχουμε διακρίνει προηγουμένως. Η ανάγκη για μια τέτοια θεώρηση των n-κατηγοριών προέρχεται από ανάγκες της Αλγεβρικής Γεωμετρίας, της Θεωρητικής Πληροφορικής, της Λογικής, και βεβαίως της ίδιας της Θεωρίας κατηγοριών. Για το λόγο αυτό οι n-κατηγορίες αποτελούν ένα σύγχρονο αντικείμενο έρευνας, βλ. [133].

Το ακόλουθο Θεώρημα σκιαγραφεί με θαυμαστό τρόπο, το ρόλο των επιπέδων δομής: Η έννοια της ισομορφίας στο επίπεδο των κατηγοριών, δίνει την **έννοια της φυσικής ισομορφίας** όταν εκφρασθεί στο επίπεδο των συναρτητών.

2.3.6 Θεώρημα. *Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\eta : F \Rightarrow G$ είναι φυσικός ισομορφισμός άνν υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\mu : G \Rightarrow F$ τέτοιος ώστε,*

$$\mu \circ \eta = 1_F \quad \& \quad \eta \circ \mu = 1_G \tag{2.2}$$

Απόδ. ($\Rightarrow$) Έστω ο φυσικός μετασχηματισμός $\eta : F \Rightarrow G$. Ορίζουμε τότε έναν άλλο φυσικό μετασχηματισμό $\mu : G \Rightarrow F$, ορίζοντας κάθε συνιστώσα του $\mu_A, \quad A \in \mathscr{C}_0$ ως εξής:

$$\mu := \eta_A^{-1} : GA \longrightarrow FA$$

Επειδή,

$$(\mu \circ \eta)_A = \mu_A \circ \eta_A = \eta_A^{-1} \circ \eta_A = 1_{FA}$$
$$(\eta \circ \mu)_A = \eta_A \circ \mu_A = \eta_A \circ \eta_A^{-1} = 1_{GA}$$

έχουμε ότι, $\mu \circ \eta = 1_F$ και $\eta \circ \mu = 1_G$ ⊣□

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\mu : G \longrightarrow F$ με $\mu \circ \eta = 1_F$ και $\eta \circ \mu = 1_G$. Τότε για κάθε $A \in \mathscr{C}_0$, έχουμε,

$$\mu_A \circ \eta_A = (\mu \circ \eta)_A = 1_{FA}$$
$$\eta_A \circ \mu_A = (\eta \circ \mu)_A = 1_{GA}$$

Άρα κάθε μ_A είναι ισομορφισμός. ⊣■

Ας έλθουμε τώρα στη μελέτη της εννοίας της υποκατηγορίας.

2.3.7 Ορισμός. **(i)** Μια κατηγορία $\mathscr{D}$ είναι **υποκατηγορία** της κατηγορίας $\mathscr{C}$, γράφουμε δε $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ ανν,

1. Κάθε αντικείμενο της $\mathscr{D}$ είναι και αντικείμενο της $\mathscr{C}$, δηλ. $\mathscr{D}_0 \subseteq \mathscr{C}_0$
2. Για όλα τα $\mathscr{D}$-αντικείμενα A, A', έχουμε: $\mathscr{D}(A, A') \subseteq \mathscr{C}(A, A')$, και,

3. Οι συνθέσεις και τα ταυτοτικά βέλη είναι τα ίδια στις, $\mathscr{D}$ και $\mathscr{C}$.

Έχουμε δηλαδή ότι, για κάθε $\mathscr{D}$-βέλος $f \in \mathscr{D}(A, A')$,

$$\mathrm{dom}_{\mathscr{C}}(f) = \mathrm{dom}_{\mathscr{D}}(f) \in \mathscr{D}_0, \quad \mathrm{cod}_{\mathscr{C}}(f) = \mathrm{cod}_{\mathscr{D}}(f) \in \mathscr{D}_0,$$

και για κάθε $A \in \mathscr{D}_0, \quad 1_A \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{D}_1$. Τέλος για κάθε ζεύγος $f, g \in \mathscr{D}_2$ έχουμε ότι,

$$g \circ_{\mathscr{C}} f = g \circ_{\mathscr{D}} f \in \mathscr{D}_1,$$

Δηλαδή η υποκατηγορία $\mathscr{D}$ είναι κλειστή ως πρός τις 'πράξεις' $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}, 1_{(\cdot)}$, και $\circ$.

(ii) Μια υποκατηγορία $\mathscr{D}$ θα λέγεται, **μεστή** (full)[11] υποκατηγορία της $\mathscr{C}$ ανν για κάθε ζεύγος αντικειμένων $A, B \in \mathscr{D}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B).$$

Για παράδειγμα η κατηγορία **FinSet** είναι μια μεστή υποκατηγορία της **Set** αφού κάθε βέλος μεταξύ αντικειμένων της **FinSet** είναι και βέλος στην κατηγορία **Set** και αντίστροφα κάθε βέλος μεταξύ πεπερασμένων συνόλων στην **Set** είναι και βέλος στην κατηγορία **FinSet**. Όμως η κατηγορία **Set** είναι απλά υποκατηγορία της κατηγορίας **Pfn**, των συνόλων και των μερικών συναρτήσεων, αλλά δεν είναι μεστή υποκατηγορία, αφου μεταξύ δύο συνόλων υπάρχουν περισσότερες μερικές συναρτήσεις από ότι συναρτήσεις. Έπίσης η κατηγορία των μονοειδών **Mon** είναι μια υποκατηγορία της κατηγορίας των ημιομάδων **Smgrp** αλλά δεν είναι μεστή υποκατηγορία, αφού ένας ομομορφισμός ημιομάδων δεν διατηρεί αναγκαία τα ουδέτερα στοιχεία των μονοειδών.

2.3.8 Ασκήσεις. 1. Δείξτε με ένα αντιπαράδειγμα, ότι αν $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι ένας συναρτητής, τότε η εικόνα $F_0[\mathscr{C}]$ δεν είναι αναγκαία υποκατηγορία της $\mathscr{D}$.

Λύση. Πάρτε π.χ. την κατηγορία $\mathbf{2} + \mathbf{2}$ και την κατηγορία $\mathbf{3}$. Ο κανονικός τρόπος κατασκευής της κατηγορίας $\mathbf{2} + \mathbf{2}$ είναι:

Έστω η ξένη ένωση, $\mathbf{2} + \mathbf{2} := \{\, 2 \times \{0\}\} \cup \{2 \times \{1\}\} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$. Παραλέιποντας τα ταυτοτικά βέλη έχουμε την κατηγορία $\mathbf{2} + \mathbf{2}$ που συγκροτείται από δύο 'διαφορετικά' αντίγραφα της κατηγορίας $\mathbf{2}$, δηλ.

$$\begin{tikzcd}
(0,1) \arrow[r, "f'"] & (1,1) \\
(0,0) \arrow[r, "f"'] & (1,0)
\end{tikzcd}$$

Έστω και η κατηγορία $\mathbf{3}$,

$$\begin{tikzcd}
& 2 & \\
0 \arrow[ur, "\beta \circ \alpha"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & 1 \arrow[ul, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

[11] Αποδίδουμε έτσι τον όρο full, κρατώντας το 'πλήρης' για την απόδοση του όρου 'complete'.

Ορίστε τώρα τον συναρτητή, $F : \mathbf{2} + \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{3}$ ως εξής:

$$\begin{array}{lcl} (0,0) & \mapsto & 0 \\ (1,0) & \mapsto & 1 \qquad F(f) = \alpha \\ (0,1) & \mapsto & 1 \qquad F(f') = \beta \\ (1,1) & \mapsto & 2 \end{array}$$

Τότε, $F(\mathbf{2}+\mathbf{2})$ είναι ίση με το ακόλουθο γράφημα,

$$\begin{tikzcd} & F(1,1)=2 & \\ F(0,0)=0 \arrow[rr, "F(f)=\alpha"'] & & F(0,1)=1 \arrow[ul, "F(f')=\beta"'] \end{tikzcd}$$

αλλά το γράφημα $F(\mathbf{2}+\mathbf{2})$ είναι ένα υπογράφημα του $\mathbf{3}$ αλλά δεν είναι κατηγορία, αφού $\mathrm{cod}F(f) = \mathrm{dom}F(f')$ αλλά δεν υπάρχει η συνθεσή τους. ⊣

2. Δώστε ένα παράδειγμα με $\mathscr{D}_0 \subseteq \mathscr{C}_0$ αλλά η $\mathscr{D}$ να μην είναι υποκατηγορία της $\mathscr{C}$.
3. Ποιές είναι οι υποκατηγορίες ενός μ.δ.σ. $\langle P, \leq \rangle$, θεωρουμένου σαν κατηγορία;
4. Εξετάστε την ίδια ερώτηση για την περίπτωση που έχουμε την κατηγορία μιάς ομάδας.

2.4 Κατηγορικές Κατασκευές

2.4.1 Διαγράμματα

Έστω, $\mathscr{I}$ και $\mathscr{C}$ δύο προσανατολισμένα γραφήματα. Ένα **διάγραμμα** στο $\mathscr{C}$ με σχήμα $\mathscr{I}$ είναι ένας ομομορφισμός γραφημάτων,

$$D : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{C}$$

Το γράφημα $\mathscr{I}$ λέγεται **διαγραμματικό σχήμα** του διαγράμματος D.

2.4.1 Παράδειγμα. Μερικά παραδείγματα διαγραμματικών σχημάτων είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & j \arrow[dl, "v"] \\ & k & \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} p \arrow[r, shift left, "f"] & q \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} & j \\ i \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\ & k \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} i \arrow[r, "e"] & j \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & k \end{tikzcd}$$

Όταν το συν-πεδίο ορισμού ενός διαγράμματος είναι το υποκείμενο γράφημα μιας κατηγορίας, $U(\mathscr{C})$ τότε λόγω των ιδιοτήτων της κατηγορίας μπορούμε να μιλάμε για αντιμεταθετικά διαγράμματα, που είναι ο τρόπος με τον οποίο οι κατηγορικοί εκφράζουν εξισώσεις.[12] Αυτό το τελευταίο μπορούμε να το διατυπώσουμε και ως σλόγκαν:

[12] Για περισσότερα επί των εξισώσεων και των αντικαταστάσεων, με κατηγορικό τρόπο βλ. [119]

«Τα αντιμεταθετικά διαγράμματα, είναι ο τρόπος με τον οποίο οι κατηγορικοί εκφράζουν εξισώσεις»

Συνήθως γράφουμε $D : \mathscr{I} \longrightarrow \mathscr{C}$ αντί του $D : \mathscr{I} \longrightarrow U(\mathscr{C})$ για ένα κατηγορικό διάγραμμα.

2.4.2 Παράδειγμα. Αντιμεταθετικά Διαγράμματα Σε ένα κατηγορικό διάγραμμα το βέλος που σηματοδοτεί την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος, συνήθως το υποδηλώνουμε νε ένα διακεκομένο βέλος.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, dashed] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "r"'] & D \end{tikzcd} \quad r \circ h = g \circ f \quad (a), \qquad E \xrightarrow{e} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \quad (b), \qquad A \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \quad (c)$$

Πότε όμως τα διαφράμματα (b) και (c) θα είναι αντιμεταθετικά; Για το (b) θα πρέπει να έχουμε: $f \circ e = g \circ e$. Το (c) είναι περισσότερο μπερδεμένο. Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν το διάγραμμα (c) είναι αντιμεταθετικό τότε,

$$g \circ f = 1_A \quad \& \quad f \circ g = 1_B$$

δηλαδή τα αντικείμενα A και B είναι ισομορφικά.

Όταν εξετάζουμε μαθηματικές δομές το ενδιαφέρον μας είναι πάντα στο πως θα κατασκευάζουμε νέες δομές από δοθείσες. Όμοια και εδώ, έχουμε τις ακόλουθες κατασκευές:

2.4.2 Ελεύθερες κατηγορίες παραγόμενες από γραφήματα.

Έστω $\mathscr{G}$ ένα γράφημα. Υπάρχει τότε κατηγορία $F(\mathscr{G})$ τα αντικείμενα της οποίας είναι οι κορυφές $\mathscr{G}_0$ του γραφήματος $\mathscr{G}$, τα δε βέλη είναι οι k-τροχιές ή k-μονοπάτια $(f_1, \ldots, f_n)$ επι του γραφήματος $\mathscr{G}$. Η σύνθεση των βελών $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ και $(f_{k+1}, \ldots, f_n)$ δίδεται από τον τύπο,

$$(f_1, f_2, \ldots, f_k) \circ (f_{k+1}, \ldots, f_n) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

Η σύνθεση αυτή είναι προσεταιριστική και για κάθε ακμή υπάρχει το ταυτοτικό βέλος 1_A που είναι η κενή ή 0-τροχιά από το A στο A.

2.4.3 Διαγραμματικές Κατηγορίες.

Έστω Σ ένα διάγραμμα και $\mathscr{C}$ μία κατηγορία. Θα συμβολίζουμε με $[\Sigma, \mathscr{C}] \equiv \mathscr{C}_\Sigma$ την κατηγορία των Σ-διαγραμμάτων στην $\mathscr{C}$. Θεωρώντας το διάγραμμα Σ ως μια μικρή κατηγορία, είναι φανερό ότι η κατηγορία $\mathscr{C}_\Sigma$ είναι μια συναρτητική κατηγορία με αντικείμενα συναρτητές και βέλη φυσικούς μετασχηματισμούς. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και οι συναρτητικές κατηγορίες που έχουμε ήδη μνημονεύσει.

2.4.4 Γινόμενο δύο Κατηγοριών

Έστω $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ δύο κατηγορίες. Το **γινόμενό τους**, που θα το συμβολίζουμε με $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$, ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}(\mathscr{C} \times \mathscr{D})_0 &:= \{(C, D) \mid C \in \mathscr{C}_0,\ D \in \mathscr{D}_0\} \quad \text{και} \\ (\mathscr{C} \times \mathscr{D})_1 &:= \{(f, g) \mid f \in \mathscr{C}_1,\ g \in \mathscr{D}_1\}\end{aligned}$$

Η σύνθεση βελών και τα ταυτοτικά βέλη ανάγονται στις αντίστοιχες συνιστώσες:

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g) \quad \text{και} \quad 1_{(C,D)} = (1_C, 1_D)$$

Όπως πάντα όταν θεωρούμε γινόμενα έχουμε και απαραίτητες συναρτήσεις προβολών:

$$\mathscr{C} \xleftarrow{\pi_1} \mathscr{C} \times \mathscr{D} \xrightarrow{\pi_2} \mathscr{D}$$

που ορίζονται ως συνήθως: $\pi_1(C, D) := C$ και $\pi_2(C, D) := D$ και ομοίως για τα βέλη: $\pi_1(f, g) := f$ και $\pi_2(f, g) := g$. Θα μπορούσε κανείς να ορίσει το γινόμενο δύο κατηγοριών, ως το γινόμενο στη κατηγορία των κατηγοριών **CAT** το οποίο υπάρχει πάντοτε. Το ίδιο ισχύει και για άλλες κατηγορικές κατασκευές.

2.4.3 Ασκήσεις. **(i)** Έστω δύο ομάδες G και G', θεωρούμενες ως κατηγορίες με ένα μοναδικό αντικείμενο. Σχηματίστε το γινόμενο των κατηγοριών. Σχολιάστε το (τι σας θυμίζει;).
(ii) Κάντε το ίδιο με δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα (μ.δ.σ.).
(iii) Δείξτε ότι στην κατηγορία **Cat** έχουμε έναν φυσικό ισομορφισμό,

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{C} \times \mathscr{D}, \mathscr{E}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{E}^{\mathscr{D}})$$

2.4.5 Η Αντίθετη ή Δυϊκή Κατηγορία

Αν $\mathscr{C}$ είναι μια δοθείσα κατηγορία, μπορούμε να κατασκεύασουμε μια άλλη κατηγορία που την συμβολίζουμε με $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, με το να «αντιστρέψουμε τα βέλη» της $\mathscr{C}$. Η **αντίθετη** ή **δυϊκή κατηγορία** $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$ ορίζεται ως εξής:

(i) Τα αντικείμενα της $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ είναι τα ίδια με τα αντικείμενα της $\mathscr{C}$.

(ii) Τα βέλη της $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ είναι τα ίδια με τα βέλη της κατηγορίας $\mathscr{C}$ αλλά αντεστραμμένα, δηλ. αν $(f : A \longrightarrow B) \in \mathscr{C}_1$ τότε $(f^{\mathrm{op}} : B \longrightarrow A) \in \mathscr{C}_1^{\mathrm{op}}$. Έτσι, για κάθε $A, B \in \mathscr{C}_0^{\mathrm{op}} = \mathscr{C}_0$, έχουμε $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}(A, B) = \mathscr{C}(B, A)$

(iii) Για τη σύνθεση των βελών έχουμε τα ακόλουθα διαγράμματα:

Αν
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[loop above, "1_A"] \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, dashed, "h=g\circ f"] & \\ B \arrow[rr, "g"'] & & C \end{tikzcd}$$
$\mathscr{C}$

τότε
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[loop above, "1_A"] & \\ B \arrow[ur, "f^{\mathrm{op}}"] & & C \arrow[ul, dashed, "h^{\mathrm{op}}=f^{\mathrm{op}}\circ g^{\mathrm{op}}"'] \arrow[ll, "g^{\mathrm{op}}"] \end{tikzcd}$$
$\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$

Η αντίθετη κατηγορία $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, ορίζεται σχετικά εύκολα, αλλά ο πραγματικός υπολογισμός και η κατανόηση της ουσίας των μορφισμών της $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ είναι πολλές φορές εξαιρετικά δύσκολος. Ήδη για να υπολογίσουμε την f^{op} στην περίπτωση της κατηγορίας **Set**, στο Εδάφιο 1.3.1, είδαμε πόση δουλειά χρειάζεται. Στη συνέχεια θα δώσουμε μια εναλλακτική κατασκευή της αντίθετης κατηγορίας στην περίπτωση που έχουμε κατηγορίες συνόλων.

2.4.4 Παράδειγμα. Έστω μια κατηγορία $\mathscr{C}$ συνόλων και συναρτήσεων. Έστω επίσης Ω ένα σύνολο το οποίο περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Κατασκευάζουμε μια κατηγορία $\mathscr{D}$ ως εξής: $\mathscr{D}_0 := \{\Omega^X \mid X \in \mathscr{C}_0$ και $\mathscr{D}_1 := \{\Omega^f : \Omega^X \to \Omega^Y \mid (f : X \to Y) \in \mathscr{C}_1\}$ όπου η συνάρτηση $\Omega^f(g) := g \circ f$. Τότε η έτσι κατασκευασθείσα κατηγορία είναι ισομορφική με την $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. (Αποδείξτε το!)

Πολλά διάσημα δυϊκά θεωρήματα (Δυϊκότητα του Stone, δυϊκότητα του Gelfand, και η δυϊκότητα του Pontryagin βλ. [122]) ισχυρίζονται ότι η δυϊκή μιας κατηγορίας είναι (ή είναι φυσικά ισόμορφη) με μια άλλη συγκεκριμένη κατηγορία. Το γεγονος αυτό ενισχύει περισσότερο την άποψη ότι ο υπολογισμός της δυϊκής κατηγορίας είναι μια σοβαρή υπόθεση. Γενικώς η αντίθετη κατηγορία μιας διαισθητικά ξεκάθαρης κατηγορίας, μπορεί να μην είναι καθόλου διαισθητικά προσβάσιμη, αλλά και ο υπολογισμός της να είναι τεχνικά εξαιρετικά δύσκολος. Ένα τέτοιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η αντίθετη κατηγορία της κατηγορίας **CRng** των αντιμεταθετικών δακτυλίων με μονάδα. Αφού η κατηγορία **CRng** είναι μια καθαρά αλγεβρική κατηγορία, αναμένει κανείς ότι η αντιστροφή των βελών θα μετατρέπει 'το αλγεβρικό' σε 'γεωμετρικό'. Πράγματι η κατηγορία $\mathbf{CRng}^{\mathrm{op}}$ είναι ισοδύναμη με την κατηγορία των αφινικών σχημάτων (affine schemes) που αποτελούν την βάση για την σύγχρονη Αλγεβρική Γεωμετρία. Από την άλλη μεριά το πιο πάνω παράδειγμα δείχνει ταυτόχρονα και τη δύναμη της γλώσσας της Θεωρίας Κατηγοριών.

2.4.5 Παράδειγμα. Αν $\mathbb{P} \equiv \langle P, \leq \rangle$ είναι ένα μ.δ.σ. θεωρούμενο ως κατηγορία, τότε το $\mathbb{P}^{\mathrm{op}}$ είναι απλά το μ.δ.σ. $\mathbb{P}^{\mathrm{op}} = \langle P, \geq \rangle$. Για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, έστω $X := \{\, 0, 1, 2 \,\}$ και $\mathbb{P} \equiv \langle \mathscr{P}(X), \subseteq \rangle$ το μ.δ.σ. του δυναμοσυνόλου.

Τότε τα δύο μ.δ.σ. $\mathbb{P}$ και $\mathbb{P}^{\,\mathrm{op}}$ παρίστανται ως ακολούθως:

$$
\begin{tikzcd}
 & \{0,1,2\} & \\
\{0,1\} \arrow[ur] & \{0,2\} \arrow[u] & \{1,2\} \arrow[ul] \\
\{0\} \arrow[u] \arrow[ur] & \{1\} \arrow[ul] \arrow[ur] & \{2\} \arrow[ul] \arrow[u] \\
 & \emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \{0,1,2\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{0,1\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[d] \arrow[dr] & \{0,2\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \{1,2\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[dl] \arrow[d] \\
\{0\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[dr] & \{1\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[d] & \{2\}^{\,\mathrm{op}} \arrow[dl] \\
 & \emptyset^{\,\mathrm{op}} &
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{P}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}^{\,\mathrm{op}}$

2.4.6 Αρχή του Δυϊσμού. Η γλώσσα της Θεωρίας Κατηγοριών, οικοδομείται πάνω σε ένα αλφάβητο, που περιέχει τους ακόλουθους όρους:

(**αντικείμενα**)	$A, B, \ldots$
(**βέλη ή μορφισμοί**)	$f, g, \ldots$
(**Τελεστές**)	$\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f), 1_A, g \circ f$

που ικανοποιούν τα γνωστά αξιώματα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μια ‘πρόταση’ Σ, εκφρασμένη στην στοιχειώδη γλώσσα της Θεωρίας Κατηγοριών. Μπορούμε τότε να σχηματίσουμε τη δυϊκή ‘πρόταση’[13] Σ^* κάνοντας την ακόλουθη αντικατάσταση:

$$
\begin{array}{ccc}
g \circ f & \rightsquigarrow & f \circ g \\
\mathrm{dom} & \rightsquigarrow & \mathrm{cod} \\
\mathrm{cod} & \rightsquigarrow & \mathrm{dom}
\end{array}
$$

Η Λογική, (ποσοδείκτες, λογικοί σύνδεσμοι, κ.λπ.) παραμένει αμετάβλητη.

Η πιο πάνω διαδικασία αντικατάστασης, μετατρέπει μια πρόταση Σ για την κατηγορία $\mathscr{C}$, σε μια δυϊκή ‘πρόταση’ Σ^* που αναφέρεται ή ερμηνεύεται στην αντίθετη κατηγορία $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

Παρατηρείστε επίσης ότι τα αξιώματα της Θεωρίας Κατηγοριών (Θ.Κ.) είναι αυτοδυϊκά, δηλ.

$$\{\text{Αξιώματα Θ.Κ.}\}^* = \{\text{Αξιώματα Θ.Κ.}\}.$$

Ο πιο κάτω πίνακας συνοψίζει κάποιες βασικές δυϊκές προτάσεις:

[13] Ο δυϊσμός εδώ αναφέρεται αυστηρά στην γλώσσα των κατηγοριών, και όχι σε κάποιο ‘λογικό δυϊσμό’ όπου υπάρχει εναλλαγή ποσοδεικτών, συνδέσμων κ.λπ.

Πρόταση Σ	**Πρόταση Σ^***
$f : A \longrightarrow B$	$f : B \longrightarrow A$
$A = \mathrm{dom} f$	$A = \mathrm{cod} f$
$i = 1_A$	$i = 1_A$
$h = g \circ f$	$h = f \circ g$
f είναι μονομορφισμός	f είναι επιμορφισμός
f είναι διασπασμένος μονομορφισμός	f είναι διασπασμένος επιμορφισμός
Η f είναι ισομορφισμός	Η f είναι ισομορφισμός
$F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι συναρτητές.	$F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι συναρτητές.
$\eta : F \Rightarrow G$ είναι φυσικός μετασχηματισμός.	$\eta : F \Rightarrow G$ είναι φυσικός μετασχηματισμός.

Για τις έννοιες του μονομορφισμού, επιμορφισμού κ.λπ. βλ. §2.5.

Έτσι αν έχουμε λοιπόν αποδείξει, χρησιμοποιώντας μόνον τα αξιώματα τη Θ.Κ., την πρόταση φ από την Σ δηλ. $\Sigma \vdash \varphi$ τότε θα έχουμε και την $\Sigma^* \vdash \varphi^*$.

Η Αρχή του Δυϊσμού διατυπώνεται λοιπόν ως ακολουθως:

Αν η πρόταση Σ της στοιχειώδους Θ.Κ. είναι απόρροια των αξιωμάτων της Θ.Κ. τότε το ίδιο ισχύει και για την δυϊκή πρόταση Σ^*, ή

$$\text{Αν } \mathscr{C} \models \Sigma \text{ τότε } \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \models \Sigma^*$$

Επειδή δε $(\Sigma^*)^* = \Sigma$ και $(\mathscr{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathscr{C}$ έπεται ότι,

$$\text{Αν } \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \models \Sigma^* \text{ τότε } \mathscr{C} \models \Sigma$$

2.4.6 Η Κατηγορία Βελών

Αν θεωρήσουμε τα πεπρασμένα διαγραματικά σχήματα **1** και **2** ή κατηγορίες, τότε $\mathscr{C}^{\mathbf{1}} \equiv \mathscr{C}$ και $\mathscr{C}^{\mathbf{2}} \equiv \mathscr{C}^{\rightarrow}$ είναι η κατηγορία των βελών της $\mathscr{C}$. Δηλαδή η κατηγορία με αντικείμενα τα βέλη της κατηγορίας $\mathscr{C}$ και άν $f : A \to B, f' : A' \to B'$ είναι δύο αντικείμενα της $\mathscr{C}^{\rightarrow}$ τότε ένα βέλος της κατηγορίας $\mathscr{C}^{\rightarrow}$ είναι ένα ζεύγος (h, k) βελών της $\mathscr{C}$ τέτοιων ώστε το ακόλουθο διάγραμμα, να αντιμετατίθεται,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, dotted] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "k"'] & B' \end{tikzcd}$$

2.4.7 Οι Κατηγορίες-Τεμάχια και Οι Κόμμα Κατηγορίες

Πολλές φορές θα θέλαμε να θεωρήσουμε όλα τα γενικευμένα στοιχεία ή όλες τις γενικευμένες ιδιότητες ενός αντικειμένου $A \in \mathscr{C}_0$. Οδηγούμαστε έτσι στο να θεωρήσουμε τις ακόλουθες κατηγορίες. Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και $A \in \mathscr{C}_0$, τότε η κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C} \downarrow A$ όλων των γενικευμένων στοιχείων του αντικειμένου A, ορίζεται ως εξής:

(i) Ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{C} \downarrow A$ είναι ένα γενικευμένο στοιχείο $T \xrightarrow{x} A, \quad T \in \mathscr{C}_0$.

(ii) Ένα βέλος της κατηγορίας $\mathscr{C}\downarrow A$ από το αντικείμενο $T \xrightarrow{x} A$ στο αντικείμενο $T' \xrightarrow{x'} A$ είναι ένα βέλος $(h : T \longrightarrow T') \in \mathscr{C}_1$ τέτοιο ώστε, το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "x"] & \\ T' \arrow[r, "x'"'] & A \end{tikzcd} \qquad \text{με} \quad x = x' \circ h$$

(iii) Έστω τα αντικείμενα, $x : T \longrightarrow A,\ x' : T' \longrightarrow A,\ x'' : T'' \longrightarrow A$, και τα βέλη, $h : T \longrightarrow T',\ h' : T' \longrightarrow T''$. Τότε η σύνθεση των βελών $h \circ h'$ δίδεται από το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "x"] \arrow[dd, dashed, bend right=60, "h' \circ h"'] & \\ T' \arrow[r, "x'"] \arrow[d, dashed, "h'"] & A \\ T'' \arrow[ur, "x''"'] & \end{tikzcd}$$

Πολλές φορές είναι βολικό να εκλαμβάνουμε τα αντικείμενα της $\mathscr{C}\downarrow A$ σαν ζεύγη (T, x), όπου $x : T \to A$. Η κατηγορία $\mathscr{C}\downarrow A$ όπως έχει ορισθεί, δεν είναι μια υποκατηγορία της κατηγορίας βελών $\mathscr{C}^{\to}$, της οποίας ουσιαστικά αποτελεί κομμάτι, αφού έχουν διαφορετικά βέλη. Μπορούμε ωστόσο να ταυτίζουμε ένα βέλος $h : (T_1, x_1) \to (T_2, x_2)$ με το $\mathscr{C}^{\to}$-βέλος $(h, 1_A)$. Με διαγράμματα αυτή η ταύτιση ισοδυναμεί με την ταύτιση των ακολούθων διαγραμμάτων:

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "x_1"] & \\ T_2, \arrow[r, "x_2"'] & A, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, "x_1"] \arrow[d, dashed, "h"'] & A \arrow[d, "1_A"] \\ T_2 \arrow[r, "x_2"'] & A \end{tikzcd}$$

Έτσι η κατηγορία $\mathscr{C}\downarrow A$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια υποκατηγορία της $\mathscr{C}^{\to}$, δικαιολογώντας έτσι της ονομασία 'κατηγορία-τεμάχιο'. Μπορούμε ακόμη να θεωρούμε την κατηγορία $\mathscr{C}{\downarrow}A$, ως την 'έκταση' του αντικειμένου $A \in \mathscr{C}_0$ ως πρός το περιβάλλον της κατηγορίας $\mathscr{C}$. Μια άλλη ερμηνεία των αντικειμένων της κατηγορίας $\mathscr{C}{\downarrow}A$ είναι η παρουσίαση των αντικειμένων $T \in \mathscr{C}_0$ σαν μια οικογένεια 'ινών' ή γενικευμένων ιδιοτήτων, επί του αντικειμένου A.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε, για δοθέν αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$, τις γενικευμένες ιδιότητες $p : A \longrightarrow V, \quad V \in \mathscr{C}_0$ του αντικειμένου A. Οδηγούμαστε έτσι στη θεώρηση της συνκατηγορίας-τεμάχιο $A{\downarrow}\mathscr{C}$, που ορίζεται ως ακολούθως:

(i) Ένα αντικείμενο της κατηγορίας $A \downarrow \mathscr{C}$ είναι μια γενικευμένη ιδιότητα $A \xrightarrow{p} V, \quad V \in \mathscr{C}_0$.

(ii) Ένα βέλος της κατηγορίας $A{\downarrow}\mathscr{C}$ απο το αντικείμενο $A \xrightarrow{p} V$ στο αντικείμενο $A \xrightarrow{p'} V'$ είναι ένα βέλος $(h : V \longrightarrow V') \in \mathscr{C}_1$ τέτοιο ώστε, το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dd, dashed, "h"] \\ A \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "p'"'] & \\ & V' \end{tikzcd}$$

(iii) Έστω τα αντικείμενα $p : A \longrightarrow V$, $p' : A \longrightarrow V'$, $p'' : A \longrightarrow V''$, και τα βέλη, $h : T \longrightarrow T'$, $h' : T' \longrightarrow T''$. Τότε η σύνθεση των βελών $h \circ h'$ δίδεται από το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "h"] \arrow[dd, dashed, bend left=60, "h' \circ h"] \\ A \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "p'"] \arrow[dr, "p''"'] & V' \arrow[d, "h'"] \\ & V'' \end{tikzcd}$$

Πολλές φορές, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, η μετάβαση από μια κατηγορία $\mathscr{C}$ στην κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C} \downarrow A$ γενικότερα σε μια κατηγορία βελών (συνηθισμένων βελών, συναρτητών, φυσικ. μεστσχ., και κυρίως προδραγμάτων) απλοποιεί έννοιες της κατηγορίας $\mathscr{C}$. Τέτοιου είδους μεταβάσεις έχουν να κάνουν με ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά των κατηγοριών, *την μεταβλητότητα*. Η μετάβαση από μια κατηγορία $\mathscr{C}$ σε μια κατηγορία βελών, ισοδυναμεί με μια μετάβαση από ένα σχετικά σταθερό πλαίσιο αναφοράς σε ένα με περισσότερη μεταβλητότητα. Αυτό ακριβώς αποτελεί μια μέθοδο μελέτης χαρακτηριστικών της Θεωρίας Κατηγοριών. Αν για παράδειγμα έχουμε ένα μεταβαλλόμενο στοιχείο $T \to A$ στην $\mathscr{C}$ τότε η μετάβαση στην κατηγορία $\mathscr{C}{\downarrow}T$ μετατρέπει το μεταβαλλόμενο ή τοπικό στοιχείο x σε ολικό στοιχείο! Έτσι *η κόμμα κατηγορίες είναι χρήσιμες στο να εκφράζουμε μεταβαλλόμενες έννοιες με στατικό τρόπο*. Αυτό αντιστοιχεί με την τεχνική 'σταματήματος' ενός κινητού, π.χ. ενός αεροπλάνου, με το να κινείται κανείς με την ίδια ταχύτητα, δίπλα στο αεροπλάνο! Ένα άλλο μαθηματικό παράδειγμα βρίσκουμε στο [107],

> «Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την έννοια 'συνεχής συνάρτηση με πραγματικές τιμές επί ενός τοπολογικού χώρου X' (ερμηνευμένη σε έναν τόπο **S** σταθερών συνόλων). Κάθε τέτοια συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας πραγματικός αριθμός (ή ποσότητα) πού μεταβάλλεται συνεχώς επί του X. Ας θεωρήσουμε τώρα τον τόπο Shv(X) των δραγμάτων πάνω στο X. Εδώ τα πάντα μεταβάλλονται (συνεχώς) επί του X, έτσι η μετατόπιση από τον **S** στο Shv(X) ουσιαστικά ισοδυναμεί με την ενσωμάτωση κάποιου σε ένα πλαίσιο το όποιο είναι, σαν να λέμε, αυτό το ίδιο 'μετακινούμενο μαζί' με τη μεταβολή πάνω στο X των δοσμένων μεταβαλλόμενων πραγματικών αριθμών. Αυτό έχει ως συνέπεια να μην 'παρατηρείται' η μεταβολή κάθε μεταβαλλόμενου πραγματικού αριθμού στο Shv(X)· Επομένως θεωρείται εκεί, ότι είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Με αυτό τον τρόπο η έννοια 'πραγματική συνάρτηση συνεχής επί του X' μετασχηματίζεται στην έννοια 'πραγματικός αριθμός' όταν ερμηνεύεται στο Shv(X). (Για να είμαστε ακριβείς, τα αντικείμενα στο Shv(X) πού ικανοποιούν τη συνθήκη να είναι (Dedekind) πραγματικοί αριθμοί, αντιστοιχούν, μέσω του γεωμετρικού μετασχηματισμού $\mathbf{S} \to$ Shv(X), στις πραγματικές συναρτήσεις που είναι συνεχείς επί του X). Αντίστροφα, η έννοια 'πραγματικός αριθμός' ερμηνευμένη στον Shv(X), αντιστοιχεί στην έννοια 'πραγματική συνάρτηση, συνεχής επί του X' ερμηνευμένη στον **S**. Αυτή η παρατήρηση παρέχει τη βάση για διάφορες αποδείξεις ανεξαρτησίας στην ιντουϊσιονιστική ανάλυση (ανάλυση ερμηνευμένη στον Shv(X): βλ. [118]).»

Λόγω της γενικότερης σπουδαιότητας των κόμμα κατηγοριών θα δώσουμε στη συνέχεια την γενική κατασκευή μιας κόμμα κατηγορίας. Η γενική αυτή κατασκευή βασίζεται στην ύπαρξη συναρτητών. Επιθυμούμε να θεωρήσουμε την μεταβολή π.χ. στην κατηγορία $\mathscr{C}$. Έστω επίσης ένας συναρτητής, $F : \mathscr{T} \to \mathscr{C}$ μεταβαλλόμενο στοιχείο της $\mathscr{C}$ στην **Cat**. Είναι φανερό ότι η ύπαρξη του συναρτητή F περιορίζει την δυνατότητα μεταβολής στην $\mathscr{C}$. Έτσι η κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C}{\downarrow}T$ μπορεί να πάρει και τη μορφή $F[\mathscr{T}]{\downarrow}T$. Εμμέσως δηλαδή ο τύπος μεταβολής των γεν. στοιχείων του $A \in \mathscr{C}_0$ εξαρτάται ή δευσμεύεται από την κατηγορία $\mathscr{T}$ που επιβάλει τον τύπο μεταβολής. Χρειαζόμαστε ακόμα και την επιλογή του $A \in \mathscr{C}_0$. Έτσι για να ορίσουμε την κόμμα κατηγορία $(F[\mathscr{T}]){\downarrow}A \equiv F{\downarrow}A$, χρειαζόμαστε έναν συναρτητή $F : \mathscr{T} \to \mathscr{C}$ που θα καθορίζει τον τύπο μεταβολής στην κατηγορία $\mathscr{C}$ και έναν συναρτητή $\mathbb{1} \to \mathscr{C}$ που θα επιλέγει το αντικείμενο

$A \in \mathscr{C}_0$. Με διαγράμματα έχουμε,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathscr{T} \arrow[dr, "F"'] & & \mathbb{1} \arrow[dl, "G"] \\ & \mathscr{C} & \end{tikzcd} \quad \text{με} \quad \begin{array}{rcl} G : \mathbb{1} & \rightarrow & \mathscr{C} \\ * & \mapsto & G(*) = A \end{array}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέλουμε να θεωρήσουμε τις γενικευμένες ιδιότητες ενός τυχόντος αντικειμένου $A \in \mathscr{C}_0$, όπου τα συν-πεδία ορισμού δευσμεύονται από έναν συναρτητή $G : \mathscr{V} \rightarrow \mathscr{C}$. Τότε έχουμε $A{\downarrow}(G[\mathscr{V}]) \equiv A{\downarrow}G$, που εκφράζει τις γενικευμένες ιδιότητες του $A \in \mathscr{C}_0$ δοθείσης της δεύσμευσης του G. Έχουμε τότε την ακόλουθη κατάσταση,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathbb{1} \arrow[dr, "F"'] & & \mathscr{V} \arrow[dl, "G"] \\ & \mathscr{C} & \end{tikzcd} \quad \text{με} \quad \begin{array}{rcl} F : \mathbb{1} & \rightarrow & \mathscr{C} \\ * & \mapsto & F(*) = A \end{array}$$

Στη γενική περίπτωση έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

2.4.7 Ορισμός. Έστω $\mathscr{T} \xrightarrow{F} \mathscr{C} \xleftarrow{G} \mathscr{V}$ δύο συναρτητές. Η **κόμμα κατηγορία** $F{\downarrow}G$ ορίζεται ως ακολούθως:

(i) $(F{\downarrow}G)_0 := \{(A, f, B) \mid A \in \mathscr{T}_0,\ B \in \mathscr{V}_0 \ \ \& \ \ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(A), G(B))\}$
Έτσι ένα αντικείμενο παρίσταται σχηματικά ως ακολούθως:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{T}_0 \ni A \arrow[dr, mapsto] & (A, f, B) & B \in \mathscr{V}_0 \arrow[dl, mapsto] \\ & F(A) \arrow[r, "f \in \mathscr{C}_1"] & G(B) \end{tikzcd}$$

(ii) Οι Μορφισμοί $(F{\downarrow}G)_1$ της κατηγορίας $(F{\downarrow}G)$ αποτελούνται από ζεύγη μορφισμών $(g, h) \in \mathscr{T}_1 \times \mathscr{V}_1$ τέτοια ώστε αν $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(A, A')$ και $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(B, B')$ και για κάθε ζεύγος αντικειμένων $(A, f, B), (A', f', B')$ το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμετεθετικό,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, mapsto] \arrow[ddd, "g"'] & & & B \arrow[dl, mapsto] \arrow[ddd, "h"] \\ & F(A) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(g)"'] \arrow[dr, dotted, "\circlearrowleft" description] & G(B) \arrow[d, "G(h)"] & \\ & F(A') \arrow[r, "f'"'] & G(B') & \\ A' \arrow[ur, mapsto] & & & B' \arrow[ul, mapsto] \end{tikzcd} \quad \text{με} \quad f' \circ F(g) = G(h) \circ f$$

Έτσι, $(F{\downarrow}G)_1 \subseteq \bigsqcup_{\substack{A,A'\in\mathscr{T}\\ B,B'\in\mathscr{V}}} (\mathrm{Hom}_{\mathscr{T}}(A,A') \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(B,B'))$

Η σύνθεση των βελών ορίζεται ως,

$$(g',h')\circ(g,h) = (g'\circ g, h'\circ h) \quad \text{και} \quad 1_{(A,f,B)} = (1_A, 1_B)$$

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε και κάποιους συναρτητές-προβολές ως ακολούθως,

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : (F{\downarrow}G) & \to & \mathscr{T}, \\ (A,f,B) & \mapsto & A \\ (f,h) & \mapsto & f \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \pi_2 : (F{\downarrow}G) & \to & \mathscr{V} \\ (A,f,B) & \mapsto & B \\ (f,h) & \mapsto & h \end{array}$$

Κάνοντας χρήση του παραπάνω ορισμού (Ορισμός 2.4.7(ii)), είναι φανερό ότι μπορούμε να ορίσουμε έναν φ.μ. $\alpha : F\circ\pi_1 \Rightarrow G\circ\pi_2$ που η (A,f,B)-συνιστώσα είναι η $\alpha_{(A,f,B)} = f$. Δηλαδή ο φ.μ.,

$$\begin{tikzcd} (F{\downarrow}G) \arrow[r, bend left, "F\circ\pi_1"] \arrow[r, bend right, "G\circ\pi_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

ορίζεται από την οικογένεια βελών $(FA \xrightarrow{f} GB)_{(A,f,B)\in(F{\downarrow}G)_0}$.

Ειδικές Περιπτώσεις

- Αν $\mathscr{V} = \mathbb{1}$ και $G(*) = A$ γράφουμε $F{\downarrow}A$ αντί για $F{\downarrow}G$, όπου $\mathbb{1}$ είναι η τετριμμένη κατηγορία με ένα αντικείμενο και ένα (ταυτοτικό) βέλος.
- Αν $\mathscr{T} = \mathbb{1}$ και $F(*) = A$ γράφουμε $A{\downarrow}G$ αντί για $F{\downarrow}G$,
- Αν $\mathscr{V} = \mathscr{C}$ και $G = 1_{\mathscr{C}}$ τότε γράφουμε $F{\downarrow}\mathscr{C}$ αντί για $F{\downarrow}G$.
- Αν $\mathscr{T} = \mathscr{C}$, $F = 1_{\mathscr{C}}$ και $\mathscr{V} = \mathscr{C}$, $F(*) = A$ τότε γράφουμε $A{\downarrow}\mathscr{C}$ αντί για $F{\downarrow}G$, λαμβάνοντας έτσι την συνκατηγορία-τεμάχιο (coslice category).
- Αν $\mathscr{T} = \mathscr{C}$, και $\mathscr{V} = \mathbb{1}$, $G(*) = A$ τότε γράφουμε $\mathscr{C}{\downarrow}A$ αντί για $F{\downarrow}G$, λαμβάνοντας έτσι την κατηγορία-τεμάχιο (slice category). Τέλος,
- Αν $\mathscr{T} = \mathscr{C} = \mathscr{V}$ και $F = 1_{\mathscr{C}} = G$ τότε γράφουμε $\mathscr{C}{\downarrow}\mathscr{C}$ αντί για $1_{\mathscr{C}}{\downarrow}1_{\mathscr{C}}$.

2.4.8 Ασκήσεις. 1. Έστω δύο παράλληλοι συναρτητές $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Να δειχθεί ότι ο $\alpha : F \Rightarrow G$ δηλαδή,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \end{tikzcd}$$

είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός ανν

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathscr{C} & \to & (F{\downarrow}G) \\ A & \mapsto & (\alpha_A : FA \to GA) \equiv (A, \alpha) \\ (f : A \to B) & \mapsto & (\alpha_A, \alpha_B) \ \text{ με, } \end{array} \quad \begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\alpha_B"'] & GB \end{tikzcd} \quad \text{και} \quad Gf \circ \alpha_A = \alpha_B \circ Ff$$

είναι ένας συναρτητής τέτοιος ώστε $\pi_1 \circ \alpha = \pi_2 \circ \alpha = 1_{\mathscr{C}}$, όπου $\pi_1 : (F{\downarrow}G) \to \mathscr{C}$ και $\pi_2 : (F{\downarrow}G) \to \mathscr{C}$ είναι οι προφανείς συναρτητές-προβολές.

Η άσκηση αυτή δείχνει ότι μια μεταβλητότητα τρίτης τάξης, όπως είναι ο φ.μ. ανάγεται σε μια μεταβλητότητα δεύτερης τάξης, όπως είναι ο συναρτητής, αρκεί να μεταβούμε στην κατάλληλη κόμμα κατηγορία!

2. Αν $\mathscr{T}, \mathscr{V}$ και $\mathscr{C}$ είναι διακριτές κατηγορίες τότε η $F{\downarrow}G$ είναι μια εφέλκυση στη κατηγορία **Set**.

3. Έστω $\hat{\mathbb{2}} := \mathbf{Set}^{\mathbb{2}^{op}}$, όπου $\mathbb{2}$ είναι ο διατακτικός αριθμός $2 := \{0, 1\}$, θεωρούμενος ως κατηγορία. Να δειχθεί ότι η κόμμα κατηγορία **Set**$\downarrow$**Set** είναι ισόμορφη με την συναρτητική κατηγορία $\hat{\mathbb{2}}$

2.5 Στοιχεία, Ιδιότητες και το Λήμμα του Yoneda.

2.5.1 Γενικευμένα Στοιχεία και Ιδιότητες

Όπως έχουμε αναπτύξει ξανά στο Εδάφιο 1.3.2, η έννοια του γενικευμένου ή μεταβαλλόμενου στοιχείου και η έννοια της γενικευμένης ιδιότητας, παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των κατηγορικών εννοιών αλλά και στην κατανόηση της μετάβασης από την Απλοϊκή Συνολοθεωρία στην Θεωρία Κατηγοριών. Είναι φανερό ότι η βασική συνολοθεωρητική σχέση $x \in A$ παύει να είναι η δύναμη-οδηγός, και αντ' αυτής έχουμε τώρα τη σύνθεση βελών και την καθολικότητα.

Οι βασικές πηγές της γενίκευσης της εννοίας του σημείου και του 'χώρου' είναι βασικά τρείς:

(i) Η Αλγεβρική Γεωμετρία. Η Αλγεβρική Γεωμετρία είχε από καιρού το βασικό πρόβλημα εξισώσεων που δεν είχαν λύση. Αυτό σήμαινε ότι ότι οι χώροι που χρησιμοποιούσαν δεν περιήχαν σημεία που θα μπορούσαν να είναι λύσεις των δοσμένων εξισώσεων. Κάθε γενίκευση της έννοιας του χώρου εμπεριείχε και μια αντίστοιχη γενίκευση της έννοιας του 'σημείου' βασικού συστατικού του χώρου. Έτσι εδώ παρουσιάζονται ποικίλες μορφές 'σημείων', βλ. [140, §8.13 What is a point?] καθώς και το [113].

(ii) Η Μη-Συμβατική Ανάλυση του Robinson. Η επιτυχής εισαγωγή απειροστών, σαν 'ιδεώδη' ή 'φανταστικά' σημεία των πραγματικών αριθμών, είχε ως συνέπεια τον εξαναγκασμό σε μια γενίκευση της κλασικής έννοιας του σημείου. Για παράδειγμα το σημείο $0 \in \mathbb{R}$, μεταλλάσσονταν σε δακτύλιο στο ${}^*\mathbb{R}$, αποκαλύπτοντας έτσι ότι, «τα σημεία έχουν δομή». Η έννοια της μονάδας (monad) ήταν κεντρική πρός την κατεύθυνση αυτή.

(iii) Τα Μοντέλα με τιμές σε μια άλγεβρα Boole (Scott-Solovay). Τα μοντέλα εξαναγκασμού του Cohen και τα ισοδυναμά τους μοντέλα με τιμές σε μια άλγεβρα Boole, ήταν άλλη μια μέθοδος εισαγωγής 'ιδεωδών' ή 'φανταστικών' στοιχείων.

Τελικά ο Grothendieck, αλλά αργότερα και οι Lawvere και Tierney, πρότειναν την έννοια του 'τόπου' ως την τελική γενίκευση της έννοιας του 'χώρου' και του μορφισμού γενικά, ως τη γενίκευση της έννοιας του 'σημείου'. Ειδικά ο Grothendieck πολλές φορές χρησιμοποιεί ως 'σημείο' έναν ειδικό συναρτητή μεταξύ τόπων. Μάλιστα αν είναι έτσι, μπορούμε να μιλάμε και για την 'ομαδα αυτομορφισμών' ενός συναρτητή-σημείου $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, δηλαδή του φυσικούς μετασχηματισμούς $\Phi : T \Rightarrow T$ που έχουν αντίστροφο. Έτσι ένα σημείο έχει ομάδα συμμετρίας! Βλ. και [113] για μια γενική σύνοψη της Πρωτεϊκής έννοιας του 'σημείου'.

Έστω μια τυχούσα κατηγορία $\mathscr{C}$, τότε κάθε βέλος $x : T \longrightarrow A, \quad T, A \in \mathscr{C}_0$ θα το θεωρούμε ως ένα μεταβαλλόμενο ή γενικευμένο στοιχείο του A που ορίζεται υπεράνω του 'χρονοαντικειμένου' ή 'πεδίου μεταβολής', ή 'σταδίου ορισμού' T. Πολλές φορές θα λέμε για το x ότι είναι ένα T- στοιχείο του A. Για να παρουσιάσουμε τις 'κατηγορικές ιδιότητες' σαν ένα είδος συνολοθεωρητικής γενίκευσης, πράγμα που θα διαφωτίσει διαισθητικά τη Θεωρία Κατηγοριών, θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό, $x \in^T A$ αντί του ισοδύναμου $x : T \longrightarrow A$. Αν η κατηγορία έχει 'τελικό αντικείμενο' 1, τότε γενικευμένα στοιχεία με $1 = T$ θα λέγονται **ολικά** (global) στοιχεία, και θα συμπίπτουν με τα κλασικά στοιχεία του A. Ειδικά στην κατηγορία $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, αν $F \in \mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ είναι ένα αντικείμενο-συναρτητής, τότε ένα μεταβαλλόμενο στοιχείο του F είναι απλά ένας φυσικός μετασχηματισμός, $T \Rightarrow F$, όπου T ένας τυχόν συναρτητής στην $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. Η σημασία αυτών των γενικευμένων στοιχείων, βρίσκεται στην κατανόηση του Λήμματος του Yoneda[14], μέσω γενικευμένων στοιχείων, βλ. και [104, 139].

[14] Ο Καθ. Nobuo Yoneda (1930-1996), είναι στην ουσία μια άγνωστη στη δύση προσωπικότητα, παρ' όλο που το ομώνυμο λήμμα του είναι ίσως το πιό διάσημο αποτέλεσμα στη Θεωρία Κατηγοριών. Σπούδασε Μαθηματικά στο Παν/μιο του Τόκυο, στο δε τελευταίο έτος σπουδών του, παρακολούθησε το σεμινάριο του Καθηγητή Shokiti Iyanaga και έτσι ενδιαφέρθηκε για την Αλγεβρική Τοπολογία. Ο Καθ, Yoneda είχε την τύχη να συναντηθεί με τους Eilenberg και MacLane. Όταν ο Eilenberg επισκέφτηκε την Ιαπωνία, ο νεαρός τότε Yoneda είχε αναλάβει την ξενάγησή του. Αυτή ακριβώς την εποχή το βιβλίο των Cartan-Eilenberg *Homological Algebra*, Princeton, Univ. Press, Princeton, NJ, 1956, ήταν ακριβώς στο στάδιο των διορθώσεων και ο Yoneda είχε την ευκαιρία να μελετήσει αλλά και να συζητήσει με τον Eilenberg τα θέματα του βιβλίου. Αργότερα βρέθηκε με τον Eilenberg στη Γαλλία. Την εποχή αυτή επισκέθηκε την Γαλλία και ο MacLane για να συλλέξει πληροφορίες για το βιβλίο του "Categories for the Working Mathematician" που τότε έγραφε. Είχε βεβαίως και μια συνάντηση με τον Yoneda. Το αποτέλεσμα αυτής της συζήτησης, αργότερα συνοψίστηκε και ονομάστηκε από τον MacLane 'Λήμμα του Yoneda'. Οι πληροφορίες αυτές προέρχονται από Καθ. Yoshiki Kinoshita και εμφανίστηκαν στη λίστα FOM.

2.5.1 Ασκήσεις. Να δειχθεί ότι αν $\langle M, *, e\rangle$ είναι ένα μονοειδές τότε υπάρχει μόνον ένα ολικό στοιχείο, δηλ. το $\mathrm{Hom}(1, M)$ περιέχει ακριβώς ένα ολικό στοιχείο. Αυτό δείχνει ότι τα μονοειδή δεν έχουν αρκετά ολικά στοιχεία για να διαχωρίσουν π.χ. δύο διαφορετικούς μορφισμούς $\langle M, *, e\rangle \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} \langle M', *', e'\rangle$, σε αντίθεση με την κατηγορία, **Set**.

2.5.2 Θεώρημα. *Έστω $f : A \longrightarrow B$ και $g : A \longrightarrow B$ δύο βέλη της κατηγορίας $\mathscr{C}$. Τότε,*

$$f = g \quad \textit{ανν} \quad (\forall T \in \mathscr{C}_0)(\forall x \in^T A)[f(x) = g(x)]$$

Δηλαδή δυό βέλη ταυτίζονται ανν συμφωνούν πάνω σε όλα τα T-στοιχεία για κάθε $T \in \mathscr{C}_0$.

Απόδ. . $(\Rightarrow)$ Έστω ότι $f = g$ τότε είναι φανερό ότι για κάθε $T \in \mathscr{C}_0$, και $x : T \to A$ έχουμε ότι, $f \circ x \equiv f(x) = g(x) \equiv g \circ x$. ⊣□
$(\Leftarrow)$ Έστω $T = A$ και $x = 1_A$ τότε εξ ορισμού έχουμε, $f(1_A) = g(1_A)$ και επομένως $f = f \circ 1_A = g \circ 1_A = g$. ⊣▮

Για δύο αντικείμενα $A, B \in \mathscr{C}_0$ έχουμε,

$$A = B \Leftrightarrow 1_A = 1_B$$

και από το Θεώρημα 2.5.2 έχουμε ότι,

$$A = B \Leftrightarrow (\forall T \in \mathscr{C}_0)(\forall x \in \mathscr{C}(T, A))[x \in^T A \Leftrightarrow x \in^T B]$$

Συνάγουμε έτσι ένα είδος ‘Αξιώματος Έκτασης,’ δηλ. ότι,

> Τα αντικείμενα $A, B \in \mathscr{C}_0$ ταυτίζονται ανν έχουν τα ίδια γενικευμένα στοιχεία, δηλαδή η ταυτότητα ενός αντικειμένου καθορίζεται από τα εισερχόμενα στο αντικείμενο βέλη!

Θα δούμε στη συνέχεια, ότι η παραπάνω αρχή συνδέεται στενά με το Λήμμα του Yoneda. Ιδιαίτερα το Λήμμα του Yoneda σχετίζεται περισσότερο με τα **μεταβαλλόμενα σύνολα**, ένα ειδικό τύπο ‘στοιχείων’. Έστω η συναρτητική κατηγορία $\mathsf{Func}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}) \equiv \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$. Οι συναρτητές της μορφής $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$, λέγονται **προδράγματα** (presheaves) επί της $\mathscr{C}$, και εκλαμβάνονται ως ‘σύνολα που μεταβάλλονται επί της $\mathscr{C}$ ή $\mathscr{C}-$σύνολα, όταν θέλουμε να τονίσουμε την δράση της $\mathscr{C}$ επί της **Set**. Ο συμβολισμός δηλαδή ‘$\mathscr{C}-$σύνολα’ είναι ανάλογος του ‘M-σύνολα’ για την δράση των μονοειδών και ‘G-σύνολα’ για τη δράση των ομάδων. Μπορούμε δηλαδή να θεωρούμε συναρτητές του τύπου $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$, όπου $\mathscr{C}$ είναι μια μικρή κατηγορία (ένα γενικευμένο μονοειδές), ως μια δράση της $\mathscr{C}$ επί της **Set**, σαν μια γενίκευση της δράσης ενός μονοειδούς $\langle M, *, e\rangle$ επί ενός συνόλου X, δηλ. ομομορφισμών της μορφής,

$\alpha : \langle M, *, e\rangle \longrightarrow \langle X^X, \circ, 1_X\rangle$, βλ. [105, σελ. 63, 64-65] για περισσότερες λεπτομέρειες. Τα αντικείμενα της $\mathscr{C}$ εκλαμβάνονται ως 'παραμετρικός χώρος' για την μεταβολή των συνόλων, και στην ουσία αποτελούν 'απόψεις' σύμφωνα με τις οποίες θεωρούνται τα μεταβαλλόμενα σύνολα, τα δε βέλη της κατηγορίας $\mathscr{C}$ εκλαμβάνονται ως αλλαγές στις θεωρήσεις ή απόψεις με τις οποίες θεωρούνται τα μεταβαλλόμενα σύνολα. Για το θέμα των δράσεων μιας κατηγορίας στην κατηγορία **Set**, βλ. το [131, σελ. 171-176].

Το κλασικό παράδειγμα προδράγματος είναι: Αν για $\mathscr{C}$, πάρουμε το μ.δ.σ. $\langle \mathscr{O}, \supseteq\rangle$, θεωρούμενου ως κατηγορία, όπου $\mathscr{O}$ είναι τα ανοικτά υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου, τότε έχουμε την κλασική έννοια του προδράγματος συνόλων, ή των 'συνεχώς μεταβαλλόμενων συνόλων'.

2.5.2 Η Εμφύτευση του Yoneda

Το Λήμμα του Yoneda είναι ένα σπουδαίο αποτέλεσμα, που μας επιτρέπει να εμφυτεύσουμε μια κατηγορία $\mathscr{C}$ σε μια ειδική κατηγορία συναρτητών, που είναι 'προδράγματα' (presheaves), ή μεταβαλλόμενα σύνολα. Αυτό κάπως θυμίζει το Θεώρημα του Cayley στη Θεωρία Ομάδων, όπου μια ομάδα αναπαρίσταται με μια ομάδα μεταθέσεων ή συμμετριών, μεταβαλλόμενων σημείων δηλαδή. Αυτό μπορεί να κατανοηθεί ως ακολούθως.

Ένα **ομαδοειδές** (groupoid) είναι μια κατηγορία στην οποία κάθε μορφισμός είναι ισομορφισμός. Ένα ομαδοειδές με ένα αντικείμενο είναι μια ομάδα. Συναρτητές οριζόμενοι σε τέτοιες κατηγορίες και με τιμές στην κατηγορία **Set** είναι αυτό που ονομάζουμε G-σύνολα (G-sets). Το Λήμμα του Yoneda στην περίπτωση αυτή, συμπίπτει με το Θεώρημα Αναπαράστασης του Cayley. Ουσιαστικά λοιπόν το Λήμμα του Yoneda μας υποδεικνύει ότι αντί να μελετούμε μια (μικρή) κατηγορία $\mathscr{C}$, μπορούμε να μελετούμε την κατηγορία συναρτητών $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} \equiv \widehat{\mathscr{C}}$, από την $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ στην **Set**. Όπως είναι γνωστό ένα σύνολο συναρτήσεων με ένα συγκριμένο συν-πεδίο ορισμού, κληρονομεί με σημειακό τρόπο την δομή αυτού του συν-πεδίου. Έτσι η άγνωστη ίσως κατηγορία $\mathscr{C}$ μελετάται σε ένα 'φιλικό περιβάλλον' αυτό της **Set**, που επιπρόσθετα είναι και συν-πλήρης (υπαρχουν όλα τα συν-όρια), αλλά έχει και άλλη επί πλέον δομή. Για την μεταφορά της δομής της **Set** σ' αυτήν της $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ βλ. [143, σελ. 81]. Ακόμη και αν η $\mathscr{C}$, δεν έχει κάποια ή όλα τα συν-όρια, μπορούμε πάντοτε να την θεωρούμε ως μέρος της $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ η οποία είναι συν-πλήρης (έχει όλα τα συν-όρια). Πέρα όμως από αυτό, η εμφύτευση αυτή επιτρέπει την 'αποκάλυψη κρυμμένων στοιχείων' της κατηγορίας $\mathscr{C}$, που επιτρέπουν μια πιό ολοκληρωμένη μελέτη αυτής. Αξίζει κανείς να θυμηθεί ότι το ίδιο φαινόμενο συνέβει όταν εμφυτεύσαμε το $\mathbb{R}$ στο $^*\mathbb{R}$, βλ. [41, Κεφ. 3]. Έκεί τα 'κρυμμένα στοιχεία' ήταν τα απειροστά του $\mathbb{R}$.

Θα μπορούσε λοιπόν να πεί κανείς ότι το βαθύτερο νόημα του Λήμματος του Yoneda, είναι η 'παθολογία του σημείου', ή αλλοιώς **η Πρωτεϊκή**[15] **φύση**

[15] Ο Πρωτέας είναι μια αρχαία θεότητα της θάλασσας, που ο Όμηρος τον αποκαλούσε «άλιο γέροντα», και ο οποίος είχε την ικανότητα να αλλάζει μορφές. Έτσι μια έννοια λέγεται Πρωτεϊκή αν μπορεί να εμφανίζεται με πολλές μορφές!

της έννοιας του σημείου. Για το σκοπό αυτό και η εμφύτευση πρέπει να είναι η κατάλληλη. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τα 'γενικευμένα' ή 'μεταβαλλόμενα στοιχεία' καθώς επίσης και τις 'γενικευμένες ιδιότητες' για να εκφράσουμε την ουσία του Λήμματος του Yoneda.

Πρίν προχωρήσουμε όμως, αξίζει να συνοψίσουμε τους Hom-συναρτητές σε σχέση με τα μεταβαλλόμενα στοιχεία και τις γενικευμένες ιδιότητες. Έστω μια τοπικά μικρή κατηγορία $\mathscr{C}$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις:

(i) **Τυχόν αλλά σταθερό πεδίο μεταβολής T.** Τότε, για τυχόν $X \in \mathscr{C}_0$, το σύνολο $H^T(X) \equiv \mathrm{Hom}(T, X)$ είναι το σύνολο των γενικευμένων στοιχείων του X με πεδίο μεταβολής T. Έχουμε τότε τον συναλλοίωτο συναρτητή,

$$\begin{aligned} H^T(-) : \mathscr{C} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ X &\mapsto H^T(X) \equiv \mathrm{Hom}(T, X), \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\mapsto (H^T(X) \xrightarrow{H^T(f)} H^T(Y)), \end{aligned}$$

με,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, dashed, "y=f\circ x:=H^T(f)(x)"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

(ii) **Τυχόν αλλά σταθερό συν-πεδίο μεταβολής V.** Για τυχόν $X \in \mathscr{C}_0$, το σύνολο $H_V(X) \equiv \mathrm{Hom}(X, V)$ είναι το σύνολο των γενικευμένων ιδιοτήτων του X με συν-πεδίο μεταβολής V. Έχουμε τότε τον ανταλλοίωτο συναρτητή,

$$\begin{aligned} H_V(-) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ X &\mapsto H_V(X) \equiv \mathrm{Hom}(X, V), \\ (X \xrightarrow{f} Y) &\mapsto (H_V(Y) \xrightarrow{H_V(f)} H_V(X)), \end{aligned}$$

με,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "H_V(f)(q):=q\circ f=p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ & V \end{tikzcd}$$

(iii) **Τυχόν αλλά σταθερό $A \in \mathscr{C}_0$ για το οποίο θέλουμε να θεωρήσουμε όλα τα γενικευμένα στοιχεία του, για τυχόντα πεδία μεταβολής $T \in \mathscr{C}_0$.** Έχουμε τότε, για τυχόν T, το σύνολο $\mathrm{Hom}(T, A) \equiv H_A(T)$ των γενικευμένων στοιχείων του A με πεδίο μεταβολής T και τον ανταλλοίωτο συναρτητή,

$$\begin{aligned} H_A(-) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ T &\mapsto H_A(T) \equiv \mathrm{Hom}(T, A), \\ (T_1 \xrightarrow{h} T_2) &\mapsto (H_A(T_2) \xrightarrow{H_A(h)} H_A(T_1)), \end{aligned}$$

με,

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, "h"] \arrow[dr, dashed, "H_A(h)(x_2):=x_2\circ h=x_1"'] & T_2 \arrow[d, "x_2"] \\ & A \end{tikzcd}$$

(iv) **Τυχόν αλλά σταθερό $A \in \mathscr{C}_0$ για το οποίο θέλουμε να θεωρήσουμε όλες τις γενικευμένες ιδιότητές του, για τυχόντα συν-πεδία μεταβολής $V \in \mathscr{C}_0$.**

Έχουμε τότε, για τυχόν V, το σύνολο $\mathrm{Hom}(A,V) \equiv H^A(V)$ των γενικευμένων ιδιοτήτων του A με συν-πεδίο μεταβολής V και τον συναλλοίωτο συναρτητή,

$$\begin{array}{rcl} H^A(-) : \mathscr{C} & \to & \mathbf{Set} \\ V & \mapsto & H^A(V) \equiv \mathrm{Hom}(A,V), \\ (V_1 \xrightarrow{h} V_2) & \mapsto & (H^A(V_1) \xrightarrow{H^A(h)} H^A(V_2)), \end{array} \quad \text{με,} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, dashed, "H^A(h)(p_1):=h \circ p_1"] & \\ V_1 \arrow[r, "h"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Πρώτα θα κατασκεύσουμε τους αντίστοιχους συναρτητές-εμφύτευσεις και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τις βασικές προτάσεις.

► **Η Εμφύτευση του Yoneda με βάση τα *γενικευμένα στοιχεία*.**

Η περίπτωση αυτή βασίζεται στον ανταλλοίωτο Hom-συναρτητή (iii), δηλαδή τον $\mathrm{Hom}(-,A) \equiv H_A : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Ο συναρτητής αυτός ονομάζεται (κυρίως στην Αλγεβρική Γεωμετρία) και 'συναρτητής γενικευμένων ή απλά, σημείων του αντικειμένου A'.

Έστω τώρα ένα βέλος $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathscr{C}_1$, τότε έχουμε τους συναρτητές H_A και H_B, το δε βέλος $(A \xrightarrow{f} B)$ επάγει στην συναρτητική κατηγορία $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ ένα αντίστοιχο βέλος, δηλαδή έναν φ.μ. $f^{\triangleright} : H_A(-) \Rightarrow H_B(-)$ ή,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left, "H_A(-)"] \arrow[r, bend right, "H_B(-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f^{\triangleright}"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

του οποίου η T-συνιστώσα ($T \in \mathscr{C}_0$), ορίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{array}{rcl} f^{\triangleright}_T : H_A(T) & \longrightarrow & H_B(T) \\ (T \xrightarrow{x} A) & \mapsto & (T \xrightarrow{f \circ x} B), \end{array} \quad \text{με,} \quad \begin{tikzcd} T \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, dashed, "f \circ x := f^{\triangleright}_T(x)"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Η οικογένεια $(f^{\triangleright}_T(x))_{T \in \mathscr{C}_0}$ είναι ένας φ.μ., έχουμε δηλαδή, $H_B(h) \circ f^{\triangleright}_{T_2} = f^{\triangleright}_{T_1} \circ H_A(h)$, όπου,

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[d, "\forall h"', "\in \mathscr{C}_1,"] \\ T_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_A(T_2) \arrow[r, "f^{\triangleright}_{T_2}"] \arrow[d, "H_A(h)"'] \arrow[dr, dotted] & H_B(T_2) \arrow[d, "H_B(h)"] \\ H_A(T_1) \arrow[r, "f^{\triangleright}_{T_1}"'] & H_B(T_1) \end{tikzcd} \quad \text{με,} \quad \begin{tikzcd} T_1 \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, dashed, "x_1"] \arrow[drr, dashed, bend left, "y_1 = f \circ x_1 = f^{\triangleright}_{T_1}(x_1)"] & & \\ & A \arrow[r, "f"] & B \\ T_2 \arrow[ur, "x_2"] \arrow[urr, bend right, "y_2 = f \circ x_2 = f^{\triangleright}_{T_2}(x_2)"'] & & \end{tikzcd}$$

Πράγματι, αν $(T_2 \xrightarrow{x_2} A) \in H_A(T_2)$ τότε,

$$\begin{aligned}(H_B(h) \circ f^{\triangleright}_{T_2})(x_2) &= H_B(h) \circ (f \circ x_2) \\ &= H_B(h)(y_2) \\ &= y_2 \circ h \\ &= y_1.\end{aligned}$$

και,

$$\begin{aligned}(f^{\triangleright}_{T_1}(x_1) \circ H_A(h))(x_2) &= f^{\triangleright}_{T_1}(H_A(h)(x_2)) \\ &= f^{\triangleright}_{T_1}(x_2 \circ h) \\ &= f^{\triangleright}_{T_1}(x_1) \\ &= f \circ x_1 = y_1\end{aligned}$$

Έχουμε έτσι κατασκευάσει ένα συναλλοίωτο συναρτητή,

$$\begin{aligned}Y^{\triangleright} : \mathscr{C} &\longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} \\ A &\mapsto Y^{\triangleright}(A) := \mathrm{Hom}(-, A) \equiv H_A(-), \\ (f : A \to B) &\mapsto (f^{\triangleright} : H_A(-) \Rightarrow H_B(-))\end{aligned}$$

που θα δείξουμε ότι είναι μια εμφύτευση της $\mathscr{C}$ στην συναρτητική κατηγορία $\widehat{\mathscr{C}}$. Με βάση την εμφύτευση αυτή ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ ταυτίζεται με τον Hom-συναρτητή $\mathrm{Hom}(-, A)$, δηλαδή με όλα τα γενικευμένα στοιχεία $T \to A$ για κάθε $T \in \mathscr{C}_0$. Συμπερασματικά λοιπόν,

- **Καθορισμός ένος αντικειμένου της** $\mathscr{C}$. Για να καθορίσουμε ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ αρκεί να καθορίσουμε όλα τα γενικευμένα στοιχεία του A, δηλ. όλα τα εισερχόμενα στο A, βέλη.

- **Κατασκευή ενός βέλους της** $\mathscr{C}$. Μπορούμε επίσης να ταυτίζουμε το μορφισμό $(f : A \to B) \in \mathrm{Hom}(A, B)$ με τον αντίστοιχο μορφισμό-φ.μ. , $(f^{\triangleright} : H_A(-) \Rightarrow H_B(-)) \in \mathrm{Nat}(H_A, H_B)$, και έτσι να ταυτίζουμε επίσης, από άποψη συμβολισμού, τα $f(x)$ και $f \circ x$. Επιπρόσθετα, αντί να κατασκευάσουμε το βέλος $(f : A \to B) \in \mathscr{C}_1$ στην $\mathscr{C}$, μπορούμε να κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο μορφισμό στην $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$, όπου λόγω της επιπρόσθετης δομής που διαθέτει, η κατασκευή είναι πιό εύκολη!

► **Η Εμφύτευση του Yoneda με βάση τις *γενικευμένες ιδιότητες*.**

Η περίπτωση αυτή βασίζεται στον Hom-συναρτητή (iv). Έτσι, για κάθε $A \in \mathscr{C}_0$, ορίζουμε τον συναλλοίωτο συναρτητή, $\mathrm{Hom}(A, -) \equiv H^A : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$.

Έστω τώρα ένα βέλος $(A \xrightarrow{f} B) \in \mathscr{C}_1$, τότε έχουμε τους συναρτητές H^A και H^B, το δε βέλος $(A \xrightarrow{f} B)$ επάγει στην συναρτητική κατηγορία $\widehat{\mathscr{C}}$ ένα αντίστοιχο βέλος, δηλαδή έναν φ.μ. $f^{\triangleleft} : H^B(-) \Rightarrow H^A(-)$ ή,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, bend left, "H^B(-)"] \arrow[r, bend right, "H^A(-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f^{\triangleleft}"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

του οποίου η V-συνιστώσα ($V \in \mathscr{C}_0$), ορίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{array}{rcl} f_V^{\triangleleft} : H^B(V) & \longrightarrow & H^A(V) \\ (B \xrightarrow{q} V) & \mapsto & (A \xrightarrow{p=q\circ f} V), \end{array} \quad \text{με,} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "p=q\circ f:=f_V^{\triangleleft}(q)"'] & B \arrow[d, "q"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Η οικογένεια $(f_V^{\triangleleft})_{V\in\mathscr{C}_0}$ είναι ένας φ.μ. έχουμε δηλαδή,

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[d, "\forall h"', "\in\mathscr{C}_1,"] \\ V_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^B(V_1) \arrow[r, "f_{V_1}^{\triangleleft}"] \arrow[d, "H^B(h)"'] \arrow[dr, dotted] & H^A(V_1) \arrow[d, "H^A(h)"] \\ H^B(V_2) \arrow[r, "f_{V_2}^{\triangleleft}"'] & H^A(V_2) \end{tikzcd} \quad \text{με,} \quad \begin{tikzcd} & & V_1 \arrow[dd, "h"] \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[urr, dotted, "p_1=q_1\circ f"] \arrow[drr, dotted, "p_2=q_2\circ f"'] & B \arrow[ur, "q_1"] \arrow[dr, "q_2=v\circ q_1"'] & \\ & & V_2 \end{tikzcd}$$

και $H^A(h)\circ f_{V_1}^{\triangleleft} = f_{V_2}^{\triangleleft}\circ H^B(h)$. Πράγματι, αν $(B \xrightarrow{q_1} V_1) \in H^B(V_1)$ τότε,

$$\begin{array}{rcl} (H^A(h)\circ f_{V_1}^{\triangleleft})(q_1) & = & H_A(h)(q_1\circ f) \\ & = & h\circ(q_1\circ f) \\ & = & h\circ p_1 \\ & = & p_2. \end{array}$$

και,

$$\begin{array}{rcl} (f_{V_2}^{\triangleleft}\circ H^B(h))(q_1) & = & f_{V_2}^{\triangleleft}(H^B(h)(q_1)) \\ & = & f_{V_2}^{\triangleleft}(h\circ q_1) \\ & = & f_{V_2}^{\triangleleft}(q_2) \\ & = & q_2\circ f = p_2 \end{array}$$

Το οποίο έπρεπε να δείξουμε.

Έχουμε έτσι κατασκευάσει έναν ανταλλοίωτο συναρτητή:

$$\begin{array}{rcl} Y^{\triangleleft} : \mathscr{C} & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{C}} \\ A & \mapsto & Y^{\triangleleft}(A) := H^A(-) \equiv \mathrm{Hom}(A,-) \\ (f : A \to B) & \mapsto & (f^{\triangleleft} : H^B(-) \Rightarrow H^A(-)) \end{array}$$

που θα δείξουμε ότι είναι μια εμφύτευση της $\mathscr{C}$ στην συναρτητική κατηγορία $\widehat{\mathscr{C}}$. Με βάση την εμφύτευση αυτή ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ ταυτίζεται με τον Hom-συναρτητή $\mathrm{Hom}(A,-)$, δηλαδή με όλες τις γενικευμένες ιδιότητες $A \to V$ για κάθε $V \in \mathscr{C}_0$. Συμπερασματικά λοιπόν,

• **Καθορισμός ένος αντικειμένου της** $\mathscr{C}$. Για να καθορίσουμε ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ αρκεί να καθορίσουμε όλες τις γενικευμένες ιδιότητες του A, δηλ. όλα τα εξερχόμενα του A, βέλη.

• **Κατασκευή ενός βέλους της** $\mathscr{C}$. Μπορούμε επίσης να ταυτίζουμε το μορφισμό $(f : A \to B) \in \mathrm{Hom}(A, B)$ με τον αντίστοιχο μορφισμό-φ.μ., $(f^{\triangleleft} : H^B(-) \Rightarrow H^A(-)) \in \mathrm{Nat}(H_B, H_A)$, και έτσι να ταυτίζουμε επίσης, από άποψη συμβολισμού, τα $q(f)$ και $p \circ f$. Επιπρόσθετα, αντί να κατασκευάσουμε το βέλος $(f : A \to B) \in \mathscr{C}_1$ στην $\mathscr{C}$, μπορούμε να κατασκευάζουμε τον αντίστοιχο μορφισμό στην $\widehat{\mathscr{C}}$, όπου λόγω της επιπρόσθετης δομής που διαθέτει, η κατασκευή είναι πιό εύκολη!

Συνοψίζοντας τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, έχουμε,

• **Καθορισμός ένος αντικειμένου της** $\mathscr{C}$. Για να καθορίσουμε ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ αρκεί, ή να καθορίσουμε όλα τα γενικευμένα στοιχεία του A, δηλ. όλα τα εισερχόμενα στο A, βέλη, ή όλες τις γενικευμένες ιδιότητες του A, δηλ. όλα τα εξερχόμενα του A, βέλη.

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιους αναγκαίους ορισμούς.

2.5.3 Ορισμός. Όπως ήδη έχουμε δεί κάθε συναρτητής, $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ επάγει μιά συνάρτηση,

$$F_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FA, FB), \quad A, B \in \mathscr{C}_0.$$

(i) Ένας συναρτητής $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ θα λέγεται **πιστός** (faithful) ανν για κάθε $A, B \in \mathscr{C}_0$ η συνάρτηση F_{AB} είναι ένριψη, και

(ii) **μεστός** (full) ανν για κάθε $A, B \in \mathscr{C}_0$ η συνάρτηση F_{AB} είναι επίρριψη.

Ένας μεστός συναρτητής δεν είναι αναγκαία μια επίρριψη επί των αντικείμένων $\mathscr{C}_0$ ή επί των βελών $\mathscr{C}_1$.

Σημειώστε επίσης ότι μια μεστή υποκατηγορία $\mathscr{C}$ της $\mathscr{D}$ είναι αυτή της οποίας ο συναρτητής εμφύτευσης είναι πιστός και μεστός.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση της εμφύτευσης του Yoneda που βασίζεται στις γενικευμένες ιδιότητες. Η περίπτωση της εμφύτευσης του Yoneda που βασίζεται στα γενικευμένα στοιχεία είναι παρόμοια. Θα απόδείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

2.5.4 Θεώρημα. *(* **Εμφύτευση του Yoneda** *) Ο συναρτητής,*

$$\begin{array}{rcl} Y^{\triangleleft} : \mathscr{C} & \longrightarrow & \widehat{\mathscr{C}} \\ A & \mapsto & Y^{\triangleleft}(A) := H^A(-) \equiv \mathrm{Hom}(A, -) \\ (f : A \to B) & \mapsto & (Y^{\triangleleft}(f) \equiv f^{\triangleleft} : H^B(-) \Rightarrow H^A(-)) \end{array}$$

είναι πιστός και μεστός, δηλ. η κατηγορία $\mathscr{C}$ είναι στην ουσία μια μεστή υποκατηγορία της $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$.

Απόδ. Ο συναρτητής, $Y^{\triangleleft} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$ επάγει για κάθε $A, B \in \mathscr{C}_0$ μια συνάρτηση,

$$Y^{\triangleleft}_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Nat}(Y^{\triangleleft}(B), Y^{\triangleleft}(A))$$

Για να δείξουμε ότι ο $Y^{\triangleleft}$ είναι πιστός αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $Y^{\triangleleft}_{AB}$ είναι ένριψη για κάθε $A, B \in \mathscr{C}_0$. Πράγματι, έστω $A, B \in \mathscr{C}_0$ και $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ με $f \neq g$. Τότε έχουμε, $Y^{\triangleleft}(f) \equiv f^{\triangleleft}$, η δε B-συνιστώσα του φ.μ. $f^{\triangleleft}$ είναι η,

$$f^{\triangleleft}_B : H^B(B) \longrightarrow H^B(A) \not\!\!/ \ (B \xrightarrow{h} B) \mapsto (A \xrightarrow{h \circ f} B)$$

Ειδικά για $1_B \in H^B(B)$ έχουμε, $f^{\triangleleft}_B(1_B) := 1_B \circ f = f$. Ομοίως για το $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ έχουμε το φ.μ. $g^{\triangleleft}$ του οποίου η B-συνιστώσα είναι η,

$$g^{\triangleleft}_B : H^B(B) \longrightarrow H^B(A) \not\!\!/ \ (B \xrightarrow{h} B) \mapsto (A \xrightarrow{h \circ g} B)$$

Ειδικά για $h = 1_B$, έχουμε, $g^{\triangleleft}_B(1_B) = 1_B \circ g = g$. Έτσι αν $f \neq g$ τότε και $f^{\triangleleft}_B \neq g^{\triangleleft}_B$ για κάθε $B \in \mathscr{C}_0$ και επομένως $Y^{\triangleleft}(f) = f^{\triangleleft} \neq g^{\triangleleft} = Y^{\triangleleft}(g)$. ⊣□

Για να δείξουμε ότι ο συναρτητής $Y^{\triangleleft}$ είναι μεστός θα πρέπει να δείξουμε ότι αν $\varphi : H^B(-) \Rightarrow H^A(-)$ είναι ένας τυχόν φ.μ., στοιχείο του $\mathrm{Nat}(H^B, H^A)$, τότε υπάρχει βέλος $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ με $Y^{\triangleleft}(f) = \varphi$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι V-συνιστώσες, $V \in \mathscr{C}_0$ των φ.μ $f^{\triangleleft}_V$ και φ_V είναι ίσες. Ακριβέστερα θα δείξουμε ότι $\varphi_V(q) = q \circ f = f^{\triangleleft}_V(q)$ για κάποιο βέλος $f : A \to B$. Ορίζουμε λοιπόν, $f := \varphi_B(1_B)$. Επειδή ο φ είναι φ.μ. θα έχουμε το ακόλουθο 'φυσικό τετράγωνο',

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\forall q"'] \\ V \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} H^B(B) \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[d, "H^B(q)"'] \arrow[dr, dotted] & H^A(B) \arrow[d, "H^A(q)"] \\ H^B(V) \arrow[r, "\varphi_V"'] & H^A(V) \end{tikzcd} \quad \text{με, } \begin{tikzcd} 1_B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \varphi_B(1_B) = f \arrow[d, mapsto] \\ H^B(q)(1_B) \arrow[r, mapsto] & \varphi_V(q) = H^A(q)(f) = q \circ f \end{tikzcd}$$

Έτσι με την επιλογή $f := \varphi_B(1_B) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, έχουμε ότι, $f^{\triangleleft}_V = \varphi_V$ για κάθε $V \in \mathscr{C}_0$. ⊣■

2.5.3 Καθολικότητες, Αναπαραστάσιμοι Συναρτητές και Το Λήμμα του Yoneda

► Αρχικά και Τελικά Αντικείμενα. Καθολικές Ιδιότητες

Τα αρχικά και τελικά αντικείμενα είναι ένα είδος αρχετύπων για κάθε άλλο καθολικό αντικείμενο, αφού κάθε άλλο καθολικό αντικείμενο ανάγεται σ' αυτά, όπως θα γίνει φανερό στη συνέχεια.

2.5.5 Ορισμός. Ένα αντικείμενο, συμβολικά 0, σε μια κατηγορία $\mathscr{C}$ θα ονομάζεται **αρχικό αντικείμενο** ανν ***για κάθε*** $A \in \mathscr{C}_0$, **υπάρχει ακριβώς** ένα βέλος $0 \xrightarrow{!} A$, από το 0 στο A, δηλ. το σύνολο $\mathrm{Hom}(0, A)$ περιέχει ακριβώς ένα βέλος. Θα συμβολίζουμε στο εξής οποιοδήποτε μοναδικό βέλος με το σύμβολο $!$.

Δυϊκά, ένα αντικείμενο, συμβολικά 1, θα το καλούμε **τελικό αντικείμενο** ανν ***για κάθε*** $A \in \mathscr{C}_0$, **υπάρχει ακριβώς** ένα βέλος $A \xrightarrow{!} 1$, από το A στο 1, δηλ. το σύνολο $\mathrm{Hom}(A, 1)$ περιέχει ακριβώς ένα βέλος.

Σχηματικά παριστάνουμε το αρχικό και το τελικό αντικείμενο ως ακολούθως:

$$\begin{tikzcd}
\forall\circ \arrow[ddrr, dotted, "\exists!"] & & & & & & \circ\forall \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\forall\circ \arrow[rr, dotted, "\exists!"] & & \star & & \star \arrow[rr, dotted, "\exists!"] \arrow[uurr, dotted, "\exists!"] \arrow[ddrr, dotted, "\exists!"] & & \circ\forall \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\forall\circ \arrow[uurr, dotted, "\exists!"] & & & & & & \circ\forall
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

τελικό αντικείμενο Αρχικό αντικείμενο

Είναι φανερό ότι το αρχικό και τελικό αντικείμενο καθορίζονται από **καθολικές ιδιότητες**, ιδιότητες δηλαδή που έχουν τη μορφή: **«για κάθε ..., υπάρχει μοναδικό ..., τέτοιο ώστε, ...»**. Εξασφαλίζεται έτσι η υπάρξη μοναδικών βελών, εισερχομένων για το τελικο και εξερχομένων για το αρχικό, **για κάθε αντικείμενο** της κατηγορίας $\mathscr{C}$, και γι' αυτό τα αντικείμενα αυτά λέγονται **καθολικά αντικείμενα.** Στα καθολικά αντικείμενα δεν μας ενδιαφέρει η 'εσωτερική σύσταση και δομή' των αντικειμένων, αλλά οι ιδιότητες που κληρονομούν απ' την αλληεπίδρασή τους με τα άλλα αντικείμενα της κατηγορίας. Για το λόγο αυτό τα καθολικά αντικείμενα ορίζονται μέχρις ισομορφισμού.

Με τη χρήση γενικευμένων στοιχείων *ένα τελικό αντικείμενο* 1 *είναι ένα 'γενικευμένο μονοσύνολο'* με την έννοια ότι για κάθε πεδίο μεταβολής $T \in \mathscr{C}_0$ περιέχει ακριβώς ένα γενικευμένο στοιχείο $T \to 1$.

2.5.6 Ασκήσεις. 1. Προσπαθείστε να διατυπώστε τον ορισμό του αρχικού και τελικού αντικειμένου στις κατηγορίες $\mathscr{C}{\downarrow}A$, $A \in \mathscr{C}_0$ και $\mathsf{Func}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, όπου $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ μικρές κατηγορίες. *Αυτή είναι μια άσκηση που θα πρέπει να επαναλαμβάνεται για κάθε κατηγορική έννοια που ορίζουμε.*

Μια κατηγορία μπορεί να έχει ένα, πολλά ή κανένα, αρχικό ή τελικό αντικείμενο. Αν όμως έχει ένα τα άλλα είναι ισόμορφα με αυτό.

2.5.7 Πρόταση. *Αν* $1, 1'$ *είναι δύο τελικά αντικείμενα στην κατηγορία* $\mathscr{C}$, *τότε τα αντικείμενα* $1, 1'$ *είναι ισομορφικά, δηλ.* $1 \cong 1'$.

Απόδ. Αφού το 1 είναι τελικό αντικείμενο και το $1' \in \mathscr{C}_0$, έχουμε εξ' ορισμού ότι υπάρχει μοναδικό βέλος $1 \xrightarrow{f} 1'$. Εναλλάσοντας τα $1'$ και 1 υπάρχει μοναδικό βέλος $1' \xrightarrow{g} 1$. Αλλά αφού τα f, g είναι μοναδικά έχουμε ότι και το $g \circ f : 1 \to 1$ είναι μοναδικό. Μοναδικό επίσης είναι και το βέλος $1_1 : 1 \to 1$, άρα έχουμε ότι: $g \circ f = 1_1$. Ομοίως $f \circ g = 1_{1'}$. Έτσι $1 \cong 1'$. ⊣▮

2.5.8 Παράδειγμα. 1. Στην κατηγορία **Set**, το κενό σύνολο $0 := \emptyset$ είναι το μοναδικό αρχικό αντικείμενο. Κάθε δε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι τελικό αντικείμενο. Για κάθε σύνολο X υπάρχει μια μοναδική (σταθερή) συνάρτηση $X \xrightarrow{!} \{x\}$. Είναι επίσης ανάγκη να πεισθεί κανείς ότι, δοθέντος ενός συνόλου X υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση από το $\emptyset$ στο X. Πράγματι το γράφημα μιας τέτοιας συνάρτησης θα είναι ένα υποσύνολο του $\emptyset \times X = \emptyset$. Αλλά το μοναδικό τέτοιο υποσύνολο είναι το $\emptyset$. Τη μοναδική αυτή συνάρτηση $\langle \emptyset, G_! = \emptyset, X \rangle$ θα τη συμβολίζουμε με $\emptyset \xrightarrow{!} X$. Το ίδιο ισχύει και για την κατηγορία των τοπολογικών χώρων, **Top**.

2. Σε ένα μ.δ.σ. θεωρούμενο ως κατηγορία, αν υπάρχει το κάτω στοιχείο (minimum) 0 και το άνω στοιχείο 1 (maximum) τότε είναι φανερό ότι το 0 είναι αρχικό και το 1 τελικό αντικείμενο. Γενικά 'μεγάλες' κατηγορίες συνήθως έχουν αρχικά και τελικά αντικείμενα, ενώ 'μικρές' κατηγορίες δεν έχουν.
3. Στήν κατηγορία **Vect**, ο μηδενικός υπόχωρος $\{0\}$ είναι και αρχικό και τελικό αντικείμενο. Το ίδιο συμβαίνει και τις κατηγορίες, των ομάδων **Grp**, των Αβελιανών ομάδων **Ab**, κ.λπ. 4. Στην κατηγορία **Mon**, το μονοειδές με ένα στοιχείο, είναι και αρχικό και τελικό αντικείμενο, στην κατηγορία όμως των ημιομάδων **Sem** η κενή ημιομάδα είναι το αρχικό και κάθε ημιομάδα με ένα στοιχείο είναι τελικό αντικείμενο.

Είναι φενερό ότι οι έννοιες 'αρχικό' και 'τελικό' αντικείμενο είναι δυϊκές και ότι αν 0^{op} είναι τελικό αντικείμενο στην $\mathscr{C}^{\text{op}}$ τότε το 0 είναι αρχικό αντικείμενο στην $\mathscr{C}$ και αντιστρόφως.

2.5.9 Ασκήσεις. 1. Να δειχθεί ότι αν 1 είναι τελικό αντικείμενο και $f : 1 \to T$ είναι ένας ισομορφισμός τότε και το αντικείμενο T είναι ένα τελικό αντικείμενο.

2. Βρείτε τα τελικά και αρχικά αντικείμενα στις κατηγορίες **Set** $\times$ **Set**, και $\mathbf{Set}^{\to}$.

3. Δείξτε ότι αν τα $1, 0$ είναι τελικό και αρχικό αντικείμενο αντίστοιχα σε μια κατηγορία $\mathscr{C}$, τότε κάθε βέλος $1 \xrightarrow{\varphi} A$ είναι μονομορφισμός και κάθε βέλος $A \xrightarrow{\psi} 0$ είναι επιμορφισμός.

4. Δείξτε ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες, βλ. [123, σελ. 136] κάθε μεταβαλλόμενο στοιχείο, $x : T \to A \in \mathscr{C}_1$ είναι ολικό στοιχείο στην κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C}{\downarrow}T$.

5. Αν $A \in \mathscr{C}_0$ τότε η κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C}{\downarrow}$, έχει το 1_A ως τελικό αντικείμενο.

► Καθολικότητες

2.5.10 Ορισμός. **(i)** Ένα ζεύγος (A, x) με $A \in \mathscr{C}_0$ και $x \in FA$ λέγεται **καθολικό αντικείμενο** του συναρτητή F ανν για κάθε $B \in \mathscr{C}_0$ και $y \in FB$

υπάρχει μοναδικό βέλος $(f : A \to B) \in \mathscr{C}_1$ τέτοιο ώστε, $Ff(x) = y$ ή με διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\exists ! f"'] & & FA \ni x \arrow[d, "Ff"'] \arrow[d, mapsto, shift left=6] \\ \forall B & & FB \ni y \end{tikzcd}$$

Αν τώρα $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ είναι ένας συναρτητής, τότε ως γνωστόν η κόμμα κατηγορία, $\mathscr{C}{\downarrow}F$ ορίζεται ως εξής:

(α) **Αντικείμενα της** $\mathscr{C}{\downarrow}F$: $(\mathscr{C}{\downarrow}F)_0 := \{(A, x) \,|\, A \in \mathscr{C}_0, \ \& \ x \in FA\}$

(β) **Βέλη της** $\mathscr{C} \downarrow F$: Παίρνουμε τα βέλη $f : A \to B$ της $\mathscr{C}$ με την ιδιότητα, $Ff(x) = y$, δηλαδή για $A, B \in \mathscr{C}_0 \quad x \in A, y \in B$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}{\downarrow}F}((A, x), (B, y)) := \{\, f \in \mathrm{Hom}(A, B) \,|\, \text{με}, \quad Ff(x) = y\,\}$$

τότε το ζεύγος (A, x) με $A \in \mathscr{C}_0$ και $x \in FA$ λέγεται **καθολικό αντικείμενο** του συναρτητή F ανν το στοιχείο (A, x) είναι αρχικό αντικείμενο στην κατηγορία $\mathscr{C}{\downarrow}F$.

(ii) Έστω $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ ένας συναρτητής και $T \in \mathscr{D}_0$. Τότε ως γνωστόν η κόμμα κατηγορία, $T{\downarrow}F$ ορίζεται ως εξής:

(α) **Αντικείμενα της** $T{\downarrow}F$:

$$(T{\downarrow}F_0) := \{(X, y), \,|\, X \in \mathscr{C}_0, \ \& \ (y : T \to FX) \in \mathscr{D}_1\}$$

(β) **Βέλη της** $T{\downarrow}F$: Παίρνουμε τα βέλη $(h : X \to X') \in \mathscr{C}_1$ με την ιδιότητα, $y' = Fh \circ y$, ή με διαγράμματα,

$$\begin{tikzcd} & & & T \arrow[dl, "y"'] \arrow[dr, dashed, "y' = Fh \circ y"] & \\ X \arrow[r, "h"] & X', & FX \arrow[rr, "Fh"'] & & FX' \end{tikzcd}$$

(iii) Έστω $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ ένας συναρτητής και $T \in \mathscr{D}_0$. **Ένα καθολικό βέλος** από το $T \in \mathscr{D}_0$ στον συναρτητή F είναι ένα ζεύγος (A, u), που αποτελείται από ένα αντικείμενο $A \in \mathscr{C}_0$ και ένα βέλος $(u : T \to FA) \in \mathscr{D}$, τέτοιο ώστε για κάθε $B \in \mathscr{C}_0$ και για κάθε $(y : T \to FB) \in \mathscr{D}_1$, υπάρχει μοναδικό βέλος $(f : A \to B) \in \mathscr{C}_1$ τέτοιο ώστε $Ff \circ u = y$, δηλαδή το βέλος $(y : T \to FB) \in \mathscr{D}_1$ παραγοντοποιείται μέσω του καθολικού βέλους $(u : T \to FA)$, με άλλα λόγια το καθολικό βέλος $(u : T \to FA)$ είναι αρχικό στοιχείο στην κόμμα κατηγορία $(T{\downarrow}F)$, διαγραμματικά, έχουμε,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\exists! f"'] \\ \forall B \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} T \arrow[r, dotted, "u"] \arrow[dr, "\forall y"'] & FA \arrow[d, dashed, "\exists!\, Ff"] \\ & FB \end{tikzcd} \quad \text{ή και} \quad \begin{tikzcd} T \arrow[r, dotted, "u"] \arrow[d, equal] & FA \arrow[d, dashed, "\exists!\, Ff"] \\ T \arrow[r, "\forall y"'] & FB \end{tikzcd}$$

2.6 Μονομορφισμοί και Επιμορφισμοί

Με τη χρήση των γενικευμένων στοιχείων οι γνώριμοι ορισμοί από την Απλοϊκή Συνολοθεωρία γενικεύονται εύκολα και στην κατηγορική περίπτωση.

Στην Συνολοθεωρία γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ θα είναι ένριψη ή μονοσυνάρτηση ανν $(\forall x, y \in A)[f(x) = f(y) \Rightarrow x = y]$. Ο ίδιος ορισμός περίπου ισχύει και στις κατηγορίες, μόνον που αντί των ολικών στοιχείων θα θεωρούμε τώρα γενικευμένα στοιχεία.

2.6.1 Ορισμός. Ένα βέλος $f : A \longrightarrow B$ μιας κατηγορίας θα λέγεται **μονομορφισμός** ανν $(\forall x, y \in^T A)[f \circ x = f \circ y \Rightarrow x = y]$. Συνήθως γράφουμε και εδώ $f(x)$ αντί $f \circ x$. Στην ουσία ο ορισμός αυτός μας λέει ότι τα 'εκτασιακά χαρακτηριστικά' του A και του B είναι σε $1-1$ αντιστοιχία. Κάθε φορά που ένα γενικευμένο στοιχείο x 'σχεδιάζει' μια καμπύλη, ή γενικότερα ένα εκτασιακό στοιχείο στο αντικείμενο A τότε το γενικευμένο στοιχείο $f \circ x$ του B θα σχεδιάζει ένα αντίστοιχο εκτασιακό στοιχείο στο B. Αυτό γίνεται περισσότερο φανερό αν για κάθε $T \in \mathscr{C}_0$, θεωρήσουμε την αντιστοιχία των εκτασιακών στοιχείων του A και του B με 'στάδιο ορισμού' T, $\lambda : \mathrm{Hom}(T, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}(T, B)$ με $\lambda(x) := f \circ x$. Τότε από τον πιο πάνω ορισμό, η συνάρτηση λ είναι πράγματι ένριψη.

Ο παραπάνω ορισμός, παρουσιάζεται γραφικά ως εξής:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] \arrow[rr, dashed, bend left=50, "f \circ x"] \arrow[rr, dashed, bend right=50, "f \circ y"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}, \quad f \circ x = f \circ y \Rightarrow x = y$$

Για μονομορφισμούς θα χρησιμοποούμε το συμβολισμό $\rightarrowtail$.

Ο ορισμός του επιμορφισμού είναι τώρα εύκολος, αν σκεφθεί κανείς ότι επιμορφισμός στην κατηγορία $\mathscr{C}$ είναι το ίδιο με την έννοια του μονομορφισμού στην αντίθετη κατηγορία $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Με τον τρόπο αυτό οι ορισμοί ελαττώνονται στο μισό! Κρίνεται ωστόσο ότι θα έπρεπε να δοθεί με σαφήνεια ο ορισμός του επιμορφισμού, για να φανεί ο ρόλος των γενικευμένων ιδιοτήτων που είναι δυϊκός των γενικευμένων στοιχείων.

2.6.2 Ορισμός. Ένα βέλος $f : A \longrightarrow B$ μιας κατηγορίας θα λέγεται **επιμορφισμός** ανν $(\forall p, q \in_V B)[p \circ f = q \circ f \Rightarrow p = q]$. Ο συμβολισμός $p \in_V B$ σημαίνει $p : B \longrightarrow V$, δηλαδή μια γενικευμένη ιδιότητα. Στην ουσία ο ορισμός αυτός μας λέει ότι τα 'εντασιακά χαρακτηριστικά' του B και του A είναι σε $1-1$

αντιστοιχία. Κάθε φορά που μια γενικευμένη ιδιότητα p των στοιχείων του B διαμερίζει το B σε 'ινες', τότε και η γενικευμένη ιδιότητα $p \circ f$ διαμερίζει το B σε αντίστοιχες 'ίνες'. Αυτό γίνεται περισσότερο φανερό αν για κάθε $V \in \mathscr{C}_0$, θεωρήσουμε την αντιστοιχία των εντασιακών στοιχείων του B και του A με 'στάδιο ορισμού' V, $\lambda : \mathrm{Hom}(B, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, V)$ με $\lambda(x) := p \circ f$. Τότε από τον πιο πάνω ορισμό, η συνάρτηση λ είναι πράγματι ένριψη, δηλαδή τα εντασιακά χαρακτηριστικά του B και του A βρίσκονται σε $1 - 1$ αντιστοιχία.

Ο παραπάνω ορισμός, παρουσιάζεται γραφικά ως εξής:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, dashed, bend left, "p \circ f"] \arrow[rr, dashed, bend right, "q \circ f"'] & B \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & V \end{tikzcd}, \quad p \circ f = q \circ f \;\Rightarrow\; p = q$$

Για επιμορφισμούς θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow$.

Παρ' όλο τον ορισμό που δόθηκε, μπαίνει κανείς στον πειρασμό να εξετάσει και τον ακόλουθο ορισμό:

2.6.3 Ορισμός. Ένα βέλος $f : A \longrightarrow B$ μιας κατηγορίας θα λέγεται **επίρριψη επί των γενικευμένων στοιχείων** ανν για κάθε στάδιο ορισμού $T \in \mathscr{C}_0$ και για κάθε $y \in^T B$ υπάρχει κάποιο $x \in^T A$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Η έννοια της 'επίρριψης επί των γενικευμένων στοιχείων' είναι πιο ισχυρή από την έννοια του επιμορφισμού, όπως δείχνει το ακόλουθο Θεώρημα.

2.6.4 Θεώρημα. *Ένα βέλος $f : A \longrightarrow B$ είναι μια επίρριψη επί των γενικευμένων στοιχείων ανν υπάρχει κάποιο βέλος $g : B \longrightarrow A$ με $f \circ g = 1_B$*

Απόδ. ($\Leftarrow$) Έστω ότι υπάρχει ένα τέτοιο βέλος g με $f \circ g = 1_B$. Τότε για κάθε $y \in^T B$, το T-στοιχείο $g(y)$ του A έχει την ιδιότητα $f(g(y)) = y$, άρα η f είναι μια επίρριψη επί των γενικευμένων στοιχείων. $\dashv\Box$
($\Rightarrow$) Ας υποθέσουμε ότι το βέλος f είναι μια επίρριψη επί των γενικευμένων στοιχείων. Αν πάρουμε το ολικό στοιχείο 1_B του B, τότε από την υπόθεσή μας υπάρχει γενεικευμένο στοιχείο $g \in^B A$ με $f(g) = 1_B$. $\dashv\blacksquare$

Παρ' όλο το πιό πάνω Θεώρημα, μπορεί κανείς να δείξει ότι ένας συναρτητής είναι μονομορφισμός στην κατηγορία **CAT** ανν είναι μια ένριψη και στα αντικείμενα και στα βέλη.

Όταν έχουμε $f \circ g = 1_B$ θα καλούμε το g **'δεξιό αντίστροφο'** του f, ή και **'διατομή'**[16](section) του f και το f **'αριστερό αντίστροφο'** του g ή και **'αναστολή'** (retraction). Τα δεξιά αντίστροφα βέλη δεν είναι μοναδικά. Ένα βέλος που έχει δεξιό αντίστροφο λέγεται και **'διασπασμένος επιμορφισμός'.** Έτσι βλέπουμε ότι οι έννοιες η f είναι 'διασπασμένος επιμορφισμός' και η f έχει δεξιό αντίστροφο συμπίπτουν. Είναι φανερό ότι κάθε ισομορφισμός είναι διασπασμένος επιμορφισμός (ελέγξετο το!).

[16]Στην Ελληνική ορολογία έχει επικρατήσει να αποδίδουμε τον όρο 'intersection' με 'τομή' και έτσι αποδίδει κανείς το 'section' ως διατομή, ενώ θα έπρεπε να ήταν αντίστροφα.

Επειδή οι συναρτητές διατηρούν τα ταυτοτικά βέλη θα διατηρούν και τους διασπασμένους επιμορφισμούς και τους διασπασμένους μονομορφισμούς (μορφισμούς δηλαδή που έχουν αριστερό αντίστροφο). Ωστόσο όπως είδαμε ο επιλήσμων συναρτητής $F : \mathbf{Mon} \longrightarrow \mathbf{Set}$ δεν διατηρεί τους επιμορφισμούς, π.χ. τον $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle \xhookrightarrow{i} \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ βλ. Θεώρημα 2.6.4.

Οι έννοιες 'επίρριψη' και 'επιμορφισμός' διαφέρουν δραστικά όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα,

2.6.5 Παράδειγμα. Έστω η κατηγορία **Mon** των μονοειδών. Έστω ακόμη τα ακόλουθα δύο αντικείμενα, $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$, $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle \in \mathbf{Mon}_0$. Ας θεωρήσουμε τώρα την εμφύτευση,

$$\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle \xhookrightarrow{i} \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$$

Η εμφύτευση αυτή αναμένουμε να είναι μονομορφισμός, όπως εξ' άλλου συμβαίνει και σε αντίστοιχες καταστάσεις στη συνολοθεωρία. Πράγματι η i είναι μονομορφισμός. Αυτό που δεν αναμένει κανείς είναι η εμφύτευση i να είναι και επιμορφισμός! Αλλά στην πραγματικότητα είναι! Ας θεωρήσουμε δύο γενικευμένες ιδιότητες p, q του $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, έστω δηλαδή,

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend left, dashed, "p \circ i"] \arrow[rr, bend right, dashed, "q \circ i"'] & \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \langle M, *, e \rangle
\end{tikzcd}$$

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $p \circ i = q \circ i$ συνεπάγεται ότι $p = q$. Πράγματι έστω $z \in \mathbb{Z}$. Αν $z \geq 0$, η συνάρτηση i είναι ταυτοτική επί των θετικών τιμών και επομένως αναμένουμε να μην υπάρχει πρόβλημα. Πράγματι, $p(z) = p(i(z)) = q(i(z)) = q(z)$. Έτσι η συνθήκη ισχύει. Έστω τώρα ότι $z < 0$, τότε $-z \geq 0$ και $-z \in \mathbb{N}$. Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}
p(z) &= p(z) * e \\
&= p(z) * q(0) \\
&= p(z) * q(-z + z) \\
&= p(z) * (q(-z) * q(z)) \\
&= (p(z) * q(-z)) * q(z) \\
&= (p(z) * p(i(-z))) * q(z) \\
&= (p(z) * p(-z)) * q(z) \\
&= p(z + -z) * q(z) \\
&= p(0) * q(z) \\
&= e * q(z) \\
&= q(z)
\end{aligned}$$

Άρα και στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι $p = q$ ⊣

Το παραπάνω παράδειγμα θέτει το πρόβλημα των σχέσεων που υπάρχουν μεταξύ των υποκειμένων συναρτήσεων, που ορίζονται επί των φορέων των δομών (επιρρίψεις, ενρίψεις, κ.λπ.), και των βελών (επιμορφισμοί, μονομορφισμοί κ.λπ.), τυχόντων συγκεκριμένων κατηγοριών (κατηγοριών δηλαδή που τα αντικείμενά τους είναι σύνολα εφοδιασμένα με κάποια δομή, τα δε βέλη τους είναι συναρτήσεις που διατηρούν τη δομή.) Αξίζει να σημειώσει κανείς ότι το πιο πάνω παράδειγμα αποτελεί και ένα αντιπαράδειγμα, ότι ένας μονοφορφισμός που είναι ταυτόχρονα και επιμορφισμός δεν είναι πάντοτε ισομορφισμός. Γενικά έχουμε,

Σε κάθε συγκεκριμένη κατηγορία, οι ομομορφικές ενρίψεις είναι μονομορφισμοί και αντιστρόφως, οι ομομορφικές επιρρίψεις είναι επιμορφισμοί αλλά το αντίστροφο ισχύει π.χ. για την κατηγορία Grp αλλά όχι για την κατηγορία Mon.

Έχουμε όμως την ακόλουθη πρόταση,

2.6.6 Πρόταση. *Στην κατηγορία των μονοειδών, ένα βέλος είναι μονομορφισμός ανν είναι ενριπτικός ομομορφισμός.*

Απόδ. Έστω $\mathbb{M}_1 \equiv \langle M_1, *_1, e_1 \rangle$ και $\mathbb{M}_2 \equiv \langle M_2, *_2, e_2 \rangle$, δύο μονοειδή, και $h : \mathbb{M}_1 \longrightarrow \mathbb{M}_2$ ένας ενριπτικός ομομορφισμός. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in^T M_1$ με $h(x) = h(y)$ έχουμε ότι, $x = y$. Πράγματι για κάθε $t \in T$, έχουμε, $h(x(t)) = h(y(t))$, έτσι $x(t) = y(t)$ αφού η h είναι ένριψη. Άρα $x = y$, και έτσι ο h είναι μονομορφισμός. ⊣□

Αντίστροφα αν $h : \mathbb{M}_1 \longrightarrow \mathbb{M}_2$ είναι ένας μονομορφισμός, τότε είναι ομομορφισμός και επιλέγοντας ολικά στοιχεία $x, y \in^1 M_1$ βλέπουμε ότι είναι και ένριψη. ⊣■

Η ίδια απόδειξη δουλεύει και σε οποιαδήποτε άλλη συγκεκριμένη κατηγορία.

2.6.7 Ασκήσεις. 1. Να δειχθεί ότι αν $\langle X, \tau_X \rangle$ και $\langle Y, \tau_Y \rangle$ είναι τοπολογικοί χώροι του Hausdorff, τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \langle X, \tau_X \rangle \longrightarrow \langle Y, \tau_Y \rangle$ της οποίας η εικόνα $f[X]$ είναι πυκνή στον $\langle Y, \tau_Y \rangle$, είναι επιμορφισμός.

2. Να δειχθεί ότι οι επιμορφισμοί είναι επιρρίψεις στίς ακόλουθες κατηγορίες: **Pos**,**Vect**, **Ab**

3. Να δειχθεί ότι η εμφύτευση, $\langle \mathbb{Z}, \cdot, 1 \rangle \overset{i}{\hookrightarrow} \langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ στην κατηγορία **Mon**, είναι επιμορφισμός, παρ' όλο που δεν είναι επίρριψη.

Τέλος υπάρχει ένα ακόμα πρόβλημα: Πως συγκρίνονται οι έννοιες του 'ισομορφισμού' και των εννοιών, 'επιμορφισμός' και 'μονομορφισμός'; Είναι ένας ισομορφισμός, απλά μονομορφισμός και επιμορφισμός;

Ισχύει η ακόλουθη πρόταση,

2.6.8 Πρόταση. *Αν $f : A \longrightarrow B$ είναι ισομορφισμός τότε είναι και μονομορφισμός και επιμορφισμός. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.*

Απόδ. Αφού η $f : A \longrightarrow B$ είναι ισομορφισμός τότε υπάρχει βέλος $g : B \longrightarrow A$ με $g \circ f = 1_A$ και $f \circ g = 1_B$. Έστω τώρα δύο γενικευμένα στοιχεία του A, $T \overset{x}{\underset{y}{\rightrightarrows}} A$ με $f \circ x = f \circ y$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι $x = y$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} x = 1_A \circ x &= (g \circ f) \circ x \\ &= g \circ (f \circ x) \\ &= g \circ (f \circ y) \\ &= (g \circ f) \circ y \\ &= 1_A \circ y = y \end{aligned}$$

Άρα η f είναι μονομορφισμός. Επειδή η έννοια του ισομορφισμού είναι αυτοδυϊκή έννοια, η πιο πάνω απόδειξη μεταγραμμένη στην αντίθετη κατηγορία μας λέει ότι η f είναι επίσης επιμορφισμός. Το ότι το αντίστροφο δεν ισχύει φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα. ⊣

2.6.9 Παράδειγμα. 'Εστω $\mathbb{P} \equiv \langle P, \leq \rangle$ ένα μ.δ.σ. θεωρούμενο ως κατηγορία. Έχουμε ότι $f : p \longrightarrow q$ ανν $p \leq q$. Θα δείξουμε ότι κάθε βέλος $f : p \longrightarrow q$ είναι μονομορφισμός και επιμορφισμός αλλά τα μόνα βέλη που είναι ισομορφισμοί είναι τα ταυτοτικά βέλη. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι σε κάθε μ.δ.σ. υπάρχει το πολύ ένα βέλος μεταξύ δύο στοιχείων, έτσι ο ορισμός του μονομορφισμού ικανοποιείται τετριμμένα. Το ίδιο συμβαίνει και με την περίπτωση του επιμορφισμού. Έστω τώρα ότι το βέλος $f : p \longrightarrow q$ έχει αντίστροφο, $f^{-1} : q \longrightarrow p$, δηλαδή, $p \leq q$ και $q \leq p$, οπότε $p = q$. Αλλά τότε το f πρέπει να είναι το μοναδικό ταυτοτικό βέλος 1_p . Αρα το f είναι ισομορφισμός.

Είναι σχετικά εύκολο να δείξει κανείς το ακόλουθο Θεώρημα,

2.6.10 Θεώρημα. *Ένα βέλος σε μια κατηγορία $\mathscr{C}$ είναι ισομορφισμός αν είναι αμφίρριψη (1-1 και επί) επί των γενικευμένων στοιχείων.*

2.6.11 Ασκήσεις. 1. Έστω το ακόλουθο διάγραμμα σε μια οποιαδήποτε κατηγορία,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Να δειχθεί ότι:

(i) Αν f και g είναι ισομορφισμοί (αντ. μονομορφισμοί, επιμορφισμοί) τότε και η σύνθεση $g \circ f$ είναι ισομορφισμός (αντ. μονομορφισμός, επιμορφισμός)

(ii) Αν το βέλος h είναι μονομορφισμός τότε το ίδιο είναι και το βέλος f.

(iii) Αν το βέλος h είναι επιμορφισμός τότε το ίδιο ισχύει και για το βέλος g.

(iv) Δώστε ένα αντιπαράδειγμα που το h να είναι μονομορφισμός αλλά το g να μην είναι.

2. Έστω $(f : A \longrightarrow B) \in \mathscr{C}_1$, τότε να δειχθεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Το βέλος f είναι ισομορφισμός.

(ii) Το βέλος f είναι και μονομορφισμός και διασπασμένος επιμορφισμός.

(iii) Το βέλος f είναι και διασπασμένος μονομορφισμός και επιμορφισμός.

(iv) Το βέλος f είναι και διασπασμένος μονομορφισμός και διασπασμένος επιμορφισμός.

3. Δείξτε ότι, στην κατηγορία **Rng** των δακτυλίων και των ομομορφισμών δακτυλίων, η εμφύτευση $\mathbb{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Q}$ είναι και μονομορφισμός και επιμορφισμός αλλά δεν είναι ισομορφισμός.

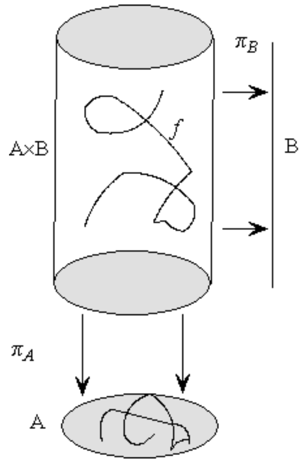
4. Δείξτε ότι κάθε διατομή είναι μονομορφισμός και κάθε αναστολή είναι επιμορφισμός.

2.7 Πεπερασμένα Όρια

Συνήθως τα πεπερασμένα όρια απαντώνται σαν δύο δυϊκοί τύποι: Τα **όρια** (αντίστροφα ή προβολικά όρια) και τα **συνόρια** (επαγωγικά ή ευθεία όρια). Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν μεταξύ άλλων τα: 'τελικά αντικείμενα', 'γινόμενα', 'εξισωτές' και 'εφελύσεις' (pullbacks) ή ινώδη γινόμενα (fibered products). Οι δυϊκές έννοιες αυτών, 'αρχικά αντικείμενα', 'συγγινόμενα', 'συνεξισωτές', και 'εξωθήσεις'(pushouts), αποτελούν τα συνόρια. Η έννοια του 'ορίου' είναι μια κατηγορική εκδοχή της εννοίας ενός υποσυνόλου, $X \subseteq A \times B$, που ορίζεται με εξισώσεις. Από την άλλη μεριά η έννοια του συνορίου είναι η κατηγορική εκδοχή του 'πηλίκου' ένος αθροίσματος $A+B/\approx$ ως προς μια σχέση ισοδυναμίας $\approx$.

2.7.1 Γινόμενα

Το παράδειγμα στο Σχήμα 2.1, βλ. [131, p.63], αποτελεί ίσως το αρχέτυπο παράδειγμα για την γενικότερη έννοια του γινομένου σε κατηγορίες. Το σύνολο A συμβολίζει τη βάση του κυλίνδρου, και το σύνολο B τη γενέτειρα της εκ περιστροφής επιφάνειας του κυλίνδρου. Έστω $C := A \times B$ το συνολοθεωρητικό Καρτεσιανό γινόμενο και οι συναρτήσεις προβολών, $\pi_A : A \times B \longrightarrow A \;/\!\!/\; (x, y, z) \mapsto (x, y)$, και $\pi_B : A \times B \longrightarrow B \;/\!\!/\; (x, y, z) \mapsto z$. Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε την κίνηση Brawn ενός σωματιδίου που κινείται στο C. Έστω $f : T \to C$ μια τροχιά (ένα γενικευμένο στοιχείο του C) του σωματιδίου. Είναι φανερό ότι μπορούμε να περιγράψουμε την τροχιά f του σωματιδίου αν γνωρίζουμε τις προβολές της $f_A := \pi_A \circ f$, και $f_B := \pi_B \circ f$, και αντίστροφα, **για κάθε** $f_A : T \to A$ **και για κάθε** $f_B : T \to B$, **υπάρχει ένα μοναδικό μεταβαλλόμενο στοιχείο** $f : T \to A \times B$, **τέτοιο ώστε** $f_A = \pi_A \circ f$ **και** $f_B = \pi_B \circ f$. Η πρόταση όμως αυτή έχει ακριβώς τη μορφή μιας **καθολικής ιδιότητας**. Είναι ακριβώς η καθολική ιδιότητα που ορίζει το γινόμενο $A \times B$. Κάθε δηλαδή ζευγάρι $(x : T \to A, y : T \to B)$ εκτασιακών χαρακτηριστικών του A και του B αντίστοιχα, καθορίζει ένα μοναδικό εκτασιακό χαρακτηριστικό $f := (x, y)$ του γινομένου $A \times B$.



Σχήμα 2.1: Το αρχέτυπο παράδειγμα γινομένου

2.7.1 Ορισμός. Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και $A, B \in \mathscr{C}_0$. Μια τριάδα (P, π_A, π_B) με $P \in \mathscr{C}_0$ και $\pi_A : P \to A, \pi_B : P \to B \in \mathscr{C}_1$, θα λέγεται **γινόμενο** των A και B στην $\mathscr{C}$ ανν γιά κάθε $T \in \mathscr{C}_0$ και για κάθε ζευγάρι μορφισμών (μεταβαλλόμενων στοιχείων) $x : T \to A, y : T \to B$ υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός (μεταβαλλόμενο στοιχείο του P), $f := (x, y) : T \to P$ τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd}
 & & \bullet B \\
\forall\, T \arrow[r, dashed, "\exists ! f"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\forall y"] \arrow[drr, dotted, bend right, "\forall x"'] & P \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\
 & & \bullet A
\end{tikzcd}$$

Καθολική ιδιότητα Γινομένου

Σημειώστε ότι οι μορφισμοί π_A, π_B, που λέγονται 'προβολές' δεν είναι αναγκαστικά επιμορφισμοί, σε αντίθεση με αυτό που συμβαίνει στα σύνολα. Επίσης το γινόμενο αφού ορίζεται με καθολική ιδιότητα, ορίζεται μέχρις ισομορφισμού. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι το γινόμενο ανάγεται σε ένα τελικό αντικείμενο μιας κατάλληλης διαγραμματικής κατηγορίας, καί ως έκ τούτου δύο γινόμενα είναι ισομορφικά. Στο εξής θα επιλέξουμε ένα τέτοιο γινόμενο και θα το συμβολίζουμε ως, $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$. Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι οι προβολές π_A, π_B εξαρτώνται στην ουσία από καθολικό αντικείμενο $A \times B$. Έτσι ένας περισσότερο συνεπής συμβολισμός θα ήταν $\pi_1^{A \times B}, \pi_2^{A \times B}$.

Με τη χρήση των γενικευμένων στοιχείων μπορούμε να εκφράσουμε το γινόμενο, με έναν τρόπο που θυμίζει τον αντίστοιχο της συνολοθεωρίας: Για κάθε $T \in \mathscr{C}_0$,

$$(x, y) \in^T A \times B \quad \text{ανν} \quad x \in^T A, \text{ και } y \in^T B,$$

υπάρχει δηλαδή κανονική αμφίρριψη μεταξύ μεταβαλλόμενων στοιχείων της μορφής

$$T \longrightarrow A \times B$$

και ζευγών μεταβαλλόμενων στοιχείων της μορφής,

$$T \longrightarrow A, \quad \& \;\; T \longrightarrow B.$$

Αυτό θα το παριστάνουμε με περισσότερο συμπαγή τρόπο ως,

$$\mathrm{Hom}(T, A \times B) \cong \mathrm{Hom}(T, A) \times \mathrm{Hom}(T, B)$$

ή και,

$$\frac{T \longrightarrow A \times B}{T \longrightarrow A,\; T \longrightarrow B}$$

Αν $f_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ και $f_2 : A_2 \longrightarrow B_2$ τότε ορίζουμε,

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f_1 \times f_2 := (f_1 \circ \pi_1^A, f_2 \circ \pi_2^A) : A_1 \times A_2 & \to & B_1 \times B_2 \\ (x, y) & \mapsto & (f_1 \times f_2)(x, y) = (f_1(x), f_2(y)) \end{array}}$$

Ο πιο πάνω ορισμός τεκμηριώνεται από το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
 & & A_1 \arrow[rr, "f_1"] & & B_1 \\
\forall\, T \arrow[r, dashed, "\exists!(x,y)"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\forall x"] \arrow[drr, dotted, bend right, "\forall y"'] & A_1 \times A_2 \arrow[ur, "\pi_1^A"] \arrow[dr, "\pi_2^A"'] \arrow[rr, dashed, "\exists! f_1 \times f_2"] & & B_1 \times B_2 \arrow[ur, "\pi_1^B"] \arrow[dr, "\pi_2^B"'] & \\
 & & A_2 \arrow[rr, "f_2"'] & & B_2
\end{tikzcd}$$

Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε τα βέλη $f_1 \circ \pi_1^A$ και $f_2 \circ \pi_2^A$, τότε από την καθολική ιδιότητα του γινομένου $(B_1 \times B_2, \pi_1^B, \pi_2^B)$, έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό βέλος $(f_1 \circ \pi_1^A, f_2 \circ \pi_2^A)$ με,

$$\boxed{\pi_1^B \circ (f_1 \circ \pi_1^A, f_2 \circ \pi_2^A) = f_1 \circ \pi_1^A \quad \text{και} \quad \pi_2^B \circ (f_1 \circ \pi_1^A, f_2 \circ \pi_2^A) = f_2 \circ \pi_2^A}$$

Έτσι δικαιολογείται πλήρως ο ορισμός $f_1 \times f_2 := (f_1 \circ \pi_1^A, f_2 \circ \pi_2^A)$. Ομοίως αν θεωρήσουμε τα βέλη $f_1 \circ x$ και $f_2 \circ y$ τότε πάλι από την καθολική ιδιότητα του γινομένου $(B_1 \times B_2, \pi_1^B, \pi_2^B)$, έχουμε ότι,

$$\boxed{(f_1 \times f_2) \circ (x, y) = (f_1 \circ x, f_2 \circ y) \quad \text{ή και} \quad (f_1 \times f_2)(x, y) = (f_1(x), f_2(y))}$$

Αν υποθέσουμε δε το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[rr, "f_1"] \arrow[rrrr, dotted, bend left, "g_1 \circ f_1"] & & B_1 \arrow[rr, "g_1"] & & C_1 \\
A_1 \times A_2 \arrow[ur, "\pi_1^A"] \arrow[dr, "\pi_2^A"'] \arrow[rr, dashed, "\exists! f_1 \times f_2"] & & B_1 \times B_2 \arrow[ur, "\pi_1^B"] \arrow[dr, "\pi_2^B"'] \arrow[rr, dashed, "\exists! g_1 \times g_2"] & & C_1 \times C_2 \arrow[ur, "\pi_1^C"'] \arrow[dr, "\pi_2^C"] & \\
 & A_2 A_1 \arrow[rr, "f_2"'] \arrow[rrrr, dotted, bend right, "g_2 \circ f_2"'] & & B_2 \arrow[rr, "g_2"'] & & C_2
\end{tikzcd}$$

έχουμε τότε (να δειχθεί!),

$$\boxed{(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) = (g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2)}$$

Στη συνέχεια θα ανάγουμε το 'γινόμενο' σε τελικό αντικείμενο μιας διαγραματικής κατηγορίας. Έστω $A, B \in \mathscr{C}_0$ δύο αντικείμενα της κατηγορίας $\mathscr{C}$ το γινόμενο των οποίων θέλουμε να μελετήσουμε. Θα συμβολίζουμε με '$\circ$' ένα αντικείμενο μεταβλητή, ενώ με '$\bullet$' ένα σταθερό αντικείμενο. Θεωρώντας τα αντικείμενα A, B σταθερά, το ερώτημά μας είναι αν υπάρχει αντικείμενο $X \in \mathscr{C}_0$ που να ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα που ορίζει το γινόμενο. Επομένως είμαστε αναγκασμένοι θα θεωρήσουμε διαγράμματα της μορφής,

$$\Sigma_X : \quad \begin{tikzcd} & \bullet A \\ X \circ \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \bullet B \end{tikzcd}$$

Θεωρούμε λοιπόν την διαγραμματική κατηγορία, με αντικείμενα,

$$\mathscr{C}_\Sigma := \{\, \Sigma_X \,|\, X \in \mathscr{C}\}$$

και βέλη, $h : \Sigma_{X'} \longrightarrow \Sigma_X$ τέτοια ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} & & \bullet A \\ X' \circ \arrow[r, "h"] \arrow[urr] \arrow[drr] & X \circ \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \bullet B \end{tikzcd}$$

Έτσι τελικά το γινόμενο των $A, B \in \mathscr{C}$ στην $\mathscr{C}$ ορίζεται ως το τελικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{C}_\Sigma$, όπως φαίνεται και από το ακόλουθο διάγραμμα, όπου για κάθε αντικείμενο $\Sigma_X \in \mathscr{C}_\Sigma$ υπάρχει ακριβώς ένα βέλος $h : \Sigma_X \longrightarrow \Sigma_P$ στο αντικείμενο Σ_P,

$$\begin{tikzcd} & & & & \bullet A \\ \cdots X' \circ \arrow[urrrr] \arrow[drrrr] \arrow[rrr, dashed, bend left, "h'"] & \cdots & X \circ \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[urr] \arrow[drr] & P \circ \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & \\ & & & & \bullet B \end{tikzcd}$$

Από την Πρόταση 2.5.7 έχουμε ότι το γινόμενο δύο αντικειμένων των $A, B \in \mathscr{C}_0$ είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού.

Την έννοια του γινομένου καθώς επίσης και όλων των κατασκευών που ορίζονται με καθολικές ιδιότητες, μπορούμε να την εκφράσουμε με τη χρήση της έννοιας του αναπαραστάσιμου συναρτητή. Γενικά αναπαραστάσιμοι συναρτητές και καθολικές ιδιότητες είναι ισοδύμαμες έννοιες.

Έστω δύο αντικειμένα $A, B \in \mathscr{C}_0$. Ορίζουμε τον συναρτητή,

$$F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set} \;/\!\!/\; B \mapsto \{(f_1, f_2) \,|\, f_i \in \mathrm{Hom}(B, B_i),\ i = 1, 2\,\}$$

Αν αυτός ο συναρτητής είναι αναπαραστάσιμος, τότε το αναπαριστόν αντικείμενο, που είναι μοναδικό μέχρις ισομορφισμού, συμβολικά $B_1 \times B_2$, είναι το γινόμενο των B_1 και B_1. Το καθολικό αντικείμενο (π_1, π_2) του F είναι τα βέλη προβολών. (Ελέγξτε την ισοδυναμία των ορισμών!)

Η έννοια του συν-γινομένου δύο αντικειμένων των $A, B \in \mathscr{C}_0$, ορίζεται δυϊκά ως το γινόμενο των $A, B \in \mathscr{C}_0^{\mathrm{op}}$ στην αντίθετη κατηγορία $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. Η καθολική ιδιότητα που ορίζει το συν-γινόμενο περγράφεται με το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, dotted, bend left, "\forall"] & & \\
& \star \arrow[r, dashed, "\exists!"] & \circ\forall \\
\bullet \arrow[ur, "i_2"'] \arrow[urr, dotted, bend right, "\forall"'] & &
\end{tikzcd}$$

Καθολική ιδιότητα Συν-γινομένου

2.7.2 Παράδειγμα. 1. Σε ένα μ.δ.σ. θεωρούμενο ως κατηγορία, το ελάχιστο $x \wedge y$ και μέγιστο $x \vee y$ όταν υπάρχουν, είναι το γινόμενο αντίστοιχα συν-γινόμενο.

2. Το ευθύ γινόμενο δύο ομάδων είναι το γινόμενο στην κατηγορία **Grp**.

3. Το Καρτεσιανό γινόμενο δύο τοπολογικών χώρων, εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο είναι το γινόμενο στην κατηγορία **Top.**

4. Το συν-γινόμενο δύο συνόλων A, B, στην κατηγορία **Set**, είναι η **ξένη ένωση** $A + B$ των A και B, που ορίζεται ως,

$$A + B := (A \times 1) \cup (B \times 2) = \{(a, 1) \,|\, a \in A\,\} \cup \{\,(b, 2) \,|\, b \in B\,\}$$

με εμφυτεύσεις ή συν-προβολές,

$$i_A(a) := (a, 1), \quad i_B(b) := (b, 2).$$

Στην κατηγορία **Set** συνήθως γράφουμε,

$$A \cong 1 + 1 + \cdots + 1, \quad \text{n-φορές}$$

αν το A είναι πεπρασμένο με n στοιχεία. 'Ετσι $2 \cong 1 + 1$ ή και $2 = 1 + 1$.

5. Αν $F(A)$ και $F(B)$ είναι τα ελεύθερα μονοειδή που παράγονται από τα σύνολα A και B, τότε στην κατηγορία **Mon**,

$$F(A) + F(B) \cong F(A + B)$$

όπως φαίνεται και από την ακόλουθη καθολική ιδιότητα,

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[dr, "i_A"] \arrow[drr, dotted, bend left, "\forall f"] & & \\
& F(A+B) \arrow[r, dashed, "\exists ! [f,g]"] & M \\
F(B) \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, dotted, bend right, "\forall g"'] & &
\end{tikzcd}$$

2.7.2 Εξισωτές και Συνεξισωτές

Η έννοια του εξισωτή είναι μια γενίκευση της έννοιας του πυρήνα των ομομορφισμών των ομάδων. Έστω $h : \langle G, *_{\mathrm{G}}, e_{\mathrm{G}} \rangle \longrightarrow \langle H, *_{\mathrm{H}}, e_{\mathrm{H}} \rangle$ ένας ομομορφισμός ομάδων, τότε ο πυρήνας του h, συμβολικά, $\ker h$, ορίζεται ως ακολούθως:

$$\ker h := \{\, x \in G \mid h(x) = e_{\mathrm{H}} \,\}$$

Ο πυρήνας $\ker h$ είναι μια υποομάδα της G, και εξ ορισμού έχουμε ότι, $h(e_{\mathrm{G}}) = e_{\mathrm{H}}$ και $x \in \ker h \;\Leftrightarrow\; h(x) = h(e_{\mathrm{G}})$. Αν τώρα έχουμε δύο ομομορφισμούς $f, g : G \longrightarrow H$, και ορίσουμε $h := f * g^{-1}$ τότε $\ker(f,g) := \ker h$, δηλ. ο πυρήνας $\ker(f,g)$ ορίζεται ως ακολούθως:

$$\ker h \equiv \ker(f,g) := \{\, x \in G \mid f(a) = g(a) \,\}$$

Όμοια στην κατηγορία **Set** ο εξισωτής δύο παράλληλων συναρτήσεων $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ είναι το υποσύνολο του A, $\{\, x \in A \mid f(x) = g(x) \,\} \subseteq A$. Το ίδιο συμβαίνει και σε άλλες συγκεκριμένες κατηγορίες. Τα παραπάνω παραδείγματα γενικεύονται σε τυχούσες κατηγορίες μέσω καθολικών ιδιοτήτων.

Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ δύο παράλληλα βέλη. Ένα βέλος $e : E \to A$ θα λέμε ότι **εξισώνει** τα f, g άνν $f \circ e = g \circ e$.

2.7.3 Ορισμός. Με τα δεδομένα της προηγουμένης παραγράφου, ένας **εξισωτής** των $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ αποτελείται από ένα αντικείμενο E και ένα βέλος $e : E \to A$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $f \circ e = g \circ g$.

(ii) Για κάθε βέλος $x : T \to A$ με $f \circ x = g \circ x$ υπάρχει μοναδικό βέλος,

$$k : T \to E$$

τέτοιο ώστε, $e \circ k = x$, δηλαδή απαιτούμε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, dotted, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
T \arrow[u, dashed, "\exists ! k"] \arrow[ur, dotted, "\forall x"'] & &
\end{tikzcd}$$

Σημειώστε ότι τά καθολικά βέλη, μέσα από τα οποία παραγοντοποιούνται τα άλλα βέλη με συγκεκριμένες ιδιότητες ($\cdots\cdots\!\!\rightarrow$), θα τα παριστούμε στα διαγράμματα με $\dashrightarrow$, ενώ τα μοναδικά υπάρχοντα βέλη με $--\rightarrow$.

Μπορούμε και εδώ να ορίσουμε τον εξισωτή με τη χρήση των αναπαραστάσιμων συναρτητών. Έστω,

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

δύο μορφισμοί της κατηγορίας, $\mathscr{C}$. Ορίζουμε τον συναρτητή,

$$F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathbf{Set} \;\; /\!\!/ \;\; T \mapsto F(T) := \{\, x \in \mathrm{Hom}(T, A) \mid f \circ x = g \circ x \,\}$$

Ο συναρτητής αυτός είναι ανταλλοίωτος. Αν είναι και αναπαραστάσιμος τότε το αναπαριστόν αντικείμενο E μαζύ με το καθολικό στοιχείο του F, $E \overset{e}{\dashrightarrow} A$ είναι ο εξισωτής των f και g.

Ο ορισμός του συνεξισωτή είναι δυϊκός του εξισωτή, δηλαδή ο συνεξισωτής είναι εξισωτής στην αντίθετη κατηγορία. Η αντίστοιχη καθολική ιδιότητα του συνεξισωτή δίνεται από το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \arrow[r, dotted] \arrow[dr, dotted, "\forall"'] & \star \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\
 & & \circ
\end{tikzcd}$$

Παρ' όλη την αναγωγή του συνεξισωτή στην έννοια του εξισωτή είναι ανάγκη να μελετήσει κανείς την σημασία του συνεξισωτή για διάφορες βασικές κατηγορίες. Αυτό θα γίνει μέσα από αρκετά παραδείγματα. Πρώτα όμως κάποιες βασικές προτάσεις.

Το γεγονός ότι ο εξισωτής και συνεξισωτής ορίζονται μέσα από καθολικές ιδιότητες, μας κάνει να αναμένουμε ότι ορίζονται μέχρις ισομορφισμού. Θα ανάγουμε και δω την απόδειξη στην αντίστοιχη για τα τελικά και αρχικά αντικείμενα. Έστω το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\Sigma_X : \qquad X \overset{x}{\dashrightarrow} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

με $f \circ x = g \circ x$. Ορίζουμε μια κατηγορία $\mathscr{C}_\Sigma$ με αντικείμενα τα διαγράμματα Σ_X, $X \in \mathscr{C}$ και βέλη $h : \Sigma_X \to \Sigma_Y$ έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, dotted, "y"] & & \\
 & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[uu, dashed, "h"] \arrow[ur, dotted, "x"'] & &
\end{tikzcd}$$

Τότε είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι η $\mathscr{C}_\Sigma$ είναι πράγματι μια κατηγορία, το τελικό αντικείμενο της οποίας είναι εξισωτής των f και g. Επειδή δε τα τελικά αντικείμενα ορίζονται μέχρις ισομορφισμού το ίδιο θα συμβαίνει και για τους εξισωτές.

Πολλοί συγγραφείς συμβολίζουν τον μέχρις ισομορφισμού μοναδικό εξισωτή του παράλληλου ζεύγους f, g και ως $\ker(f, g)$.

2.7.4 Πρόταση. *Έστω ότι $e : E \to A$ είναι ένας εξισωτής του παράλληλου ζεύγους,*

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

τότε το βέλος e είναι μονομορφισμός.

Απόδ. Έστω $T \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} E$ δύο γενικευμένα στοιχεία του E, με $e \circ x = e \circ y = h$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι $x = y$. Πράγματι, το βέλος h εξισώνει τα f και g, αφού,

$$\begin{aligned} f \circ h &= f \circ (e \circ x) \\ &= (f \circ e) \circ x \\ &= (g \circ e) \circ x \\ &= g \circ (e \circ x) \\ &= g \circ h \end{aligned}$$

Άρα από την καθολική ιδιότητα του $e : E \to A$, υπάρχει μοναδικό βέλος $k : T \to E$, τέτοιο ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dotted, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ T \arrow[u, dashed, "\exists ! k"] \arrow[ur, dotted, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Λόγω της μοναδικότητας του βέλους k και του γεγονότος ότι και τα βέλη $x, y : T \to E$ κάνουν και αυτά το πιο πάνω διάγραμμα αντιμεταθετικό, έχουμε ότι, $k = x = y$. Άρα το βέλος $e : E \to A$, είναι μονομορφισμός. ⊣

2.7.5 Παράδειγμα. 1. Στήν κατηγορία **Set** ένας εξισωτής E των παράλληλων συναρτήσεων, $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) := x^2 + y^2$ και $g(x, y) := 1$ είναι ο κύκλος $E := \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$ το δε βέλος $e : E \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι απλά η εμφύτευση του κύκλου στο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Γνωρίζουμε ότι κάθε μορφισμός $f : A \to B$ με αριστερό αντίστροφο(αναστολή), $g : B \to A$, είναι μονομορφισμός. Θα δείξουμε ότι είναι και εξισωτής.

Απόδ. Πράγματι, αν $f : A \to B$ εχει μια αναστολή τότε υπάρχει $g : B \to A$ τέτοιο ώστε $g \circ f = 1_A$. Ας θεωρήσουμε τώρα τα βέλη, $f \circ g$ και 1_B, τότε το βέλος $f : A \to B$ είναι είναι ένας εξισωτής τους. Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dotted, "f"] & B \arrow[r, shift left, "f \circ g"] \arrow[r, shift right, "1_B"'] & B \\ T \arrow[u, dashed, "\exists ! k"] \arrow[ur, dotted, "\forall x"'] & & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Πρέπει να δείξουμε ότι, $(f \circ g) \circ f = 1_B \circ f$, και κάθε άλλο βέλος με την ίδια ιδιότητα παραγοντοποιείται μέσω του f. Έχουμε, $(f \circ g) \circ f = f \circ 1_A = f$ και $1_B \circ f = f$, άρα $(f \circ g) \circ f = 1_B \circ f$. Αν τώρα $x : T \to B$ είναι τέτοιο ώστε, $(f \circ g) \circ x = 1_B \circ x$ τότε αν πάρουμε ως $k := g \circ x$, τότε $f \circ (g \circ x) = (f \circ g) \circ x = 1_B \circ x = x$. Το βέλος k είναι το μοναδικό βέλος που κάνει το διάγραμμα $(*)$ αντιμεταθετικό, γιατί αν υπήρχε και ένα άλλο, έστω το $k' : T \to A$ τότε,θα είχαμε $x = f \circ k'$. Επειδή όμως το βέλος f είναι μονομορφισμός, από τη σχέση, $f \circ k = f \circ k' = x$ έχουμε ότι, $k = k'$. Άρα το βέλος f είναι εξισωτής των παράλληλων βελών, $f \circ g$ και 1_B. ⊣▮

2.7.6 Ορισμός. Ένας μονομορφισμός $e : T \to A$ θα λέγεται **ομαλός** (regular) ανν είναι εξισωτής ενός ζεύγους βελών.

2.7.7 Ασκήσεις. 1. Δείξτε ότι οι ενρίψεις στην **Set** είναι ομαλοί μονομορφισμοί.
2. Ένα βέλος σε μια κατηγορία που είναι και επιμορφισμός και ομαλός μονομορφισμός είναι ένας ισομορφισμός.
3. Δείξτε ότι στην κατηγορία **Mon** κάθε ζευγάρι παράλληλων βελών έχει έναν εξισωτή. Σε ένα μ.δ.σ. οι μόνοι εξισωτές είναι τα ταυτοτικά βέλη.

Ας έλθουμε τώρα στους συνεξισωτές. Δυϊκά οι συνεξισωτές είναι επιμορφισμοί, και ένας μονομορφισμός και συνεξισωτής είναι ισομορφισμός.

Αν οι εξισωτές ορίζονται με μια καθολική ιδιότητα πάνω σε γενικευμένα στοιχεία, οι συνεξισωτές ορίζονται με μια καθολική ιδιότητα πάνω σε γενικευμένες ιδιότητες. Ας δούμε ξανά το διάγραμμα της καθολικής ιδιότητας για τους συνεξισωτές.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, dotted, "q"] \arrow[dr, dotted, "\forall p"'] & Q \arrow[d, dashed, "\exists ! \bar{p}"] \\ & & V \end{tikzcd}$$

Βλέπουμε ότι κάθε γενικευμένη ιδιότητα του $p : B \to V$, παραγοντοποιείται μέσω της καθολικής ιδιότητας, $B \overset{q}{\dashrightarrow} Q$. Η καθολική ιδιότητα $B \overset{q}{\dashrightarrow} Q$ είναι φανερό ότι θα επάγει επί του B ίνες, που τουλάχιστον στην κατηγορία **Set** αποτελούν τις κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσεως ισοδυμαμίας. Συνεχίζοντας να σκεπτόμαστε στην κατηγορία **Set** βλέπουμε ότι από την άλλη μεριά το παράλληλο ζεύγος f, g καθορίζει μια σχέση $R \subseteq B \times B$ μεσω του συνόλου $\{\, (f(a), g(a)) \,|\, a \in A \}$. Η σχέση $\bar{p} \circ f = \bar{p} \circ g$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση, $p(t_1) = p(t_2)$ για κάθε $(t_1, t_2) \in R$. Τη σχέση R μπορούμε να την κάνουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\bar{R}$. Αν τώρα $B/\bar{R}$ είναι το σύνολο-πηλίκο τότε η συνάρτηση $q : B \to B/\bar{R}$ είναι συνεξισωτής των f, g, βλ. και Θεώρημα 1.3.3 καθώς επίσης και το [100, σελ. 16-22, 54-58] για περισσότερες λεπτομέρειες. Το συμπέρασμα είναι ότι οι συνεξισωτές σχετίζονται με γενικευμένες ιδιότητες και σχέσεις ισοδυμαμίας. Για έναν γενικό ορισμό της σχέσεως ισοδυναμίας σε μια κατηγορία βλ. [104, Ex. 1.7 #18, σελ. 44].

2.7.3 Εφελκύσεις και Εξωθήσεις

Η εφέλυση είναι ένα είδος γενικευμένης αντίστροφης εικόνας. Ας δούμε πιό λεπτομερειακά την γενίκευση αυτή της αντίστροφης εικόνας στα σύνολα. Η δυϊκή έννοια της συνάρτησης $f : A \to V$ βλ. σελ. 30, δίνεται με βάση τις ίνες $f^{-1}(v),\ v \in V$ που αποτελούν μια διαμέριση του A. Αν τώρα έχουμε δύο συναρτήσεις (ιδιότητες) $f : A \to V$ και $g : B \to V$ τότε έχουμε για κάθε $v \in V$ δύο συλλογές ινών,

$$\{\, f^{-1}(v)\,\}_{v\in V} := \{\, A_v, \}_{v\in V} \quad \text{και} \quad \{\, g^{-1}(v)\,\}_{v\in V} := \{\, B_v, \}_{v\in V}$$

Οι ίνες ως υποσύνολα του A μπορούν να θεωρηθούν ως 'ιδιότητες' του A. Με αυτήν την έννοια η εφέλκυση δέχεται μια ερμηνεία με όρους γενικευμένων ιδιοτήτων. Κάθε όμως βέλος $f : A \to V$ μπορεί να έχει δύο δυϊκές ερμηνείες: Μία ως γενικευμένη ιδιότητα του A και μία ως γενικευμένο στοιχείο του V με πεδίο μεταβολής το αντικείμενο A.

Μπορούμε τώρα να πάρουμε το καρτεσιανό γινόμενο τον ινών,

$$A \times_V B := \bigcup_{v\in V} (A_v \times B_v).$$

Με άλλα λόγια, το $A \times_V B$ είναι το ινώδες σύνολο του οποίου η ίνα πάνω σε κάθε $v \in V$ είναι το γινόμενο των ινών $A_v \times B_v$, και συμπίπτει με την εφέλκυση των f και g επί του V. Από δω προέρχεται και ο όρος 'ινώδες γινόμενο' για την εφέλκυση.

Γενικότερα ο ορισμός της εφέλκυσης (pullback) δίνεται με την ακόλουθη καθολική ιδιότητα.

2.7.8 Ορισμός. Έστω μια κατηγορία $\mathscr{C}$ και $f, g \in \mathscr{C}_1$ με $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{cod}(g)$, δηλαδή,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "g"] & \\ & V \\ A \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Μια **εφέλκυση** των f, g αποτελείται από ένα σύστημα βελών,

$$\begin{tikzcd}
 & B \\
P \arrow[ur, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
 & A
\end{tikzcd}$$

που είναι καθολικό ως προς την ιδιότητα $f \circ p_1 = g \circ p_2$, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dr, "g"] & \\
T \arrow[r, dashed, "\exists ! u"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\forall y"] \arrow[drr, dotted, bend right, "\forall x"'] & P \arrow[ur, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"'] & & V \\
 & & A \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Εφέλκυση.

Δηλαδή έχουμε, $x = p_1 \circ u \quad y = p_2 \circ u$, και βέλη x, y έχουν την ιδιότητα $f \circ x = g \circ y$,

$$\begin{aligned}
f \circ x &= f \circ (p_1 \circ u) \\
&= (f \circ p_1) \circ u \\
&= g \circ (p_2 \circ y \\
&= g \circ y
\end{aligned}$$

Με όρους γενικευμένων στοιχείων, για κάθε, $T \in \mathscr{C}$, $(x, y) \in^T A \times_V B$, ανν $x \in^T A$ και $y \in^T B$. Επιπρόσθετα λόγω της δυϊκότητας της ερμηνείας των γενικευμένων στοιχείων ή ιδιοτήτων θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την εφέλκυση με γενικευμένα στοιχεία. Έστω το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & & T_2 \arrow[dr, "x_2"] & \\
T' \arrow[r, dashed, "\exists ! u"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\forall y"] \arrow[drr, dotted, bend right, "\forall x"'] & T \arrow[ur, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"'] & & A \\
 & & T_1 \arrow[ur, "x_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Αν λοιπόν έχουμε δύο γενικευμένα στοιχεία του A, $T_1 \xrightarrow{x_1} A$, $\quad T_2 \xrightarrow{x_2} A$ με πεδία μεταβολής T_1 και T_2 αντίστοιχα, τότε υπάρχει καθολικά καθορισμένο ενιαίο πεδίο ματαβολής T, ως προς το οποίο εκφράζονται, με καθολικό τρόπο, τα επι μέρους γενικευμένα στοιχεία $x_1 \in^{T_1} A, \quad x_2 \in^{T_2} A$, δηλαδή,

$$x_1 \circ p_1 \in^T A, \quad x_2 \circ p_2 \in^T A.$$

Το καθολικό αυτό πεδίο μεταβολής T είναι το ‘ελάχιστο δυνατό’ με την έννοια ότι κάθε άλλο ενιαίο πεδίο μεταβολής T' παραγοντοποιείται μέσω του T.

Παρ´ όλο που η πιό πάνω παρουσίαση της εφέλκυσης κάνει πιό φανερή την φυσική διαδιασία του «τραβάω προς τα πίσω», είναι πιό σύνηθες, και ιδίως όταν μιλάμε για την εφέλκυση της g κατα μήκος της f, που είναι η p_1, το διάγραμμα της καθολικής ιδιότητας της εφέλκυσης να το παρουσιάζουμε ως,

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, dotted, bend left, "y"] \arrow[ddr, dotted, bend right, "x"'] & & \\
& P \arrow[r, Rightarrow, dotted, "p_2"] \arrow[d, Rightarrow, dotted, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

Είναι φανερό ότι αν θεωρήσουμε το διάγραμμα,

$$\Sigma : \quad \begin{tikzcd}
& B \\
X \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& A
\end{tikzcd}$$

και την διαγραμματική κατηγορία $\mathscr{C}_\Sigma$, τότε η εφέλκυση του ζεύγους f, g είναι το τελικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{C}_\Sigma$ και έτσι η εφέλκυση, ως τελικό αντικείμενο, ορίζεται μέχρις ισομορφισμού.

Σχηματικά λοιπόν η καθολική ιδιότητα της εφέλκυσης, παρουσιάζεται με ένα από τα δύο διαγράμματα,

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[dr] & \\
\circ \arrow[r, dashed, "\exists!"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\forall y"] \arrow[drr, dotted, bend right, "\forall x"'] & \star \arrow[ur, Rightarrow, dotted] \arrow[dr, Rightarrow, dotted] & & \bullet \\
& & \bullet \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\circ \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, dotted, bend left, "\forall y"] \arrow[ddr, dotted, bend right, "\forall x"'] & & \\
& \star \arrow[r, Rightarrow, dotted] \arrow[d, Rightarrow, dotted] & \bullet \arrow[d] \\
& \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Θα λέμε ότι **μια κατηγορία έχει εφελκύσεις** ανν υπάρχει η εφέλκυση για κάθε ζεύγος βελών με κοινό συν-πεδίο ορισμού, δηλ. της μορφής,

$$A \xrightarrow{f} V \xleftarrow{g} B.$$

2.7.9 Παράδειγμα. **1.** Στην κατηγορία **Set** η εφέλκυση των f, g είναι το ζευγάρι $(p_A : D \to A,\ p_B : D \to B)$ με,

$$D := \{\, (x, y) \mid f(x) = g(y) \,\} \subseteq A \times B,$$

έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό,

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "{(x,y)}"] \arrow[drr, dotted, bend left, "y"] \arrow[ddr, dotted, bend right, "x"'] & & \\
& D \arrow[r, dotted, "p_B"] \arrow[d, dotted, "p_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

2. Αντίστροφες εικόνες στην Set. Έστω $f : A \to B,\ A, B \in \mathbf{Set}_0$ και $Y \subseteq B$. Θεωρούμε την εφέλκυση στην **Set** του ακόλουθου ζεύγους βελών,

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, hook, "i"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Έστω $D := \{(x, y) \,|\, f(x) = i(y)\} = \{(x, f(x)) \,|\, x \in f^{-1}[Y]\,\}$. Έστω ακόμη οι συναρτήσεις προβολών $p_A : D \to A,\ p_Y : D \to Y$ και οι ακόλουθες συναρτήσεις,

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}[Y] & \xrightarrow{f^*} & Y \\ x & \mapsto & f^*(x) \equiv f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f^{-1}[Y] & \xrightarrow{j} & A \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

τότε η εφέλκυση των f και i δίδεται από το ακόλουθο διάγραμμα, με $k : f^{-1}[Y] \to D$ // $x \mapsto (x, f(x))$,

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}[Y] \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, dotted, bend left, "f^*"] \arrow[ddr, dotted, bend right, "j"'] & & \\
& D \arrow[r, dotted, "p_Y"] \arrow[d, dotted, "p_A"'] & Y \arrow[d, hook, "i"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Πράγματι, $i \circ p_Y = f \circ p_A$ γιατί, $i \circ p_Y((x, y)) = i(p_Y((x, y))) = i(y) = y$ και $f \circ p_A((x, y)) = f(p_A((x, y))) = f(x)$ αλλά επί του D έχουμε $i(y) = f(x)$. Επίσης, $i \circ f^* = f \circ j$, γιατί αν $x \in f^{-1}[Y]$ τότε $i \circ f^*(x) = f(x)$ και $f \circ j(x) = f(x)$.
Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι $p_Y \circ k = f^*$ και $p_A \circ k = j$. Πράγματι, για $x \in f^{-1}[Y]$,

$$(p_Y \circ k)(x) = p_Y(k(x)) = p_Y((x, f(x)) = f(x) \equiv f^*(x)$$

και,

$$(p_A \circ k)(x) = p_A(k(x)) = p_A((x, f(x)) = x = j(x)$$

Έτσι $k : f^{-1}[Y] \cong D$. ⊣

3. Στο Εδάφιο 1.3.1 σελ. 29, μελετήσαμε τον πυρήμα ισοδυμαμίας $\approx_f$ μιας συνάρτησης f. Έστω $R_f \equiv \approx_f$. Τότε ο πυρήνας ισοδυναμίας μπορεί να ληφθεί και ως μια ειδική εφέλκυση του ακόλουθου τετραγώνου,

$$\begin{tikzcd} R_f \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \text{με} \quad p_i(x,y) := \begin{cases} x & \text{αν i=1} \\ y & \text{αν i=2} \end{cases}$$

Δείξτε ότι πράγματι το πιο πάνω τετράγωνο είναι μια εφέλκυση.

4. Έστω μια κατηγορία $\mathscr{C}$ με εφελκύσεις. Τότε κάθε βέλος $A \xrightarrow{f} B$ επάγει, τον ούτως ονομαζόμενο, **συναρτητή εφέλκυσης** $f^* : \mathscr{C}{\downarrow}B \longrightarrow \mathscr{C}{\downarrow}A$ μεταξύ των κατηγοριών $\mathscr{C}{\downarrow}B$ και $\mathscr{C}{\downarrow}A$ ο οποίος γενικεύει τον $f^{-1} : \mathscr{P}(B) \longrightarrow \mathscr{P}(A)$, ως ακολούθως:

$$\begin{array}{rcl} f^* : \mathscr{C}{\downarrow}B & \longrightarrow & \mathscr{C}{\downarrow}A \\ (S \xrightarrow{y} B) & \mapsto & (T \xrightarrow{x} A) \\ (S \xrightarrow{h} S') & \mapsto & (T \xrightarrow{f^*(h)} T') \end{array}$$

όπου $T \xrightarrow{x} A$ η εφέλκυση του $S \xrightarrow{y} B$ κατά μήκος του $A \xrightarrow{f} B$ και $T \xrightarrow{f^*(h)} T'$ είναι η εφέλκυση του $S \xrightarrow{h} S'$ κατά μήκος του $T \longrightarrow S$, έτσι τα ακόλουθα διαγράμματα είναι εφέλκυσεις:

$$\begin{tikzcd} & T'\bullet \arrow[rr, dotted, "f''"] \arrow[dd, dotted, "x'"] & & \bullet S' \arrow[dd, "y'"] \\ T\bullet \arrow[ur, dotted, "f^*(h)"] \arrow[rr, dotted, "f'"] \arrow[dr, dotted, "f^*(y)=x"'] & & \bullet S \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "y"] & \\ & A\bullet \arrow[rr, "f"'] & & \bullet B \end{tikzcd}$$

2.7.10 Παρατήρηση. **1.** Έστω το ακόλουθο τετράγωνο εφέλκυσης,

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & V \end{tikzcd}$$

Αν η κατηγορία στην οποία θεωρούμε το πιο πάνω τετράγωνο, έχει τελικό αντικείμενο, και θέσουμε $V = 1$ τότε η εφέλκυση (D, p_A, p_B) είναι ουσιαστικά το γινόμενο, $(A \times B, p_A, p_B)$, γιατί $D = \{\,(x, y) \mid f(x) = g(y) = 1\,\} = A \times B$.

2. Στην κατηγορία των συνόλων **Set**, αν $A \subseteq V$ και $B \subseteq V$, τότε το ακόλουθο τετράγωνο εφέλκυσης εκφράζει την τομή $\cap$.

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, hook, "i_B"] \arrow[d, hook, "i_A"'] & B \arrow[d, hook, "j"] \\
A \arrow[r, hook, "i"'] & V
\end{tikzcd}$$

3. Σε κάθε κατηγορία, αν το ακόλουθο τετράγωνο είναι εφέλκυση,

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

τότε το βέλος $i : E \to A$ είναι ο εξισωτής των f, g (Δείξτε το!).

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ορισμένες βασικές προτάσεις για την εφέλκυση.

2.7.11 Πρόταση. *Έστω το ακόλουθο τετράγωνο εφέλκυσης.*

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow"] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & V
\end{tikzcd}$$

Αν το βέλος $B \overset{g}{\rightarrowtail} V$ *είναι μονομορφισμός τότε και το* $P \overset{p_1}{\rightarrowtail} A$ *, η εφέλκυση του* g *κατά μήκος του* f *είναι επίσης μονομορφισμός.*

Απόδ. Έστω δύο μεταβαλλόμενα στοιχεία $T \underset{y}{\overset{x}{\rightrightarrows}} P$ του P, με $p_1 \circ x = p_1 \circ y$, θέλουμε να δείξουμε ότι, $x = y$. Αφού όμως $f \circ p_1 = g \circ p_2$, έχουμε ότι, $g \circ p_2 \circ x = g \circ p_2 \circ y$, όπως δείχνουν οι ακόλουθες σχέσεις,

$$\begin{aligned}
(g \circ p_2) \circ x &= (f \circ p_1) \circ x \\
&= f \circ (p_1 \circ y) \\
&= (g \circ p_2) \circ y
\end{aligned}$$

Επειδή η g έχει υποτεθεί μονομορφισμός, και $g \circ (p_2 \circ x) = g \circ (p_2 \circ y)$ έχουμε ότι, $p_2 \circ x = p_2 \circ y$. Έτσι για τα x, y έχουμε $p_1 \circ x = p_1 \circ y$ και $p_2 \circ x = p_2 \circ y$. Αλλά το δοθέν τετράγωνο είναι εφέλκυση και υπάρχει μοναδικό βέλος $k : T \to P$ με $p_1 \circ (p_1 \circ x) = k = p_2 \circ (p_2 \circ y)$, άρα $x = y$. $\dashv\blacksquare$

2.7.12 Πρόταση. *Έστω το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα.*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "I"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "II"] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Τότε,

(i) *Αν τα τετράγωνα (I) και (II) είναι εφελκύσεις τότε και το εξωτερικό τετράγωνο (I)+(II) είναι επίσης εφέλκυση.*

(ii) *Αν το εξωτερικό (I)+(II) και το (II) είναι εφελκύσεις τότε και το (I) είναι εφέλκυση.*

Απόδ. Η απόδειξη είναι μια καλή εξάσκηση στην ιχνηλάτηση διαγραμμάτων. Έστω το ακόλουθο διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\exists ! x"'] \arrow[drr, dashed, "\exists ! y"] \arrow[drrr, dotted, bend left, "\forall p"] \arrow[ddr, dotted, bend right, "\forall q"'] & & & \\
& A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, phantom, "(I)"] & B \arrow[r, "k"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "(II)"] & C \arrow[d, "w"] \\
& D \arrow[r, "m"'] & E \arrow[r, "n"'] & F
\end{tikzcd}$$

(i) Έστω ότι τα τετράγωνα (I) και (II) είναι εφελκύσεις. Θα δείξουμε ότι και το τετράγωνο (I)+(II) είναι εφέλκυση. Πράγματι, από το (II) έχουμε ότι, $w \circ k = n \circ t$, από δε το (I), $t \circ h = m \circ s$. Άρα, $w \circ k \circ h = (w \circ k) \circ h = (n \circ t) \circ h = n \circ (t \circ h) = n \circ (m \circ s)$. Έτσι,

$$w \circ k \circ h = n \circ m \circ s.$$

Έστω τώρα τα βέλη $p : T \to C$ και $q : T \to D$ τέτοια ώστε,

$$w \circ \; = n \circ m \circ q \tag{1}$$

πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένα βέλος $x : T \to A$ τέτοιο ώστε,

$$p = k \circ h \circ x \quad \& \tag{2}$$

$$q = s \circ x \tag{3}$$

Επειδή το (II) είναι εφέλκυση και $w \circ p = n \circ m \circ q$ υπάρχει μοναδικό βέλος $y : T \to B$ με,

$$p = k \circ y \qquad (4) \qquad\qquad \& \qquad m \circ q = t \circ y \qquad (5)$$

Αλλά το (I) είναι εφέλκυση, και έτσι από την (5) έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό βέλος $x : T \to A$ με

$$y = h \circ x \qquad (6) \qquad\qquad \& \qquad q = s \circ x \qquad (7)$$

Αλλά τότε $(2 + (4) + (6) \Rightarrow p = k \circ y = k \circ h \circ x$ και από την (7) $q = s \circ x$. Αρκεί να δείξουμε ότι το βέλος $x : T \to A$ είναι μοναδικό. Πράγματι αν $x' : T \to A$ είναι ένα άλλο βέλος με τις ιδιότητες του x δηλ. $p = k \circ y = k \circ h \circ x'$ και $q = s \circ x'$ τότε λόγω της μοναδικότητας του y από το (II) είναι και $t \circ h \circ x' = m \circ s \circ x' = m \circ q$ δηλαδή θα έχουμε $h \circ x' = y \;\; \& \;\; s \circ x' = q$, λόγω δε της μοναδικότητας του x από το (I), είναι $x = x'$ και άρα το (I)+(II) είναι εφέλκυση. ⊣□
(ii) Ομοίως. ⊣■

2.7.13 Ασκήσεις. 1. Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και $A \in \mathscr{C}_0$. Να δειχθεί ότι το γινόμενο δύο αντικειμένων στην κατηγορία-τεμάχιο $\mathscr{C}{\downarrow}A$ είναι η εξώθησή των επί του A στην $\mathscr{C}$.

2.8 Ισόμορφες, Ισοδύναμες και Προσαρτημένες Κατηγορίες

2.8.1 Ισόμορφες Κατηγορίες

Στη Θεωρία Κατηγοριών η έννοια της ισότητας μεταξύ δύο αντικειμένων είναι ήσσονος σημασίας. Αντίθετα η έννοια σύγκρισης που κυριαρχεί στα μαθηματικά και στις Κατηγορίες είναι αυτή του ισομορφισμού. Για παράδειγμα όλα τα αντικείμενα που ορίζονται με καθολικές ιδιότητες (αρχικά, τελικά κ.λπ.) ορίζονται μέχρις ισομορφισμού. Τα ισομορφικά αντικείμενα, αφού είναι αδύνατος ο δομικός τους διαχωρισμός, ταυτίζονται μεταξύ τους.

Στο πρώτο επίπεδο δομής, αυτό της κατηγορίας, δύο αντικείμενα μπορούν να είναι μόνον ισόμορφα ή ίσα. Στην κατηγορία **Cat** όμως δύο κατηγορίες μπορούν να είναι (με φθίνουσα σειρά ισχύος) ισόμορφες, ισοδύναμες ή προσαρτημένες. Η προσάρτηση ενώ είναι η πιό αδύνατη σχέση μεταξύ κατηγοριών, είναι ταυτόχρονα και η πιο ενδιαφέρουσα όπως θα δούμε στη συνέχεια!

Θα ακολουθήσουμε την πιο κάτω πορεία,

$$\boxed{\textbf{ισόμορφες κατηγορίες}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\textbf{ισοδύναμες κατηγορίες}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\textbf{προσαρτημένες κατηγορίες}}$$

για την τελική εισαγωγή της σπουδαίας εννοίας της ‘προσάρτησης’, ακολουθώντας πάντοτε την επιταγή της κατηγοριοποίησης:

• ισότητες μεταξύ στοιχείων	• ισομορφισμοί μεταξύ αντικειμένων
• ισότητες μεταξύ συναρτήσεων	• φυσικοί ισομορφισμοί μεταξύ συναρτητών

Ας δούμε όμως πρώτα την έννοια της ισομορφίας μεταξύ κατηγοριών. Επειδή έχουμε ήδη δώσει τον ορισμό, πότε δύο αντικείμενα μια κατηγορίας είναι ισόμορφα. Αρκεί να εφαρμόσουμε τον ορισμό αυτό στην περίπτωση της κατηγορίας **CAT**. Έτσι δύο κατηγορίες $\mathscr{C}$ και $\mathscr{D}$ είναι ισόμορφες ανν υπάρχουν συναρτητές,

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}, \quad \text{με}, \quad G \circ F = 1_{\mathscr{C}} \ \text{ και } \ F \circ G = 1_{\mathscr{D}} \quad (*)$$

Ο ισομορφισμός αυτός είναι μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ κατηγοριών.

2.8.1 Παράδειγμα. Έστω δύο κατηγορίες $\mathscr{C}$ και $\mathscr{D}$ και έστω,

$$\begin{array}{rcl} F : \mathscr{C} \times \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathscr{D} \times \mathscr{C} \\ (A, B) & \mapsto & F(A, B) := (B, A) \\ (f, g) & \mapsto & F(f, g) := (g, f) \end{array}$$

Έστω επίσης,

$$\begin{array}{rcl} G : \mathscr{D} \times \mathscr{C} & \longrightarrow & \mathscr{C} \times \mathscr{D} \\ (B, A) & \mapsto & F(B, A) := (A, B) \\ (g, f) & \mapsto & F(f, g) := (f, g) \end{array}$$

Τότε είναι φανερό ότι $F \circ G = 1_{\mathscr{D} \times \mathscr{C}}$ και $G \circ F = 1_{\mathscr{C} \times \mathscr{D}}$, άρα $\mathscr{C} \times \mathscr{D} \cong \mathscr{D} \times \mathscr{C}$.

Στη σχέση $(*)$ παρατηρούμε ότι ο ισομορφισμός μεταξύ δύο κατηγοριών εκφράζεται συναρτήσει της 'ισότητας' στην κλάση της κατηγορίας των συναρτητών, $G \circ F = 1_{\mathscr{C}}$ και $F \circ G = 1_{\mathscr{D}}$. Η ισότητα '=' για την κατηγορική αντίληψη είναι εξαιρετικά αυστηρή και εναρμονίζεται περισσότερο με στατικές καταστάσεις παρά με μεταβαλλόμενες και δυναμικές που είναι το βασικό θέμα της Θεωρίας Κατηγοριών. Ακολουθώντας λοιπόν την γενική τάση να αντικαθιστούμε την 'ισότητα' με 'ισομορφισμούς' οδηγούμαστε σε μια χρήσιμη έννοια 'δομικής ομοιότητας' δύο κατηγοριών που είναι ασθενέστερη της ισομορφίας αλλά που στην ουσία διατηρεί όλες τις 'καλές' κατηγορικές ιδιότητες.

2.8.2 Ισοδύναμες Κατηγορίες

2.8.2 Ορισμός. Δύο κατηγορίες $\mathscr{C}$ και $\mathscr{D}$ θα είναι **ισοδύναμες** ανν υπάρχουν συναρτητές F, G με,

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}, \quad \text{με}, \quad G \circ F = 1_{\mathscr{C}} \ \text{ και } \ F \circ G = 1_{\mathscr{D}} \quad (*)$$

δηλαδή *δυο κατηγορίες είναι ισοδύναμες αν είναι 'ισόμορφες μέχρις ισομορφισμού'*. Ας δούμε όμως πιο αναλυτικά τον ορισμό της ισοδυναμίας. Οι σχέσεις $G \circ F \cong 1_{\mathscr{C}}$ και $F \circ G \cong 1_{\mathscr{D}}$, πραγματώνονται μέσω των μοναδιαίων φυσικών μετασχηματισμών $\eta : 1_{\mathscr{D}} \Rightarrow FG$ και $\varepsilon : GF \Rightarrow 1_{\mathscr{C}}$. Μπορούμε λοιπόν πιο αναλυτικά να πούμε ότι η τετράδα $\langle F, G; \eta, \varepsilon \rangle$ αποτελεί μια 'ισοδυναμία' ανν έχουμε τα ακόλουθα:

(i) Για το φυσικό μετασχηματισμό, $(\varepsilon_C : G(F(C)) \longrightarrow C)_{C\in\mathscr{C}_0}$ να έχουμε για κάθε $C \in \mathscr{C}_0$, η συνιστώσα $\varepsilon_C : G(F(C)) \longrightarrow C$ να είναι ισομορφισμός στην $\mathscr{C}$.

(ii) Ομοίως για το φυσικό μετασχηματισμό $(\eta_D : D \longrightarrow F(G(D)))_{D\in\mathscr{D}_0}$ θα πρέπει να έχουμε ότι κάθε συνιστώσα $\eta_D : D \longrightarrow F(G(D))$ να είναι ισομορφισμός στην $\mathscr{D}$.

Μια ισοδυναμία λοιπόν των κατηγοριών $\mathscr{D}$ και $\mathscr{C}$ καθορίζεται από μια τετράδα $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle$ όπου

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathscr{C} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

είναι συναρτητές με,

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D} \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, dashed, "FG\cong 1_{\mathscr{D}}"] & \\ \mathscr{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, dashed, "1_{\mathscr{C}}\cong GF"'] & \mathscr{D} \arrow[d, "G"] \\ & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

και

$$\eta : 1_{\mathscr{D}} \Rightarrow FG,\ \varepsilon : GF \Rightarrow 1_{\mathscr{C}},$$

είναι φυσικοί μετασχηματισμοί που οι συνιστώσες τους είναι ισομορφισμοί, δηλ. $G\circ F \cong 1_{\mathscr{C}}$ και $1_{\mathscr{D}} \cong F\circ G$.

Ήδη η σχέση της ισοδυμαμίας δύο κατηγοριών είναι μια ειδική σχέση προσάρτησης, ο δε συναρτητής G είναι και δεξιά και αριστερά προσαρτημένος του συναρτητή F, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Η έννοια της ισοδυναμίας μεταξύ κατηγοριών, είναι η κατάλληλη έννοια που εκφράζει την ταυτότητα δύο κατηγοριών αναφορικά με την 'μορφή' τους.

2.8.3 Παράδειγμα. Για κάθε κατηγορία $\mathscr{C}$ ένας **σκελετός της** $\mathscr{C}$ είναι μια μεστή υποκατηγορία $\mathscr{S}$ της $\mathscr{C}$, τέτοια ώστε κάθε αντικείμενο της $\mathscr{C}$ να είναι ισομορφικό (στη $\mathscr{C}$) με ακριβώς ένα αντικείμενο της $\mathscr{S}$. Τότε η κατηγορία $\mathscr{S}$ είναι ισοδύναμη της $\mathscr{C}$ και η εμφύτευση $\mathscr{S} \hookrightarrow \mathscr{C}$ είναι μια ισοδυναμία. Πράγματι, αφού για κάθε $C \in \mathscr{C}_0$ υπάρχει ένα μοναδικό αντικείμενο $S \in \mathscr{S}_0$ με $C \cong S$, μπορούμε να ορίσουμε ένα συναρτητή, $G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S} \mathbin{/\!\!/} C \mapsto S, (f : C \to C') \mapsto (f' : S \to S')$, και ένα φυσικό μετασχηματισμό $(\eta_C)_{C\in\mathscr{C}_0}$ με $\eta_C \cong GC$ και $\eta : 1_{\mathscr{C}} \cong G$. Επί πλέον $G \cong 1_{\mathscr{S}}$ και επομένως ο συναρτητής εμφύτευσης είναι μια ισοδυναμία.

2.8.3 Προσαρτήσεις

Η έννοια της προσάρτησης είναι το τέταρτο βασικό στοιχείο των κατηγοριών πέρα από τις έννοιες, της κατηγορίας, του συναρτητή και του φυσικού μετασχηματισμού. Το ακόλουθο σλόγκαν φανερώνει την κεντρική σημασία της έννοιας της προσάρτησης:

Οι προσαρτημένοι συναρτητές βρίθουν στα μαθηματικά!

Είναι φανερό ότι αφού η Θεωρία Κατηγοριών αναπτύσσεται γύρω από την κεντρική ιδέα της 'μεταβολής', θα πρέπει να υπάρχει μια κατηγορική έννοια που θα εκφράζει ένα είδος 'σύνθεσης' στη διαλεκτική που διαφαίνεται από την υπάρχουσα μεταβολή. Η διαλεκτική αυτή της μεταβολής εκφράζεται από την προσάρτηση! Βλ. και [128] για το θέμα 'Διαλεκτική και Προσάρτηση' και τα [41, 107, Κεφ. 3] για τη διαλεκτική του 'σταθερού vs. μεταβαλλόμενου'. Η έννοια της προσάρτησης λοιπόν εκφράζει την **καθολική συνθετική λύση**, σε αντιτιθέμενες κατασκευές και προβλήματα, που το ένα στοχεύει στην κατασκευή μεγιστικών αντικειμένων ενώ το άλλο στην κατασκεύη ελαχιστικών αντικειμένων. Οι ελεύθεροι συναρτητές, για παράδειγμα, στοχεύουν σε μεγιστικές κατασκεύες, διευρύνοντας το αντικείμενο των γενητόρων, ενώ οι εξερχόμενοι από μια κατηγορία συναρτητές ('παρατήρηση' της κατηγορίας) ανασυγκροτούν την κατηγορία σε μια ελαχιστική κατηγορία παρατηρούμενων 'ινών'.

Λόγω της σπουδαιότητας της εννοίας αυτής, θα την εξετάσουμε πρώτα στα μ.δ.σ. και στα μονοειδή, θεωρούμενα ως κατηγορίες.

(ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ!!!)

Η Πορεία Προς τους Ελέφαντες

Βήμα 1

• F. William Lawvere and S. Schanuel, *Conceptual Mathematics: A first introduction to categories*, Cambridge 1997
• F. William Lawvere and R. Rosebrugh, *Sets for Mathematics*, Cambridge 2003

$\Downarrow$

Βήμα 2

• Barr M. and C. Wells, *Category Theory for Computing Science* 2nd Ed. Prentice Hall, 1995
• Goldblatt, R., *Topoi: the categorical analysis of logic.* North-Holland, 1979.
• McLarty, C., *Elementary Categories, Elementary Toposes.* Oxford, 1995.

$\Downarrow$

Βήμα 3

• MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician,* 2nd Ed. Springer, 1998
• MacLane, S., and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Springer, 1992

$\Downarrow$

Βήμα 4

• F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra* 3 vols, Cabridge Uviv. Press
• P. Johnstone, *The Scetch of an Elephant*. 3 vols, Oxford

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Γενική Βιβλιογραφία

[1] Albeverio S., J. E. Fenstad, R. H. Krohn and T. Lindstrom, *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*. Academic Press, 1986.

[2] Αξελός, Κ. *Ο Ηράκλειτος και η Φιλοσοφία*, Εξάντας, Αθήνα, 1974.

[3] P. Aczel. *Non--well Founded Sets.* CSLI, Stanfod, 1988.

[4] Ballard, D. and K. Hrbacek, Standard foundations for nonstandard analysis. *The Journal of Symbolic Logic* **57** (1992), 741-748.

[5] Baron, M. *The Origins of the Infinitesimal Analysis.* 1969, Dover:1987.

[6] Barnes D. W. and J. M. Mack, *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic.* Graduate Text in Math, # 22, Springer 1975

[7] J. Barwise. *Admissible Sets and Structures.* Springer, Heidelberg, 1975.

[8] J. Barwise and L. Moss. Hypersets. *Math. Intelligencer*, 13:31--41, 1991.

[9] J. Barwise and J. Etchemendy. *The Liar.* Oxford University Press, Oxford, 1987.

[10] Bell, J.L. and M.Machover, *A course in Mathematical Logic*. North Holland, 1977.

[11] Bell, J. L., *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory*. (Second edition). Clarendon Press, Oxford, 1985.

[12] Bell, J. L., Infinitesimals. *Synthese*, **75** (1988), 285-315.

[13] Bell, J. L., A Primer of Infinitesimal Analysis. Cambridge 1998.

[14] E. Beth. *The Foundations of Mathematics*. North-Holland, 1968.

[15] Blitz, D. *Emergent Evolution: Qualitative Novelty and the Levels of Reality,* EPISTEME, Vol. 19, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1992.

[16] T. S. Blyth and M. F. Janowitz. *Residuation Theory.* Pergamon press 1972.

[17] Boyer, C. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Columbia Univ. Press 1939, Dover, 1959.

[18] Bridge, J. *Beginning model theory: the completeness theorem and some consequences,* Oxford 1977.

[19] C. C. Chang and H. J. Keisler : *Model theory*. North Holland, 3rd Ed. (1990).

[20] Pierre CARTIER, A MAD DAY'S WORK: From Grothendieck to Connes and Kontsevich. The Evolution of Concepts of Space and Symmetry. *BULLETIN (New Series) of the AMS* Vol. 38, No 4, pp. 389-408.

[21] C. C. Chang. Algebraic analysis of many valued logics. *Trans. of AMS*, **88**, 1957, 467-490.

[22] C. C. Chang. A new proof of the completeness of Lukasiewicz axioms. *Trans. of AMS*, **93**, 1958, 74-80.

[23] K. Ciesielski, *Set Theory for the Working Mathematician* Cambridge 1997.

[24] P. J. Cohen and R. Hersh. Non-cantorian set theory. *Scientific American*, 217, December:104--116, 1967.

[25] Courant, R. and H. Robbins, *What is Mathematics ?* Oxford Univ. Press, 1978.

[26] Cutland, N. J., Nonstandard measure theory and its applications. *Bull. London Math. Soc.*, **15** (1983)

[27] D. van Dalen, H. C. Doets and H. de Swart, *Sets: Naive, Axiomatic and Applied.* Pergamon Press 1978

[28] Dauben, J. W. and A. Robinson, *Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis: A Personal and Mathematical Odyssey.* 1995.

[29] Davey, B. A. and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order.* Cambridge 1990.

[30] Davis, M. *Applied Nonstandard Analysis.* Wiley, 1977.

[31] K. Devlin. *The Joy of Sets.* Springer, Heidelberg, 1993.

[32] Diener F. and M. Diener (Eds), *Nonstndard Analysis in Practice.* Springer, Universitext 1995.

[33] Diener, F. and K. D. Stroyan, Syntactical methods in infinitesimal analysis. In N. Cutland : *Nonstandard Analysis and its Applications*, p. 258-282. Cambridge University Press, 1988.

[34] Drossos, C. A., Foundations of Fuzzy Sets. A nonstandard approach. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. **37**, p. 287-307, 1990.

[35] Drossos, C. A. and G. Markakis, Boolean powers and stochastic spaces. *Mathematica Slovaca*, vol. **44**, 1-19, 1994.

[36] C. A. Drossos and P. Theodoropoulos. $\mathbb{B}$-fuzzy probability *Fuzzy Sets and Systems,* **78** (1996), 355-369.

[37] C. A. Drossos and P. Karazeris. Coupling an MV-algebra with a Boolean Algebra. Intern. Journal of Approx Reasoning, 18 (1998) 231-238.

[38] C. A. Drossos, G. Markakis and P.theodoropoulos, $\mathbb{B}$-Stochastics. In: M.L. Puri (Ed.), *Asymptotics in Statistics and Probability*, VSP 2000 (A volume in honour of G. G. Roussas).

[39] Δρόσος Α. Κώστας, *Εισαγωγή στα απειροστά και την Απειροστική Πιθανότητα*. Πάτρα, 1988.

[40] Δρόσος Α. Κώστας, *Στοιχεία Θεωρίας Μοντέλων & Απειροστικής Ανάλυσης*. Πάτρα, 2003. Διαθέσιμο από:

`www.math.upatras.gr/~cdrossos/Docs/`

[41] Δρόσος Α. Κώστας *Εισαγωγή στη Μαθηματική σκέψη: Τομ.* $1^{ος}$. Πάτρα 1999.

[42] Ebbinghauss , Flumm , Thomas, *Mathematical Logic*, 2nd edition, Springer, 1984

[43] Enderton, H. B. *Elements of Set Theory,* Academic Press, 1996

[44] Enderton, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, 1997

[45] Engels, F, *Αντι-Ντύρινγκ.* Εκδ. Αναγνωστίδη, 1963.

[46] Edwards, C. H. Jr., and C. H. Esward, *The Historical Development of the Calculus.* Springer, 1994.

[47] Petr Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer (1998).

[48] A. G. Hamilton, *Logic for Mathematicians*, Cambridge University Press; Revised edition (January 1989)

[49] A. G. Hamilton, *Numbers, Sets and Axioms:the apparatus of mathematics.* Cambridge University Press 1982

[50] R. Herch. Some proposals for reviving the philoshophy of mathematics. *Advances in Math.*, 31:31--50, 1979.

[51] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, and A. Levy. *Foundations of Set Theory*. Noth-Holland, second edition, 1973.

[52] Jean Gallier, *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving* Ηλεκτρονική έκδοση 2003, Διαθέσιμο από:

`http: //www. cis. upenn. edu/ jean/gbooks/logic. html`

[53] Goldblatt, R., *Lectures on the Hyperreals.* Springer, 1998.

[54] Rami Grossberg, *A Course in Model Theory*, Βιβλίο σε εξέλιξη. Δές και: `www. math. cmu. . edu/~rami`

[55] Hatcher, W. Calculus is algebra. *Amer. Math. Monthly*, **89** (1982), 362-370.

[56] Heath, T. L. *A Manual of Greek Mathematics*. Dover, 1963.

[57] Henson, C. W. Foundations of Nonstandard Analysis. In: L. Arkeryd, N. Cutland, C. Ward Henson (Eds), *Nonstandard Analysis: Theory and Applications.* Kluwer NATO ASI Series C, 1997.

[58] Hersh, R. *What Is Mathematics Really?*. Oxford Univ. Press 1997.

[59] Hurd, A. and P. Loeb, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis*. Academic Press 1985.

[60] Jech, T., *Set Theory* 3rd rev. ed. Springer 2003.

[61] Jech, T. Boolean-Valued Models.In J. Donald Monk and R. Bonnet, (Eds) *Handbook of Boolean Algebras*, *3*, Ch. 27, pp. 1197-1211.

[62] W. Just ans M. Weese, *Discovering Modern Set Theory. I: The Basics, II:Set Theoretic Tools for Every Mathematician* AMS,1996, 1997.

[63] Kanamori, A., *The Higher Infinite: Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, 2nd ed. Springer 2003.

[64] Kappos, D.: *Probability Algebras and Stochastic spaces*. Academic Press, (1969).

[65] Keisler, H. J. *Elementary Calculus*. Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[66] Keisler, H. J., *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Prindle, Weber & Schmidt, 1976.

[67] Keisler, H. J., The hyperreal line. In: P. Ehrlich(ed.) *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*, Kluwer Acad. Publ. 1994.

[68] P. Kitcher. *Mathematical Knowledge*. Oxford Univ. Press, 1984.

[69] S. Körner. *The Philosophy of Mathematics*. Harper Torchbooks, 1960.

[70] Kusraev, A. and S. S. Kutateladze, *Nonstandard Methods of Analysis*. Kluwer 1994.

[71] Landers, D. and L. Rogge, *An Introduction to Nonstandard Real Analysis.* Academic Press, New York, 1985.

[72] Lindstr m, T., An invitation to nonstandard analysis. In, N. J. Cutland (Ed.) *Nonstandard Analysis and its Applications,* Cambridge Univ. Press, *L.M.S. Student Texts*, vol. **10**, p.1-105, 1988.

[73] Luxemburg, W. A. L. What is non-standard analysis. *Amar. Math. Monthly*, **80** (1973), 38-67.

[74] Mentzeniotis, D. *Three Views Concerning Continuity and Infinitesimals: Non-Standard Analysis, Topos Theory, and Intuitionism.* Ph.D Thesis, Department of Philosophy, Logic and Scientific Method, The London School of Economics and Political Science, 1986.

[75] P. Maddy. *Realism in Mathematics*. Oxford Univrsity Press, Oxford, 1990.

[76] Maddy, P., *Naturalism.* Oxford Univ. Press, 1997.

[77] R. Mansfield and G. Weitkamp. *Recursive Aspects of Set Theory*. Oxford Univ. Press, New York, 1985.

[78] Y. Moschovakis. *Notes on Set Theory*. Springer, Heidelberg, 1993.

[79] Nelson, E., Internal Set Theory, a new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the A. M. S.*, vol. **83**, n. 6, 1977.

[80] Nelson, E., *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton Univ. Press, 1987

[81] Nelson, E., *Nonstandard Analysis*, Βιβλίο σε εξέλιξη. Διαθέσιμο από: `www.math.princeton.edu/~nelson/index.html`.

[82] Palmgren, E. A sheaf-theoretic foundation for nonstandard analysis. *Annals of Pure and Applied Logic*, **85**, 69-86.

[83] Prestel, A. Nonstandard Analysis. In H.-D. Ebbinghaus et all. *Numbers.* Springer GTM # 123, 1990.

[84] H. Putnam. *Realism and Reason: vol.3, Philosophical Papers*. Cambridge Univ. Press, 1983.

[85] H. Putnam, Models and Reality, Journal of Symb. Logic, vol. 45,# 3, (1980) 464-482

[86] Robert, A. *Non-Standard Analysis*. Wiley, 1988.

[87] Rothmaler, P. *Introduction to Model Theory*, Gordon and Breach Science Pub. 2000

[88] J. R. Shoenfield. *Mathmetical Logic*. Addison-Wesley, 1967.

[89] J. R. Shoenfield. Axions of set theory. In J. Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, pages 321--344. North - Holland, Amsterdam, 1977.

[90] M. B. Smith. Topology. In S. Abramsky D. Gabbay and T. S. E. Maibaum: *Handbook of Logic in Computer Science, vol. 1.:Background: Mathematical Structures.* pp. 641-761, Oxford Uviv. Press, 1992.

[91] Stroyan K. and J. M. Bayod, *Foundations of Infinitesimal Stochastic Analysis*, Norht-Holland 1980.

[92] Sullivan, K. A. The teaching of Elementary Calculus, using the non-standard approach. *Amer. Math. Monthly,* (1976), 370-375.

[93] Tall, D. Looking at graphs through infinitesimal microscopes, windows and telescopes. *The Math. Gazette,* **64** (1980), 22-48.

[94] R. Tieszen *Mathematical Intuition: Phenomenology and Mathematical Knowledge.* Kluwer 1989.

[95] R. Tieszen, Gödel's Path from the Incompleteness Theorems (1931) to Phenomenology (1961), The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 4, # 2, 1998

[96] Thomas Tymoczko. *New Directions in the Philisophy of Mathematics*. Birkhäuser 1986.

[97] D. van Dalen, H. C. Doets, and H. de Swart. *Sets: Naive, Axiomatic and Applied*. Pergamon Press, 1978.

[98] Vopĕnka, P. The philosophical foundations of alternative set theory. *Int. J. General Systems*, **20** (1991), 115-126.

Βιβλιογραφία Θεωρίας Κατηγοριών

[99] J. Adámek, H. Herrlich, and G. Stecker, *Abstract and Concrete Categories* J. Wiley and Sons, 1990.

[100] M. A. Arbib and E. G. Manes, *Arrows, Structures, and Functors: The Categorical Imperative.* Academic Press 1975.

[101] S. Awodey, *Categories for Everybody.* Διαθέσιμο από:

`http://www.andrew.cmu.edu/course/80-413-713/notes/catbook.pdf`

[102] J. Baez and J. Dolan, Categorification,in *Higher Category Theory*, eds. Ezra Getzler and Mikhail Kapranov, Contemporary Mathematics vol. 230, American Mathematical Society, Providence, 1998, pp. 1-36. Also at

http://front.math.ucdavis.edu/math.QA/9802029

[103] John Baez and James Dolan, From finite sets to Feynman diagrams, in *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*, vol. 1, eds. Bj"orn Engquist and Wilfried Schmid, Springer, Berlin, 2001, pp. 29-50. Also at

`http://front.math.ucdavis.edu/math.QA/0004133`

[104] Barr M. and C. Wells, *Toposes, Triples and Theories* Springer, 1985. Διαθέσιμο από:

`http://www.cwru.edu/artsci/math/wells/pub/ttt.html`

[105] Barr M. and C. Wells, *Category Theory for Computing Science* 2nd Ed. Prentice Hall, 1995

[106] Bell, J. L., Categories, Toposes, and Sets, *Synthese*, **69**, 409-426

[107] Bell, J. L., From absolute to Local Mathematics. *Synthese*, **69** (1986), 409-26.

Υπάρχει και Ελληνική μετάφραση, διαθέσιμη από:

`www.math.upatras.gr/~cdrossos/Docs/BellFA2LM.pdf`

βλ. επίσης, `http://publish.uwo.ca/~jbell/`, για πολύ και ενδιαφέρον υλικό!

[108] Bell, J. L., *Toposes and Local Set Theories,* Oxford, 1998.

[109] Bénabou, J., Fibered categories and the foundations of naive category theory. *Journal of Symbolic Logic*, **50,**(1985), 10-37.

[110] Bucur, I. and Deleanu A.,*Imtroduction to the Theory of Categories and Functors.* Wiley 1968.

[111] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra* 3 vols, Cabridge Uviv. Press 1994

[112] Carsten Butz, *Regular Categories and Regular Logic*. October 1998. Διαθέσιμο από:

`http://www.brics.dk/LS/98/2/BRICS-LS-98-2.pdf`

[113] Pierre CARTIER, A MAD DAY'S WORK: From Grothendieck to Connes and Kontsevich. The Evolution of Concepts of Space and Symmetry. *BULLETIN (New Series) of the AMS* Vol. 38, No 4, pp. 389-408.

[114] Mario Cáccamo, *Lecture Notes in Category Theory*. 2002 Διαθέσιμο από:

`http://www.itu.dk/~birkedal/teaching/category-theory-Fall-2000/catnotes.ps.gz`

[115] Kosta Došen, Functions Redefined, *The Amer. Math. Monthly,* vol. 107, # 7 (1998). pp. 631-635.

[116] Kosta Došen, *Cut Elimination in Categories,* Kluwer, 1999

[117] M. Erné, J. Kolowski, A. Melton, G. E. Stecker, A primer on Galois conections. In: *Papers on General Topology and Applications* (Madison Wisc. 1991), *Ann. New York Acad. Sci.*, # 704, N.Y. Acad. Sci. 1993, pp. 103-125.

[118] Fourman, M.P. and J. Hyland (1979). "Sheaf Models for Analysis", In: Applications of Sheaves, Lecture Notes in Mathematics # 753, Springer-Verlag, Berlin.

[119] J. A. Goguen, What is Unification? A Categorical View of Substitution, Equation and Solution, In Maurice Nivat and Hassan Aït-Kac Eds *Resolution of Equations in Algebraic Structures, Volume 1: Algebraic Techniques* pp. 217--261, Academic Press 1989. `url = citeseer.nj.nec.com/166243.html`

[120] J. A. Goguen, A Categorical Manifesto. *Mathematical Structures in Computer Science*, volume 1, number 1, pages 49- 67, March 1991.

[121] Goldblatt, R., *Topoi: the categorical analysis of logic.* North-Holland, 1979.

[122] P. Johnstone, *Stone Spaces,* Cambridge Univ. Press, 1982.

[123] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry,* Cambridge Univ. Press 1981.

[124] M. Kuga, *Galois' Gream: Group Theory and Differential Equations*, Birkhäuser, 1993.

[125] MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician,* 2nd Ed. Springer, 1998.

[126] MacLane, S., and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Springer, 1992.

[127] McLarty, C., *Elementary Catewgories, Elementary Toposes.* Oxford, 1995.

[128] Lambek, J. The influence of Heraclitus on modern Mathemativs. In: J. Agassi and R. S. Cohen (Eds), *Scientific Philosophy Today.* Reidel, 1981, 111-114.

[129] Lambek, J. and P. J. Scott, *Introduction to Higher Order Categorical logic,* Cambridge Univ. Press, 1986.

[130] F. William Lawvere and S. Schanuel, *Conceptual Mathematics: A first introduction to categories*, Cambridge 1997

[131] F. William Lawvere and R. Rosebrugh, *Sets for Mathematics*, Cambridge 2003

[132] T. Leinster, *Category Theory Notes* Διαθέσιμο από:

`http://www.maths.gla.ac.uk/~tl/categories/index.html`

[133] T. Leinster, *Higher Operads, Higher Categories*, Cambridge Univ. Press 2003. Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από:

`http://arxiv.org/abs/math.CT/0305049`

[134] MacLane, S., *Categories for the Working Mathematician,* 2nd Ed. Springer, 1998.

[135] MacLane, S., and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory.* Springer, 1992.

[136] McLarty, C., *Elementary Categories, Elementary Toposes.* Oxford, 1995.

[137] Jaap van Oosten, *Basic Category Theory.* January 1995. vi+75 pp. Διαθέσιμο από:

`http://www.brics.dk/LS/Abs/BRICS-LS-Abs/BRICS-LS-95-1.ps.gz`

[138] B. C. Pierce, *Basic Category Theory.* The MIT Press 1991.

[139] A. Poigné, *Basic Category Theory.* In: S. Abramsky et al., *Handbook of Logic in Computer Science* Vol 1, pp.413-640, Oxford Univ. Press 199?.

[140] Miles Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry,* Cambridge Univ. Press, 1988

[141] G. Reyes, Synthetic Reasoning and Variable Sets, In: F. W. Lawvere and S. H. Schanuel(Eds)*Categories in Continuum Physics* Springer LNM # 1174 pp. 69-82. 1982.

[142] T. Streicher, Category Theory and Categorical Logic. Διαθέσιμο μαζύ με άλλο ενδιαφέρον υλικό από:

http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/

[143] H. Schubert, *Categories.* Springer, 1972

[144] D. Turi, *Category Theory Lecture Notes.* 2001. Διαθέσιμο από:

http://www.dcs.ed.ac.uk/home/dt/CT/categories.pdf