Εξέταση στην Εισαγωγή στην Αλγεβρα και Θεωρία Συνόλων

Ενδεικτικές Λύσεις των Θεμάτων

9 Μαρτίου 2009

Θέμα 1: α) Εστω ότι A, B είναι τυχαία σύνολα και ότι με $P(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο των υποσυνόλων του A. Δείξτε ότι ισχύει $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$ και δώστε ένα αντιπαράδειγμα που να δείχνει ότι δεν ισχύει γενικά ότι $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$. Ισχύει πάντα κάποια από τις σχέσεις υποσυνόλου που προσδιορίζει η τελευταία αυτή ισότητα;

β) Θυμίζουμε τον ορισμό ενός διατεταγμένου ζεύγους ως συνόλου:

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Χρησιμοποιείστε τον για να δείξτε ότι, για κάθε σύνολο X,

$$X \times X \subseteq P(P(X))$$

Λύση:

(α)

$$\begin{aligned} X \in P(A) \cap P(B) &\Leftrightarrow X \in P(A) \quad \text{και} \quad X \in P(B) \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \quad \text{και} \quad X \subseteq B \\ &\Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \\ &\Leftrightarrow X \in P(A \cap B) \end{aligned}$$

Ισχύει πάντα ότι $A \subseteq A \cup B$, άρα $P(A) \subseteq P(A \cup B)$ και, ομοίως, $P(B) \subseteq P(A \cup B)$. Αρα $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. Δεν ισχύει όμως κατ' ανάγκη ότι $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$, γιατί αν, π.χ, $A = \{x\}$, $B = \{y\}$, τότε $\{x, y\} \in P(A \cup B)$ αλλά το $\{x, y\}$ δεν είναι στοιχείο ούτε του $P(A)$ ούτε του $P(B)$.

(β)

$$\begin{aligned} (x, y) \in X \times X &\Rightarrow x \in X \quad \text{και} \quad y \in X \\ &\Rightarrow \{x\} \subseteq X \quad \text{και} \quad \{x, y\} \subseteq X \\ &\Rightarrow \{x\} \in P(X) \quad \text{και} \quad \{x, y\} \in P(X) \\ &\Rightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq P(X) \\ &\Rightarrow (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(X)), \end{aligned}$$

άρα $X \times X \subseteq P(P(X))$.

Θέμα 2: Εστω ότι R και S είναι σχέσεις επί του συνόλου X. Ορίζουμε τη σχέση $R \circ S$ ως εξής:

$$R \circ S = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X \ (x, z) \in S \text{ και } (z, y) \in R\}$$

Δείξτε ότι, αν οι R και S είναι ανακλαστικές και συμμετρικές σχέσεις, τότε και η $R \circ S$ είναι ανακλαστική και συμμετρική σχέση.

Λύση: Για την ανακλαστικότητα:

Για κάθε $x \in X$ έχουμε $(x,x) \in R$ και $(x,x) \in S$, επειδή οι R, S είναι ανακλαστικές. Αρα $(x,x) \in R \circ S = \{(x,y) \in X \times X \mid \exists z \in X \ (x,z) \in S \text{ και } (z,y) \in R\}$, κάνοντας την επιλογή $z = x$.

Για τη συμμετρία: (**Εδώ υπάρχει λάθος στην εκφώνηση. Οτιδήποτε πλησιάζει το παρακάτω επιχείρημα έχει ληφθεί ως σωστό**)

Εστω ότι $(x,y) \in R \circ S$. Τότε υπάρχει $z \in X$ ώστε $(x,z) \in S$ και $(z,y) \in R$. Λόγω της συμμετρίας των σχέσεων R και S έχουμε ότι $(z,x) \in S$ και $(y,z) \in R$. Αρα $(y,x) \in S \circ R$ (δηλαδή δε μπορούμε να δείξουμε ότι $(y,x) \in R \circ S-$ αυτό είναι το λάθος. Θα ίσχυε όταν $S = R$, οπότε και είναι ευρύτερα γνωστό.)

Θέμα 3: α) Αποδείξτε με επαγωγή ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n, $3|n^3 + 2n$

β) Χρησιμοποιείστε με κατάλληλο τρόπο το ζητούμενο του 1(β) για να εξηγείστε γιατί, για κάθε φυσικό αριθμό n, $n^2 < 2^{2^n}$ (2 μονάδες)

Λύση:

α) Για $n = 0$ έχουμε ότι ο 3 διαιρεί το 0, τετριμμένα. Δεχόμενοι ότι ισχύει για το n, εξετάζουμε την παράσταση για $n+1$. Εχουμε

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3) \end{aligned}$$

Ο 3 διαιρεί και τους δυο παραπάνω προσθεταίους (τον αριστερά από την επαγωγική υπόθεση), άρα διαιρεί και το άθροισμά τους. Δείξαμε λοιπόν τον ισχυρισμό για το $n+1$.

β) Αν το X είναι πεπερασμένο και έχει n στοιχεία, τότε το $X \times X$ έχει $n.n = n^2$ στοιχεία, το $P(X)$ έχει 2^n στοιχεία, και το $P(P(X))$ έχει 2^{2^n} στοιχεία. Αρα από το (1β) έχουμε $n^2 \leq 2^{2^n}$. Επειδή το $P(P(X))$ έχει ως στοιχείο ένα σύνολο με μηδέν στοιχεία, το κενό υποσύνολο, ενώ το $X \times X$ έχει ως στοιχεία σύνολα με δύο στοιχεία, η ισότητα δε μπορεί να ισχύει. Αρα $n^2 < 2^{2^n}$

Θέμα 4: α) Πείτε τι σημαίνει ότι μία συνάρτηση $f: X \to Y$ είναι επί και αναφέρατε ένα παράδειγμα. Δείξτε ότι αν οι $f: X \to Y$ και $g: Y \to Z$ είναι επί, τότε και η σύνθεση $g \circ f: X \to Z$ είναι επί.

β) Εξηγείστε γιατί δε μπορεί να υπάρχει αντιστρέψιμη συνάρτηση από το σύνολο των φυσικών αριθμών προς το κλειστό διάστημα $[0,1]$.

Λύση:

α) Η $f: X \to Y$ είναι επί αν, για κάθε $y \in Y$, υπάρχει $x \in X$, έτσι ώστε $y = f(x)$ (π.χ η ταυτοτική συνάρτηση επί οποιουδήποτε συνόλου). Αν οι $f: X \to Y$ και $g: Y \to Z$ είναι επί, τότε για κάθε $z \in Z$ υπάρχει $y \in Y$ ώστε $z = g(y)$. Αφού και η f είναι επί τότε για αυτό το y υπάρχει $x \in X$ ώστε $y = f(x)$. Αρα $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, δηλαδή η $g \circ f: X \to Z$ είναι επί.

β) Αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση θα είχαμε μια απαρίθμηση των στοιχείων του $[0,1]$, δηλαδή έναν κατάλογο των στοιχείων του $[0,1]$, γραμμένων στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα, ως εξής:

$$
\begin{array}{r}
0, a_{00}a_{01}a_{02}... \\
0, a_{10}a_{11}a_{12}... \\
... \\
0, a_{n0}a_{n1}a_{n2}... \\
...
\end{array}
$$

Θεωρούμε έναν αριθμό $0, d_0d_1d_2...$ στο $[0, 1]$ με την ιδιότητα ότι $d_i \neq a_{ii}$. Τότε ο αριθμός αυτός δεν είναι στον κατάλογο - άτοπο.

Θέμα 5: α) Εστω ότι X είναι ένα τυχαίο σύνολο. Αν με $A(X)$ συμβολίσουμε το σύνολο των ένα-προς-ένα και επί συναρτήσεων από το X στον εαυτό του, τότε θυμίζουμε πως το σύνολο αυτό, με διμελή πράξη τη σύνθεση και ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική συνάρτηση του X, είναι ομάδα. Θεωρείστε ένα συγκεκριμένο στοιχείο $x_0 \in X$ και το σύνολο

$$H(x_0) = \{f \in A(X) \mid f(x_0) = x_0\}$$

Δείξτε ότι το σύνολο αυτό είναι υποομάδα της $A(X)$.

β) Αν το $x \in A$ είναι ένα οποιοδήποτε στοιχείο του δακτυλίου A και το $a \in A$ είναι τέτοιο ώστε $a.a = 0$, εξηγείστε αναλυτικά γιατί ισχύει ότι

$$a.(a.x + x.a) = (a.x + x.a).a$$

Λύση:

α) Αρκεί να δείξουμε πως το υποσύνολο $H(x_0)$ του $A(X)$ είναι κλειστό ως προς τη σύνθεση συναρτήσεων (δηλαδή τη διμελή πράξη), περιέχει την ταυτοτική συνάρτηση του X (δηλαδή το ουδέτερο στοιχείο) και την αντίστροφη συνάρτηση κάθε συνάρτησης που είναι στο $H(x_0)$. Για τη σύνθεση δυο στοιχείων $g,\ f \in H(x_0)$ έχουμε $(g \circ f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(x_0) = x_0$, άρα $g \circ f \in H(x_0)$. Η ταυτοτική του X είναι στο $H(x_0)$ γιατί $id_X(x_0) = x_0$. Αν η $f \in H(x_0)$, τότε επειδή η f είναι αντιστρέψιμη έχουμε $f(x_0) = x_0 \Rightarrow f^{-1}(f(x_0)) = f^{-1}(x_0) \Rightarrow x_0 = f^{-1}(x_0)$, άρα και η $f^{-1} \in H(x_0)$.

β) Εχουμε

$$
\begin{aligned}
a.(a.x + x.a) &= a.a.x + a.x.a \\
&= 0.x + a.x.a \\
&= a.x.a,
\end{aligned}
$$

επειδή σε κάθε δακτύλιο $0.x = 0$ και ομοίως

$$
\begin{aligned}
(a.x + x.a).a &= a.x.a + x.a.a \\
&= a.x.a + x.0 \\
&= a.x.a
\end{aligned}
$$