

Πανεπιστήμιο Πατρών

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα ειδίκευσης  
στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

“ Η θεωρία κατηγοριών ως μαθηματική  
θεωρία των συγκεκριμένων καθολικών”

Σωτήριος Γ. Ντελής  
Α.Μ. 326

Επιβλέπων Καθηγητής  
Παναγής Καραζέρης  
Επ. Καθηγητής

Ακαδημαϊκό Έτος 2010 -2011

*Την εργασία αυτή την αφιερώνω στον  
πολυαγαπημένο, και γλυκύτερο γιόκα μου,  
τον Τύχωνα, ικέτη αγγελικό της αγάπης  
και τρίτο άνθρωπο στη ζωή μου και στην  
καλή μου την Όλγα, που παλεύουμε μαζί,  
γενικά, για τη συνθήκη την αναστάσιμη.*

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ένα πλήθος ανθρώπων βοήθησε, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, σε αυτή την προσπάθεια. Ευχαριστώ, λοιπόν, τον καθηγητή David Corfield, της Σχολής Ευρωπαϊκού Πολιτισμού και Γλωσσών του Πανεπιστημίου του Kent, για την αλληλογραφία μας σχετικά με ζητήματα αισθητικής και n-categories· τους Fritz Schweiger, καθηγητή των Μαθηματικών και της Διδακτικής των Μαθηματικών του Πανεπιστημίου του Salzburg, και Dr William Mander, του τομέα Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης, για τα άρθρα που είχαν την καλοσύνη να μου ταχυδρομήσουν· τον Δρ Σταμάτη Γερογιωργάκη, επιστημονικό συνεργάτη του Πανεπιστημίου της Erfurt στη Γερμανία, τον Δρ Στέφανο Ορφανό, του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου του Cincinnati, και τον υποψήφιο διδάκτορα της Σχολής Ανατολικών και Αφρικανικών Σπουδών του Πανεπιστημίου του Λονδίνου κο Ηλία Μαλεβίτη, επίσης για τα άρθρα που είχαν την καλοσύνη να μου στείλουν ηλεκτρονικά· τον καθηγητή της Ανώτατης Σχολής Καλών Τεχνών στην Αθήνα κο Παναγιώτη Πούλο για την εμπιστοσύνη με την οποία περιέβαλλε την εργασία αυτή ώστε να προτείνει να την παρουσιάσω έστω και στα πρώτα της βήματα, όπως και έγινε, στα πλαίσια του μεταπτυχιακού του σεμιναρίου «Τέχνη, Χρόνος, Ειδέναι»· τους καθηγητές Μωυσή Μπουντουρίδη, Τάσο Πατρώνη, και τον υποψήφιο διδάκτορα Στυλιανό Σκαρλάτο, του Μαθηματικού τμήματος του Πανεπιστημίου της Πάτρας, για τις υποδείξεις και τη συνολική βοήθεια· τις υπαλλήλους του τμήματος διαδανεισμού της Κεντρικής Βιβλιοθήκης του Πανεπιστημίου της Πάτρας για την άμεση εξυπηρέτηση των αιτημάτων μου για δανεισμό πρωτογενούς και δευτερογενούς βιβλιογραφίας από βιβλιοθήκες του εξωτερικού, και τέλος την «Κατηγορική» ομάδα του Μαθηματικού τμήματος: καθηγητή Κώστα Δρόσο, τους υποψηφίους διδάκτορες Απόστολο Ματζάρη και Γρηγόρη Προτσώνη, εξαιρέτως δε τον επίκουρο καθηγητή Παναγή Καραζέρη, επιβλέποντα αυτής της εργασίας, για την καλοσύνη, τη ευγένεια, τους φιλοσοφικούς περιπάτους, και τη διεισδυτική του ματιά στα ζητήματα που μας απασχόλησαν εδώ.

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Κάθε φορά που κάνουμε μια απλή γεωμετρική απόδειξη διατυπώνεται και αποδεικνύεται ένας ισχυρισμός, πάνω σε ένα επιμέρους σχήμα που θεωρούμε, ο οποίος αξιώνει καθολική εγκυρότητα. Πώς, όμως, γίνεται κάτι τέτοιο; Η πλατωνική απάντηση στο ερώτημα είναι ότι οι έννοιες και οι συλλογισμοί που χρησιμοποιούμε, για τη διατύπωση και την απόδειξη του ισχυρισμού κάθε φορά, δεν έχουν να κάνουν με το συγκεκριμένο σχήμα, ούτε και με κάτι αισθητό, αλλά με κάτι νοητό. Το σχήμα που βλέπουμε είναι απλώς μια κατάλληλη υπόμνηση αυτού του νοητού. Προφανώς, ο ισχυρισμός μας εφαρμόζεται απολύτως μόνο στο τέλει σχήμα που έχουμε κατά νου. Για το κατ' αίσθηση σχήμα ισχύει στο βαθμό που προσιδιάζει του νοητού.

Η πλατωνική απάντηση, λοιπόν, στην ερώτηση του τι ακριβώς αφορούσε ο ισχυρισμός που διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε, μας παρέχει και μια πρόταση για τη δυνατότητα καθολικής και αναγκαίας γνώσης. Γνωρίζοντας τις ιδιότητες της Μορφής, της Ιδέας, γνωρίζουμε όλα της τα επιμέρους· τα καθέκαστα εκείνα που της μοιάζουν, όσα μετέχουν αυτής. Η Μορφή είναι μια καθολική οντότητα, ένα καθολικό μοντέλο των επιμέρους της. Από τη στιγμή που η γνώση αυτής της καθολικής οντότητας μας καθιστά ικανούς να έχουμε άμεση γνώση για όλα τα επιμέρους της, είναι ζωτικής σημασίας να γνωρίζουμε *τι είναι* αυτή, *πώς είναι*, *με τι άλλο μοιάζει*, *πώς ακριβώς σχετίζεται με τα επιμέρους της*. Ωστόσο, προφανώς όλες αυτές οι ερωτήσεις προαπαιτούν πως πάνω από όλα *είναι*, ότι αυτή η καθολική οντότητα *υπάρχει*.

Αλλά η ύπαρξη μιας τέτοιας οντότητας φαίνεται μάλλον αμφίβολη. Ισχυριζόμαστε και αποδεικνύουμε κάτι για ένα γεωμετρικό σχήμα γενικού χαρακτήρα που συνεπώς θα έχει, αλλά και ταυτόχρονα δεν θα έχει, τις ασύμβατες ιδιότητες των περιορισμών του: σκαληνό, ορθογώνιο, ισοσκελές τρίγωνο κ.λπ. Κάτι τέτοιο δεν μπορεί να υπάρχει. Οπότε και τίθεται το ζήτημα: η απόδειξη που κάναμε, ο ισχυρισμός που δικαιολογήσαμε, με τι είχε να κάνει;

Είναι δύσκολο να αμφισβητηθεί το ότι με την απόδειξη δεν κερδίσαμε μια καθολική γνώση· μια γνώση που αφορά σε άπειρα επιμέρους και την οποία δεν θα μπορούσαμε να ελέγξουμε, ως προς την εφαρμοσιμότητά της, αφού και άπειρα είναι, και κανένα δεν ικανοποιεί πλήρως τις προϋποθέσεις της, στην κατ' αίσθηση συνθήκη. Προφανώς υπάρχει ένα ζήτημα με τα καθολικά, αφού μας αφήνουν με μια δέσμη ερωτημάτων που αφορούν τη φύση και τα χαρακτηριστικά τους, τα οποία πρέπει να απαντηθούν αν θέλουμε να γνωρίζουμε πώς είναι δυνατή η καθολική και αναγκαία γνώση, αν είναι τελικά ποτέ δυνατή.



Στην Εισαγωγή της εργασίας μας επιχειρούμε να σκιαγραφήσουμε τον τρόπο με τον οποίο το καθολικό έγινε «αντικείμενο σκέψης»: Η δεικτική αντωνυμία, από την οποία προέρχεται το οριστικό άρθρο, αρχικά περιόριζε το συγκεκριμένο ουσιαστικό στη λειτουργία του ονόματος. Όταν η γενική σημασία του συγκεκριμένου ουσιαστικού υπερίσχυσε σε βαθμό ώστε για να δηλωθεί το συγκεκριμένο αντικείμενο να απαιτείται η προσθήκη ενός προσδιορισμού που εξατομικεύει, σχηματίστηκε το οριστικό άρθρο. Ο «καθολικός» χαρακτήρας μιας έννοιας ενυπάρχει σπερματικά στο συγκεκριμένο ουσιαστικό, όταν χρησιμοποιείται ως κατηγορούμενο, και η αφαίρεση δημιουργείται όταν το συγκεκριμένο ουσιαστικό συγκεκριμενοποιείται χάρη στο άρθρο και τη δεικτική του δύναμη. Δηλαδή, το λογικό περιεχόμενο που περικλείει η

λειτουργία του συγκεκριμένου ουσιαστικού, ως κατηγορούμενου, γίνεται φανερή χάρη στο άρθρο.

Κατά τον ίδιο τρόπο, από-καλυπτικά, αναδύεται το λογικό στοιχείο στη συνείδηση. Στην πρόταση «το Α είναι Β», η λογική σύνδεση γίνεται με τη λέξη «είναι» που δείχνει πώς συνδέονται το μερικό και το γενικό. Το συνδετικό ρήμα, όμως, δεν ανήκε στα αρχικά στοιχεία της γλώσσας γιατί δεν ήταν απαραίτητο. Αργότερα, αλλά πριν την εγκατάσταση των ελληνικών φύλων στον ελλαδικό χώρο χρησιμοποιούνταν, ως συνδετικό, ένα ρήμα που αρχικά σήμαινε «είμαι παρών», «υπάρχω». Το γεγονός αυτό κάνει δυνατή την παρμενίδεια ταύτιση ανάμεσα σ' αυτό που υπάρχει και στη σκέψη. Εδώ, όμως, δημιουργείται το δύσκολο πρόβλημα, που απασχόλησε τους φιλοσόφους για ολόκληρους αιώνες: τί είδους ύπαρξη πρέπει να αποδώσουμε σε εκείνο το αντικείμενο της σκέψης που έχει χαρακτήρα «καθολικό»; Πώς είναι δυνατή η καθολική γνώση για επιμέρους πράγματα;



Η θεωρία των καθολικών έχει μακρά ιστορία. Ξεκινά με τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη, αλλά διαπερνά και όλο το Μεσαίωνα (όπου κύριο αντικείμενο φιλοσοφικο-θεολογικής μελέτης αποτελεί το υλικό που πραγματεύεται η λογική), φτάνοντας στο σήμερα, εντός της παραδόσεως της αναλυτικής φιλοσοφίας. Στη μεταφυσική ο όρος «καθολικό», σε αντίθεση με τα καθέκαστα που το έχουν κοινό, εφαρμόζεται σε ιδιότητες όπως κόκκινος, στρογγυλός κ.λπ., σε σχέσεις σαν της συγγένειας, του αιτίου-αιτιατού, τις χωρικές, τις χρονικές κ.λπ., ή σε γένη όπως είναι ο χρυσός, ο ορνιθόρυγχος κ.λπ.. Τα καθολικά μας καθιστούν ικανούς να συλλαμβάνουμε μια σταθερή τάξη κάτω από τα φαινόμενα, πέρα από την αέναη ροή της εμπειρίας.

Ο όρος παραπέμπει στον Αριστοτέλη ο οποίος ισχυρίζεται πως τα καθολικά δεν υπάρχουν πριν από τα πράγματα, αλλά εξαρτώνται από τις πραγματώσεις τους με τη μορφή των κοινών χαρακτηριστικών τους. Στον Πλάτωνα τα συναντάμε ως «Μορφές» ή «Ιδέες» που υπάρχουν πριν και ανεξάρτητα από οποιαδήποτε αντικείμενα τα πραγματώνουν. Έχουμε μία οντότητα, και μια μεταβλητή σχέση μεταξύ αυτής και των επιμέρους. Η οντότητα περιγράφει τι έχουν κοινό τα διάφορα επιμέρους, και η σχέση περιγράφει τους βαθμούς κατά τους οποίους φανερώνονται οι οντότητες στα επιμέρους.

Το πραγματικό, στον Πλάτωνα, πρέπει να χαρακτηρίζεται από την αναγκαιότητα, την καθολικότητα, την ενότητα και τη σταθερότητα των νοητικών μας αναπαραστάσεων, ενώ ο αισθητός κόσμος περιλαμβάνει μόνο το τυχαίο, το επιμέρους, και το ασταθές. Άρα το πραγματικό υπάρχει εκτός και πάνω από τον κατ' αίσθηση κόσμο. Η Ιδέα είναι απολύτως σταθερή και υπάρχει καθ' αυτή απομονωμένη από τον κόσμο της φαινομενικότητας και διακριτή της ανθρώπινης διανοίας. Αν, όμως, τα καθολικά υπάρχουν εκτός των πραγματώσεών τους, υπάρχουν εκτός χωρο-χρονικών συνθηκών και αιτιωδών συσχετίσεων. Είναι αφηρημένα αντικείμενα.

Η επιστήμη, αντίθετα, αναζητεί το αναγκαίο και το καθολικό σ' αυτόν εδώ τον κόσμο, κατά τον Αριστοτέλη, και όχι στην πλασματική ύπαρξη ενός δεύτερου χωριστού κόσμου. Το γενικό είναι πραγματικό μόνο μέσα στο μερικό, το δε μερικό είναι υπαρκτό μόνο επειδή μέσα του πραγματοποιείται το γενικό. Αν τα καθολικά υπάρχουν στις πραγματώσεις τους, που υπάρχουν σε χώρο και χρόνο, και τα ίδια θα υπάρχουν σε χώρο και χρόνο. Με άλλα λόγια, είναι συγκεκριμένα. Αλλά, κάτι τέτοιο θα σήμαινε πως μπορούν να καταλάβουν ταυτόχρονα περισσότερες από μια θέσεις.

Φαίνεται, τελικά, τα καθολικά να έχουν μια ιδιαίτερη σχέση με το χώρο μιας και, ή θα βρίσκονται εκτός του, ή θα καταλαμβάνουν εντός του την ίδια χρονική στιγμή περισσότερες από μια θέσεις.

Πρωτού ασχοληθούμε με το «επιχείρημα του τρίτου ανθρώπου», παρακάτω, ολοκληρώνουμε την αναφορά μας στην αρχαιότητα με τους Στωικούς, οι οποίοι υιοθετούν τον αμαυρό όρο *όχι-κάτι* προκειμένου να περιγράψουν το οντολογικό status των καθολικών εννοιών, και παρουσιάζουμε τη θεωρία της ονοματοκρατίας (νομιναλισμός) ως αντίλογο στο ρεαλισμό του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Ο νομιναλισμός διακρίνεται σε δύο ανεξάρτητες, μεταξύ τους, κατευθύνσεις αν και μοιράζονται κοινά κίνητρα και επιχειρήματα. Η μια κατεύθυνση, η πιο σύγχρονη, αρνείται την ύπαρξη των αφηρημένων αντικειμένων (αντικειμένων που δεν έχουν χωρο-χρονικές διαστάσεις ή που δεν σχετίζονται αιτιακά με κάτι) και δέχεται ότι όλα όσα υπάρχουν είναι συγκεκριμένα αντικείμενα. Η άλλη μορφή, που ξεκίνησε κατά το Μεσαίωνα, αρνείται την ύπαρξη των καθολικών (ό, τι πραγματώνεται σε διαφορετικές οντότητες) και δέχεται, αντίστοιχα, ότι όλα όσα υπάρχουν είναι επιμέρους. Κάθε τι που υπάρχει βρίσκεται σε ένα μέρος, την εκάστοτε χρονική στιγμή. Ο νομιναλισμός προϋποθέτει την ιδεολογική τοποθέτηση ότι η αφηρημένη έννοια δεν διαφέρει ουσιωδώς από την αίσθηση της οποίας είναι μόνο ένας μετασχηματισμός. Η έννοια στην οποία αποδίδουμε καθολικότητα είναι μόνο μια συλλογή από ατομικές αντιλήψεις, μια σύνθετη αίσθηση. Διατυπώνεται ωστόσο το ερώτημα: Ποια είναι η αρχή της ψευδαίσθησης που μας οδηγεί στο να αποδίδουμε μια διακριτή ύπαρξη στις γενικές έννοιες, ενώ πρόκειται για απλώς τροποποιημένα αισθήματα;

Τον 13<sup>ο</sup> αιώνα, οι σημαντικότεροι σχολαστικοί έλυσαν το πρόβλημα των καθολικών υιοθετώντας έναν ήπιο ρεαλισμό του τύπου του Αριστοτέλη, γι' αυτό και ήταν σε συμφωνία με τους μεγάλους άραβες σχολιαστές του. Την ίδια περίοδο, η θεωρία της ομοιοκρατίας, για τα καθόλου, ισχυρίζεται ότι οι καθολικοί όροι δηλώνουν τις ομοιότητες που αποδίδονται στα διάφορα συγκεκριμένα ατομικά. Με τον Occam που θεώρησε τα καθολικά ως πλάσματα και σημεία διανοητικά που αντιπροσωπεύουν τάξεις ομοειδών πραγμάτων, και την *Οροκρατική Σχολή*, εμφανίζεται η πλήρως εννοιοκρατική λύση στο πρόβλημα. Η αφηρημένη και καθολική έννοια είναι *σημείο*, που καλείται και *όρος*, αλλά δεν έχει πραγματική αξία. Το αφηρημένο και καθολικό δεν υπάρχει κατά κανένα τρόπο στη φύση, ούτε και έχει κάποιο άλλο εξω-νοητικό θεμέλιο. Η καθολική έννοια έχει ως αντικείμενό της εσωτερικές αναπαραστάσεις διαμορφωμένες από τη διάνοια. Δεν μπορεί να της αποδοθεί κάτι αντίστοιχο της εξωτερικής πραγματικότητας. Τα καθολικά λειτουργούν ως ταμπέλες που συγκρατούν στη νόηση την περιοχή εκείνη στην οποία μπορεί να αποδοθεί μια πολλαπλότητα πραγμάτων.

Μετά την σύντομη πραγμάτευση των διαφόρων σχολών και των θέσεών τους, πάνω στο ζήτημα των καθολικών, περνούμε στη μελέτη του «επιχειρήματος του τρίτου ανθρώπου» το οποίο και θα αντιμετωπίσουμε, αργότερα, με κατηγορικούς όρους στα πλαίσια της τυποποίησης της έννοιας του συγκεκριμένου καθολικού. Το όνομα «*τρίτος άνθρωπος*» αναφέρεται από τον Αριστοτέλη, αλλά σαν επιχείρημα συναντάται στους πλατωνικούς διαλόγους. Το επιχείρημα σκοπεύει να δείξει ότι αν υπάρχει έστω και μια Μορφή, υπάρχουν άπειρες. Σαν επιχείρημα έλαβε μεγάλες διαστάσεις μεταξύ των σχολιαστών μιας και λογίζεται ως η καταστροφική αντίρρηση στην Πλατωνική θεωρία των Ιδεών. Η βασική αρχή που εδραιώνει μια Μορφή είναι όταν κανείς τη βλέπει σε έναν αριθμό όμοιων επιμέρους. Αν, ωστόσο, σκεφθούμε τη Μορφή μαζί με τα επιμέρους πρέπει επίσης να υπάρχει *κάτι κοινό* μεταξύ τους, και αυτό θα ήταν μια τρίτου είδους οντότητα, πέραν των επιμέρους και της Μορφής. Η

διαδικασία πρόσθεσης συνεχίζεται επ' άπειρο οδηγώντας μας σε μιαν άπειρη αναδρομή. Όπως και να χαρακτηρίσει κανείς την σχέση πραγμάτωσης μεταξύ καθολικών και επιμέρους, αν τη λογίζει ως ένα ακόμα καθολικό καταλήγει σε τέτοιου είδους αναδρομή. Η αναδρομή είναι προβληματική γιατί, δεδομένης της αυτοκατηγορήσης, κάθε Μορφή κάποιου πράγματος είναι τέτοιας λογής πράγμα, οπότε και η εξήγηση της φύσεως μιας Μορφής εμπλέκει το γιατί είναι τέτοιο. Αν υποθέσουμε ότι είναι λόγω μιας ευρύτερης Μορφής του ίδιου πράγματος, κ.ο.κ. επ' άπειρον, δεν θα μπορούσαμε ποτέ να γνωρίζουμε για το αν το τάδε είναι τέτοιο. Το επιχείρημα του τρίτου ανθρώπου προκαλεί την υπόθεση μοναδικότητας των Μορφών, αλλά και την πιθανότητα της γνώσης.



Προτού προχωρήσουμε, ας δούμε για λίγο την ύπαρξη των καθολικών στα απαραίτητα, για τα μαθηματικά, πλαίσια. Ένα από τα βασικά επιχειρήματα για την ύπαρξη των καθολικών ήταν, ανέκαθεν, σημασιολογικού προσανατολισμού. Σε μια φυσική γλώσσα, μόνο ένας μικρός αριθμός όρων μπορεί να αναφέρεται σε συγκεκριμένα πράγματα σαφώς τοποθετημένα σε χώρο και χρόνο. Αλλά και στα μαθηματικά, ή την επιστήμη γενικότερα, η αποφυγή της αναφοράς σε καθολικά φάνηκε να συνοδεύεται, αναπόφευκτα, από μεγάλες απώλειες. Ο μεταφυσικός ρεαλισμός είναι, πάνω απ' όλα, μαθηματικός· υπερθεματίζει την ύπαρξη των πραγμάτων που συνιστούν την υποκείμενη ύλη των μαθηματικών. Ο Πλατωνισμός, για τον οποίο υπάρχουν τα αφηρημένα αντικείμενα, στην πραγματικότητα είναι, κυρίως, μαθηματικός ρεαλισμός. Στα πλαίσια ενός *επιστημονικού πλατωνισμού* τα καθολικά μπορούν να ενθαρρύνουν μια, ρεαλιστικού χαρακτήρα, κατανόηση των μαθηματικών και της λογικής. Μπορούν να δημιουργήσουν ρεαλιστικές αποτιμήσεις της έννοιας της πιθανότητας, των φυσικών νόμων, της αιτιότητας και διαφόρων επιστημονικών ερμηνειών. Η αλήθεια είναι πως ο μεταφυσικός ρεαλισμός είναι, κατά κάποιο τρόπο, περισσότερο γενικός, τουλάχιστον κατ' αρχήν· ένας μεταφυσικός ρεαλιστής μπορεί να ισχυρισθεί την ύπαρξη καθολικών που βρίσκονται πέραν του χώρου των μαθηματικών. Από τη στιγμή που τα μαθηματικά βρίσκονται ουσιαστικά στη δομή της επιστήμης, ο μεταφυσικός ρεαλισμός ενδεχομένως αποτελεί το ουσιαστικό συστατικό του επιστημονικού ρεαλισμού, με την πληρέστερη έννοια του όρου.

Στη στοιχειώδη θεωρία των Cantor – Frege, κάθε σύνολο έχει το ρόλο του *καθόλου* για την περιγραφή μιας ιδιότητας και τα στοιχεία του είναι συγκεκριμένες πραγματώσεις της ιδιότητας αυτής. Όμως, η πεποίθηση ότι η στοιχειώδης θεωρία συνόλων θα μας παρείχε μια γενική θεωρία των *καθολικών* απεδείχθη αβάσιμη. Το στοιχειώδες αξίωμα της συμπερίληψης οδηγεί στην ασυνέπεια που εκφράζει το παράδοξο του Russell και άλλα συνολοθεωρητικά παράδοξα. Κύριο χαρακτηριστικό τους αποτελεί η αυτοαναφορά κατά την οποία το *καθολικό* επιδέχεται την ιδιότητα την οποία και αναπαριστά. Οι τροποποιήσεις της θεωρίας, που χρειάστηκε να γίνουν για να αντιμετωπισθούν τα παράδοξα αυτά, μετέτρεψαν τις διάφορες συνολοθεωρίες σε θεωρίες των *αφηρημένων* (μη αυτο-μετεχόντων) καθολικών καθώς αποκλείουν το να περιέχεται κάποιο σύνολο στον εαυτό του. Συγκεκριμένα, σύνολο θεωρήθηκε κάθε συλλογή που συγκροτείται σε κάποιο στάδιο της ακόλουθης επαναληπτικής διαδικασίας: Ξεκινάμε με επιμέρους (αν υπάρχουν), δηλαδή με ένα ή περισσότερα αντικείμενα που δεν είναι σύνολα γιατί δεν περιλαμβάνουν κάποια στοιχεία. Στο «μηδενικό» στάδιο μορφώνουμε όλες τις δυνατές συλλογές από αυτά. Αν δεν υπάρχουν επιμέρους, στο μηδενικό στάδιο, δημιουργείται μόνο μια συλλογή, το κενό

σύνολο, που δεν περιλαμβάνει στοιχεία. Σε κάθε επόμενο στάδιο μορφώνουμε όλες τις δυνατές συλλογές από επιμέρους και σύνολα του προηγούμενου σταδίου.

Αλλά στην επιστήμη και τη φιλοσοφία απαιτείται ένας άλλος τύπος καθολικού: το *συγκεκριμένο καθολικό*. Αν τα αφηρημένα καθολικά είναι ιδεατοί τύποι από τους οποίους, υποτίθεται, αντλούν την ύπαρξή τους οι διάφορες οντότητες, τα συγκεκριμένα καθολικά συγκροτούνται από μια διανοητική πράξη η οποία απελευθερώνει τα κοινά στοιχεία των οντοτήτων αυτών, από τα υπόλοιπα στοιχεία τους, και τα εκφράζει ως «έννοια». Μια εποπτική ιδέα, για το συγκεκριμένο καθολικό μιας ιδιότητας, είναι ενός αντικειμένου που έχει την ιδιότητα με έναν τέτοιο καθολικό τρόπο ώστε όλα τα άλλα αντικείμενα, με την ιδιότητα αυτή, να μοιάζουν να μετέχουν σ' αυτή την παραδειγματική, αρχετυπική της, πραγμάτωση.

Η εισαγωγή της έννοιας του συγκεκριμένου καθολικού στη φιλοσοφία γίνεται από τον Hegel. Περιγράφουμε το πώς το αντιλαμβάνεται, αφού αναφερθούμε σύντομα στη *Φαινομενολογία* του. Στον Hegel, το ατομικό δεν είναι τίποτε περισσότερο από μια πραγμάτωση καθολικών (δεν υπάρχουν «σκέτα» ατομικά). Αλλά τα καθολικά που συνιστούν το ατομικό δεν είναι απλά καθολικά ιδιοτήτων, όπως αυτά που μας λένε τι χαρακτηριστικά έχει το ατομικό και όχι τι είναι το ατομικό. Αυτά τα καθολικά που συνιστούν τη φύση του ατομικού ως τέτοιο, τα ουσιώδη καθολικά, δεν υπάρχουν γενικά. Υπάρχουν μόνο ως μερικεύσεις μέσα από καθολικά ιδιοτήτων. Τα ουσιώδη καθολικά υπάρχουν πραγματωμένα στη μορφή των καθέκαστων. Ξεκινώντας, λοιπόν, από οποιαδήποτε από τις κατηγορίες της *Έννοιας* (καθολικότητα, μερικότητα, ατομικότητα), η καθεμιά τους μπορεί να γίνει αντιληπτή μόνο υπό το φως των άλλων δύο: η ατομικότητα συνίσταται από το μερικευμένο ουσιώδες καθολικό (ως ατομικό, ως «ατομικότητα», είμαι άνθρωπος με ορισμένο σύνολο ιδιοτήτων που με ξεχωρίζουν από τους άλλους)· το ουσιώδες καθολικό υπάρχει μόνο στα επιμέρους, μέσα από την μερίκευσή του (το καθολικό «άνθρωπος» υπάρχει *in rebus*, ως πραγματωμένο σε διαφορετικούς ανθρώπους)· και μερικότητα είναι η τροπή ενός ουσιώδους καθολικού που συνιστά το ατομικό (είναι επειδή είμαι άνθρωπος οπότε και έχω τις ιδιότητες εκείνες που με κάνουν να διακρίνομαι από τους άλλους ανθρώπους). Είναι η διαλεκτική διασύνδεση μεταξύ των τριών κατηγοριών την οποία ο Hegel χαρακτηρίζει «έκπτυξη», εξέλιξη του πνεύματος σε αυτεπίγνωση, και την οποία πιστεύει πως λαμβάνουμε όταν θεωρούμε το καθολικό ως «συγκεκριμένο» περισσότερο, παρά ως απλώς «αφηρημένο», καθώς μόνο τότε είμαστε ικανοί να διακρίνουμε ανάμεσα σε ουσιώδη καθολικά και σε καθολικά ιδιοτήτων ώστε να μην έχουμε απλώς γνώση των φαινομένων, καντιανά, αλλά της ίδιας της πραγματικότητας.

Για τους Άγγλους ιδεαλιστές (μέσα του 19<sup>ου</sup> έως αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα), η έννοια του συγκεκριμένου καθολικού απετέλεσε το «εξωτικό» και «εξαφανισμένο πλάσμα» το οποίο, με τα λόγια του Bernard Bosanquet: «Όπως όταν συστήνει ένα κόσμο [η σκέψη] τείνει να επιστρέψει στο έσχατο βάθος και την ολότητα της εμπειρίας από την οποία το πρώτο της βήμα ήταν να απομακρυνθεί. [Έτσι] Σε έναν “κόσμο”, σε ένα “συγκεκριμένο καθολικό”, δεν χάνουμε σε αμεσότητα και σημασία απομακρυνόμενοι από την πρωταρχική εμπειρία: αντιθέτως κάθε λεπτομέρεια αυξήθηκε ανυπολόγιστα σε ζωντανία και νόημα, λόγω της εσωτερικής ώσμωσης και διασύνδεσης [σκέψης και εμπειρίας], δια των οποίων η σκέψη ανακάλυψε τις υπαρκτικές της δυνατότητες. Το σλόγκαν του, κατά συγκεκριμένο τρόπο, διανοείσθαι είναι “*Philosophistsiren ist dephlegmatisiren - vivificiren*”» (Το να φιλοσοφείς σημαίνει να απαλλάσσεσαι από την απάθεια· να αποκτάς ζωντανή συνείδηση κάποιας πλευράς της πραγματικότητας).



Μετά τη σύντομη αναδρομή στην ιστορία της έννοιας του συγκεκριμένου καθολικού, πραγματευόμαστε βασικές έννοιες της θεωρίας κατηγοριών με στόχο να θίξουμε το βασικό δεσμό μεταξύ των δύο. Κατηγορία, περιγραφικά, λέμε μια συλλογή αντικειμένων και μορφισμών έτσι που σε κάθε μορφισμό μπορούμε να συνδέσουμε δύο αντικείμενα - το πεδίο και το συνπεδίο - με ιδιότητες: σε κάθε αντικείμενο να αντιστοιχεί ένας ταυτοτικός μορφισμός, οι μορφισμοί να συντίθενται (υπό την προϋπόθεση συμβατότητας), η σύνθεση ενός μορφισμού με τους ταυτοτικούς του πεδίου και συνπεδίου να τον αφήνει αναλλοίωτο και η σύνθεση να είναι προσεταιριστική.

Η θεωρία κατηγοριών χαρακτηρίζει αυτό που είναι σημαντικό στα μαθηματικά, εκθέτοντας τις συγκεκριμένες καθολικές ιδιότητές του. Όλα τα αντικείμενα της θεωρίας με ιδιότητες καθολικής απεικόνισης (όπως τα όρια και τα συνόρια που θα δούμε) είναι συγκεκριμένα καθολικά κάποιων ιδιοτήτων (με σχέση μετοχής τη σχέση μοναδικής παραγοντοποίησης στην οποία και αναφερόμαστε). Αν, επιπροσθέτως, θεωρήσουμε τη λογική ως μελέτη αυτού που είναι καθολικό, η θεωρία κατηγοριών παρέχει τους όρους περιγραφής της αντικειμενικής λογικής του υπό έρευνα αντικειμένου (κάτι που, περισσότερο, τίθεται προς διερεύνηση ή ανακάλυψη, παρά αξιώνεται εκ των προτέρων).

Ως θεωρία των συγκεκριμένων καθολικών, η θεωρία κατηγοριών είναι διαφορετικής υφής από τη θεωρία συνόλων: δοθείσης μιας συλλογής στοιχείων με κάποια ιδιότητα, στα πλαίσια της θεωρίας συνόλων, συγκροτούμε μια πιο αφηρημένη οντότητα, το σύνολο αυτών, που είναι καθολικό. Όμως η θεωρία κατηγοριών δεν αξιώνει τα καθολικά της, παρά τα βρίσκει μεταξύ των οντοτήτων που έχουν κάποια ιδιότητα. Περιορίζοντας ένα καθολικό να είναι συγκεκριμένο αν μετέχει του εαυτού του και αφηρημένο αν δεν μετέχει, η έννοια του συγκεκριμένου *καθόλου* επιτρέπει τη συστηματική φιλοσοφικο-λογική ερμηνεία των καθολικών απεικονιστικών ιδιοτήτων της θεωρίας κατηγοριών. Ταυτόχρονα, η θεωρία κατηγοριών παρέχει ένα ακριβές μαθηματικό μοντέλο για την αυτο-δηλωτική έκφραση της πλατωνικής θεωρίας για κάποιες Ιδέες. Τυποποιεί δηλαδή, με αυστηρό τρόπο, πολλές από τις φιλοσοφικές ιδέες για τα *καθόλου* όπως την ιδέα του *καθόλου* ως αυτό που καταδεικνύει την ουσία μιας ιδιότητας χωρίς καμιά ατέλεια, και την πλατωνική ιδέα ότι όλες οι πραγματώσεις μιας ιδιότητας έχουν την ιδιότητα χάρη στη μετοχή τους στο *καθόλου*.

Εύλογο, συνεπώς, είναι να δούμε την κατηγορική αντιμετώπιση του επιχειρήματος του τρίτου ανθρώπου. Το πρόβλημα θα μπορούσε να ξεπερασθεί με τη μη αποδοχή της θέσεως ότι «Αν κάτι έχει ένα δεδομένο γνώρισμα, επειδή μετέχει σε ένα Είδος, δεν ταυτίζεται με το Είδος αυτό», και την υιοθέτηση της θέσης: «Αν κάτι έχει ένα δεδομένο γνώρισμα, επειδή μετέχει σε ένα Είδος, μπορεί και να ταυτίζεται με το Είδος αυτό». «Το Ένα», στα πλαίσια της θεωρίας κατηγοριών, δεν είναι απαραίτητα «ένα στα πολλά». Μπορεί να είναι ισόμορφο με κάποιο, μεταξύ των πολλών. Με μαθηματικούς όρους, ένα σύνοριο (ή ένα όριο) μπορεί να παρίσταται σε κάποιο από τα στοιχεία του διαγράμματος. Έτσι, η θεωρία κατηγοριών παρέχει ένα μαθηματικό μοντέλο για το επίχειρημα του τρίτου ανθρώπου και δείχνει πώς να αποφύγουμε την επ' άπειρο αναδρομή.



Στο τέλος της εργασίας μας, η πραγμάτευση της ερμηνείας της θεωρίας κατηγοριών ως θεωρίας των συγκεκριμένων καθολικών επεκτείνεται σε μια συνολικότερη κατηγορική θεώρηση των μαθηματικών, της θεμελίωσης, και της ιστορίας τους. Καταρχάς, η έκφραση «θεμέλια των Μαθηματικών», όπως και κάθε

γνωστικού πεδίου, κρύβει διαφορετικές διαστάσεις. Πρώτα, έχουμε αυτό που συνήθως, και εσφαλμένα, καλείται *οντολογικά θεμέλια* ενός πεδίου: τα αντικείμενα για τα οποία υποτίθεται ότι μιλάει, το πεδίο αυτό. Δεύτερον, έχουμε τα *λογικά θεμέλια* ενός πεδίου: αυτά μας δίνουν τη «λογική» κατ' αρχήν. Δηλαδή τη θεωρία παραγωγής που χρησιμοποιείται στο πεδίο αυτό μαζί με τις σχετικές βασικές έννοιες που εμπλέκονται, καθώς οι τελευταίες δίνονται από τα αξιώματα της θεωρίας. Τρίτον, έχουμε τα *σημασιολογικά θεμέλια*: συνδέονται κατάλληλα το τυπικό σύστημα με την «οντολογία», οπότε και γνωρίζουμε κατ' αρχήν πώς, και προς τι, αναφέρεται η γλώσσα μας· πώς και τί σημαίνει. Τέταρτον, έχουμε τα *μεθοδολογικά ή πραγματιστικά θεμέλια*: Αυτά μας δείχνουν ποιες είναι οι αρχές, οι μέθοδοι και οι έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν για να κατασκευαστούν και να αναλυθούν τα αντικείμενα του πεδίου. Τέλος, έχουμε τα *επιστημολογικά θεμέλια* ενός πεδίου: Για παράδειγμα, μπορεί να έχει δειχθεί ότι ένα τμήμα των μαθηματικών είναι αναλυτικό, και συνεπώς αυτό το τμήμα κατέχει όλες τις ιδιότητες της αναλυτικής γνώσης, όποιες και να είναι αυτές. Μια φιλοσοφία για τα μαθηματικά διακρίνεται από μια άλλη, ακριβώς λόγω της διάταξης που επιφυλάσσει, κατά σειρά σπουδαιότητας, στις θεμελιώσεις αυτές. Εντός μιας φιλοσοφίας των μαθηματικών, κάποιες χάνουν το θεμελιακό τους status, γιατί αποδεικνύεται ότι έπονται άλλων περισσότερο θεμελιακών, και άλλες αγνοούνται εντελώς.

Στα πλαίσια της συζήτησης, γύρω από το θεμελιακό status της Θεωρίας των Κατηγοριών για τα Μαθηματικά, τα εμπλεκόμενα μέρη αξιολογούν και διατάσσουν διαφορετικά αυτά τα είδη θεμελιώσεων. Παρατηρούμε ότι οι υποστηρικτές της αναφέρονται μόνο στις οντολογικού, λογικού, μεθοδολογικού και ευρετικού χαρακτήρα θεμελιώσεις. Οι δύο εναπομείνουσες είναι αξιοσημείωτα απύσες: η γνωσιακή και η επιστημολογική. Τα επιχειρήματα που παρουσιάζονται ενάντια στη Θεωρία των Κατηγοριών βασίζονται ακριβώς σ' αυτές.

Όσον αφορά τον εποπτικό χαρακτήρα της συνολο-θεωρίας, με την υπάρχουσα μορφή της, δύσκολα μπορεί να εξελιχθεί συστηματικά. Αυτή η πλευρά της θεωρίας δεν λήφθηκε σοβαρά υπόψη κατά την αξιωματικοποίησή της, ούτε κατά τη συνολοθεωρητική θεμελίωση των μαθηματικών. Η ιδέα, βέβαια, δεν ήταν να αποφευχθεί η χρήση των εποπτειών στη μαθηματική πρακτική, πράγμα μη ρεαλιστικό, αλλά ο χειρισμός τους να είναι αποτέλεσμα τέχνης ή ταλέντου, περισσότερο, παρά μέρος της θεωρίας. Έτσι, τα συνολοθεωρητικά θεμέλια γέννησαν κάποιες πολύ ειδικές και συχνά μπερδεμένες εποπτείες, χωρίς κάποιο συστηματικό οδηγό που θα μας βοηθούσε να τις χειριστούμε. Η κατηγορική μέθοδος, από την άλλη, φαίνεται να μη χρειάζεται να «απομακρυνθεί από την εποπτεία» γιατί ένα μοντέλο, ή ερμηνεία, μιας κατηγορίας  $\mathcal{A}$  σε μια κατηγορία  $\mathcal{B}$  είναι ένας συναρτητής της μορφής  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Κάτι τέτοιο επιτρέπει να χειριζόμαστε τις κατηγορίες  $\mathcal{A}$  και  $\mathcal{B}$  ισότιμα χωρίς να λογίζουμε τη μία ως συγκεκριμένη και την άλλη ως αφηρημένη. Ενώ στην κλασική συνολοθεωρητική τοποθέτηση η έννοια της ερμηνείας αντιμετωπίζεται από το ξεχωριστό μετα-μαθηματικό αντικείμενο της θεωρίας μοντέλων, και συνήθως αφήνεται χωρίς κάποια συγκεκριμένη πραγμάτευση στα υπόλοιπα μαθηματικά, στην κατηγορική θέσμιση γίνεται τυπική κατασκευή ισότιμη των άλλων. Τα κατηγορικά θεμέλια, με άλλα λόγια, επιτρέπουν την αποφυγή της διαίρεσης σε μαθηματικά και μετα-μαθηματικά.

Συζήτηση γίνεται για το κατά πόσο τα μαθηματικά που μπορούν να θεμελιωθούν στη θεωρία κατηγοριών μπορούν να είναι δομιστικά. Ο τρόπος κατανόησης των μαθηματικών που μας παρέχει η θεωρία κατηγοριών συνδέεται ιστορικά και διαλεκτικά με τον δομισμό αλλά, καθαυτήν, είναι αρκετά διαφορετική: Για την «κατηγορική» αντίληψη, αφενός, το υποκείμενο υλικό των καθαρών

μαθηματικών είναι ο αναλλοίωτος μετασχηματισμός και όχι η αναλλοίωτη μορφή. Η έννοια της κατηγορίας, αφετέρου, αποτελεί γενίκευση της έννοιας της δομής και όχι είδος δομής. Τέλος, αυτό που έχει σημασία στα κατηγορικά μαθηματικά είναι πώς ένα μαθηματικό αντικείμενο (ή κατασκευή) μετατρέπεται σε ένα άλλο, και όχι τι παραμένει αναλλοίωτο κατά τα διάφορα είδη μετασχηματισμών: τα κατηγορικά μαθηματικά είναι μια θεωρία του αφηρημένου μετασχηματισμού, όχι μια θεωρία της αφηρημένης μορφής.

Η «κατηγορική» άποψη για τα μαθηματικά προτείνει και μια νέα κατανόηση του ρόλου που μπορεί να παίζει η ιστορία των μαθηματικών στα ίδια τα μαθηματικά. Μια μαθηματική έννοια, σ' αυτό το πλαίσιο, δεν είναι το σύνολο των χρονικών σταδίων της αλλά μια κατηγορία μεταφράσεων μεταξύ αυτών των σταδίων. Το ίδιο μπορεί να εφαρμοσθεί και κατά τη θεώρηση εναλλακτικών μαθηματικών θεμελίων και θεωριών βασισμένων σ' αυτά.



Έγινε προσπάθεια η εργασία να έχει μια αυτοτέλεια. Σχεδόν για κάθε έννοια, όρο ή πρόσωπο, που παρατίθεται, υπάρχουν πληροφορίες, διευκρινήσεις, εισαγωγικά σχόλια. Γνωρίζουμε πως η σύνθεση θα πραγματωθεί, αν δεν έχει γίνει ήδη αλλού, σε επόμενες, περισσότερο συνθετικές και διεισδυτικές, πραγματεύσεις.

Πάτρα, 23 Μαΐου 2011

# Περιεχόμενα

	Σελ.
Εισαγωγή	15
1. Η αρχαιολογία του τρόπου ύπαρξης «καθολικών» στη γλώσσα	15
1.1 Η καθολικότητα των συγκεκριμένων ουσιαστικών	15
1.2 « <i>Τό γάρ αυτό νοεῖν ἐστίν τε καί εἶναι</i> »	17
2. Τα καθολικά στη Φιλοσοφία	20
2.1 Καθολικά και Μεταφυσική	20
2.2 Οι σχολές	24
2.2.1 Ρεαλιστές	24
2.2.2 Το οντολογικό status των Καθολικών στους Στωικούς	27
2.2.3 Ο ήπιος ρεαλισμός των σχολαστικών φιλοσόφων του Μεσαίωνα	30
2.2.4 Η θεωρία της ομοιοκρατίας	32
2.2.5 Ο κυρίως ειπείν νομιναλισμός	34
2.3 Το επιχείρημα του τρίτου ανθρώπου	35
2.3.1 Το επιχείρημα όπως απαντάται στον Πλάτωνα	36
2.3.2 Η εκδοχή του Αριστοτέλη και των σχολιαστών του	40
2.3.3 Σύγχρονοι σχολιαστές του επιχειρήματος	43
2.3.4 Η γνωσιοθεωρητική προβληματικότητα του επιχειρήματος	46
2.4 Τα καθολικά στη γνωσιοθεωρία	48
Μέρος Α΄	51
3. Καθολικά και Θεωρία Συνόλων	51
3.1 Η εισαγωγή της έννοιας του συνόλου	51
3.2 Τα σύνολα ως καθολικά	54
3.3 Το αξίωμα της συμπερίληψης	56
3.4 Αφηρημένα σύνολα και καθολικά	59
Μέρος Β΄	62
4. Τα συγκεκριμένα καθολικά στη Φιλοσοφία	63
4.1 Εισαγωγικά σχόλια από τη <i>Φαινομενολογία του Πνεύματος</i> (Geist)	63
4.2 Η έννοια του συγκεκριμένου καθολικού στον Hegel	66
4.3 Τα συγκεκριμένα καθολικά στον αγγλικό ιδεαλισμό	70
4.4 Η κατανόηση ως διαλεκτική στο συγκεκριμένο καθολικό	78
4.5 Συγκεκριμένο καθολικό και αυτο-μετοχή	79
4.6 Έννοια συγκεκριμένου καθολικού στον Πλάτωνα;	80
Μέρος Γ΄	83
5. Εισαγωγικές έννοιες από τη Θεωρία Κατηγοριών	83
5.1 Εισαγωγή	83
5.2 Ένα παράδειγμα de facto λογικής: Η μέτρηση ως διαδικασία	85
5.3 Αξιώματα και έννοιες της Θεωρίας Κατηγοριών	87
5.3.1 Τα αξιώματα	87
5.3.2 Παραδείγματα κατηγοριών	87

5.3.3 Η έννοια του ισομορφισμού	88
5.3.4 Αρχικό και τελικό αντικείμενο	88
5.3.5 Γινόμενα	89
5.3.6 Συν-γινόμενα	90
5.3.7 Συναρτητές	90
5.3.8 Διαγράμματα	91
5.3.9 Κώνος και συν-κώνος διαγράμματος	91
5.3.10 Όρια και συνόρια	92
5.4 Οι φυσικοί αριθμοί ως καθολικό	93
Μέρος Δ΄	95
6. Η Θεωρία Κατηγοριών ως θεωρία των συγκεκριμένων καθολικών	95
6.1 Εισαγωγή	95
6.2 Τα γινόμενα ως καθόλου	96
6.3 Καθολικά ως ουσίες	98
6.4 Όρια και συνόρια ως ουσίες	100
6.5 Η κατηγορική αντιμετώπιση του επιχειρήματος του τρίτου ανθρώπου	103
6.6 Η συνεπαγωγή ως σχέση μεταξύ καθολικών	104
Επίλογος	106
7. Συμπεράσματα – Συνέπειες	106
7.1 Γενικά	106
7.2 Ζητήματα Θεμελίωσης των Μαθηματικών	107
7.2.1 Η Θεωρία Συνόλων και τα Θεμέλια των Μαθηματικών	107
7.2.2 Μια σύντομη ανάλυση της έκφρασης «θεμέλιο για...»	109
7.2.2.1 Το λογικό θεμέλιο	109
7.2.2.2 Το γνωσιακό θεμέλιο	111
7.2.2.3 Το επιστημολογικό θεμέλιο	114
7.2.2.4 Το σημασιολογικό θεμέλιο	114
7.2.2.5 Το οντολογικό θεμέλιο	115
7.2.2.6 Το μεθοδολογικό θεμέλιο	115
7.2.3 «Σχέσεις θεμελίωσης» και Φιλοσοφία των Μαθηματικών	116
7.2.4 Η Θεωρία Κατηγοριών εντός ή εκτός του θεμελιωτικού προγράμματος;	117
7.2.4.1 Εντός	117
7.2.4.2 Εκτός	118
7.2.5 Τα σύνολα και οι κατηγορίες ως κωδικοποιήσεις	120
7.3 Η Θεωρία Κατηγοριών και το στρουκτουραλιστικό πρόγραμμα στα Μαθηματικά	121
7.3.1 Η θέση της εποπτείας στις Θεωρίες Συνόλων και Κατηγοριών	121
7.3.2 Κατηγορίες χωρίς δομές;	124
7.3.2.1 Εισαγωγή	124
7.3.2.2 Οι βασικές θέσεις	124
7.3.2.3 Μαθηματικός Στρουκτουραλισμός	125
7.3.2.4 Ισομορφισμοί, «Αναλλοίωτες Μορφές» και Ομομορφισμοί Ομάδων	128

7.3.2.5 Η υπόθεση επίτασης του στρουκτουραλιστικού προγράμματος μέσα από την Κατηγορικο-θεωρητική θεμελίωση των μαθηματικών	129
7.3.2.6 Η Κατηγορική παράσταση δομών και τύπων δομών	131
7.3.2.7 «Η Κατηγορία των Κατηγοριών»	133
7.3.2.8 Συναρτητική σημασιολογία και Sketch Theory	134
7.3.2.9 Κατηγορικά θεμέλια	136
7.3.2.10 Συμπέρασμα: Μια κατηγορική άποψη στα μαθηματικά και για τα μαθηματικά	138
Βιβλιογραφία	139

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1. Η αρχαιολογία του τρόπου ύπαρξης «καθολικών» στη γλώσσα

### 1.1 Η καθολικότητα των συγκεκριμένων ουσιαστικών

Στη φυσική γλώσσα, υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τύποι ουσιαστικών: τα κύρια ονόματα, τα συγκεκριμένα ουσιαστικά (που αναφέρονται στον κόσμο της εμπειρίας, π.χ. τραπέζι, λιοντάρι κ.λπ.) και τα αφηρημένα ουσιαστικά (που αναφέρονται στον κόσμο των ιδεών και των εννοιών, π.χ. δικαιοσύνη, ελευθερία κ.λπ.). Το κύριο όνομα χαρακτηρίζει κάτι ατομικό, μεμονωμένο· μας επιτρέπει να διαπιστώσουμε κάτι σχετικά με κάποιο άτομο. Το συγκεκριμένο ουσιαστικό περικλείει την αρχή ενός συστήματος· αποτελεί την κυτταρική μορφή της επιστημονικής αναγωγής και ταξινόμησης. Προσφέρει γνώση γιατί έχει «γενική» σημασία. Άλλο είναι να λέμε: «αυτό είναι τραπέζι», και άλλο: «αυτός είναι ο Τύχωνας». Παρακάτω, θα αναζητήσουμε τις ρίζες αυτής της γενικής σημασίας.

Η επιστήμη έγινε δυνατή με το που τέθηκαν τα ζητήματα διαχωρισμού υλικού και άυλου, κινούντος και κινουμένου, ύλης και δύναμης, αντικειμένου και ιδιότητας. Οι διακρίσεις όμως δημιουργούνται όταν μπορεί κανείς να τις περιγράψει με σαφή και διακριτό τρόπο. Η γλωσσική μορφή που επιλέχθηκε, σ' αυτό το στάδιο πολιτισμικής εξέλιξης, ήταν η ουσιαστικοποίηση των ρημάτων και των επιθέτων. Η λειτουργία του οριστικού άρθρου (ο, η, το), τότε, υπήρξε καθοριστική.

Αρχικά, η δεικτική αντωνυμία (ετούτος, αυτός, εκείνος, τέτοιος, τόσος), από την οποία και προέρχεται το άρθρο, περιόριζε ένα συγκεκριμένο ουσιαστικό στη λειτουργία του ονόματος: η φράση “hic leo” (οὗτος λέων) αφορούσε ένα συγκεκριμένο λιοντάρι (το συγκεκριμένο ζώο ονομάζεται λιοντάρι). Η ανάγκη σχηματισμού του άρθρου προέκυψε ακριβώς όταν η γενική σημασία ενός συγκεκριμένου ουσιαστικού υπερίσχυε σε τέτοιο βαθμό ώστε για να δηλωθεί το μεμονωμένο, το συγκεκριμένο αντικείμενο, απαιτούταν η προσθήκη ενός προσδιορισμού που εξατομικεύει<sup>1</sup>.

Το οριστικό άρθρο μπορεί να δώσει στο ουσιαστικό τις ιδιότητες του κυρίου ονόματος, αλλά και του αφηρημένου ή του συγκεκριμένου ουσιαστικού. Το συγκεκριμένο λιοντάρι, στο οποίο αναφέρομαι χρησιμοποιώντας το οριστικό άρθρο, μπορεί να γίνει αντικείμενο μιας κρίσης: π.χ. «το λιοντάρι είναι γέρικο». Έναρθρο, το συγκεκριμένο ουσιαστικό, ορίζει και εξατομικεύει, όπως συμβαίνει και με το όνομα, κάτι συγκεκριμένο, το οποίο είναι λιοντάρι. «**Το** λιοντάρι» όμως, ως επιστημονική έννοια, περιλαμβάνει οτιδήποτε «είναι» λιοντάρι· διαφέρει από «τα λιοντάρια», ή απλώς κάποια «λιοντάρια», γιατί υπερβαίνει το εμπειρικά συγκεκριμένο είδος των λιονταριών και, παρά το γεγονός ότι είναι σε ενικό αριθμό, περιλαμβάνει όλα τα γνωστά λιοντάρια ή όσα είναι δυνατό να γίνουν αντικείμενο γνώσης. Ο «καθολικός» χαρακτήρας μιας έννοιας ενυπάρχει σπερματικά στο συγκεκριμένο ουσιαστικό, όταν χρησιμοποιείται ως κατηγορούμενο, παρόλο που δεν είναι αφηρημένη έννοια. Η αφαίρεση δημιουργείται κατά τη συγκεκριμενοποίησή του, χάρη στο άρθρο και τη

<sup>1</sup> Όσο προβάλλει σαφέστερα ο γενικός χαρακτήρας ενός συγκεκριμένου ουσιαστικού, τόσο περισσότερο γίνεται φανερό με ποιόν τρόπο το ουσιαστικό, ως χαρακτηρισμός μιας κατηγορίας αντικειμένων,

δεικτική δύναμη που έχει αυτό, έτσι ώστε το καθολικό («ζώο» π.χ.) να γίνει φορέας ενός ονόματος: «αυτό το ζώο (γενικά) ονομάζεται λιοντάρι». Με αυτόν τον τρόπο, το καθολικό, γίνεται «αντικείμενο σκέψης».



## 1.2 «Τό γάρ αυτό νοεῖν ἐστίν τε καί εἶναι»

Η έννοια παρουσιάζει χαρακτηριστικά που ανήκουν και στους τρεις τύπους του ουσιαστικού· η λογική σκέψη είναι προϊόν διασταύρωσης και των τριών τύπων, γι' αυτό και είναι δύσκολο να συλλάβουμε την ιδιότυπη φύση της. Σε μια μακρόχρονη και σύνθετη εξελικτική πορεία διασταυρώνονται μεταξύ τους ονοματικοί και ρηματικοί γλωσσικοί τύποι, μαζί με τις τρεις βασικές μορφές του ουσιαστικού, και δημιουργείται το λογικό στοιχείο, η έννοια<sup>2</sup>. Για παράδειγμα, τη διασταύρωση αυτή παρατηρούμε στην αφηρημένη σύλληψη του πνεύματος για την οποία μας προετοίμασαν οι λυρικοί ποιητές<sup>3</sup> και ολοκλήρωσε ο Ηράκλειτος<sup>4</sup>. Για τον Ηράκλειτο, το πνεύμα έχει ως ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι είναι «κοινό» στοιχείο που «διαπερνά τα πάντα» και «αυξάνει τον εαυτό του». Στο πνεύμα δηλαδή, που αρχικά αντιμετωπιζόταν ως όργανο, ως συγκεκριμένο αντικείμενο, αποδίδονται τώρα ιδιότητες που ανήκουν στην περιοχή του επιθέτου ή του ρήματος. Ανακαλύπτοντας μια ιδιότητα κοινή σε διαφορετικά αντικείμενα, το πνεύμα φαίνεται να τα «διαπερνά», όντας έτσι «κοινό». Η αυθορμησία και η αύξηση, από την άλλη, είναι αντιλήψεις που σχετίζονται με το ρήμα. Φτάνοντας στην εποχή της τραγωδίας, οπότε και η εξέλιξη ολοκληρώνεται, η ψυχή θεωρείται, πλέον, το *δρῶν* ή το *κινῶν*· η ίδια η λέξη «*ψυχή*» προδίδει τη ρηματική καταγωγή (από το *ψύχω* ως πνέω, φυσώ) της αντίληψης αυτής<sup>5</sup>.

Η λογική δεν εισέρχεται στη γλώσσα ως ξένο στοιχείο· η αρχική της θέση είναι στην ίδια τη γλώσσα η οποία αναπτύσσει βαθμιαία όλα τα μέσα με τα οποία εκφράζεται. Είδαμε πως το λογικό περιεχόμενο που περικλείει η λειτουργία του συγκεκριμένου ουσιαστικού, ως κατηγορούμενου, έγινε φανερό χάρη στο άρθρο το οποίο εξειδικεύει κάτι γενικό. Κατά τον ίδιο τρόπο, από-καλυπτικά, αναδύεται το λογικό στοιχείο στη συνείδηση. Αρχικά, ο λογικός ειρμός είναι αυτονόητος· δεν εκφράζεται με ιδιαίτερες γλωσσικές κατηγορίες. Γι' αυτό και δεν συνειδητοποιείται. «Το πνεύμα ανακαλύπτει τον εαυτό του»<sup>6</sup> από τη στιγμή που καταβάλλεται η προσπάθεια να γίνει κατανοητό το αυτο-νόητο.

Στην πρόταση «αυτό είναι ένα λιοντάρι», η λογική σύνδεση γίνεται με τη λέξη «είναι» που απαντά στο ερώτημα για το πώς συνδέονται το μερικό και το γενικό. Το συνδετικό ρήμα, όμως, δεν ανήκει στα αρχικά στοιχεία της γλώσσας. Στην πρωτόγονη γλώσσα δεν ήταν απαραίτητο· η φράση *hic leo*, είναι κατανοητή και χωρίς την προσθήκη του «είναι». Στην ινδοευρωπαϊκή γλώσσα παρατηρούμε να δημιουργούνται οι γλωσσικές προϋποθέσεις προς μια νέα αυτή κατεύθυνση. Ήδη πριν

<sup>2</sup> Οι Wilhelm von Humboldt (Γερμανός φιλόσοφος και γλωσσολόγος, 1767-1835) και Johann Gottfried Herder (Γερμανός φιλόσοφος, θεολόγος και ποιητής, 1744-1803) παρατήρησαν ότι, στην πορεία της ιστορίας, το ουσιαστικό κερδίζει όλο και περισσότερο έδαφος. Βλ., σχετ. Snell, B. (1997). *Η ανακάλυψη του πνεύματος: Ελληνικές ρίζες της ευρωπαϊκής σκέψης*. (Δ. Ι. Ιακώβ, μεταφρ.). Αθήνα: Μ. Ι. Ε. Τ. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1975). σ. 303.

<sup>3</sup> Λυρική λέμε την ποίηση που τραγουδιούνταν με τη συνοδεία λύρας, την περίοδο από το 750-500 περίπου π.Χ. Ανέκαθεν, η ποίηση, εξέφραζε με λόγια την καινούρια προοπτική που διανοίγεται· απεκάλυπτε, με σαφήνεια, το πνεύμα της εποχής. Ο Όμηρος αντιλαμβάνονταν τις ψυχικές λειτουργίες σε αναλογία με τις φυσικές. Οι λυρικοί, αντίθετα, δεν αντιλαμβάνονται την ψυχή ως φυσικό όργανο. Σ' αυτούς, το πνεύμα έχει τη δυνατότητα να αποδεδμευεται από τον τόπο και έτσι μπορεί να υπάρξει κοινότητα στη σκέψη και το αίσθημα μεταξύ των ανθρώπων (συν-αίσθημα). Βλ. σχετ., Snell, ό. π., σσ. 82, 84, 100-101, 109.

<sup>4</sup> 544-484 περίπου, π.Χ.

<sup>5</sup> Ίδια με το «πνεύμα» αποτελούν παραδείγματα ουσιαστικοποίησης.

<sup>6</sup> Βλ., Snell, ό. π., σ. 304.

από την εγκατάσταση των ελληνικών φύλων στον ελλαδικό χώρο χρησιμοποιούνταν, ως συνδυαστικό, ένα ρήμα που αρχικά σήμαινε «είμαι παρών», «υπάρχω». Αυτό, δηλαδή, που ήταν αρχικά αυτονόητο, και συνεπώς δεν χρειαζόταν να εκφραστεί, αντιμετωπίζεται πλέον και από τη σκοπιά της «υπαρξης».

Το γεγονός αυτό κάνει δυνατή την παρμενίδεια ταύτιση ανάμεσα σ' αυτό που υπάρχει και στη σκέψη: «...τό γάρ αὐτό νοεῖν ἐστίν τε καί εἶναι». (Παρμενίδου, *Περὶ φύσεως*: B3)<sup>7</sup>. Η δυνατότητα αυτής της ταύτισης εξαρτάται από το γεγονός ότι σε μια πρόταση όπως: «αυτό είναι ένα λιοντάρι», μπορούμε να ερμηνεύσουμε το συνδυαστικό «είναι» ως «υπάρχει»<sup>8</sup>. Το *Νοεῖν*, εδώ, δεν σημαίνει (καρτεσιανά) αντίθεση νόησης και αισθητηριακής αντίληψης. Ἦδη από τον Ὀμηρο<sup>9</sup> προϋποτίθεται σαν η ενέργεια κατά την οποία μας γίνεται αντιληπτό ένα αντικείμενο το οποίο ταυτίζεται μ' αυτό που είναι το αντικείμενο. Το ὄν, αντικείμενο του *νοεῖν* στον Παρμενίδη, αρχικά είναι απλώς δεδομένο της ανθρώπινης εμπειρίας. Ο νους, όμως, προσθέτει την ουσιαστική

<sup>7</sup> Βλ., Mourelatos, A. (2008). *The Route of Parmenides*. Las Vegas: Parmenides Publishing. σσ. 279-280. Ο Παρμενίδης γεννήθηκε στην Ελέα της Κάτω Ιταλίας περίπου το 540 π.Χ. και πέθανε περίπου το 470 π.Χ. Συγκαταλέγεται στους προσωκρατικούς (ελεάτες) φιλοσόφους. Διαμαρτυρήθηκε γιατί η ιωνική φυσική (που ερευνά τη φυσική πορεία των πραγμάτων – από το *φύσις*, δηλαδή την πράξη του *φύναι*, τη γένεση και ανάπτυξη των πραγμάτων) των Αναξίμανδρου (611-545 περίπου, π.Χ.), Αναξίμενη (585-525 περίπου, π.Χ.) και Ηράκλειτου, παρουσίασε σαν αυτονόητη πραγματικότητα τον πολλαπλό κόσμο, τον κόσμο της κίνησης και της μεταβολής. Ακριβέστερα, θα λέγαμε ότι η σχέση του Παρμενίδη με τον Ηράκλειτο είναι αμφιλεγόμενη. Ο Ηράκλειτος αναφέρει και πολεμά τον Πυθαγόρα (570-496 περίπου, π.Χ.) και τον Ξενοφάνη (570-475 περίπου, π.Χ.), αλλ' όχι τον Παρμενίδη, ενώ η πολεμική του Παρμενίδη προϋποθέτει τη γνώση του βιβλίου του Ηράκλειτου. Πιο πιθανή, λοιπόν, φαίνεται μια εξάρτηση του Παρμενίδη από τον Ηράκλειτο, όχι με τη μορφή επίδρασης αλλά πρόκλησης για πολεμική. Για τον Παρμενίδη υπάρχουν δύο μέθοδοι που μπορεί να ακολουθήσει κανείς κατά την έρευνα της αλήθειας: να προϋποθέσει ότι το *είναι ἔστιν* ή *οὐκ ἔστιν*. Είναι η μέθοδος που ακολουθεί την αλήθεια, και η άτοπη που επιβάλλει την ανάγκη ύπαρξης του μη ὄντος. Ὅμως είναι αδύνατο να γνωρίζει κανείς το μη ὄν, και να το εκφράσει, γιατί είναι ίδιο πράγμα το *σκέπτεσθαι* και το *είναι*. Το ὄν είναι ολότελα ομογενές, συνεχές, συμπαγές, αδιαίρετο, χωρίς εσωτερική διάρθρωση και εσωτερικά όρια, αγέννητο (γιατί από το μη ὄν αποκλείεται να γεννήθηκε αφού αυτό είναι ανύπαρκτο αλλά και γιατί δεν υπάρχει λόγος να γίνει ένα ὄν από το μη ὄν, αφενός, αφετέρου και από το ὄν αποκλείεται να γεννήθηκε γιατί από το ὄν δεν μπορεί να γίνει κάτι άλλο έξω από τον εαυτό του, γι' αυτό και αποκλείεται μια πολλαπλότητα του ὄντος), ανώλεθρο (η *Δίκη*, που αγρυπνεί για την κοσμική τάξη της κανονικότητας της εναλλαγής μέρας και νύχτας, κρατά φυλακισμένο το ὄν και δεν του επιτρέπει να γίνεται ή να φθείρεται), ακίνητο, σταθερό, αμετάβλητο, άναρχο (αλλιώς η αρχή του θα βρισκόταν έξω απ' τον εαυτό του, δηλαδή μη ὄν, κάτι αδιανόητο και ανείπωτο) και χωρίς τέλος (γιατί το τέλος είναι τέρμα μιας κίνησης που έχει αρχή), αλλά περιορισμένο μέσα σε όρια από την *κρατερή Ανάγκη* (δηλαδή σε μια σταθερή κατάσταση αυτοεπιβεβαίωσής του, σε σταθερή συμφωνία και συνεχή επαλήθευση του εαυτού του) που δεν είναι σε θέση να ξεπεράσει (συνιστώντας το μέτρο και τον κανόνα του· τονίζεται έτσι η αναγκαιότητα και η πληρότητά του), αὐταρκές, ολοκληρωμένο και πλήρες. Αν και έχει όρια δεν είναι πεπερασμένο, αλλά ἀπειρο, γιατί τα πέρατά του είναι σαν της τέλειαις σφαιρας που δεν έχει αρχή και τέλος, αλλά αποτελεί το τέλειο σχήμα, την τέλεια δομή (πυθαγορείως) όπου τα πάντα ισορροπούν από το μέσο προς όλες τις κατευθύνσεις. Γι' αυτό και δεν είναι δυνατή οποιαδήποτε ιεράρχηση ή διαβάθμιση του ὄντος, ως πιο ισχυρό, ή πιο πολύ, κάπου. Είναι ομοιογενές, ισόρροπο και ισοδύναμο παντού· τέλειο. Βλ. σχετ. Βέικος, Θ. (1995). *Οι Προσωκρατικοί*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα. σσ. 36, 37, 97-117.

<sup>8</sup> «Μία αντίληψη που οι Έλληνες σ' αυτό το στάδιο έβρισκαν δύσκολο να χωνέψουν ήταν και το ότι μια λέξη μπορούσε να έχει περισσότερες από μια σημασίες. Η δυσκολία τους αυτή είχε αναμφίβολα σχέση με την εγγύητά τους προς το πρωτόγονο μαγικό στάδιο, στο οποίο μια λέξη και το σημασινομένο της αποτελούσαν μια και μόνη ενότητα. Συγκεκριμένα το ρήμα “ειμί” στην ελληνική σήμαινε “υπάρχω”... Βέβαια στην καθημερινή ομιλία την χρησιμοποιούσαν με την τελείως διαφορετική σημασία του: έχω μια κάποια ιδιότητα... στον Παρμενίδη [...] φαινόταν πως το να πεις ότι κάτι “είναι” μπορούσε και έπρεπε να σημαίνει μόνο ότι υπάρχει...», βλ. σχετ., Guthrie, W. K. C. (1978). *Οι Έλληνες Φιλόσοφοι: Από τον Θαλή ως τον Αριστοτέλη*. (Α. Η. Σακελλαρίου, μεταφρ.). Αθήνα: Δ. Ν. Παπαδήμα. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1950). σσ. 53-54.

<sup>9</sup> Περί του 8<sup>ου</sup> π.Χ. αιώνα.

σκέψη πως αυτό το ον δεν έχει το χαρακτήρα της πολλαπλότητας και της μεταβλητότητας με τον οποίο μας το παρουσιάζει η εμπειρία. Την ταυτότητα του νοείν και του είναι μπορούμε, συνεπώς, να την αντιληφθούμε ως εξής:

«Γνωρίζω» σημαίνει ξέρω πως αυτό που αποτελεί αντικείμενο της γνώσης μου είναι ον· «σκέφτομαι» έχει την ίδια σημασία με το «σκέφτομαι ον». Δεν μπορεί κανείς να σκέφτεται κάτι άλλο, παρά μόνο ον. Πρόκειται για μια σχέση, μεταξύ νοείν και είναι, που παρουσιάζεται σαν ταυτότητα. Το περιεχόμενο του νοείν ανάγεται στο χαρακτήρα του είναι, ως το μόνο δυνατό αντικείμενο του νοείν. Άρα η σκέψη είναι οντική, πραγματική, αληθινή. Είναι το ίδιο πράγμα να σκέφτεσαι κάτι, και να σκέφτεσαι ότι αυτό, το κάτι, είναι. Είναι αλήθεια ότι το πράγμα που σκεφτόμαστε, υπάρχει<sup>10</sup>.

Εδώ, όμως, δημιουργείται το δύσκολο πρόβλημα, που απασχόλησε τους φιλοσόφους για ολόκληρους αιώνες: τί είδους ύπαρξη πρέπει να αποδώσουμε σε εκείνο το αντικείμενο της σκέψης που έχει χαρακτήρα «καθολικό»<sup>11</sup>; Κατ' επέκταση, πώς είναι δυνατή η καθολική γνώση για επιμέρους πράγματα; Το πρόβλημα, δε, των καθόλου δεν εμπλέκει μόνο τη μεταφυσική του επιμέρους και του καθολικού αλλά εγείρει και ερωτήματα για τη γένεση και την εγκυρότητα της γνώσης, γενικότερα.

---

<sup>10</sup> Βλ. σχετ. Βέικος, Θ. (1995). *Οι Προσωκρατικοί*. ό.π., σσ. 97-117.

<sup>11</sup> Βλ. σχετ., Snell, ό. π. σσ. 297-304.

## 2. Τα καθολικά στη Φιλοσοφία

### 2.1 Καθολικά και Μεταφυσική

Η θεωρία των καθολικών έχει μακρά ιστορία. Ξεκινά με τον Πλάτωνα<sup>12</sup> και τον Αριστοτέλη<sup>13</sup>, αλλά διαπερνά και όλο το Μεσαίωνα όπου γίνεται και το κύριο αντικείμενο φιλοσοφικο-θεολογικής μελέτης στα πλαίσια της έριδας για τα *universalia* της σχολαστικής φιλοσοφίας<sup>14</sup> (δηλαδή για το υλικό που πραγματεύεται η λογική) φτάνοντας στο σήμερα, εντός της παραδόσεως της αναλυτικής φιλοσοφίας<sup>15</sup>.

Είναι πιθανό ο Δημόκριτος<sup>16</sup> να είχε ασχοληθεί με την έννοια του καθόλου, αν ο Σέξτος Εμπειρικός<sup>17</sup> ερμηνεύει σωστά την απόφαση του Δημόκριτου ότι «ένα ανθρώπινο ον είναι ό, τι γνωρίζουμε όλοι μας.»: «...λέγοντας [ο Δημόκριτος] αυτά που είπε για τα πάντα, επεχείρησε να μας εκθέσει την έννοια [άνθρωπος]»<sup>18</sup>. Μπορεί το «...για τα πάντα...» να σημαίνει σύνολο, περιληπτική τάξη. Την εξήγηση αυτή την κάνει πιθανή όχι μόνο η ατομιστική κατεύθυνση του συστήματος του Δημοκρίτου<sup>19</sup> αλλά και το ότι όταν ο Αριστοτέλης θέλει να αρνηθεί την ύπαρξη στα όντα που σχηματίζονται από συμπερίληψη ομοειδών πραγμάτων στηρίζεται στο Δημόκριτο: «Ωστε αν η ουσία είναι ένα, δεν μπορεί να υπάρξει από ουσίες που θα ενυπάρχουν μέσα της κατά τον εντελεχειακό τρόπο για τον οποίο είχε μιλήσει πολύ σωστά ο Δημόκριτος: [ο οποίος έλεγε]... ότι είναι αδύνατο να γίνει από δύο ένα και από ένα δύο καθώς ταυτίζει τα άτομα μεγέθη με τις ουσίες» (Αριστοτέλης, *Τα Μετά τα Φυσικά*, Ζ 1039a)<sup>20</sup>. Ίσως και η ακατανόητη απόφαση του Δημοκρίτου που έχει διασώσει ο ψευδο-

<sup>12</sup> 427-348 π.Χ.

<sup>13</sup> 384-322 π.Χ.

<sup>14</sup> Ο σχολαστικισμός (από το *scholastic*: *σχολαστικός*, αυτός που ανήκει στη σχολή) ξεκίνησε και αναπτύχθηκε στις χριστιανικές σχολές (που είχε ιδρύσει σε κάθε μοναστήρι της αυτοκρατορίας του, με διάταγμα του 787 μ.Χ., ο βασιλιάς και ιδρυτής της αγίας Ρωμαϊκής αυτοκρατορίας Καρλομάγνος, 742/7-814). Ήταν μέθοδος μάθησης, που δίδασκαν οι ακαδημαϊκοί των μεσαιωνικών πανεπιστημίων της περιόδου 1100-1500, αλλά και πρόγραμμα εφαρμογής της μεθόδου στην διατύπωση και στήριξη των θεσφάτων της πίστης απέναντι στον πλουραλιστικό χαρακτήρα της εποχής. Στα πλαίσια της φιλοσοφίας και της θεολογίας του σχολαστικισμού δόθηκε μεγάλη έμφαση στη διαλογική τεκμηρίωση που επεκτείνει τη γνώση με εύλογους συμπερασμούς και διασάφηση παραδοξολογημάτων, μέσα από την αυστηρή ανάλυση και προσεκτική διάκριση των εννοιών, προκειμένου να εναρμονισθεί και η χριστιανική θεολογία, των στοχαστών του μεσαίωνα, με τις αυθεντίες της κλασικής και ύστερης αρχαίας φιλοσοφίας, κυρίως τον Αριστοτέλη και τους Νεοπλατωνικούς.

<sup>15</sup> Ιδιαίτερα μέσα από τα έργα των Frege (1848-1925), Russell (1872-1970), Wittgenstein (1889-1951), Quine (1908-2000) και D. M. Armstrong (αυστραλός φιλόσοφος γεννημένος το 1926, γνωστός για τη δουλειά του στη Μεταφυσική και τη Φιλοσοφία του Νου). Βλ. σχετ., Craig, E. (επιμ.) (2005). *The Shorter Routledge Encyclopedia of Philosophy*. London and New York: Routledge. σελ. 1032.

<sup>16</sup> (περίπου 460 - 370 π.Χ.)

<sup>17</sup> Ιατρός και φιλόσοφος που έδρασε περί το 150 μ.Χ.

<sup>18</sup> Βλ., Sextus Empiricus. (έκδοση 2005). *Against the Logicians*. (R. Bett, μεταφρ.). Cambridge: Cambridge University Press. σελ. 54.

<sup>19</sup> Το ον υπάρχει ως δεδομένο αιώνιο και ακατάλυτο. Η στερεότητά του δεν βρίσκεται στο μακρόκοσμο των μεγίστων, αλλά στον μικρόκοσμο των ελαχίστων. Βλ. σχετ., Γεωργούλης, Κ. Δ. (1994). *Ιστορία της Ελληνικής Φιλοσοφίας*, Αθήνα: Εκδόσεις Παπαδήμας. σσ. 107-111.

<sup>20</sup> Βλ., Αριστοτέλης. (έκδοση 1992). *Πρώτη Φιλοσοφία (Τα Μετά τα Φυσικά)*. (Κ. Δ. Γεωργούλης, ερμην.). Αθήνα: Εκδόσεις Παπαδήμα. σελ. 168.

Γαληνός στο *Definitiones Medicae*<sup>21</sup>: «Ὁ μὲν Δημόκριτος λέγων, “ἄνθρωποι εἷς ἔσται καὶ ἄνθρωπος πάντες”»<sup>22</sup> να αναφέρεται σε μια περιληπτική έννοια ανθρώπου<sup>23</sup>. Πρώτη, πάντως, φιλοσοφική χρήση του καθόλου βρίσκουμε στον Μένωνα<sup>24</sup> του Πλάτωνος: «...προσπάθησε να ξεπληρώσεις την υπόσχεσή σου, ορίζοντας γενικά τι είναι η αρετή και πάμε πια να κάνεις από το ένα πολλά... να την αφήσεις ολόκληρη και γερή...» (Μένων, 77a)<sup>25</sup>.

Στη μεταφυσική, ο όρος «καθολικό» εφαρμόζεται σε ιδιότητες (όπως η ιδιότητα του να είσαι κόκκινος, στρογγυλός κ.λπ.), σε σχέσεις (όπως της συγγένειας, αιτίου-αιτιατού, χωρικές, χρονικές κ.λπ.) ή σε γένη (όπως ο χρυσός, ο ορνιθόρυγχος κ.λπ.). Τα καθολικά γίνονται αντιληπτά σε αντίθεση με τα «επιμέρους», με τα καθέκαστα. Λίγα καθολικά, αν υπάρχουν κάποια, είναι πραγματικά «καθολικά» με την έννοια ότι είναι μοιρασμένα σε όλα τα καθέκαστα. Καθολικό λέμε εκείνο που κάποια, μόνο, επιμέρους το έχουν κοινό. Ο Πορφύριος<sup>26</sup>, που έγραψε μια εισαγωγική πραγματεία στις «Κατηγορίες» του Αριστοτέλη με τίτλο «Εισαγωγή», διαιρεί το πρόβλημα των καθόλου σε τρία επιμέρους ερωτήματα: Τα γένη και τα είδη υπάρχουν στη φύση ή συνίστανται από απλώς νοητικά περιεχόμενα (με άλλα λόγια, τι είδους πραγματικότητα έχουν; υπάρχουν εξ αντικειμένου ή είναι μόνον απλές παραστάσεις)<sup>27</sup>; Αν είναι πράγματα ξέχωρα από το νου, είναι ασώματα ή μη; Υπάρχουν έξω από τα επιμέρους κατ' αίσθηση αντικείμενα, ή τα αντιλαμβανόμαστε εντός των αντικειμένων αυτών<sup>28</sup>; Ο Βοήθιος<sup>29</sup>, στον δεύτερο υπομνηματισμό της *Εισαγωγής* του Πορφυρίου, προσπαθεί να δώσει μια απάντηση στα προηγούμενα ερωτήματα αλλά με ασαφή και όχι συστηματικό, κάποιες φορές, τρόπο. Όσον αφορά στο πρώτο ερώτημα ισχυρίζεται πως τα γένη και τα είδη είναι ταυτόχρονα και

<sup>21</sup> Έργο που γράφτηκε πιθανότατα στο τελευταίο τέταρτο του 1<sup>ου</sup> μ.Χ. αι. Το συμβατικό όνομα «ψευδο-Γαληνός» αναφέρεται σε γιατρό κρύβοντας, ωστόσο, την πολύπλοκη και πολυπρόσωπη πραγματικότητα ενός απροσδιόριστου, έως τώρα, αριθμού συγγραφέων και εποχών.

<sup>22</sup> Βλ., pseudo-Galenus. (έκδοση 1830). *Definitiones Medicae*. Στο C. G. Kühn (επιμ.), *Claudii Galeni opera omnia* (τ. 1-20), τ. 19. (σσ. 346-462). Lipsiae: Officina Libraria Car. Noblochii. σελ. 449.

<sup>23</sup> Βλ. σχετ., Αριστοτέλης. (έκδοση 1992). *Πρώτη Φιλοσοφία (Τα Μετά τα Φυσικά)*, ό. π., σελ. 359.

<sup>24</sup> (Λάρισα, 5<sup>ος</sup> αι. π.Χ.) Μαθητής του φιλοσόφου Γοργία (483-385 περίπου, π.Χ.) και στρατηγός του πέρση πρίγκιπα Κύρου του νεώτερου (424/423-401 π.Χ.).

<sup>25</sup> «ἀλλ' ἴθι δὴ πειρῶ καὶ σὺ ἐμοὶ τὴν ὑπόσχεσιν ἀποδοῦναι, κατὰ ὅλου εἰπὼν ἀρετῆς περὶ ὅτι ἐστίν, καὶ παῦσαι πολλὰ ποιῶν ἐκ τοῦ ἑνός, ..., ἀλλὰ ἐάσας ὅλην καὶ ὑγιῆ εἰπέ τί ἐστιν ἀρετή». Βλ., Πλάτων. *Λάχης – Μένων – Παρμενίδης*. (Β. Πατάκης & Ηλ. Λάγιος, μετάφρ.). Αθήνα: Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος. σσ. 106-107.

<sup>26</sup> 232-301 μ.Χ., από την Τύρο. Ο σημαντικότερος μαθητής και βιογράφος του νεοπλατωνικού φιλοσόφου Πλωτίνου (204/205-270 μ.Χ.). Διακρινόταν για τη μεγάλη του πολυμάθεια. Υπήρξε κάτοχος των δογμάτων ολόκληρης της ελληνικής φιλοσοφίας. Μεγάλη επίδραση άσκησε η «Εισαγωγή» που μεταφράστηκε στη λατινική, συριακή, αραβική και αρμενική γλώσσα.

<sup>27</sup> Βλ. σχετ., Θεοδωρακόπουλος, Ι. (2007). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία: Φιλοσοφία της Θρησκείας, Μεταφυσική, Φιλοσοφία της Ιστορίας*. (τόμ. δ'). Αθήνα: Βιβλιοπωλείον της Εστίας. σ. 181.

<sup>28</sup> «αὐτίκα περὶ τῶν γενῶν τε καὶ εἰδῶν τὸ μὲν εἶτε ὑφέστηκεν εἶτε καὶ ἐν μόναις ψιλαῖς ἐπινοίαις κεῖται εἶτε καὶ ὑφεστηκότα σώματά ἐστιν ἢ ἀσώματα καὶ πότερον χωριστὰ ἢ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς καὶ περὶ ταῦτα ὑφεστώτα...» (Πορφύριος, *Εισαγωγή*: σελίδα 1, στίχος 17n) Porphyry. (έκδοση 1887). *Isagoge sive quinque voces*. (ed. A. Busse). *Porphyrii isagoge et in Aristotelis categorias commentarium* στο *Commentaria in Aristotelem Graeca* 4.1. Berlin: Reimer.

<sup>29</sup> Anicius Manlius Severinus Boethius κοινώς γνωστός ως Boethius (περίπου 480-524 μ.Χ.). Ρωμαίος συγκλητικός, χριστιανός φιλόσοφος και θεολόγος. Έγραψε έργα Μαθηματικών, Θεωρίας Μουσικής, Λογικής και Θεολογίας. Άσκησε μεγάλη επιρροή στην εξέλιξη και στη διαμόρφωση της ορολογίας, της μεθόδου και των αρχών της Λογικής του Μεσαίωνα. Μετέφρασε και σχολίασε στα λατινικά τα «Λογικά» έργα του Αριστοτέλη (Όργανον: *Κατηγορίαί, Περί ερμηνείας, Αναλυτικά πρότερα, Αναλυτικά ύστερα, Τοπικά, Σοφιστικοί έλεγχοι*) και την *Εισαγωγή* του Πορφυρίου αποτελώντας, για τους σχολαστικούς φιλοσόφους και θεολόγους (του τέλους της περιόδου των Εκκλησιαστικών Πατέρων του 5<sup>ου</sup> αιώνα μ.Χ. έως και τις αρχές του 12<sup>ου</sup> αιώνα), τη μοναδική πηγή γνώσης των έργων αυτών.

φυσικές υποστάσεις (subsistentia) και προϊόντα του νου (intellecta)· η ομοιότητα των πραγμάτων αποτελεί τη βάση (subjectum) και της φυσικής τους ατομικότητας και της ιδεατής τους καθολικότητας. Για το δεύτερο ερώτημα, διατείνεται ότι είναι ασώματα όχι εκ φύσεως, αλλά κατόπιν αφαιρέσεως. Για το τρίτο ερώτημα υποστηρίζει πως υπάρχουν ταυτόχρονα και εντός και εκτός των κατ' αίσθηση πραγμάτων<sup>30</sup>. Δίνει μια θαυμάσια περιγραφή του καθόλου, ως οντότητας που τη μοιράζονται πολλά πράγματα: (α) ως όλο, όχι τμηματικά, (β) ταυτοχρόνως, και όχι το ένα μετά το άλλο, και (γ) με τρόπο σα να εισέρχεται βαθιά στη μεταφυσική σύνθεση των πραγμάτων που το μοιράζονται, όχι μόνο επιφανειακά: «*Αν, τώρα, το γένος είναι ένα στον αριθμό, δεν μπορεί να είναι κοινό σε πολλά. Γιατί αν ένα πράγμα είναι κοινό, τότε είναι: είτε κοινό κατά μέρη, οπότε σ' αυτή την περίπτωση δεν είναι κοινό το όλο αλλά αντίθετα τα μέρη του ανήκουν σε επιμέρους πράγματα, είτε με την πάροδο του χρόνου τίθεται υπό την χρήση αυτών που το έχουν, οπότε είναι κοινό σαν ένα σκλάβο ή ένα άλογο. Είτε είναι κοινό ταυτοχρόνως σε όλα, αλλά όχι με τρόπο ώστε να συνιστά την ουσία αυτού με το οποίο είναι κοινό. Για παράδειγμα, όπως ένα παιχνίδι που πραγματώνεται κατά στάδια, ή κάποιο θέαμα που είναι κοινό σε όλους τους θεατές. Αλλά το γένος δεν μπορεί να είναι κοινό στα είδη του με κάποιον από τους παραπάνω τρόπο. Γιατί θεωρείται ως κοινό αυτών με έναν τέτοιο τρόπο ώστε να βρίσκεται ολόκληρο εντός τους, ταυτοχρόνως, και με τη δυνατότητα να συνιστά και να διαμορφώνει την ουσία αυτού με το οποίο είναι κοινό*»<sup>31</sup>.

Τα καθολικά μας καθιστούν ικανούς να συλλαμβάνουμε μια σταθερή τάξη κάτω από τα φαινόμενα της αέναης ροής της εμπειρίας. Πολλές παραδόσεις, ανατολικές και δυτικές, αντιμετώπισαν τα ζητήματα που δημιουργούν οι θεωρίες για τα καθολικά, και τον τρόπο ύπαρξής τους, αν και ο όρος «καθολικά» σχετίζεται περισσότερο με τη δυτική παράδοση λόγω των έργων του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Ειδικότερα, ο όρος «καθολικά» παραπέμπει περισσότερο στον Αριστοτέλη: «...ονομάζω καθόλου ό,τι μπορεί να κατηγορηθεί σε πολλά...» (Αριστοτέλης, *Περί Ερμηνείας*: VII, 17a (40))<sup>32</sup>. Καθολικό είναι αυτό που πραγματώνεται σε περισσότερες από μια οντότητες, είτε είναι επιμέρους, είτε είναι καθολικά. Στον Πλάτωνα τα συναντάμε ως «Μορφές<sup>33</sup>» ή «Ιδέες», καθώς στράφηκε

<sup>30</sup> Βλ. σχετ., Migne, J.-P. (1847). Boeth Tomus Posterior. *Patrologiae*. 64. σσ. 84(B)-86(A). Επίσης, McKeon, R. (1930). Augustine to Albert the Great. *Selections from Medieval Philosophers*. 1. σσ. 95-98.

<sup>31</sup> «*Quod si unum quoddam numero genus est, commune multorum esse non poterit: una enim res si communis est, aut partibus communis est, et non jam tota communis, sed partes ejus propriae singulorum sunt, aut in usus habentium etiam per tempora transit ut sit commune, ut puteus et fons, ut servus communis vel equus, aut uno tempore omnibus commune fit, non tamen ut eorum quibus commune est substantiam constituat, et est theatrum, vel spectaculum aliquod quod spectantibus omnibus commune est. Genus vero secundum nullum horum modum commune esse speciebus potest; nam ita commune esse debet, ut et totum sit in singulis, et uno tempore, et eorum quorum commune est constituere valeat et conformare substantiam*» (έκδοση Brandt, Βιβλίο I, Κεφάλαιο 10, 162-163). Βλ., Migne, J.-P. (1847). Boeth Tomus Posterior. ό.π., σελ. 83 (C-D). Επίσης, βλ. σχετ., Spade, P. V. (επιμ.) (1994). *Five Texts on the Medieval Problem of Universals*. Indianapolis, Indiana: Hackett Publishing Company. σελ. 22. Επίσης, McKeon, R. (1930). Augustine to Albert the Great. *Selections from Medieval Philosophers*. 1. σ. 94. Επίσης, Kenny, A. (επιμ.) (2005). *Ιστορία της Δυτικής Φιλοσοφίας*. (Δ. Ρισσάκη, μεταφρ.). Αθήνα: Νεφέλη. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1994). σελ. 112.

<sup>32</sup> «...λέγω δε καθόλου μόν ό επί πλειόνων πέφυκε κατηγορεῖσθαι...», βλ. Aristotle. (έκδοση 1962). *The Categories, On Interpretation, Prior Analytics*. (H. P. Cook & H. Tredennick, μεταφρ.). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. σελ. 124.

<sup>33</sup> Θα γράφεται κεφαλαίο το πρώτο γράμμα των λέξεων είδος, ιδέα ή μορφή όταν, όπως συχνά συμβαίνει στο κείμενο του Πλάτωνα, οι λέξεις αυτές αφορούν τα υπερβατικά αντικείμενα που προϋποθέτει η φιλοσοφία του. Σε ορισμένες περιπτώσεις ο Πλάτωνας χρησιμοποιεί τη λέξη είδος (καθώς και τη λέξη ιδέα ή μορφή) για να αναφερθεί σε γνωρίσματα που έχουν τα καθέκαστα δυνάμει

προς τα μαθηματικά περισσότερο, ως ένα μοντέλο, προκειμένου να βρει ιδεώδεις «Μορφές» που μπορεί να τις συλλάβει ο νους, και τις οποίες ανακαλύπτουμε να αναπαρίστανται, ατελώς, στον αισθητό κόσμο. Η Μορφή ενός αντικειμένου είναι η ουσιαστική του φύση, η λειτουργία του και η ιδανική κατάσταση στην οποία βρίσκεται και εκπληρώνει τέλεια τη λειτουργία αυτή<sup>34</sup>. Η αντίληψη που είχε ο Αριστοτέλης για τα καθολικά ήταν περισσότερο ταιριαστή στη βιολογία παρά στα μαθηματικά. Επιμέρους ζώα και φυτά εμπίπτουν σε φυσικά είδη και τα πολλά διαφορετικά είδη, με τη σειρά τους, εμπίπτουν σε κάποιο γένος. Έτσι, τα καθολικά επιβάλλουν μια ταξινόμια στην πολλαπλότητα των διαφορετικών ατόμων του κόσμου, γι' αυτό και ανοίγει ο δρόμος για να νοηθούν κάποιες κανονικότητες εντός του<sup>35</sup>.

Μια θεωρία για τα καθολικά (ιδιοτήτων και σχέσεων) καλούμαστε να υιοθετήσουμε όταν αντιμετωπίζουμε την κατάσταση στην οποία δύο διαφορετικά πράγματα είναι ταυτόχρονα ίδια από μια άποψη και διαφορετικά από άλλες. Η κατηγορία της ποσότητας, φερ' ειπείν, προκαλεί προβλήματα γιατί, εντός της, φαίνεται δύο πράγματα να μπορούν να είναι ίδια, στο ότι και τα δύο έχουν μάζα για παράδειγμα, αλλά ταυτόχρονα και διαφορετικά, όταν το ένα έχει περισσότερη μάζα απ' ότι το άλλο. Αν η ιδιότητα είναι κάτι που ένα καθ' έκαστον έχει, ή δεν έχει, χωρίς ενδιάμεση δυνατότητα, όπως μπορεί να συμβεί στο πλαίσιο μιας θεωρίας καθολικών, τότε είναι δύσκολο να γίνει αντικείμενο πραγμάτευσης. Η θεωρία του Πλάτωνα, όμως, αφήνει αρκετά περιθώρια ευελιξίας στην περίπτωση αυτή. Οι Μορφές υπάρχουν ανεξάρτητα από τα καθ' έκαστον, και δεν λέμε ότι ένα επιμέρους έχει ή δεν έχει μια Μορφή παρά πως ένα επιμέρους μοιάζει, ή «μετέχει» μιας Μορφής κατά διαφορετικούς βαθμούς. Ένα καθ' έκαστον μπορεί να πλησιάζει ένα Ιδεώδες περισσότερο ή λιγότερο: οι βαθμοί αρετής, για παράδειγμα, αναλύονται ως βαθμοί κατά τους οποίους ένα πράγμα πλησιάζει το αγαθό. Έχουμε δηλαδή: μία οντότητα, και μια μεταβλητή σχέση μεταξύ αυτής και των επιμέρους. Η οντότητα περιγράφει: τι έχουν κοινό τα διάφορα επιμέρους, και η σχέση: τους βαθμούς κατά τους οποίους φανερώνονται οι οντότητες στα επιμέρους<sup>36</sup>.

Οι πρώτοι σχολαστικοί φιλόσοφοι αντιμετώπισαν το πρόβλημα των καθόλου, όπως προτάθηκε από τον Πορφύριο, περιορίζοντας τη διαμάχη στα γένη, τα είδη, και τις απαντήσεις που προτεινόταν, όπως είπαμε, στο αν τα αντικείμενα των εννοιών (δηλαδή τα γένη και τα είδη) υπάρχουν στη φύση (subsistentia) ή είναι απλώς αφαιρέσεις, νοητικές αναπαραστάσεις (nuda intellecta), δηλαδή αν είναι πράγματα ή όχι. Η λογική, με άλλα λόγια, έχει να κάνει με πράγματα ή με λέξεις; Όσοι απαντούσαν θετικά, στο πρώτο, ονομάστηκαν ρεαλιστές· οι άλλοι, οι αντι-ρεαλιστές, ονομάστηκαν νομιναλιστές<sup>37</sup>.

---

της μέθεξης τους στο αντίστοιχο Είδος. Βλ. σχετ., Vlastos, G. (2000). *Πλατωνικές Μελέτες*. (Ι. Αρζόγλου, μεταφρ.). Αθήνα: Μ.Ι.Ε.Τ. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε 1973). σελ. 489.

<sup>34</sup> Βλ. τα σχετικά χωρία στην *Πολιτεία*, 596-597 στο: Πλάτων. (έκδοση 172009). *Πολιτεία*. (Ν. Μ. Σκουτερόπουλος, μεταφρ.). Αθήνα: Πόλις. σσ. 708-717. Επίσης, βλ. σχετ., Beardsley, M. C. (1989). *Ιστορία των Αισθητικών Θεωριών*. (Δ. Κούρτοβικ & Π. Χριστοδουλίδης, μεταφρ.). Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη. σελ. 29.

<sup>35</sup> Βλ. σχετ., Craig, E. (επιμ.) (2005). *The Shorter Routledge Encyclopedia of Philosophy*. ό. π., σσ. 1030-1033.

<sup>36</sup> Βλ. σχετ., Bigelow, J., & Pargetter, R. (2004). *Science and Necessity*. Cambridge: Cambridge University Press, σελ. 49-50.

<sup>37</sup> Από το αγγλικό nominalism < nominal (κατ' όνομα) < nominalis (λατ.) που χρησιμοποιούταν στον μεσαιώνα (ονομαστικός) < λατινικό nomen (όνομα).

## 2.2 Οι σχολές

Οι διάφορες απόψεις για τα καθολικά, και τους τρόπους ύπαρξής τους, μπορούν να ταξινομηθούν γενικά σε τρεις ομάδες, στη βάση των αντίστοιχων θεωρητικών προσεγγίσεων: της πραγματοκρατίας, της ονοματοκρατίας και της ομοιοκρατίας.

### 2.2.1 Ρεαλιστές

“Ο ρεαλισμός διατηρεί μέσα του κάτι το αφηρημένο, το γενικό, το υπερατομικό”.  
Π. Κανελλόπουλος<sup>38</sup>

Στα πλαίσια της πραγματοκρατικής (ρεαλιστικής) θεωρίας για τα καθόλου, έχουν υποστηριχθεί δύο διαφορετικές αντιλήψεις. Του ακραιφνούς ρεαλισμού, με εισηγητή τον Πλάτωνα, σύμφωνα με την οποία τα καθολικά υπάρχουν πριν και ανεξάρτητα από οποιαδήποτε αντικείμενα τα πραγματώνουν (*universalia ante res*, πριν απ' τα πράγματα<sup>39</sup>), και ενός ήπιου ρεαλισμού, με εισηγητή τον Αριστοτέλη, στον οποίο τα καθολικά δεν υπάρχουν πριν από τα πράγματα, αλλά εξαρτώνται από τις πραγματώσεις τους ως κοινά χαρακτηριστικά αυτών των πραγματώσεων (*universalia in re*, μέσα στο πράγμα)<sup>40</sup>. υπάρχουν καθολικές έννοιες που αναπαριστούν με ακρίβεια την πραγματικότητα, η οποία (όπως και οι καθολικές αυτές έννοιες) πάντα αναφέρεται σε κάτι επιμέρους.

Ο Πλάτωνας, έχοντας δεχθεί την επιρροή της ηρακλείτειας θεωρίας για τη ροή των πάντων, στη νεότητά του, δεν μπόρεσε να βρει μέσα στον αισθητό κόσμο τα σταθερά στοιχεία που αποτελούν το αντικείμενο της επιστήμης: «...[ο Πλάτων]... από μικρό παιδί είχε επαφή με τον Κρατύλο<sup>41</sup> και τις Ηρακλείτειες δοξασίες, ότι τάχα όλα τα αισθητά ευρίσκονται σε αδιάκοπη ροή και δεν υπάρχει επιστήμη γι' αυτά... ο Σωκράτης είχε, εντομεταξύ, αρχίσει την εξέταση ηθικών ζητημάτων και όχι της φύσης, ζητώντας στα ηθικά το καθολικό και πρώτος πρόσεξε σοβαρά τους ορισμούς· στον Πλάτωνα άρεσαν αυτά και έτσι έφτασε στην ιδέα ότι οι ορισμοί έχουν αντικείμενό τους κάτι άλλο και όχι τα αισθητά· γιατί σκέφτηκε πως ήταν αδύνατο να ανήκει ο κοινός όρος σε κάποιο από τα αισθητά που κάθε στιγμή αλλάζουν. Αυτός λοιπόν τα τέτοιας λογής όντα τα ονόμασε Ιδέες και είπε ότι τα αισθητά όλα χαρακτηρίζονται σύμφωνα με το όνομα και την ουσία αυτών των Ιδεών· γιατί τα πολλά ξεχωριστά πράγματα, που έχουν το ίδιο όνομα με τα είδη, έχουν το είναι τους κατά μέθεξιν...» (Αριστοτέλης, *Τα Μετά τα Φυσικά*, Α' 987a-b)<sup>42</sup>. Το πραγματικό πρέπει να χαρακτηρίζεται από την

<sup>38</sup> Βλ., Κανελλόπουλος, Π. Από τον Δάντη ως τον Ιωάννη Καντακουζηνό. *Ιστορία του Ευρωπαϊκού Πνεύματος*. 2. σελ. 186. Ο Παναγιώτης Κανελλόπουλος (1902-1986) ήταν φιλόσοφος, πολιτικός και ακαδημαϊκός.

<sup>39</sup> Βλ. σχετ., Πελεγρίνης, Θ. (2004). *Λεξικό της Φιλοσοφίας*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα. σ. 307-310.

<sup>40</sup> «...για τον Αριστοτέλη τα πράγματα του φυσικού κόσμου έχουν μορφές, αλλά δεν υπάρχει ξεχωριστός κόσμος στον οποίο εγκαταβιώνουν. Οι Μορφές (Είδη) υπάρχουν στα επιμέρους αντικείμενα.» Βλ., Shapiro, S. (2000). *Thinking About Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, σελ. 64.

<sup>41</sup> Αθηναίος σκεπτικιστής φιλόσοφος, του ύστερου 5<sup>ου</sup> π.Χ. αιώνα, μαθητής του Ηρακλείτου.

<sup>42</sup> «ἐκ νέου τε γὰρ συνήθησ γενόμενος πρῶτον Κρατύλω καὶ ταῖς Ἡρακλειτεῖσι δόξαις, ὡς ἀπάντων τῶν αἰσθητῶν ἀεὶ ῥεόντων καὶ ἐπιστήμης περὶ αὐτῶν οὐκ οὔσης... Σωκράτους δὲ περὶ μὲν τὰ ἠθικὰ πραγματευομένου περὶ δὲ τῆς ὄλης φύσεως οὐθέν, ἐν μέντοι τούτοις τὸ καθόλου ζητοῦντος καὶ περὶ



αναγκαιότητα, την καθολικότητα, την ενότητα και τη σταθερότητα των νοητικών μας αναπαραστάσεων. Αφού ο αισθητός κόσμος περιλαμβάνει μόνο το τυχαίο, το επιμέρους, και το ασταθές, το πραγματικό υπάρχει εκτός και πάνω από τον κατ' αίσθηση κόσμο. Η Ιδέα είναι απολύτως σταθερή και υπάρχει καθ' αυτή· απομονωμένη από τον κόσμο της φαινομενικότητας και διακριτή της ανθρώπινης διανοίας. Τέτοιες οντότητες αντιστοιχούν σε κάθε αφηρημένη αναπαράσταση που δημιουργούμε: όχι μόνο των φυσικών ειδών, ή ουσιών, αλλά και των τεχνημάτων, ιδιοτήτων, σχέσεων, αρνήσεων, ακόμα και για το μη ον<sup>43</sup>.

Αν, όμως, τα καθολικά υπάρχουν εκτός των πραγματώσεών τους, θα υπάρχουν εκτός χωρο-χρονικών συνθηκών και αιτιωδών συσχετίσεων. Τότε, πρόκειται για αφηρημένα αντικείμενα. Για τον Αριστοτέλη, ο Πλάτωνας υπέπεσε σε ένα κεφαλαιάδες σφάλμα το οποίο απέφυγε ο Σωκράτης<sup>44</sup> καθώς «...δεν χώρισε το καθολικό από τα καθέκαστα· και η σκέψη του, να μην κάμει αυτόν τον χωρισμό, ήταν σωστή· τούτο γίνεται φανερό από τα ίδια τα πράγματα· γιατί είναι αδύνατο βέβαια να αποκτήσουμε επιστήμη χωρίς το καθολικό, ο χωρισμός όμως είναι η αιτία να παρουσιάζονται οι σχετικές με τις ιδέες δυσκολίες» (Αριστοτέλης, *Τα Μετά τα Φυσικά*, Μ' 1086b)<sup>45</sup>. Η επιστήμη αναζητεί το αναγκαίο και το καθολικό, ωστόσο οφείλει να τα γυρέψει σ' αυτόν εδώ τον κόσμο και όχι στην πλασματική ύπαρξη ενός δεύτερου χωριστού κόσμου. Η ετερότητα του (δεύτερου) πλατωνικού κόσμου έχει το μειονέκτημα ότι αποτελεί, σε τελευταία ανάλυση, μια αναδιπλασιασμένη ταυτότητα, ένα λεκτικό είδωλο του κατ' αίσθηση κόσμου: «Με τον όρο μέθεξι έκαμε μια λεκτική αλλαγή και μόνο [ο Πλάτωνας]· γιατί οι Πυθαγόρειοι λένε ότι τα όντα έχουν το είναι τους από μίμηση των αριθμών, ο Πλάτων λέει από μέθεξι αλλάζοντας τη λέξη· τι μπορεί να είναι όμως βέβαια η μέθεξι ή η μίμηση των ειδών αυτό το άφησαν ανοικτό ζήτημα.» (Αριστοτέλης, *Τα Μετά τα Φυσικά*, Α' 987b)<sup>46</sup>.

---

ορισμῶν ἐπιστήσαντος πρώτου τὴν διάνοιαν, ἐκεῖνον ἀποδεξάμενος διὰ τὸ τοιοῦτον ὑπέλαβεν ὡς περὶ ἑτέρων τοῦτο γιγνόμενον καὶ οὐ τῶν αἰσθητῶν· ἀδύνατον γὰρ εἶναι τὸν κοινὸν ὅρον τῶν αἰσθητῶν τινός, αἰεὶ γε μεταβαλλόντων. οὗτος οὖν τὰ μὲν τοιαῦτα τῶν ὄντων ιδέας προσηγόρευσε, τὰ δ' αἰσθητὰ παρὰ ταῦτα καὶ κατὰ ταῦτα λέγεσθαι πάντα· κατὰ μέθεξιν γὰρ εἶναι τὰ πολλὰ ὁμώνυμα τοῖς εἶδεσιν». Βλ., Aristotle. (έκδοση 1997). *Metaphysics*. (W. D. Ross, μεταφρ.). (Vols. I-II) Oxford: Oxford University Press. τόμος I. σελ. 66, και Αριστοτέλης. (έκδοση 1992). *Πρώτη Φιλοσοφία (Τα Μετά τα Φυσικά)*, ό. π., σσ. 16-17.

<sup>43</sup> Στο διάλογο *Σοφιστής*, του Πλάτωνα, παρουσιάζονται οι χωρίς επιτυχία προσπάθειες, που κάνει ο Θεαίτητος (αρχαίος έλληνας γεωμέτρης που έζησε την περίοδο 417-369 π.Χ.) και κάποιοι ελεάτης επισκέπτης, να προσδιορισθεί η τέχνη της σοφιστικής. Η αποτυχία αποδίδεται στο γεγονός ότι ο σοφιστής διατυπώνει ψευδείς προτάσεις, πράγμα που σημαίνει πως υπάρχουν. Όμως, ως ψευδείς, αποτυπώνουν αυτό το οποίο δεν συμβαίνει, δηλαδή το μη ον. Άρα, η ανάλυση των εσφαλμένων προτάσεων στηρίζεται στην υπόθεση ότι «...τὸ μὴ ὄν εἶναι...»: ότι υπάρχει το μη ον. (Πλάτωνας, *Σοφιστής*, 237a), βλ., Πλάτων. (έκδοση 2008). *Σοφιστής (ἢ περὶ τοῦ ὄντος, λογικός)*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτηρος. σσ. 450-451. Αλλιώς, θα ήταν αδύνατη η διατύπωση ψευδών προτάσεων. Βλ. σχετ., Kavka, M. (2004). *Jewish Messianism and the History of Philosophy*. Cambridge: Cambridge University Press. σελ. 50.

<sup>44</sup> 469-399 π.Χ.

<sup>45</sup> «...οὐ μὴν ἐχώρισέ γε τῶν καθ' ἕκαστον· καὶ τοῦτο ὀρθῶς ἐνόησεν οὐ χωρίσας. δηλοῖ δὲ ἐκ τῶν ἔργων· ἄνευ μὲν γὰρ τοῦ καθόλου οὐκ ἔστιν ἐπιστήμην λαβεῖν, τὸ δὲ χωρίζειν αἴτιον τῶν συμβαινόντων δυσχερῶν περὶ τὰς ιδέας ἐστίν». Βλ., Aristotle. (έκδοση 1997). *Metaphysics*. τόμος II., ό. π., σσ. 141-142. Επίσης, Αριστοτέλης. *Πρώτη Φιλοσοφία*, ό. π., σ. 316.

<sup>46</sup> «τὴν δὲ μέθεξιν τοῦνομα μόνον μετέβαλεν· οἱ μὲν γὰρ Πυθαγόρειοι μιμήσει τὰ ὄντα φασὶν εἶναι τῶν ἀριθμῶν, Πλάτων δὲ μετέξει, τοῦνομα μεταβαλόν. τὴν μέντοι γε μέθεξιν ἢ τὴν μίμησην ἤτις ἂν εἴη τῶν εἰδῶν ἀφεῖσαν ἐν κοινῷ ζητεῖν». Βλ., Aristotle. (έκδοση 1997). *Metaphysics*. τόμος I., ό. π., σελ. 66. Επίσης, Αριστοτέλης. *Πρώτη Φιλοσοφία*, ό. π., σ. 17. Επίσης, Βλ., Châtelet, F. (επιμ.) (1989). *Η Φιλοσοφία*, (τόμ. Α'). (Κ. Παπαγιώργης, μεταφρ.). Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1979). σσ. 110-114.

Ο Αριστοτέλης απέφυγε να θεωρήσει αιτία των φαινομένων κάτι διαφορετικό απ' αυτά (ένα δεύτερο κόσμο), και δίδαξε ότι το *είναι* των πραγμάτων, που γίνεται γνωστό μέσα στην έννοια, δεν έχει καμία άλλη πραγματικότητα πέρα από την ολότητα των φαινομένων μέσα στα οποία πραγματώνεται. Όρισε το *ον* ως την ουσία που ανεπίσσεται μέσα στα ίδια τα φαινόμενα. Η ουσία δεν έχει κάποια δεύτερη, ανώτερη, πραγματικότητα πέραν των φαινομένων. Βρίσκεται μόνο μέσα στη σειρά των εμφανίσεών της, με τη βοήθεια των οποίων, πραγματοποιεί τη δυνατότητά της μέσω της *μορφής*<sup>47</sup>. Το ενυπάρχον στα αισθητά υπαρκτά όντα ενοποιητικό και ενεργητικό, μη αισθητό, αυτό δεδομένο ο Αριστοτέλης το ονομάζει «είδος»<sup>48</sup>. Είναι κάτι το οποίο μπορεί να «δει» η νόηση, το «ορώμενο» δια της «νόησης», οπότε και αντιλαμβανόμαστε με ουσιαστικό τρόπο τα πράγματα. Το γενικό είναι πραγματικό μόνο μέσα στο μερικό, το μερικό είναι υπαρκτό μόνο επειδή μέσα του πραγματοποιείται το γενικό<sup>49</sup>.

Αν, όμως, τα καθολικά υπάρχουν στις πραγματώσεις τους εντός χώρου και χρόνου είναι συγκεκριμένα. Αλλά, κάτι τέτοιο θα σήμαινε πως μπορούν να καταλάβουν ταυτόχρονα περισσότερες από μια θέσεις. Φαίνεται, γενικά, να έχουν μια ιδιαίτερη σχέση με το χώρο αφού: ή θα βρίσκονται εκτός του, ή θα καταλαμβάνουν εντός του, την ίδια χρονική στιγμή, περισσότερες από μια θέσεις.

Πολλοί ήταν οι θιασώτες του ρεαλισμού, στον πρώιμο μεσαίωνα (περίπου 5<sup>ο</sup> – 10<sup>ο</sup> αι.). Χαρακτηριστικά αναφέρουμε, κατά τον 9<sup>ο</sup> μ.Χ. αι., τους Fredegisus της Tours, Remigius της Auxerre και Johannes Scotus Eriugena<sup>50</sup>, τον 10<sup>ο</sup>, οι Gerbert και Odo της Tournai, και τον 12<sup>ο</sup>, ο William του Champeaux<sup>51</sup>. Απέδιδαν, σε κάθε είδος, μια καθολική ουσία (subsistentia) την οποία μοιράζονταν όλα τα επιμέρους του είδους. Μια μοντέρνα μορφή του πλατωνικού ρεαλισμού, ειδικότερα, συναντάμε στις οντολογικές παραδοχές καθολικών φιλοσόφων των μέσων του 19<sup>ου</sup> αιώνα όπου τα αντικείμενα των καθολικών ιδεών ταυτίζονται με θείες ιδέες, ή αρχέτυπα, με βάση τα οποία σχεδιάστηκε το σύμπαν<sup>52</sup>.

<sup>47</sup> Η μορφή είναι ένα σχήμα, με περιεχόμενο που έχει καθορισθεί από την ουσία. Βλ. σχετ., Windelband, W. & Heimsoeth, H. (1986). *Εγχειρίδιο Ιστορίας της Φιλοσοφίας*. (τόμ. α΄). (μετ. Ν. Μ. Σκουτερόπουλος). Αθήνα: Μ.Ι.Ε.Τ. σσ. 161-162.

<sup>48</sup> Εκτός του αμετάβλητου και ενεργητικού είδους, υπάρχει το μεταβλητό και παθητικό στοιχείο, πάνω στο οποίο ασκεί την ενοποιητική και ενεργητική του επίδραση το είδος, το οποίο ονόμασε «ύλη», ο Αριστοτέλης, για να δηλωθεί ως εκείνο που είναι επιδεκτικό να πάρει μια οποιαδήποτε μορφή. Βλ. σχετ., Γεωργούλης, Κ. Δ. (2000). *Αριστοτέλης ο Σταγυρίτης*. Θεσσαλονίκη: Ιστορική και Λαογραφική Εταιρεία Χαλκιδικής, σελ. 192-203.

<sup>49</sup> Βλ. σχετ., Windelband, W. & Heimsoeth, H. (1986). *Εγχειρίδιο Ιστορίας της Φιλοσοφίας*. (τόμ. α΄). ό.π., σελ. 161.

<sup>50</sup> Ο Fredegisus της Tours, που έδρασε κατά το 800 μ.Χ., ήταν ηγούμενος του αββαείου του αγ. Μαρτίνου της Tours στην κεντρική Γαλλία. Ευνοημένος από τους ιστορικούς, αν και σημαντικότερη είναι η προσφορά του παραγνωρισμένου συμμαθητή του στον κύκλο του Alcuin of York (περί το 735-804, άγγλου λόγιου, ποιητή και θεολόγου), Candidus. Ο Remigius της Auxerre (841-908) ήταν γάλλος βενεδικτίνος μοναχός και σχολιαστής κλασικών ελληνικών και λατινικών κειμένων. Τέλος, ο Johannes Scotus Eriugena (περίπου 815-877) ήταν Ιρλανδός θεολόγος, νεοπλατωνικός φιλόσοφος (κορυφαίος του πρώιμου μεσαίωνα) και ποιητής. Κατατοπιστικό για το έργο τους είναι το Marenbon, J. (2006). *From the Circle of Alcuin to the School of Auxerre: Logic, Theology and Philosophy in the Early Middle Ages*. Cambridge: Cambridge University Press.

<sup>51</sup> Ο γάλλος Gerbert του Aurillac (945-1003) είναι ο μετέπειτα πάπας Σιλβέστρος ο ΙΙ και ο Odoardus (Odo) της Tournai (1050-1113) είναι ο μετέπειτα επίσκοπος του Cambrai, γάλλος βενεδικτίνος μοναχός και λόγιος. Ο Guillaume του Champeaux (περίπου 1070-1121) είναι γάλλος φιλόσοφος και θεολόγος.

<sup>52</sup> Βλ. σχετ., Vincelette, A. (2009). *Recent Catholic Philosophy: The Nineteenth Century*. Milwaukee, Wisconsin: Marquette University Press. Ειδικότερα τα κεφάλαια 4-5, σσ. 69-118.

## 2.2.2 Το οντολογικό status των καθολικών στους Στωικούς

Ιδιάζουσα υπήρξε η μεταφυσική των Στωικών<sup>53</sup>, εντός της οποίας παρουσιάζονται θέσεις για τα καθολικά πολλών κατευθύνσεων. Στα πλαίσια της Λογικής τους, ως επιστημονικό πεδίο όπου συγκαταλέγεται η γνωσιολογία και η οντολογία, πραγματεύονται ζητήματα γλώσσας, αλήθειας και ψεύδους των προτάσεων, φιλοσοφίας της γραμματικής, τυπικής λογικής, ζητήματα γενετικής ανάπτυξης της γνώσης κ.λπ. Εκεί, όσον αφορά τη γένεση της γνώσης, διδάσκουν ότι αφετηρία της είναι η αίσθηση. Υπάρχουν μόνο συγκεκριμένα αισθητά αντικείμενα που προσβάλλουν τα αισθητήριά μας και αφήνουν την εικόνα τους στην ψυχή μας, ως μνήμη, εν-τύπωση (την αποκαλούν «φαντασία», αυτό που σήμερα λέγεται «παράσταση»). Η ψυχή έχει τη δυνατότητα να συγκρατεί και να συγχωνεύει τις ομοειδείς παραστάσεις οπότε και γεννιέται η εμπειρία, οι κοινές έννοιες. Αλλά, δεν είναι δυνατό να αποδοθεί το χαρακτηριστικό της αλήθειας ή του ψεύδους σε όλες τις παραστάσεις. Γνώρισμα της αλήθειας αποτελεί η «συγκατάθεση»: παίρνουμε θέση απέναντι στο περιεχόμενο των παραστάσεων, τις αναγνωρίζουμε ως αληθείς και τις καθιστούμε κτήμα μας· τις «καταλαμβάνουμε». Το ενέργημα της συγκατάθεσης και «κατάληψης» (όρου που εισήγαγε στη φιλοσοφία ο Ζήνων ο Κιτιεύς) εκτελείται από το «ηγεμονικό» τμήμα της ψυχής, οπότε και παίρνει υπόσταση η «καταληπτική φαντασία», η έννοια που έχει την ικανότητα να «καταλάβει» το αντικείμενό της. Η απλή παρουσία ενός παραστατικού περιεχομένου στην ψυχή είναι έννοια. Όταν συνοδεύεται από την πεποιθήση (συγκατάθεση) ότι συμφωνεί με ένα εξωτερικό αντικείμενο, είναι «κατάληψη».

Η «Λογική», στους Στωικούς, αναγνωρίζεται για πρώτη φορά ως επιστήμη, και ένα από τα ειδικά αντικείμενά της είναι ο *ενδιάθετος λόγος*: το «σημαινόμενο», το «λεκτό». Δεν πρόκειται για «φύση»: μπορούμε να συλλάβουμε το χαρακτήρα του μόνο αν καταφύγουμε στη γλώσσα η οποία δεν αναφέρεται άμεσα στα πράγματα τα οποία σημαίνει<sup>54</sup>. Πρόκειται για το ιδεατό σημασιακό περιεχόμενο που παρεμβάλλεται ανάμεσα στην ψυχολογική παράσταση, και στο πράγμα, ή την κατάσταση πραγμάτων, στα οποία αναφέρεται η παράσταση (το *τυγχάνον*)<sup>55</sup>. Εφόσον δεν είναι σώμα, δεν έχει αντικειμενική υπόσταση, δεν μπορεί να καταταχθεί μεταξύ των όντων. Όμως αποτελεί «κάτι τι» γιατί διαμέσου αυτού εκφραζόμαστε. Πρόκειται για κάτι ασώματο, μη ον (μαζί με τον χρόνο, τον τόπο, και το κενό<sup>56</sup>) που,

<sup>53</sup> Η στωική φιλοσοφία διαρκεί από το 336 π.Χ. μέχρι το 180 μ.Χ. Το όνομά της το πήρε από τους μαθητές του ιδρυτή της, Ζήνωνος του Κιτιέως (336 - 264 περίπου, π.Χ.), που συναθροίζονταν στην «Ποικίλη Στοά» (με θαυμαστό τρόπο διακοσμημένη, από τρόπαια και έργα ζωγραφικής και γλυπτικής, στοά της πόλης των Αθηνών).

<sup>54</sup> Ας υποθέσουμε, έλεγαν οι Στωικοί, ότι ένας Έλληνας συζητά με έναν βάρβαρο, που αγνοεί την ελληνική γλώσσα, και ο πρώτος λέει τη λέξη «κύων». Ο πρώτος εκφέρει έναν ήχο, τον οποίο ο άλλος ακούει. Και οι δύο γνωρίζουν το πράγμα που υποδηλώνει με τη λέξη αυτή ο πρώτος. Όμως δεν συνεννοούνται. Ανάμεσα στον ήχο και στο πράγμα, κάθε φορά, παρεμβάλλεται το πεδίο της ασυννενοησίας ή της συννενοήσης. Βλ. σχετ., Châtelet, F. (επιμ.) (1989). *Η Φιλοσοφία*, (τόμ. Α'), ό. π., σσ. 160-165.

<sup>55</sup> «...μέσον τοῦ τε νοήματος καὶ τοῦ πράγματος, ὅπερ οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς ὑποτιθέμενοι λεκτὸν ἠξίου ὀνομάζειν». (Αμμώνιος, *Υπόμνημα εἰς τὸ Περὶ Ἑρμηνείας*). Βλ., Ammonius. (έκδοση 1897). *In Aristotelis librum de interpretatione commentarius*. (A. Busse ed.). Berlin: Reimer. σελ. 17.

<sup>56</sup> «...τῶν δὲ ἀσωμάτων τέσσαρα εἶδη καταριθμοῦνται ὡς λεκτὸν καὶ κενὸν καὶ τόπον καὶ χρόνον». (Σέξτος Εμπειρικός, *Προς Δογματικούς*, Βιβλίο 10, Παράγραφος 218, Στίχος 5), βλ., Sextus Empiricus. (έκδοση 1842). *Απαντα*. Berolini: Ge. Reimeri. σελ. 521.

ταυτόχρονα με τα όντα, τα ενσώματα, εμπίπτει στην πιο γενική οντολογική κατηγορία του *summum genus* (γενικώτατον): *τί*, δηλαδή του *κάτι*<sup>57</sup>.

Όμως, το αντίθετο αυτού του *κάτι* δεν είναι για τους Στωικούς το «*τίποτα*». Υιοθετούν τον αμαυρό όρο των *οὐτινῶν* (*οὐτίνα*, τα *όχι-κάτι*) προκειμένου να περιγράψουν το οντολογικό status των καθολικών εννοιών<sup>58</sup>. Με την ανάλυση του ακόλουθου επιχειρήματος του *οὐτιδος* (*οὐτίς*, *όχι-κάποιος*), που μας διασώζει ο Σμπλίκιος (νεοπλατωνικός φιλόσοφος του 6<sup>ου</sup> αιώνα μ.Χ.), οι Στωικοί ήθελαν να δείξουν ότι η αντιμετώπιση των καθολικών ως εάν ήταν πραγματικά, όπως τα επιμέρους, έχει καταστροφικές συνέπειες: Δεδομένου ότι, για κάποιον που είναι στα Μέγαρα, δεν μπορεί να είναι στην Αθήνα, επειδή ο Σωκράτης (ο επιμέρους άνθρωπος) είναι στα Μέγαρα, δεν είναι στην Αθήνα. Αν δοκιμάσουμε το ίδιο με τον καθολικό όρο «άνθρωπος» θα έχουμε: Αν κάποιος είναι στα Μέγαρα, δεν είναι στην Αθήνα. Όμως, στα Μέγαρα, υπάρχει άνθρωπος. Άρα, δεν υπάρχει άνθρωπος στην Αθήνα. Εδώ, το αρχικό επιχείρημα είναι έγκυρο ενώ το δεύτερο δεν είναι, ακριβώς

<sup>57</sup> Βλ. σχετ., Γεωργούλης, Κ. Δ. (1994). *Ιστορία της Ελληνικής Φιλοσοφίας*, ό. π., σσ. 367-372. Επίσης, βλ. σχετ., O'Toole, R. R. & Jennings, R. E. (2004). *The Megarians and the Stoics*. Στο D. M. Gabbay & J. Woods (επιμ.), *Handbook of the History of Logic. Greek, Indian and Arabic Logic*. 1, (σ. 396-522). Amsterdam: North-Holland. σελ. 460. Συγκεκριμένα, ο στωικός φιλόσοφος Σενέκας (περ. 1 π.Χ. – 65 μ.Χ.), γράφει τα εξής, αναφερόμενος στους φιλοσόφους της *αρχαιότερης* και *μέσης Στοάς* της περιόδου 336 – 208 περίπου π.Χ.: «*Οι Στωικοί ... [θέτουν]... ένα άλλο γένος, ... πρώτιστο... το πρωταρχικό γένος [το γένος πέρα από «αυτό που υπάρχει»]...»* (Seneca, *Epist.* 58. 13-15), βλ., Seneca, L. A. (έκδοση 1925). *Ad Lucilium Epistulae Morales* (Vols. 1-3). (R. M. Gummere, μεταφρ.). London: William Heinemann. Vol. 1. σσ. 394-395, και ο ιατρός και φιλόσοφος Σέξτος Εμπειρικός (160 - 210 μ.Χ.) όταν λέει: «*...πράγματα που λένε ότι συνιστούν την πιο γενική κλάση απ' όλες...*» (Sextus Empiricus, *Outlines of Scepticism*, Book II, 86) υπαινίσσεται την οντολογική ταξινόμηση των Στωικών σύμφωνα με την οποία το *τί* και *όχι* το *όν* συγκροτεί το *ύψιστο γένος* που περιλαμβάνει τα πάντα, βλ. σχετ., Sextus Empiricus. (έκδοση 2007). *Outlines of Scepticism*. (J. Annas & J. Barnes επιμ.) Cambridge: Cambridge University Press. σελ. 89, επίσης σε ένα άλλο σημείο γράφει: «*Αυτό είναι ένα γένος υψηλότερο από όλα αυτά και καθαυτό δεν υπάγεται σε κανένα άλλο.*» (Sextus Empiricus, *Against the Logicians*, Book 2, 32), βλ., Sextus Empiricus. (έκδοση 2005). *Against the Logicians*. ό. π., σελ. 95.

<sup>58</sup> Βλ. σχετ., Sedley, D. (1985). *The Stoic Theory of Universals*. *Southern Journal of Philosophy*. XXIII, (Suppl.), 87-92. σελ. 87. Γενικά οι Στωικοί ταυτίζουν τις πλατωνικές Μορφές με έννοιες, που αρνούνται ότι είναι *κάτι*. Τις απόψεις αυτές τις συναντούμε κυρίως στον Στοβαίο (Μακεδόνα μελετητή της αρχαίας ελληνικής γραμματείας του 5<sup>ου</sup> αιώνα μ.Χ.) και στον Διογένη τον Λαέρτιο (Ιστοριογράφος της φιλοσοφίας της αρχαιότητας, που έζησε κατά τις αρχές του 3<sup>ου</sup> μ.Χ. αιώνα). Στο *Ανθολόγιον* του Στοβαίου διαβάζουμε: «*Το δόγμα του Ζήνωνος [και των διαδόχων του είναι ότι] οι έννοιες δεν είναι κάτι αλλά σχεδόν-κάτι φαντάσματα απλώς της ψυχής. Είναι αυτά που οι παλιοί φιλόσοφοι αποκαλούσαν Ιδέες. Οι Ιδέες είναι των πραγμάτων που εμπίπτουν στις έννοιες: άνθρωποι, άλογα και γενικά όλα τα ζώα και όλα τα άλλα για τα οποία υπάρχουν Ιδέες. Αλλά οι Στωικοί φιλόσοφοι λένε ότι τα τελευταία δεν υπάρχουν πραγματικά, και από τη στιγμή που μετέχουμε εννοιών, τα δεχόμαστε με το μορφή ονομάτων»: «*Ζήνωνος <καὶ τῶν ἀπ' αὐτοῦ>. Τὰ ἐννοήματά φασὶ μῆτε τινα εἶναι μῆτε ποιὰ, ὡσανεὶ δὲ τινα καὶ ὡσανεὶ ποιὰ φαντάσματα ψυχῆς· ταῦτα δὲ ὑπὸ τῶν ἀρχαίων ἰδέας προσαγορεύεσθαι. Τῶν γὰρ κατὰ τὰ ἐννοήματα ὑποπιπτόντων εἶναι τὰς ἰδέας, οἷον ἀνθρώπων, ἵππων, κοινότερον εἰπεῖν πάντων τῶν ζῴων καὶ τῶν ἄλλων ὁπόσων λέγουσιν ἰδέας εἶναι. Ταύτας δὲ οἱ Στωικοὶ φιλόσοφοί φασιν ἀνυπάρκτους εἶναι καὶ τῶν μὲν ἐννοημάτων μετέχειν ἡμᾶς, τῶν δὲ πτώσεων, ἃς δὴ προσηγορίας καλοῦσι, τυγχάνειν».* (Στοβαίος, *Ανθολόγιον*: Βιβλίο 1, Κεφάλαιο 12, Ενότητα 3, Στίχος 11). Βλ., στον 1ο τόμο και στις σελίδες 122-123 του Stobaeus, J. *Anthologium*. (ed. C. Wachsmuth and O. Hense), *Ioannis Stobaei anthologium*, (5 vols). Berlin: Weidmann. Στο έργο, δε, του Διογένη του Λαέρτιου, *Βίοι φιλοσόφων*, διαβάζουμε: «*Μια έννοια είναι ένα φάντασμα της σκέψης που δεν είναι κάτι, αλλά σχεδόν κάτι, όπως στην περίπτωση που έχουμε την εικόνα ενός αλόγου ενώ δεν υπάρχει κανένα*: «*Ἐννόημα δὲ ἐστὶ φάντασμα διανοίας, οὔτε τὸ ὄν οὔτε ποιόν, ὡσανεὶ δὲ τι ὄν καὶ ὡσανεὶ ποιόν, οἷον γίνεταί ἀνατύπωμα ἵππου καὶ μὴ παρόντος*» (Διογένης Λαέρτιος, *Βίοι φιλοσόφων*: Βιβλίο 7, Παράγραφος 61, Στίχος 3). Βλ., Diogenes Laertius. (έκδοση 1925). *Lives of Eminent Philosophers*. (R. Hicks, μεταφρ.). (vol. 2) London: William Heinemann. σσ. 168-171.*

επειδή «ο άνθρωπος δεν είναι κάτι, αφού το καθολικό “άνθρωπος” δεν είναι κάτι, αλλά το θεωρήσαμε ως κάτι στο επιχείρημα»<sup>59</sup>.

---

<sup>59</sup> «...οἷον ‘εἴ τίς ἐστιν ἐν Ἀθήναις, οὐκ ἔστιν ἐν Μεγάροις’· ὁ γὰρ ἄνθρωπος οὐ τίς ἐστιν· οὐ γὰρ ἐστιν τίς ὁ κοινός· ὡς τινὰ δὲ αὐτὸν ἐλάβομεν ἐν τῷ λόγῳ...» (Σιμπλικίος, Υπόμνημα στις Κατηγορίες του Αριστοτέλη), βλ., τον τόμο 8, σελίδα 105, στίχος 15 του Simplicius. (έκδοση 1907). *In Aristotelis categorias commentarium*. (ed. K. Kalbfleisch) *Simplicii in Aristotelis categorias commentarium* [*Commentaria in Aristotelem Graeca*]. 8. Berlin: Reimer. Επίσης, βλ. σχετ., Inwood, B. (επιμ.) (2003). *The Cambridge Companion to the Stoics*. Cambridge: Cambridge University Press. σσ. 220, 223-224.

### 2.2.3 Ο ήπιος ρεαλισμός των σχολαστικών φιλοσόφων του Μεσαίωνα

“...stat rosa pristina nomine, nomina nuda tenemus”.

Eco<sup>60</sup>, *Το όνομα του ρόδου*

Η θεωρία της ονοματοκρατίας, ο νομιναλισμός, διακρίνεται σε δύο ανεξάρτητες, μεταξύ τους, κατευθύνσεις που μοιράζονται όμως κοινά κίνητρα και επιχειρήματα. Η μια κατεύθυνση, η πιο σύγχρονη, αρνείται την ύπαρξη των αφηρημένων αντικειμένων (αντικειμένων που δεν έχουν χωρο-χρονικές διαστάσεις ή που δεν σχετίζονται αιτιακά με κάτι<sup>61</sup>) και δέχεται ότι όλα όσα υπάρχουν είναι συγκεκριμένα αντικείμενα. Η άλλη, που ξεκίνησε κατά το Μεσαίωνα<sup>62</sup>, αρνείται την ύπαρξη των καθολικών (ό, τι πραγματώνεται σε διαφορετικές οντότητες) και δέχεται, αντίστοιχα, ότι όλα όσα υπάρχουν είναι επιμέρους. Κάθε τι, που υπάρχει, βρίσκεται σε ένα μέρος, την εκάστοτε χρονική στιγμή.

Μια καθαρά ονοματοκρατική θεωρία υποτίθεται ότι εισήγαγε ο Roscelinus<sup>63</sup> υποστηρίζοντας πως ό, τι υπάρχει είναι τα συγκεκριμένα ατομικά όντα, ενώ τα καθολικά είναι λέξεις, κενοί ήχοι (flatus voces) που μπορούν να εφαρμοσθούν σε πολλά καθέκαστα. Άλλοι, οι post res εννοιοκράτες (conceptualists) με εισηγητή τον Abaelardus<sup>64</sup>, δέχονται πως τα καθολικά εγείρονται a posteriori στο νου ως έννοιες,

<sup>60</sup> Umberto Eco: γεννημένος το 1932, Ιταλός λόγιος, ακαδημαϊκός καθηγητής και συγγραφέας. Η φράση στα λατινικά σημαίνει: «*Το παλιό ρόδο υπάρχει μόνο σαν όνομα, κρατάμε γυμνά ονόματα*». Βλ., Eco, U. (21993). *Το όνομα του ρόδου*. (Ε. Καλλιφατίδη, μεταφρ.). Αθήνα: Γνώση. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1980). σελ. 657.

<sup>61</sup> Από τη νομιναλιστική άποψη, ένα από τα βασικά προβλήματα που αντιμετωπίζουμε με τις οντότητες των μαθηματικών, ως υποσύνολο των αφηρημένων αντικειμένων, είναι η δυσκολία μας να αντιληφθούμε πώς μπορούμε να έχουμε αξιόπιστες γνώσεις, και ν' αναφερόμαστε σ' αυτά, από τη στιγμή που δεν αλληλεπιδρούμε μαζί τους αιτιακά (ίσως επειδή, ακριβώς, δεν τίθενται με χωρο-χρονικούς όρους).

<sup>62</sup> Είναι αλήθεια πως υπάρχουν ενστάσεις για το χαρακτήρα του μεσαιωνικού νομιναλισμού από τη στιγμή προαπαιτείται μια αισθησιοκρατικού χαρακτήρα φιλοσοφία (μια τέτοια φιλοσοφία θα ανήγαγε κάθε γνώση στις αισθήσεις· έτσι, θα αρνούταν οποιαδήποτε διάκριση ανάμεσα στην αίσθηση και την έννοια που παράγεται από τη νόηση) και δείγματα τέτοιας φιλοσοφίας δεν έχουμε κατά την περίοδο της σχολαστικής φιλοσοφίας. Ο Σχολαστικισμός είναι αμοιβαία αποκλειόμενη σχολή σκέψης τόσο με την Αισθησιοκρατία, όσο και με τον Νομιναλισμό. Κάποια αντι-ρεαλιστικά χαρακτηριστικά στον σχολαστικισμό πριν τον 13<sup>ο</sup> αιώνα στην πραγματικότητα αποτελούν περισσότερο ή λιγότερο, κάθε φορά, ατελείς μορφές ενός ήπιου ρεαλισμού προς τον οποίο έτειναν οι προσπάθειες των σχολαστικών αρχικά· διαδοχικές φάσεις εξέλιξης της ίδιας ιδέας. Οι φάσεις-στάδια αυτές είναι ευάριθμες. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν: το δόγμα του Adélard of Bath (1080-1152, Άγγλος λόγιος και μεταφραστής ελληνικών και αραβικών κειμένων αστρολογίας, αστρονομίας, φιλοσοφίας και μαθηματικών), για τον οποίο οι έννοιες του γένους, του είδους, και του επιμέρους, εφαρμόζονται στην ίδια ουσία, ανάλογα με το επίπεδο κατανόησης του πράγματος, και του Gautier de Mortagne (1090-1174, Γάλλος επίσκοπος και θεολόγος), θιασώτη εκείνης της θεωρίας της έλλειψης διαφοράς (Indifferentism), ή collectio, σύμφωνα με την οποία το καθολικό πράγμα είναι η οργανική συλλογή (mereological sum, collectio) όλων των επιμέρους που από κάποια άποψη δεν διαφέρουν μεταξύ τους. Βλ. σχετ., Lagerlund, H. (επιμ.) (2011). *Encyclopedia of Medieval Philosophy: Philosophy Between 500 and 1500*. Dordrecht: Springer. σελ. 1355.

<sup>63</sup> Roscelin de Compiègne, 1050-1123/1125. Γάλλος φιλόσοφος και θεολόγος. Διατυπώνονται επιφυλάξεις όσον αφορά το κατά πόσο υπήρξε νομιναλιστής, καθαντόν, μιας και δεν έχουν σωθεί γραπτά του και βασιζόμαστε σε αναφορές άλλων. Είναι αμφίβολο, πάντως, το να αρνήθηκε τη δυνατότητα του νου να διαμορφώνει γενικές έννοιες διακριτές, στη φύση τους, από τις αισθήσεις.

<sup>64</sup> ή Petrus Abeilardus, 1079-1142. Γάλλος φιλόσοφος και θεολόγος, μαθητής του Roscelinus. Ανέπτυξε μια σειρά επιχειρημάτων απέναντι στις κύριες «ρεαλιστικές» θέσεις του καιρού του. Να επιστημόνουμε, ωστόσο, ότι ο Αβελάρδος εφαρμόζει τον όρο «ρεαλιστική» σε κάθε τοποθέτηση που ταυτίζει το καθολικό με ένα πράγμα, αλλά και σε θεωρίες που ταυτίζουν το καθολικό με κάτι επιμέρους ή με μια συλλογή από επιμέρους τις οποίες ένας σύγχρονος μεταφυσικός φιλόσοφος θα

με αφαίρεση, ύστερα από τα επιμέρους· συνιστούν λέξεις με σημασία (*significatio*) που αποκτάται από τον χειριστή χάρη στην αναφορά του σε υπαρκτές, στο νου του, εικόνες<sup>65</sup>. Όμως, δεν γνωρίζουμε αν οι έννοιες αυτές έχουν κάποια θεμελίωση εκτός του νου μας, ούτε αν τα εξωτερικά αντικείμενα στη φύση κατέχουν αυτό που εμείς τους αναγνωρίζουμε. Με άλλα λόγια, απέχουμε ένα βήμα από έναν ήπιο ρεαλισμό. Οι έννοιες έχουν ιδεατή αξία, αλλά δεν είμαστε σίγουροι για την πραγματική τους αξία. Ένας ήπιος ρεαλισμός ξετυλίγεται πλήρως στα γραπτά του John of Salisbury<sup>66</sup>.

Και οι σημαντικότεροι σχολαστικοί (Thomas Aquinas, Bonaventure, Duns Scotus<sup>67</sup>), του 13<sup>ου</sup> αιώνα, έλυσαν το πρόβλημα των καθολικών υιοθετώντας τον ήπιο ρεαλισμό του Αριστοτέλη γι' αυτό και ήταν σε συμφωνία με τους μεγάλους άραβες σχολιαστές του, Averroes και Avicenna<sup>68</sup>. Ο Aquinas διαμόρφωσε με ακρίβεια τη γλώσσα αυτού του δόγματος, οπότε και ονομάστηκε *θωμιστικός ρεαλισμός*. Στο σύστημα αυτό, συναρμόζονται τα χαρακτηριστικά των εξωτερικών αντικειμένων (μερικότητα) με αυτά των νοητικών μας αναπαραστάσεων (καθολικότητα) και ερμηνεύεται το γιατί η επιστήμη, αν και συγκροτείται στη βάση αφηρημένων εννοιών, είναι έγκυρη για τον κόσμο της πραγματικότητας - εφόσον συλλάβουμε το πραγματικό νόημα της αφαίρεσης. Όταν ο νους κατανοεί την ουσία ενός πράγματος αντιλαμβάνεται το αντικείμενο της εξωτερικής πραγματικότητας χωρίς τα επιμέρους χαρακτηριστικά που του αναγνωρίζονται στη φυσική του κατάσταση, και χωρίς να αποδίδεται σ' αυτή, την ουσία, το στοιχείο της καθολικότητας, πράγμα που θα κάνει σε δεύτερο χρόνο ο αναστοχασμός. Η αφηρημένη πραγματικότητα συλλαμβάνεται όταν θεωρούμε το επιμέρους εξωτερικά και το καθολικό εσωτερικά. Αυτό που γίνεται αντιληπτό, στον απόλυτο βαθμό, είναι η ενσαρκωμένη πραγματικότητα κάθε ατομικού. Δεν υπάρχει κάτι στην αφηρημένη έννοια που να μην εφαρμόζεται ατομικά, γιατί δεν περιλαμβάνει τα επιμέρους χαρακτηριστικά κάθε όντος. Έτσι, ο αφηρημένος χαρακτήρας της δεν την εμποδίζει να αντιστοιχεί με αξιοπιστία στα φυσικά αντικείμενα. Η καθολική μορφή της έννοιας, εν ολίγοις, αποτελεί απότοκο της αφαίρεσης και του αναστοχασμού· καθαρά προϊόν της διανοίας.

---

προτιμούσε να χαρακτηρίσει «αντι-ρεαλιστικές» ή «νομιναλιστικές». Βλ. σχετ., Lagerlund, H. ό.π., σελ. 1355.

<sup>65</sup> Βλ. σχετ., Drossos, C. (2006). Sets, Categories and Structuralism. Στο G. Sica (επιμ.), *What is Category Theory?* (σ. 95-126). Monza, Italy: Polimetrica, σελ. 111.

<sup>66</sup> John of Salisbury (1120-1180), άγγλος συγγραφέας, επίσκοπος της Chartres.

<sup>67</sup> Ο Thomas Aquinas (1225-1274 ήταν ιταλός δομινικανός ιερέας, σχολαστικός φιλόσοφος και θεολόγος, γνωστός ως Doctor (διδάσκαλος) Angelicus, Doctor Communis (όλων) και Doctor Universalis (καθολικός). Ο Bonaventure (1221-1274) υπήρξε ιταλός σχολαστικός θεολόγος και φιλόσοφος, γνωστός ως Doctor Seraphicus (σαν άγγελος Σεραφείμ). Ο σκώτος Johannes Duns Scotus (1265-1308) υπήρξε απ' τους σημαντικότερους θεολόγους και φιλοσόφους του μεσαίωνα, γνωστός λόγω του εξαισίου, από κάθε άποψη, τρόπον σκέψης του ως Doctor Subtilis (οξύνους). Και οι τρεις αναγνωρίζονται ως άγιοι και πατέρες της Ρωμαιοκαθολικής Εκκλησίας.

<sup>68</sup> Ο 'Abū l-Walīd Muḥammad bin 'Aḥmad bin Rušd γνωστός ως Ibn Rushd, και στη δυτική βιβλιογραφία ως Averroes (1126–1198), ήταν ένας ανδαλουσιανός μουσουλμάνος διανοούμενος, διδάσκαλος της αριστοτελικής και ισλαμικής φιλοσοφίας και θεολογίας, της νομικής, της λογικής, της ψυχολογίας, της πολιτικής, της αραβικής μουσικής θεωρίας, της ιατρικής, της αστρονομίας, της γεωγραφίας, των μαθηματικών, της φυσικής και της ουρανίου μηχανικής. Ο Abū 'Alī al-Ḥusayn ibn 'Abd Allāh ibn Sīnā (περίπου 980–1037) γνωστός ως Ibn Sīnā, ή με το λατινικό όνομα Avicenna, ήταν πέρσης ιατρός και φιλόσοφος.

## 2.2.4 Η θεωρία της ομοιοκρατίας

Κατά τη θεωρία της ομοιοκρατίας για τα καθόλου, οι καθολικοί όροι δηλώνουν τις ομοιότητες που αποδίδονται στα διάφορα συγκεκριμένα ατομικά. Με έναν καθολικό όρο (π.χ. το κόκκινο) αναφερόμαστε στον μοναδικό τρόπο ομοιότητας (έστω και αν έχει διαβαθμίσεις, όπως οι αποχρώσεις του κόκκινου) κάποιων πραγμάτων, ξεχωριστό από τον τρόπο ομοιότητας κάποιων άλλων (π.χ. κίτρινα πράγματα) που αποδίδεται με άλλον καθολικό όρο (το κίτρινο). Ο William του Occam<sup>69</sup> υπήρξε ένας από τους στοχαστές που θεώρησε τα καθολικά ως πλάσματα και σημεία διανοητικά που αντιπροσωπεύουν τάξεις ομοειδών πραγμάτων: «Σε άλλα πράγματα, που τα λέω διανοητικά πλάσματα, αντιστοιχούν (ή μπορεί να αντιστοιχούν), παρόλα αυτά, αντικείμενα της πραγματικότητας, όμοια μεταξύ τους, και [τα πράγματα αυτά] αποκαλούνται καθολικά»<sup>70</sup>. Με τον Occam, και την Οροκρατική (*Terminist*) Σχολή, εμφανίζεται η πλήρως εννοιοκρατική λύση στο πρόβλημα των καθολικών. Η αφηρημένη και καθολική έννοια είναι *σημάδι* (*signum*), που καλείται και *όρος* (*terminus*, εξού και το όνομα του φιλοσοφικού αυτού συστήματος), αλλά δεν έχει πραγματική αξία. Το αφηρημένο και καθολικό δεν υπάρχει κατά κανένα τρόπο στη φύση, ούτε και έχει κάποιο άλλο εξω-νοητικό θεμέλιο. Η καθολική έννοια έχει ως αντικείμενό της εσωτερικές αναπαραστάσεις διαμορφωμένες από τη διάνοια. Δεν μπορεί να της αποδοθεί κάτι αντίστοιχο της εξωτερικής πραγματικότητας. Τα καθολικά λειτουργούν ως ταμπέλες που συγκρατούν στη νόηση την περιοχή εκείνη στην οποία μπορεί να αποδοθεί μια πολλαπλότητα πραγμάτων.

Αντίστοιχη είναι η περίπτωση του *esse est percipi* (*είσαι* σημαίνει γίνεσαι αντιληπτός) νομιναλισμού του Berkeley όπου μια πλατωνική, αφηρημένη, Μορφή αντικαθίσταται από ένα επιλεγμένο καθ' έκαστο που λειτουργεί ως παράδειγμα<sup>71</sup>.

<sup>69</sup> Άγγλος φραγκισκανός μοναχός και σχολαστικός (*scholasticus*) φιλόσοφος. Μαζί με τον Θωμά τον Ακινάτη και τον John Duns Scotus αποτελεί μια από τις πιο διακεκριμένες φυσιογνωμίες στην ιστορία της φιλοσοφίας του μεσαίωνα της περιόδου 1000-1300 (High Middle Ages). Έζησε περίπου από το 1287 έως το 1347. Άσκησε επιρροή όχι μόνο στη μεταφυσική αλλά και σε άλλες περιοχές της μεσαιωνικής φιλοσοφίας όπως στη λογική, τη φυσική (φυσική φιλοσοφία), τη θεωρία της γνώσης, την ηθική, την πολιτική φιλοσοφία, και στη θεολογία.

<sup>70</sup> “*Alia dicuntur ficta quibus tamen consimilia in esse reali correspondent vel correspondere possunt, et huiusmodi vocantur universalia*”. Βλ., Prantl, C. (1870). *Geschichte der Logic im Abendlande* (vols. 1-4). Leipzig: Verlag von S. Hirzel. Vol. 3. σελ. 337. Επίσης βλ., το 10<sup>ο</sup> κεφάλαιο (στίχοι 23-26) με τίτλο “*Opinio quae posset teneri: Propositiones, syllogismi et universalia sunt ficta, habentia tantum esse obiectivum in anima*” (*Μια άποψη που θα μπορούσε να ισχύει: Οι προτάσεις, οι συλλογισμοί και τα καθολικά είναι διανοητικά πλάσματα που έχουν μόνο αντικειμενική ύπαρξη στην νυχή*) του *Expositio in librum Perihermenias Aristotelis* (σχολιασμός στο πρώτο βιβλίο του *Περί Ερμηνείας του Αριστοτέλη*) στο 2<sup>ο</sup> τόμο των φιλοσοφικών έργων του Guillelmus de Ockham. (ed. 1967-1986). *Opera Philosophica*. (10 Vols.) G. Gál (ed.) St. Bonaventure, New York: The Franciscan Institute, στη σελ. 370.

<sup>71</sup> George Berkeley (1685-1753), επίσκοπος του Cloyne· ιρλανδός θεμελιωτής του υποκειμενικού ιδεαλισμού (ιμπατεριαλισμός) στα πλαίσια του οποίου υιοθετείται η άποψη ότι μπορούμε να έχουμε γνώση μόνο των αισθημάτων που μας προκαλούν αντικείμενα. Ιδέες μπορούμε να έχουμε μόνο των αντικειμένων που αντιλαμβανόμαστε, και όχι αφηρημένων εννοιών όπως η «ούλη» λόγου χάρη: «...δεχόμαστε ότι μια ιδέα, που θεωρημένη καθαυτήν είναι μερική, γίνεται γενική όταν αναπαριστά ή εκπροσωπεί όλες τις άλλες επιμέρους ιδέες του ίδιου είδους... μια ευθεία, που είναι επιμέρους, είναι παρόλα αυτά ως προς τη σημασία της γενική, από τη στιγμή που χρησιμοποιείται έτσι... Και όσο αυτή η επιμέρους ευθεία γίνεται γενική, με το να γίνεται **σημάδι**, τόσο το όνομα “ευθεία” που παρμένο απόλυτα είναι μερικό, ως σημάδι γίνεται γενικό.», «...η καθολικότητα... δεν συνίσταται στην απόλυτη, θετική φύση ή σύλληψη κάποιου πράγματος, αλλά στη σχέση που φέρει με τα καθέκαστα που σημαίνονται ή αναπαριστώνται απ' αυτό, χάρις στην οποία, αυτά τα πράγματα, ονόματα ή έννοιες, όντας από τη φύση τους επιμέρους, θεωρούνται καθολικά». (Berkeley, *A Treatise Concerning the Principles of Human*



Αυτό που έχουν κοινό, μια πολλαπλότητα από επιμέρους, είναι ότι μοιάζουν σ' αυτό το παράδειγμα, επαρκώς η μη. Οι ιδιότητες υποχωρούν, λοιπόν, και αντικαθίστανται από παραδείγματα, μαζί με ένα κρίσιμο ερώτημα «επαρκούς ομοιότητας». Οι δε βαθμοί ομοιότητας, με ένα παράδειγμα, παίζουν το ρόλο των βαθμών «μετοχής» της πλατωνικής θεωρίας των Ιδεών.

Στο πάντρεμά της με τον φαινομεναλισμό<sup>72</sup> αυτό, η εννοιοκρατία επανεμφανίζεται, στη νεότερη μεταφυσική, στο πρόσωπο του Kant<sup>73</sup>. Για τον Kant υπάρχουν μέσα μας αφηρημένες, γενικές έννοιες διακριτές των αισθημάτων. Οι καθολικές και αναγκαίες αυτές αναπαραστάσεις δεν έχουν κάποια συνάφεια με εξωτερικά πράγματα αφού παράγονται αποκλειστικά από τις δομικές λειτουργίες (τις *a priori* μορφές) του νου μας. Ο χώρος και ο χρόνος, εντός των οποίων εντάσσονται όλες οι κατ' αίσθηση εντυπώσεις μας, δεν συνάγονται από την εμπειρία που έχει το χαρακτήρα του επιμέρους, και του όχι αναγκαίου, παρά είναι σχήματα που εγείρονται από τη φυσική νοητική μας οργάνωση. Συνεπώς, δεν έχουμε καμιά βεβαιότητα εδραίωσης μια πραγματικής αντιστοιχίας μεταξύ του φυσικού κόσμου και των παραστάσεων μέσα μας και η επιστήμη, που δεν είναι άλλο από την συστηματική επεξεργασία των εμπειρικών δεδομένων σύμφωνα με τους δομικούς προσδιορισμούς που επιβάλλει η διάνοια (τις κατηγορίες), γίνεται ένα υποκειμενικό παιχνίδι που έχει αξία μόνο για μας, και για ό, τι είναι «φαινόμενο» ως προς εμάς, και όχι για τον, εξωτερικό μας, κόσμο καθαυτόν.

---

Knowledge, I 12 & 15), Βλ., Berkeley, G. (έκδοση 2009). *Philosophical Writings*. Cambridge: Cambridge University Press. σσ. 74,76.

<sup>72</sup> Στα πλαίσια του φαινομεναλισμού (φαινομενοκρατίας) υπάρχουν μόνο τα αντικείμενα των οποίων έχουμε εμπειρία. Υπάρχει μόνο το εμπειρικά αντιληπτό και παρατηρήσιμο.

<sup>73</sup> 1724-1804.

## 2.2.5 Ο κυρίως ειπείν νομιναλισμός

Ο νομιναλισμός προϋποθέτει την παραδοχή ότι η αφηρημένη έννοια δεν διαφέρει ουσιωδώς από την αίσθηση (της οποίας αποτελεί απλώς έναν μετασχηματισμό). Αδιαμφισβήτητη είναι η οικειοποίηση του νομιναλισμού στον Θετικισμό<sup>74</sup>. στον D. Hume, τον J. S. Mill, τον H. Spencer ή τον H. Taine<sup>75</sup>, για παράδειγμα, δεν υπάρχει καμιά καθολική έννοια. Η έννοια στην οποία αποδίδουμε καθολικότητα είναι μόνο μια συλλογή από ατομικές αντιλήψεις, μια σύνθετη αίσθηση. Μ' αυτό τον τρόπο αντιμετωπίζεται άμεσα και το πρόβλημα της αντιστοιχίας της έννοιας με την πραγματικότητα. Εξακολουθεί, ωστόσο, το ερώτημα: Ποια είναι η αρχή της ψευδαίσθησης που μας οδηγεί στο να αποδίδουμε μια διακριτή ύπαρξη στις γενικές έννοιες, ενώ πρόκειται για απλώς τροποποιημένα αισθήματα;

Στον νομιναλισμό δεν εντάσσεται ο μηδενισμός, για τον οποίο δεν υπάρχει καμία οντότητα, ούτε ο αγνωστικισμός για την ύπαρξη των επιμέρους ή των συγκεκριμένων αντικειμένων. Σε όλες του τις μορφές είναι ένας αντι-ρεαλισμός. Άλλοτε αρνείται την ύπαρξη ιδιοτήτων, προτάσεων, αριθμών, δυνατών κόσμων, και γενικώς καθολικών ή αφηρημένων αντικειμένων, και άλλοτε τα δέχεται ως υπαρκτά, αλλά με τη μορφή επιμέρους ή συγκεκριμένων αντικειμένων.

Πάντως, και ο ρεαλισμός και ο νομιναλισμός δέχονται την εναρμόνιση μεταξύ της έννοιας στο νου και του φυσικού αντικειμένου που θεωρείται. Η διαφωνία, μεταξύ τους, προκύπτει όταν αποδίδουμε στα πράγματα τα χαρακτηριστικά του καθολικού και του επιμέρους αντίστοιχα.

---

<sup>74</sup> Ο Θετικισμός είναι το σύστημα των επιστημολογικών παραδοχών εκείνων κατά τις οποίες η βέλτιστη μέθοδος αποκάλυψης των διαδικασιών μέσω των οποίων πραγματοποιούνται τα ανθρώπινα και τα φυσικά γεγονότα είναι η επιστημονική, ενώ αντιτίθεται σε κάθε μορφή μεταφυσικής. Αυτό το οποίο συμβαίνει είναι το μόνο δυνατό αντικείμενο γνώσης και δεν υπάρχουν, ούτε και μπορούν να νοηθούν, δυνάμεις και ουσίες πέραν αυτού, και των νόμων που εξακριβώνονται από την επιστήμη.

<sup>75</sup> Ο David Hume (1711-1776) ήταν σκώτος φιλόσοφος, ιστορικός και οικονομολόγος, ο John Stuart Mill (1806-1873) βρετανός φιλόσοφος, ο Herbert Spencer (1820-1903) άγγλος φιλόσοφος, βιολόγος, κοινωνιολόγος και πολιτικός επιστήμονας, ενώ ο Hippolyte Adolphe Taine (1828-1893) γάλλος ιστορικός.

## 2.3 Το επιχείρημα του τρίτου ανθρώπου

Το όνομα «επιχείρημα του τρίτου ανθρώπου» αναφέρεται από τον Αριστοτέλη<sup>76</sup>, αλλά σαν επιχείρημα συναντάται στους πλατωνικούς διαλόγους. Στον *Παρμενίδη* ο Πλάτωνας περιγράφει δύο αναδρομικά επιχειρήματα που ποτέ δεν χαρακτήρισε, αλλά ονομάζονται έτσι επειδή ο Αριστοτέλης σε πολλά σημεία του έργου του μιλά για ένα επιχείρημα, τον «τρίτο άνθρωπο», και οι σχολιαστές γενικά πιστεύουν ότι ταυτίζεται με αυτά του Πλάτωνος. Ένα επιχείρημα, λοιπόν, αναφέρει ο Αριστοτέλης στο *Περί Ιδεών*<sup>77</sup> και ένα ο Εύδημος ο Ρόδιος<sup>78</sup>, όπως μας τα διασώζει ο Αλέξανδρος ο Αφροδισιεύς<sup>79</sup>, που είναι ίδιο με του Αριστοτέλη. Υπάρχουν, συνεπώς, τέσσερα τουλάχιστον επιχειρήματα τρίτου ανθρώπου για μια επ' άπειρον αναδρομή των ιδεών<sup>80</sup>.

Το επιχείρημα σκοπεύει να δείξει ότι αν υπάρχει έστω και μια μορφή του F, υπάρχουν άπειρες. Αν για παράδειγμα υπάρχει έστω και μια μορφή του ανθρώπου, υπάρχουν άπειρες μορφές τέτοιες. Σαν επιχείρημα έλαβε μεγάλες διαστάσεις μεταξύ των σχολιαστών μιας και λογίζεται ως η καταστροφική αντίρρηση στην Πλατωνική θεωρία των Ιδεών. Τη δική του θεωρία κατηγορήσης, ο Αριστοτέλης, θεωρείται ότι τη δούλεψε καθώς αναλογιζόταν το επιχείρημα αυτό.

---

<sup>76</sup> Καμιά έκθεση του πλατωνικού παραδόξου αυτού δεν παρουσιάζεται στα διασωθέντα έργα του Αριστοτέλη, παρά μόνο διάσπαρτες αναφορές: *Μετά τα Φυσικά*, 990b, 1039a, 1059b, 1079a, και *Περί σοφιστικών ελέγχων* 178b. Βλ. Αριστοτέλης. (έκδοση <sup>4</sup>1992). *Πρώτη Φιλοσοφία (Τα Μετά τα Φυσικά)*, ό. π., σσ. 24, 167, 232, 294, και Aristotle. (έκδοση 1955). *On Sophistical Refutations, On Coming-to-Be and Passing-Away, On the Cosmos*. (E. S. Forster & D. J. Furley, μεταφρ.). London & Cambridge, Massachusetts: William Heinemann Ltd & Harvard University Press. σ. 116.

<sup>77</sup> Το *Περί Ιδεών* είναι μια μικρή πραγματεία του Αριστοτέλη που διασώθηκε μόνο σε αποσπάσματα από τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα (βλέπε σχόλιο στις υποσημειώσεις παρακάτω) στο σχολιασμό των *Μετά τα Φυσικά* (Αλέξανδρου Αφροδισιέως, *Υπόμνημα εις το Μείζον Α των Μετά τα Φυσικά Αριστοτέλους*). Σ' αυτό το κείμενο, ο Αριστοτέλης, παρουσιάζει και κρίνει τα επιχειρήματα για την ύπαρξη των πλατωνικών Ιδεών, σκιαγραφώντας τις δικές του εναλλακτικές απαντήσεις. Αποτελεί μια ιδιαίτερα πλούσια πηγή για κάποιον που θέλει να κατανοήσει την πλατωνική θεωρία των ιδεών γιατί τις χαρακτηρίζει, και διατυπώνει επιχειρήματα για την ύπαρξή τους, συστηματικότερα απ' ό,τι το κάνει ο Πλάτωνας, ή ο ίδιος αλλού. Βλ. σχετ., Fine, G. (2004). *On Ideas: Aristotle's Criticism of Plato's Theory of Forms*. Oxford: Clarendon Press. σελ. vii.

<sup>78</sup> Ο Εύδημος ο Ρόδιος ήταν αρχαίος έλληνας φιλόσοφος, της περιπατητικής σχολής, που έζησε περίπου από το 370 - 300 π.Χ. Υπήρξε ο πρώτος ιστορικός της επιστήμης (μαθηματικών και αστρονομίας) και εξέχων μαθητής του Αριστοτέλη γι' αυτό και αποκαλούνταν «εταίρος».

<sup>79</sup> Ο Αλέξανδρος ο Αφροδισιεύς (από την Αφροδισία της Καρίας στη, σημερινή, νοτιοδυτική Τουρκία) έζησε περί το 200 μ.Χ. Υπήρξε περιπατητικός φιλόσοφος, ο τελευταίος διευθυντής της σχολής, και ο διασημότερος σχολιαστής των έργων του Αριστοτέλη στην αρχαιότητα οπότε και αναγορεύθηκε ως «ο εξηγητής».

<sup>80</sup> Βλ. σχετ., Fine, G. (2004). *On Ideas: Aristotle's Criticism of Plato's Theory of Forms*. ό.π., σελ. 203.

### 2.3.1 Το επιχείρημα όπως απαντάται στον Πλάτωνα

«Η θεωρία αυτή [του Πλάτωνα] θέλει ν' αποδείξει ότι δύο άτομα, που έχουν κοινές ιδιότητες (λόγου χάρι, δύο άνθρωποι) είναι απλές πρόσκαιρες παρουσίες ενός αιώνιου αρχέτυπου. Αναρωτιέται ο Αριστοτέλης αν το πλήθος των ανθρώπων και ο Άνθρωπος – τα βραχύβια άτομα και το Αρχέτυπο – έχουν κοινές ιδιότητες. Δεν υπάρχει αμφιβολία: έχουν τις κοινές ιδιότητες της ανθρωπότητας. Σ' αυτή την περίπτωση, υποστηρίζει ο Αριστοτέλης, θα πρέπει να εξεύρουμε άλλο αρχέτυπο, που να μπορεί να περιλάβει όλους, και κατόπιν ένα τέταρτο...»<sup>81</sup>.

Borges<sup>82</sup>, Οι μεταμορφώσεις της χελώνας

Στην *Πολιτεία*, ο Σωκράτης παρατηρεί ότι αν παραιτηθούμε από την απόλυτη μοναδικότητα της Ιδέας και δεχτούμε ότι μπορούν να υπάρξουν δύο Ιδέες του ίδιου πράγματος, η «αναγωγή στο άπειρο» είναι αναπόφευκτη: «Ο θεός λοιπόν, είτε επειδή δεν ήθελε, είτε επειδή κάποιος αναγκασμός τον υποχρέωνε να μην φτιάξει μέσα στην ιδεατή φύση [περιοχή της πρωταρχικής ύπαρξης] περισσότερες από μια κλίνη, έφτιαξε οπωσδήποτε μία μόνο [υπόθεση της μοναδικότητας], την ίδια εκείνη κλίνη που είναι αυτό που είναι κλίνη [που έχει την πραγματική υπόστασή της]. Δύο τέτοιες κλίνες, ή περισσότερες, ούτε δημιουργήθηκαν από το θεό, ούτε είναι δυνατό να δημιουργηθούν... Γιατί... αν υποθέσουμε ότι θα φτιάξει μονάχα δύο, πάλι θα παρουσιαστεί επάνω από τις δύο μία ενιαία κλίνη [ιδεατή] και οι δύο προηγούμενες θα έχουν πάλι το είδος εκείνης [την αληθινή υπόσταση της κλίνης], και θα είναι εκείνη, η ενιαία, αυτό που είναι κλίνη, και όχι εκείνες οι δύο» (Πλάτων, *Πολιτεία* 597C)<sup>83</sup>.

Στον *Παρμενίδα* (132 a1-b2) διαβάζουμε: «...κάθε Είδος είναι ένα: όταν σου φανεί ένας αριθμός πραγμάτων πως είναι μεγάλα [Τα α, β, γ, έχουν ένα κοινό γνώρισμα F: είναι F], αφού ριζεις μια ματιά σε όλα αυτά, ίσως σου φαίνεται ότι ένα κάποιο, και το αυτό, Είδος υπάρχει σε όλα, και αυτό σε κάνει να νομίζεις ότι το Μέγεθος είναι ένα [Αν οποιοδήποτε σύνολο πραγμάτων έχουν κοινό ένα δεδομένο γνώρισμα, τότε υπάρχει ένα μοναδικό Είδος που αντιστοιχεί στο γνώρισμα αυτό, και καθένα από τα εν λόγω πράγματα έχει αυτό το γνώρισμα με το να μετέχει σ' αυτό το Είδος. Υπάρχει, λοιπόν, ένα μοναδικό Είδος που μπορούμε να ονομάσουμε "F-ότητα", το οποίο αντιστοιχεί στο γνώρισμα F και τα α, β, γ, είναι F με το να μετέχουν στην "F-ότητα"]... τούτο πάλι το Μέγεθος καθαυτό, και τα άλλα μεγάλα πράγματα, αν τα επισκοπήσεις με το βλέμμα της ψυχής σου όλα, επίσης, δεν θα σου αποκαλύψουν πάλι μια ιδέα μεγέθους που επιβάλλει να φαίνονται όλα αυτά αναγκαστικά μεγάλα;... θα αναφανεί λοιπόν ένα άλλο Είδος μεγέθους νέο, βγαλμένο απ' το Μέγεθος καθαυτό και από τα πράγματα που μετέχουν σ' αυτό [Αν τα α, β, γ, και η F-ότητα είναι F, τότε υπάρχει ένα μοναδικό Είδος (που μπορούμε να ονομάσουμε "F-ότητα\*") το οποίο

<sup>81</sup> Βλ., Borges, J. L. (1982). *Οι μεταμορφώσεις της χελώνας*. (Γ. Δ. Χουρμουζιάδης, μεταφρ.). Αθήνα: Ύψιλον. σελ. 46.

<sup>82</sup> Jorge Luis Borges (1899-1986). Αργεντινός συγγραφέας, δοκιμογράφος και ποιητής.

<sup>83</sup> «Ο μὲν δὴ θεός, εἴτε οὐκ ἐβούλετο, εἴτε τις ἀνάγκη ἐπὶν μὴ πλέον ἢ μίαν ἐν τῇ φύσει ἀπεργάσασθαι αὐτὸν κλίνην, οὕτως ἐποίησεν μίαν μόνον αὐτὴν ἐκείνην ὃ ἔστιν κλίνη· δύο δὲ τοιαῦτα ἢ πλείους οὔτε ἐφνεύθησαν ὑπὸ τοῦ θεοῦ οὔτε μὴ φῶσιν... Ὅτι, ... εἰ δύο μόνως ποιήσειεν, πάλιν ἂν μία ἀναφανεῖ ἢς ἐκεῖνα ἂν αὐτὸ ἀμφοτέραι τὸ εἶδος ἔχοιεν, καὶ εἴη ἂν ὃ ἔστιν κλίνη ἐκείνη ἀλλ' οὐχ αἱ δύο». Βλ., Plato, (ἐκδοση 1937). *The Republic*. (Vols. 1-2). (P. Shorey, μεταφρ.). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. τ. II. σσ. 426-428. Επίσης, Πλάτων. *Πολιτεία (ἢ περὶ δικαίου πολιτικός)*. (Κ. Δ. Γεωργούλης μετ.). γ' ἔκδοση. Αθήνα: I. Σίδερης. σσ. 304-305. Επίσης, Πλάτων. (ἐκδοση 172009). *Πολιτεία*. (N. M. Σκουτερόπουλος, μεταφρ.). ὁ. π. σσ. 714-715.

αντιστοιχεί στο F, αλλά δεν ταυτίζεται με την F-ότητα· και τα α, β, γ και η F-ότητα είναι F με το που μετέχουν στην F-ότητα\*]. Και, κοντά σε όλα αυτά, πάλι θα παρουσιασθεί άλλο Είδος για το οποίο όλα αυτά θα είναι μεγάλα. Και έτσι λοιπόν δεν θα σου είναι πια ένα το κάθε Είδος, αλλ' άπειρα κατά το πλήθος»<sup>84</sup>.

Όταν διάφορα πράγματα έχουν ένα κοινό κατηγορημα, υπάρχει μόνο μία καθορισμένη οντότητα (η Ιδέα), την οποία εκσημαίνει (αποκαλύπτει) το κατηγορημα αυτό. Λογικά, όμως, αν το κοινό κατηγορημα μπορεί να βεβαιωθεί και για την ίδια την ιδέα, θα' πρεπε να υπάρχει και μια δεύτερη Ιδέα, «παρούσα» στην πρώτη και στα πράγματα που «μετέχουν» σ' αυτή· στη συνέχεια, με την ίδια λογική, μια τρίτη κ.ο.κ., επ' άπειρον. Τότε δεν θα υπάρχει μόνο ένα Είδος για το μεγάλο μέγεθος, για παράδειγμα, αλλά άπειρη σειρά τέτοιων Ειδών. Η σωκρατική θεωρία φαίνεται να αυτοαναιρείται, στην περίπτωση αυτή, και πηγή του προβλήματος φαίνεται πως είναι η βεβαίωση της «παρουσίας» των Ιδεών στα πράγματα<sup>85</sup>.

Μελετώντας τα προηγούμενα από αυστηρά λογική σκοπιά, μια ερμηνευτική πρόταση της παραδοξότητας του επιχειρήματος είναι ότι βασίζεται στη σύγχυση της κατηγορήσης και της κατάφασης μιας ταυτότητας. Δύο ζευγάρια φίλων έχουν ως κοινό τον απόλυτο αριθμό 2, τα μέλη κάθε ζεύγους, αλλά ο 2 δεν αποτελεί ο ίδιος ζεύγος. Είναι αριθμός· δεν έχει αριθμό<sup>86</sup>.

Επιστρέφοντας στον *Παρμενίδη*, στο 132d1-133a6: «[Είπε ο Σωκράτης] Οι ιδέες είναι σαν υποδείγματα για τη φύση των πραγμάτων, και τα άλλα όντα τους μοιάζουν, αποτελώντας απομιμήσεις τους· αυτή η συμμετοχή (μέθεξις), που έχουν τα άλλα όντα, τα αισθητά αντικείμενα, στις ιδέες, συνίσταται μόνο στο ότι είναι ομοιώματα των ιδεών αυτών. – Αν κάποιο πράγμα μοιάζει με την ιδέα, είπε ο Παρμενίδης, είναι δυνατό η ιδέα να μην είναι όμοια με το απεικονιζόμενο πράγμα, από τη στιγμή που αυτό είναι ομοιόμιά της; Η μήπως υπάρχει περίπτωση το όμοιο να μην είναι όμοιο με το όμοιο; ... – Άρα, δεν είναι αναγκαίο να μετέχει το όμοιο στην ίδια ιδέα με εκείνο που είναι ομοιό του; ... – Δεν θα είναι, τότε, η ίδια ιδέα, εκείνο στο οποίο συμμετέχουν τα όμοια και γίνονται όμοια; ... – Άρα δεν είναι δυνατό κάποιο πράγμα να είναι όμοιο με την ιδέα, ούτε η ιδέα όμοια με κάποιο άλλο πράγμα. Γιατί, αλλιώς, δίπλα σε κάθε ιδέα θα εμφανίζεται πάντοτε μια άλλη ιδέα και αν αυτή μοιάζει με κάποιο άλλο πράγμα τότε θα εμφανιστεί και άλλη και ποτέ δεν θα πάψει αυτή η ατέλειωτη παραγωγή ιδεών, αν η ιδέα ομοιώνεται με το πράγμα που μετέχει σ' αυτή. ... – Άρα τα άλλα πράγματα δεν μετέχουν στις ιδέες με την ομοιότητα, αλλά πρέπει να αναζητήσουμε κάποιον άλλο τρόπο με τον οποίο θα γίνεται η μέθεξις»<sup>87</sup>.

<sup>84</sup> «...Ἐν ἑκάστων εἶδος οἶσθαι εἶναι· ὅταν πόλλ' ἄττα μεγάλα σοι δόξη εἶναι, μία τις ἴσως δοκεῖ ἰδέα ἢ αὐτὴ εἶναι ἐπὶ πάντα ἰδόντι, ὅθεν ἐν τὸ μέγα ἠγῆ εἶναι. Ἀληθῆ λέγεις, φάναι. Τί δ' αὐτὸ τὸ μέγα καὶ τᾶλλα τὰ μεγάλα, ἐὰν ὡσαύτως τῆ ψυχῆ ἐπὶ πάντα ἴδης, οὐχὶ ἔν τι αὐτὸ μέγα φανεῖται, ᾧ ταῦτα πάντα μεγάλα φαίνεσθαι; Ἔοικεν. Ἄλλο ἄρα εἶδος μεγέθους ἀναφανήσεται, παρ' αὐτό τε τὸ μέγεθος γεγονὸς καὶ τὰ μετέχοντα αὐτοῦ· καὶ ἐπὶ τούτοις αὐτῶν πᾶσιν ἕτερον, ᾧ ταῦτα πάντα μεγάλα ἔσται· καὶ οὐκέτι δὴ ἐν ἑκάστων σοι τῶν εἰδῶν ἔσται, ἀλλὰ ἄπειρα τὸ πλήθος». Βλ. σχετ., Πλάτων. *Παρμενίδης*, εισ. – μετ. – σχόλια Ηλίας Λάγιος. Αθήνα: Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος. σσ. 41-43 και Πλάτων. (έκδοση 1993). *Παρμενίδης (ἢ περὶ ιδεῶν)*, εισ. – μετ. – σχόλια Φιλολογική Ομάδα Κάκτου. Αθήνα: Κάκτος. σσ. 75-77.

<sup>85</sup> Το «παιχνίδι» έχει κριθεί, ουσιαστικά, ήδη πριν προκύψει η επ' άπειρον αναδρομή. Θα το δούμε όταν αναφερθούμε στην πραγμάτευση του επιχειρήματος από τον G. Vlastos, στην μεθεπόμενη ενότητα. Ο Gregory Vlastos ήταν ελληνοαμερικανός καθηγητής της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας σε πολλά πανεπιστήμια των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής, μεταξύ των οποίων του Princeton και του Berkeley. Γεννήθηκε το 1907 και πέθανε το 1991.

<sup>86</sup> Βλ. σχετ., Taylor, E. A. (2003). *Πλάτων: Ο άνθρωπος και το έργο του*. (Ι. Αρζόγλου, μετ.). Αθήνα: Μ.Ι.Ε.Τ. σελ. 408.

<sup>87</sup> «τὰ μὲν εἶδη ταῦτα ὡσπερ παραδείγματα ἐστάναι ἐν τῇ φύσει, τὰ δὲ ἄλλα τούτοις εἰκέναι καὶ εἶναι ὁμοιώματα, καὶ ἢ μέθεξις αὐτῆ τοῖς ἄλλοις γίνεσθαι τῶν εἰδῶν οὐκ ἄλλη τις ἢ εἰκασθῆναι αὐτοῖς. Εἰ οὖν

Τα παραπάνω αποτελούν κριτική των αντιπάλων της θεωρίας της «μέθεξης», μελών της σχολής των Μεγάρων, που ασκούσαν την τυπική λογική και ήταν συνεχιστές της ελεατικής παράδοσης. Κύριος στόχος των αντιρρήσεων δεν είναι η αμφισβήτηση της πραγματικής υπόστασης των ιδεών, η οποία μάλλον γίνεται παραδεκτή από τον Παρμενίδη. Εκείνο που επικρίνεται είναι η άποψη ότι τα αισθητά πράγματα «μετέχουν» στις Ιδέες και άρα έχουν κάποιου είδους δευτερεύουσα πραγματικότητα<sup>88</sup>. Έστω, ότι η Ιδέα αποτελεί αρχέτυπο, πρότυπο (παράδειγμα), και τα άλλα πράγματα, που παίρνουν το όνομά της, είναι ομοιώματά της. Τότε, η σχέση αισθητού πράγματος και Ιδέας είναι ότι το «πράγμα» αποτελεί «αντίγραφο» της ιδέας. Έτσι διασώζεται η μοναδικότητα του Είδους γιατί είναι δυνατό να γίνουν πολλά αντίγραφα από το ίδιο πρωτότυπο, οπότε κάθε Ιδέα μπορεί να έχει πολλές «απομιμήσεις». Όμως η θεωρία αυτοαναιρείται: Η «ομοιότητα» αποτελεί συμμετρική σχέση. Αν το Α μοιάζει με το Β το ίδιο ισχύει και για το Β. Άρα η Ιδέα πρέπει να είναι σαν τα πράγματα που «της μοιάζουν». Αφού όμως η θεωρία εξηγεί την ομοιότητα δύο πραγμάτων με την ύπαρξη ενός κοινού αρχετύπου και των δύο, πρέπει να εξηγηθεί η ομοιότητα της Ιδέας και του «πράγματος» προϋποθέτοντας ένα ακόμα ανώτερο αρχέτυπο και των δύο κ.ο.κ. επ' άπειρον.

Ο παραλογισμός που κρύβεται σ' αυτή την προσέγγιση, κατά τον Πρόκλο<sup>89</sup>, έχει να κάνει με το ότι η σχέση του αντιγράφου με το πρωτότυπο δεν είναι απλώς σχέση ομοιότητας. Είναι προσανατολισμένη σχέση ομοιότητας, λόγω του χαρακτήρα

---

τι, ἔφη, ἔοικεν τῷ εἶδει, οἷόν τε ἐκεῖνο τὸ εἶδος μὴ ὅμοιον εἶναι τῷ εἰκασθέντι, καθ' ὅσον αὐτῷ ἀφωμοιώθη; ἢ ἔστι τις μηχανὴ τὸ ὅμοιον μὴ ὁμοίῳ ὅμοιον εἶναι; ... Τὸ δὲ ὅμοιον τῷ ὁμοίῳ ἄρ' οὐ μεγάλη ἀνάγκη ἐνὸς τοῦ αὐτοῦ [εἶδους] μετέχειν; ... Οὐ δ' ἂν τὰ ὅμοια μετέχοντα ὅμοια ἦ, οὐκ ἐκεῖνο ἔσται αὐτὸ τὸ εἶδος; ... Οὐκ ἄρα οἷόν τέ τι τῷ εἶδει ὅμοιον εἶναι, οὐδὲ τὸ εἶδος ἄλλῳ· εἰ δὲ μή, παρὰ τὸ εἶδος αἰεὶ ἄλλο ἀναφανήσεται εἶδος, καὶ ἂν ἐκεῖνό τῳ ὅμοιον ἦ, ἕτερον αὐ, καὶ οὐδέποτε παύσεται αἰεὶ καινὸν εἶδος γινόμενον, ἐὰν τὸ εἶδος τῷ ἑαυτοῦ μετέχοντι ὅμοιον γίγηται. ... Οὐκ ἄρα ὁμοίῳ τῷ ἄλλῳ τῶν εἰδῶν μεταλαμβάνει, ἀλλὰ τι ἄλλο δεῖ ζητεῖν ᾧ μεταλαμβάνει». Βλ. σχετ., Πλάτων, Παρμενίδης, ὁ.π., σσ. 44-45, και Πλάτων. (έκδοση 1993). Παρμενίδης (ἢ περὶ ιδεῶν), ὁ.π., σσ. 78-79.

<sup>88</sup> Σκοπός του Πλάτωνα είναι απλώς να επαναλάβει τις αντιρρήσεις των Ελεατών στη σοκρατική διδασκαλία και κατόπιν να τις υπερκεράσει δείχνοντας ότι οι μέθοδοί τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικότερα ενάντια στις δικές τους θεωρίες. Γι' αυτό και το επιχείρημα του τρίτου ανθρώπου δεν του διέφυγε ως λογικό λάθος· απλώς δεν είχε κανένα λόγο να το επισημάνει. Η συλλογιστική αυτή ήταν γνωστή, όταν ζούσε ακόμα ο Σωκράτης· δεν την επινόησαν μετά το θάνατό του οι Ελεάτες επικριτές των θέσεών του. Βλ. σχετ., Taylor, E. A. (2003). Πλάτων: Ο άνθρωπος και το έργο του., ὁ.π., σελ. 408. Θεμελιώδης αρχή της Μεγαρικής Σχολής ήταν η γενική ενότητα των όντων. Πρέσβευαν ότι ένα είναι το αγαθό, αλλά χρησιμοποιούμε πολλά ονόματα (απλές λέξεις) για να το δηλώσουμε. Προσπαθούσαν να συνδυάσουν τη σοκρατική διδασκαλία, για την ηθική αρετή, με τη θεωρία της ενότητας του όντος του Παρμενίδη. Γι' αυτό και μεταβάλλουν τη σοκρατική ηθική εξέταση σε διαλεκτικό έλεγχο που, θέλοντας να αποδείξει ότι αυτό που υπάρχει πραγματικά είναι η οντολογική ενότητα, καταλήγει στο ότι η ποικιλία των επιμέρους αισθητών πραγμάτων είναι πλάνη και οίηση (στατικός ιδεολογικός μονισμός). Βλ. σχετ., Γεωργούλης, Κ. Δ. (1994). Ιστορία της Ελληνικής Φιλοσοφίας, ὁ.π., σσ. 149-151. Στα πλαίσια, λοιπόν, του διαλόγου του Παρμενίδη με το Σωκράτη, οι αλληπάλληλες προσπάθειες να δειχθεί ότι η σοκρατική «υπόθεση» των Ειδών οδηγεί σε παράλογα, μη υποστηρίξιμα συμπεράσματα, βρίσκει αντίλογο σε μια περίτεχνη απόπειρα απόδειξης του ότι η ελεατική υπόθεση του μονισμού έχει να αντιμετωπίσει την ακόμα μεγαλύτερη δυσκολία να βεβαιώσει ή να απορρίψει ταυτόχρονα μια άπειρη σειρά ζευγών από αντιφατικές προτάσεις: «Στον Παρμενίδη... ο Πλάτων εφευρίσκει μια πρόταση... για ν' αποδείξει ότι το ένα είναι στην πραγματικότητα πολλά. Εάν το ένα υπάρχει, συμμετέχει στο είναι. Συνεπώς, υπάρχουν μέσα του δύο μέρη: το είναι και το ένα· το καθένα όμως από αυτά τα μέρη είναι και ένα και είναι, ώστε να εγκλείει άλλα δύο, που κι αυτά εγκλείουν άλλα δύο: απεριόριστα. Ο Russell [βλ. σχετ., Russell, B. (1993). Introduction to Mathematical Philosophy. New York: Dover Publications, Inc. σελ. 138] αντικαθιστά τη γεωμετρική πρόοδο του Πλάτωνα με την αριθμητική. Εάν υπάρχει το ένα, το ένα συμμετέχει στο είναι. Καθώς όμως το είναι και το ένα είναι διαφορετικά, υπάρχει το δύο. Καθώς όμως το είναι και το δύο είναι διαφορετικά, υπάρχει το τρία κ.λπ.». Βλ., Borges, J. L. (1982). Οι μεταμορφώσεις της χελώνας., ὁ.π., σελ. 47.

<sup>89</sup> Έλληνας Νεοπλατωνικός φιλόσοφος, 412-485 μ.Χ.

παραγωγής που έχει, πράγμα που την κάνει μη συμμετρική. Το πρόσωπό μας δεν είναι αντανάκλαση της αντανάκλασής του στον καθρέφτη<sup>90</sup>.

---

<sup>90</sup> Βλ. σχετ., Taylor, E. A. (2003). *Πλάτων: Ο άνθρωπος και το έργο του.*, ό.π., σσ. 401-425.

### 2.3.2 Η εκδοχή του Αριστοτέλη και των σχολιαστών του

«Ο *Patricio de Azcarate*<sup>91</sup>, σε μια υποσημείωση που έβαλε στη μετάφρασή του της *Μεταφυσικής*, αποδίδει σ' έναν μαθητή του Αριστοτέλη [τον Εύδημο το Ρόδιο] την ακόλουθη πρόταση: «Αν αυτό που είναι βέβαιο για πολλά πράγματα μαζί αποτελεί ένα ον ιδιαίτερο, διαφορετικό από τα πράγματα για τα οποία γίνεται η βεβαίωση (και αυτό είναι ό,τι διατείνονται οι Πλατωνικοί), τότε πρέπει να υπάρχει ένας τρίτος άνθρωπος. Άνθρωπος είναι μια επονομασία που ταιριάζει και στα άτομα και στην ιδέα. Υπάρχει, άρα, ένας τρίτος άνθρωπος διαφορετικός από τους άλλους ανθρώπους και από την ιδέα. Υπάρχει ταυτόχρονα ένας τέταρτος, που θα βρεθεί στην ίδια σχέση με τον τρίτο και με την ιδέα και με τους άλλους ανθρώπους. Κι έπειτα ένας πέμπτος κι ένας έκτος, μέχρι το άπειρο». Ας παραδεχθούμε δύο άτομα, α και β, που αποτελούν το γένος γ. Θα έχουμε τότε:  $\alpha + \beta = \gamma$ . Αλλά επίσης, κατά τον Αριστοτέλη:  $\alpha + \beta + \gamma = \delta$ ,  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \epsilon$ ,  $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = \zeta$  ... Στην ανάγκη, δεν χρειάζονται καν δύο άτομα. Φτάνει το άτομο και το γένος, για να καθορίσουν τον τρίτο άνθρωπο που απορρίπτει ο Αριστοτέλης»<sup>92</sup>.

Borges, Οι μεταμορφώσεις της χελώνας

Η εκδοχή του επιχειρήματος στον Αριστοτέλη είναι η ακόλουθη: «Αν αυτό που ορθώς κατηγορείται σε μια πολλαπλότητα πραγμάτων είναι κάτι άλλο πέραν των πραγμάτων που κατηγορούνται, είναι διακριτό αυτών (και αυτό είναι που πιστεύουν ότι αποδεικνύουν αυτοί που θέτουν τις ιδέες· γιατί αυτός είναι ο λόγος, κατ' εκείνους, που υπάρχει κάτι σαν τον άνθρωπο καθ' αυτόν, αφού ο άνθρωπος κατηγορείται αληθώς στους επιμέρους ανθρώπους, που αποτελούν πολλαπλότητα, και είναι άλλο από τους επιμέρους ανθρώπους) – αλλά αν είναι έτσι, θα υπάρχει τρίτος άνθρωπος. Γιατί αν αυτός [ο άνθρωπος] που κατηγορείται είναι άλλος από τα πράγματα στα οποία κατηγορείται και συνίσταται αφ' εαυτού, και [αν] ο άνθρωπος κατηγορείται στα επιμέρους και στην ιδέα, τότε θα υπάρχει τρίτος άνθρωπος εκτός των επιμέρους και της ιδέας. Κατά τον ίδιο τρόπο, θα υπάρχει επίσης ένας τέταρτος [άνθρωπος] που θα κατηγορείται σ' αυτόν [τον τρίτο άνθρωπο], στην ιδέα, και στα επιμέρους, και ομοίως ένας πέμπτος, και ούτω καθεξής επ' άπειρο»<sup>93</sup>.

Για τον Εύδημο το Ρόδιο: «Το επιχείρημα στο οποίο παρεισφρεί ο Τρίτος Άνθρωπος είναι το ακόλουθο: Λένε ότι τα πράγματα που κατηγορούνται από κοινού πάνω σε ουσίες [F] είναι πλήρως τέτοια [F] και είναι ιδέες. Επιπλέον, πράγματα που είναι όμοια μεταξύ τους γίνονται όμοια λόγω του ότι μοιράζονται κάτι κοινό, που είναι πλήρως αυτό [πλήρως το F], που δεν είναι τίποτε άλλο παρά η Ιδέα. Αλλά αν είναι έτσι, αν αυτό που κατηγορείται από κοινού στα πράγματα δεν είναι ίδιο με καθένα απ' τα

<sup>91</sup> 1800-1886. Ισπανός φιλόσοφος και πολιτικός. Ιστορικός της σύγχρονης φιλοσοφίας και εισηγητής της στην ισπανική γλώσσα στην οποία και μετέφρασε τα έργα του Πλάτωνα, του Αριστοτέλη και του γερμανού φιλοσόφου και μαθηματικού Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716).

<sup>92</sup> Βλ., Borges, J. L. (1982). *Οι μεταμορφώσεις της χελώνας*, ό. π., σσ. 46-47.

<sup>93</sup> «δείκνυται και ούτως ο τρίτος άνθρωπος. εἰ τὸ κατηγορούμενόν τινων πλειόνων ἀληθῶς καὶ ἔστιν ἄλλο παρὰ τὰ ὧν κατηγορεῖται, κειχωρισμένον αὐτῶν (τοῦτο γὰρ ἠγοῦνται δεικνύναι οἱ τὰς ιδέας τιθέμενοι· διὰ τοῦτο γὰρ ἐστὶ τὸ αὐτοάνθρωπος κατ' αὐτούς, ὅτι ὁ ἄνθρωπος κατὰ τῶν καθ' ἕκαστα ἀνθρώπων πλειόνων ὄντων ἀληθῶς κατηγορεῖται καὶ ἄλλος τῶν καθ' ἕκαστα ἀνθρώπων ἐστίν)—ἀλλ' εἰ τοῦτο, ἔσται τις τρίτος ἄνθρωπος. εἰ γὰρ ἄλλος ὁ κατηγορούμενος ὧν κατηγορεῖται, καὶ κατ' ἴδιαν ὑφεστώς, κατηγορεῖται δὲ κατὰ τε τῶν καθ' ἕκαστα καὶ κατὰ τῆς ιδέας ὁ ἄνθρωπος, ἔσται τρίτος τις ἄνθρωπος παρὰ τε τοὺς καθ' ἕκαστα καὶ τὴν ιδέαν. οὕτως δὲ καὶ τέταρτος ὁ κατὰ τε τούτου καὶ τῆς ιδέας καὶ τῶν καθ' ἕκαστα κατηγορούμενος, ὁμοίως δὲ καὶ πέμπτος, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον». (Αλέξανδρου Αφροδισιεύως, *Υπόμνημα εἰς τὸ Μείζον Α των Μετά τα Φυσικά Αριστοτέλους* 84.21-85.3). Βλ., Alexandri Aphrodisiensis. (έκδοση 1891). *In Aristotelis Metaphysica Commentaria*. Berolini: Georgii Reimeri. σσ. 84-85.



πράγματα στα οποία κατηγορείται, είναι κάτι άλλο (γι' αυτό το λόγο και ο άνθρωπος - καθ' αυτόν είναι γένος, γιατί κατηγορείται στα επιμέρους αλλά δεν είναι ένα από αυτά), τότε θα υπάρχει ένας τρίτος άνθρωπος πέραν των επιμέρους (όπως ο Σωκράτης και ο Πλάτωνας) και της ιδέας που επίσης είναι μία στον αριθμό»<sup>94</sup>.

Κατά τον Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα, ο Πολύξενος ο Μεγαρέας<sup>95</sup> για να προσβάλλει τη διδασκαλία της «μέθεξης» υποστήριζε ότι, βάσει της πλατωνικής θεωρίας, δεν θα έπρεπε να υπάρχουν από τη μία μεριά μόνο ορατοί άνθρωποι και από την άλλη η Ιδέα του Ανθρώπου, αλλά επίσης θα έπρεπε να υπάρχει ένας «τρίτος» άνθρωπος, κάτι ενδιάμεσο σ' αυτά τα δύο, ακριβώς όπως, πάλι βάσει της πλατωνικής θεωρίας, υπάρχουν ορισμένα «μαθηματικά αντικείμενα», λ.χ. ένα αντικείμενο μεταξύ της Ιδέας της κυκλικότητας και του ορατού διαγράμματος ενός κύκλου. Ο Αριστοτέλης, όταν μνημονεύει τον «τρίτο άνθρωπο» ως πρόβλημα που δημιουργεί η Θεωρία των Ιδεών, αναφέρεται στο τελευταίο αυτό επιχείρημα και όχι, όπως συνήθως υποτίθεται, στην «αναγωγή στο άπειρο»<sup>96</sup>.

Παρακάτω, προσθέτει ο Αλέξανδρος: «Αυτό το επιχείρημα [του Αριστοτέλη που αναφέραμε] είναι ίδιο με το πρώτο [του Εύδημου εννοεί]. Αυτό μπορεί να το συμπεράνει κανείς γιατί [και τα δύο επιχειρήματα] θεωρούν πράγματα που μοιάζουν επειδή ακριβώς μοιράζονται [συμμετέχουν σε] κάτι κοινό [την ιδέα]. Γιατί οι άνθρωποι και οι ιδέες [των ανθρώπων] μοιάζουν. Τώρα αναιρούνται και τα δύο [επιχειρήματα], που φάνηκαν ακριβέστερα, το ένα στη βάση ότι εδραίωνε ιδέες ακόμη και των ομοίων, και το άλλο στη βάση του ότι εισάγει έναν τρίτο άνθρωπο και πολλαπλασιάζει τους ανθρώπους επ' άπειρο. Ένας παρόμοιος πολλαπλασιασμός θα λάβει χώρα σε κάθε άλλο πράγμα για το οποίο λέγεται ότι υπάρχουν ιδέες. Αν και διάφοροι χρησιμοποίησαν την πρώτη [δεύτερη για μας] έκθεση του τρίτου ανθρώπου – μεταξύ των οποίων και ο Εύδημος, που σαφώς το χρησιμοποίησε στο πρώτο βιβλίο του *Περί λέξεως* – το τελευταίο [το πρώτο στη δική μας σειρά] χρησιμοποιήθηκε από τον ίδιο [τον Αριστοτέλη] στο πρώτο βιβλίο του *Περί Ιδεών* και λίγο αργότερα στο ίδιο έργο [στο *Μετά τα Φυσικά*]]»<sup>97</sup>.

Ο Αριστοτέλης διέγινε την πηγή του προβλήματος «του τρίτου ανθρώπου» στη διάκριση της μορφής από τα καθέκαστον και την πλατωνική σύγχυση του καθολικού με το επιμέρους, του «τέτοιας λογής πράγμα» (τοιόνδε) με το «τούτο εδώ» (τόδε τι): «...κανένα από τα κατηγορούμενα που αποδίδεται ως κοινή κατηγορία σε πολλά δεν μπορεί να σημαίνει ένα **τούτο εδώ** αλλά σημαίνει **τέτοιας λογής**

<sup>94</sup> «Ὁ δὲ λόγος ὁ τὸν τρίτον ἄνθρωπον εἰσάγων τοιοῦτος. λέγουσι τὰ κοινῶς κατηγορούμενα τῶν οὐσιῶν κυρίως τε εἶναι τοιαῦτα, καὶ ταῦτα εἶναι ιδέαι. ἔτι τὰ ὅμοια ἀλλήλοισ τοῦ αὐτοῦ τινος μετουσίᾳ ὅμοια ἀλλήλοισ εἶναι, ὃ κυρίως ἐστὶ τοῦτο· καὶ τοῦτο εἶναι τὴν ιδέαν. ἀλλ' εἰ τοῦτο, καὶ τὸ κατηγορούμενόν τινων κοινῶς, ἂν μὴ ταῦτόν ἢ ἐκείνων τινὶ ὧν κατηγορεῖται, ἄλλο τί ἐστι παρ' ἐκεῖνα (διὰ τοῦτο γὰρ γένος ὁ αὐτοάνθρωπος, ὅτι κατηγορούμενος τῶν καθ' ἕκαστα οὐδενὶ αὐτῶν ἦν ὁ αὐτός), τρίτος ἄνθρωπος ἔσται τις παρὰ τε τὸν καθ' ἕκαστα, οἷον Σωκράτη καὶ Πλάτωνα, καὶ παρὰ τὴν ιδέαν, ἥτις καὶ αὐτὴ μία κατ' ἀριθμὸν ἐστίν» (Αλέξανδρου Αφροδισιέως, *Υπόμνημα εἰς τὸ Μείζον Α τῶν Μετά τα Φυσικά Αριστοτέλους* 83.34-84.7). Βλ., *Alexandri Aphrodisiensis*. (ἐκδοσὴ 1891). *In Aristotelis Metaphysica Commentaria.*, ὁ. π., σσ. 83-84.

<sup>95</sup> Φιλόσοφος, 350-290 π.Χ.

<sup>96</sup> Βλ. σχετ., Taylor, E. A. (2003). *Πλάτων: Ο άνθρωπος και το έργο του*. ὁ. π., σελ. 408.

<sup>97</sup> «ἔστι δὲ ὁ λόγος οὗτος τῶ πρώτῳ ὁ αὐτός, ἐπεὶ ἔθεντο τὰ ὅμοια τοῦ αὐτοῦ τινος μετουσίᾳ ὅμοια εἶναι· ὅμοιοι γὰρ οἱ ἄνθρωποι καὶ αἱ ιδέαι. ἀμφοτέρους δὴ τοὺς δοκοῦντας ἀκριβεστέρους εἶναι λόγους διήλεγξε, τὸν μὲν ὡς καὶ τῶν πρὸς τι κατασκευάζοντα ιδέαι, τὸν δὲ ὡς τρίτον ἄνθρωπον εἰσάγοντα, εἶτα ἐπ' ἄπειρον αὐξάνοντα τοὺς ἀνθρώπους. ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἄλλων ἕκαστον αὐξήθησεται ὧν λέγουσιν ιδέαι εἶναι. τῇ μὲν οὖν πρώτῃ τοῦ τρίτου ἀνθρώπου ἐξηγήσει ἄλλοι τε κέχρηται καὶ Εὐδήμος σαφῶς ἐν τοῖς *Περί λέξεως*, τῇ δὲ τελευταίᾳ αὐτὸς ἐν τε τῷ τετάρτῳ *Περί ιδεῶν* καὶ ἐν τούτῳ μετ' ὀλίγον». (Αλέξανδρου Αφροδισιέως, *Υπόμνημα εἰς τὸ Μείζον Α τῶν Μετά τα Φυσικά Αριστοτέλους* 85.4-85.13). Βλ., *Alexandri Aphrodisiensis*. (ἐκδοσὴ 1891). *In Aristotelis Metaphysica Commentaria.*, ὁ. π., σελ. 85.

*πράγμα, αλλιώς βγαίνουν όχι μόνο πολλές ανακολουθίες αλλά και ο τρίτος άνθρωπος» (Μετά τα Φυσικά, 1039a)<sup>98</sup>. Πρόκειται για επιχείρημα κατά της μετοχής των ειδών<sup>99</sup>. Αν η Ιδέα του ορισμένου ατομικού ανθρώπου και ο ιδεώδης Άνθρωπος ταυτίζονται, εκτός του τρόπου ύπαρξης του ορισμένου ατομικού ανθρώπου (στο χώρο των Ιδεών), πρέπει ο ιδεώδης και ο μερικός άνθρωπος να συναντώνται στην ουσία ενός τρίτου Άνθρώπου. Μπορεί *τρίτος άνθρωπος* να είναι ο καθολικός όρος Άνθρωπος ανάμεσα στην ιδέα Άνθρωπος και στον μερικό άνθρωπο και να παρεμβάλλεται νέος *τρίτος άνθρωπος*, ανάμεσα στον καθόλου και τον ιδεώδη, επ' άπειρο<sup>100</sup>.*

---

<sup>98</sup> «...οὐδὲν τῶν καθόλου ὑπαρχόντων οὐσία ἐστί, καὶ ὅτι οὐδὲν σημαίνει τῶν κοινῇ κατηγορουμένων τόδε τι, ἀλλὰ τοιόνδε. εἰ δὲ μή, ἄλλα τε πολλὰ συμβαίνει καὶ ὁ τρίτος ἄνθρωπος». Βλ. Aristotle. (έκδοση 1997). *Metaphysics*. ό.π., Vol. II. σελ. 28. Επίσης, Αριστοτέλης. (έκδοση <sup>4</sup>1992). *Πρώτη Φιλοσοφία (Τα Μετά τα Φυσικά)*, ό. π., σελ. 167.

<sup>99</sup> Ο Στίλπων (αρχηγός της Μεγαρικής Σχολής: 380-300 περίπου, π.Χ.) έλεγε πως αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ιδεώδης Άνθρωπος, δεν είναι δυνατό να υφίσταται σε κάποια συγκεκριμένη κατάσταση, όντας ομιλών για παράδειγμα, εφόσον υπάρχει ιδεωδώς. Αν δέχεται κανείς την ύπαρξη του ιδεώδους Άνθρώπου δεν μπορεί να ισχυρισθεί ότι υπάρχει ο συγκεκριμένος κατ' αίσθηση άνθρωπος. Ο ομιλών δεν είναι Άνθρωπος γιατί δεν υπάρχει κανένας λόγος να είναι σε μεγαλύτερο βαθμό ιδεώδης Άνθρωπος αυτός που μιλά από αυτόν που ακούει. Ή, ένα λάχανο που μας δεικνύεται δεν είναι Λάχανο, γιατί το ιδεώδες Λάχανο είναι αυτό που προϋπάρχει αιωνίως. Βλ. σχετ., Γεωργούλης, Κ. Δ. (<sup>2</sup>1994). *Ιστορία της Ελληνικής Φιλοσοφίας*, ό. π., σσ. 152-153.

<sup>100</sup> Βλ. σχετ., Αριστοτέλης. (έκδοση <sup>4</sup>1992). *Πρώτη Φιλοσοφία (Τα Μετά τα Φυσικά)*, ό. π., σελ. 389

### 2.3.3 Σύγχρονοι σχολιαστές του επιχειρήματος

Ο P. T. Geach<sup>101</sup> ανέπτυξε μια αυτο-κατηγορική ερμηνεία των Ειδών ως υποδείγματα, ιδέα που οφείλει στον Wittgenstein: «*Προτείνω να σκεφτούμε... όχι απλώς την πλατωνική χρήση των αφηρημένων ουσιαστικών, αλλά και τους άλλους τρόπους, επίσης, που επέλεξε να ονοματίσει τα Είδη. Είδη που αντιστοιχούν σε ονόματα φυσικών ή τεχνητών ειδών δεν κατονομάζονται με αφηρημένα ονόματα, αλλά μόνο με συγκεκριμένα ουσιαστικά με οριστικό άρθρο. Ο Πλάτων μιλά για τον Άνθρωπο και το Κρεβάτι όχι για Ανθρωπότητα και "Κρεβατότητα". Φυσικά ο Πλάτων όφειλε να έχει δημιουργήσει τέτοια αφηρημένα ουσιαστικά, αλλά ήταν αρκετά ικανός να ανακαλύπτει λέξεις όταν πίστευε ότι χρειαζόταν. Ασφαλώς, ο τρόπος που επέλεξε να μιλά γι' αυτά τα Είδη υποδεικνύει ότι γι' αυτόν ένα Είδος δεν ήταν κάτι σαν αυτό που ο κόσμος αποκαλούσε «ιδιότητα» ή «χαρακτηριστικό». Το κρεβάτι στο υπνοδωμάτιο δεν είναι, ως προς «Το Κρεβάτι», όπως ένα πράγμα με μια ιδιότητα ή χαρακτηριστικό, αλλά μάλλον όπως ένα αντικείμενο βάρους ενός κιλού ή μήκους ενός μέτρου ως προς το πρότυπο κιλό ή μέτρο»<sup>102</sup>. Ένα ξύλο έχει μήκος ενός μέτρου γιατί μοιάζει, ως προς το μήκος, με το πρότυπο μήκος.*

Ο Geach, λοιπόν, αποφεύγει την αναδρομή του τρίτου ανθρώπου με το να κρατά το Είδος «χωριστό» από τα πολλά. Έτσι, δεν θα μπορούσαν να ομαδοποιηθούν και να δημιουργήσουν ένα νέο «ένα που βρίσκεται σε πολλά».



Η μεταγενέστερη ανάλυση του G. Vlastos χρησιμοποιεί, και επεκτείνει, τα αποτελέσματα της μελέτης του Geach. Είδαμε ότι η βασική αρχή που εδραιώνει μια Μορφή είναι η εξής: όταν βλέπει κανείς έναν αριθμό όμοιων επιμέρους, σκέφτεται πως πρέπει να υπάρχει κάτι κοινό σε όλα αυτά, έστω F, και αυτό ακριβώς είναι η Μορφή· η F-ότητα. Αν, ωστόσο, σκεφθούμε τη Μορφή ενός ανθρώπου, μαζί με άλλους επιμέρους ανθρώπους, πρέπει επίσης να υπάρχει κάτι κοινό μεταξύ τους, και αυτό θα ήταν ένας τρίτος άνθρωπος πέραν των επιμέρους ανθρώπων και της Μορφής του ανθρώπου· η F-ότητα\*. Αλλά η διαδικασία πρόσθεσης κάτι κοινού που ξεκίνησε με τους καθέκαστον ανθρώπους, τη Μορφή του ανθρώπου και τον τρίτο άνθρωπο, θα συνεχιζόταν επ' άπειρο οδηγώντας μας σε μίαν επ' άπειρον αναδρομή<sup>103</sup>. Όπως και να χαρακτηρίσει κανείς την σχέση πραγμάτωσης μεταξύ καθολικών και επιμέρους, αν τη λογίζει ως ένα ακόμα καθολικό, καταλήγει σε τέτοιου είδους αναδρομή<sup>104</sup>.

Κατ' αρχάς, δεν είναι βέβαιο ότι η F-ότητα είναι η ίδια F· παρά μόνο προϋποθέτοντας κανείς την αυτο-κατηγορήση: «**Το Είδος που αντιστοιχεί σε ένα δεδομένο γνώρισμα έχει, και το ίδιο, αυτό το γνώρισμα**»<sup>105</sup>. Με αυτή την προϋπόθεση, τα α, β, γ, και η F-ότητα είναι F.

<sup>101</sup> Βρεττανός φιλόσοφος που γεννήθηκε το 1916.

<sup>102</sup> Βλ. σχετ., Geach, P. (1956 Ιανουάριος). The Third Man Again. *The Philosophical Review*. 65, (1), 72-82. σσ. 73-74.

<sup>103</sup> Βλ. σχετ., Bunnin, N. & Yu, J. (2004). *The Blackwell Dictionary of Western Philosophy*. Malden: Blackwell Publishing. σσ. 687-688.

<sup>104</sup> Βλ. σχετ., Craig, E. (επιμ.) (2005). *The Shorter Routledge Encyclopedia of Philosophy*. ό. π., σ. 1032.

<sup>105</sup> Οι συνέπειες που έχει, το πόσο και πότε ισχύει, κάτι τέτοιο για τα μαθηματικά γίνεται στα επόμενα μέρη της εργασίας μας. Με την ευκαιρία, να ξεκαθαρίσουμε ότι αυτό που εννοείται με τον όρο «αυτο-κατηγορήση», κατά τον Sellars (1912-1989, Αμερικανός φιλόσοφος), είναι ότι το επίθετο που αντιστοιχεί στο όνομα κάποιου Είδους κατηγορείται, αληθώς, και στο Είδος αυτό. Ακριβέστερη θα

Ακόμα και σε αυτή την περίπτωση, τίποτε δεν αποκλείει, και τα τέσσερα αυτά στοιχεία, να είναι F απλώς με την μέθεξή τους στην ίδια την F-ότητα. Αντ' αυτού, προκειμένου να τους αποδοθεί το γνώρισμα F, κρίνεται αναγκαίο να καταφύγει κανείς σε ένα άλλο Είδος που αντιστοιχεί στο F, γιατί έχει προβεί σε μια περαιτέρω σιωπηρή παραδοχή «μη-ταυτότητας»: «**Αν κάτι έχει ένα δεδομένο γνώρισμα, επειδή μετέχει σε ένα Είδος, δεν ταυτίζεται με το Είδος αυτό**» (η μεγαλειότητα δεν είναι ταυτόσημη με τη Μεγαλειότητα).

Εδώ κρίθηκε η ανασκευή της θέσης για την ενότητα του Είδους. Αρχικά βεβαιωνόταν η ενότητα αυτή, αλλά στην πορεία αναλήφθηκαν σιωπηρές δεσμεύσεις που συνεπάγονται το αντίθετό της: την εισαγωγή ενός **άλλου Είδους**. Το να υποδηλώσει, κατόπιν, κάποιος (όπως κάνει ο Παρμενίδης) ότι, με επανάληψη της συλλογιστικής, μπορούν να συναχθούν απείρως περισσότερες F-ότητες δεν εξυπηρετεί τίποτε άλλο, παρά να εντυπωσιάσει<sup>106</sup>.



Είδαμε, στην προηγούμενη ανάλυση, ότι με το να υιοθετήσει κανείς την άποψη: «**Αν κάτι έχει ένα δεδομένο γνώρισμα, επειδή μετέχει σε ένα Είδος, δεν ταυτίζεται με το Είδος αυτό**», οδηγείται σε αντίφαση εφόσον έχει δεχθεί ότι «**Αν οποιοδήποτε σύνολο πραγμάτων έχουν κοινό ένα δεδομένο γνώρισμα, τότε υπάρχει ένα μοναδικό Είδος που αντιστοιχεί στο γνώρισμα αυτό, και καθένα από τα εν λόγω πράγματα έχει αυτό το γνώρισμα, με το να μετέχει σ' αυτό το Είδος**» και «**Το Είδος που αντιστοιχεί σε ένα δεδομένο γνώρισμα έχει, και το ίδιο, αυτό το γνώρισμα**». Ονομάζοντας την πρώτη πρόταση αρχή της «μη ταυτότητας», τη δεύτερη αρχή της «μοναδικότητας» και την τρίτη αρχή της «αυτο-κατηγορήσης», οι τρεις αυτές προτάσεις μαζί αποτελούν **αντιφατική τριάδα**.

Πιο απλά, αν από την αρχή της «μοναδικότητας» παράξουμε την πρόταση: «**οτιδήποτε έχει ένα δεδομένο γνώρισμα πρέπει να μετέχει ενός μοναδικού Είδους, που αντιστοιχεί στο γνώρισμα αυτό**», με δεδομένη την αρχή της «αυτο-κατηγορήσης», θα οδηγούμασταν στο ότι: «**το Είδος μετέχει του εαυτού του και μόνο**». Η πρόταση αυτή, όμως, αντιφάσκει με την αρχή της «μη ταυτότητας» αφού η σύζευξή τους μας οδηγεί στην πρόταση: «**το Είδος μετέχει του εαυτού του αλλά δεν ταυτίζεται με τον εαυτό του**». Αλλιώς, «**το Είδος δεν ταυτίζεται με τον εαυτό του**».

Ένας απλός χειρισμός για να απαλλαγεί κανείς από την αντίφαση είναι να αντικαταστήσει την αρχή της «μοναδικότητας» με μια **τροποποιημένη αρχή «πολλαπλότητας»** όπου το μόνο που αλλάζει είναι η φράση «ένα μοναδικό Είδος» με τη φράση «τουλάχιστον ένα Είδος»: «**Αν οποιοδήποτε σύνολο πραγμάτων έχουν κοινό ένα δεδομένο γνώρισμα, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα Είδος που αντιστοιχεί στο γνώρισμα αυτό, και καθένα από τα εν λόγω πράγματα έχει αυτό το γνώρισμα, με το να μετέχει σ' αυτό το Είδος**».

---

ήταν η λέξη «ομο-κατηγορήση» («homo-characterization») ή «αυτο-παραδειγματισμός» («self-exemplification»), αλλά ο όρος «αυτο-κατηγορήση» έχει επικρατήσει. Βλ. σχετ., Vlastos, G. (2000). *Πλατωνικές Μελέτες*, ό. π., σελ. 497.

<sup>106</sup> Πρόκειται απλώς για ένα ρητορικό εφέ: εντυπωσιάζει περισσότερο η πρόταση «*αν μόνο ένα, τότε απείρως πολλά*», από την πρόταση «*αν μόνο ένα, τότε δύο*». Οι συνέπειες και των δύο προτάσεων για τον πλατωνισμό, βέβαια (η ανασκευή της ενότητας του Είδους), είναι ίδιες. Βλ. σχετ., ό. π., σσ. 487-508.

Το 1955<sup>107</sup>, ο W. Sellars έδειξε ότι το να χρησιμοποιηθεί μια τέτοια προκειμένη, παράλληλα με την αρχή της «αυτο-κατηγορήσης» και την αρχή της «μη ταυτότητας», μας οδηγεί στην αναγωγή στο άπειρο με μια, εσωτερικά συνεπή, συλλογιστική: Δεδομένων των F-πραγμάτων: {α, β, γ}, η αρχή της «πολλαπλότητας» μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον F-ότητας. Με την αρχή της «αυτο-κατηγορήσης», συνάγουμε την ύπαρξη ενός δευτέρου συνόλου F-πραγμάτων, του {α, β, γ, F-ότητα}. Από την αρχή της «μη ταυτότητας», και την αρχή της «πολλαπλότητας», ποριζόμαστε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον F-ότητας\*, κ.ο.κ. Όμως, κανείς δεν έχει προβάλει την άποψη ότι το «ένα», στο αντίστοιχο χωρίο του Παρμενίδη 132 a1-b2<sup>108</sup>, σημαίνει «τουλάχιστον ένα».

Επειδή ακριβώς δεν έχει προβάλει κανείς την προηγούμενη άποψη για το «ένα», δεν μπορεί να υιοθετηθεί η άποψη του C. Strang ότι το «ένα», στο ίδιο χωρίο, χρησιμοποιείται αμφίσημα: άλλοτε με τη σημασία του «τουλάχιστον ένα», και άλλοτε με τη σημασία του «ακριβώς ένα». Σε μια τέτοια περίπτωση, συνεχίζει ο Strang, ο Παρμενίδης θα είχε προκειμένες και την αρχή της «μοναδικότητας» και την αρχή της «πολλαπλότητας», οπότε θα χρησιμοποιούσε την αρχή της «πολλαπλότητας» για να συναγάγει, με συνεπή συλλογιστική, την επ' άπειρο αναγωγή, και εν συνεχεία θα χρησιμοποιούσε τη αρχή της «μοναδικότητας», για να δείξει ότι αντιφάσκει με το συμπέρασμα της απειρίας των F-οτήτων<sup>109</sup>.

---

<sup>107</sup> Βλ. σχετ., Sellars, W. (1955, Ιουλ.). Vlastos and "The Third Man". *The Philosophical Review*. 64, (3), 405-437. Σε συνδυασμό με το Vlastos, G. (2000). *Πλατωνικές Μελέτες*, ό. π., σελ. 500.

<sup>108</sup> «...κάθε Είδος είναι ένα: όταν σου φανεί ένας αριθμός πραγμάτων πως είναι μεγάλα, αφού ρίζεις μια ματιά σε όλα αυτά, ίσως σου φαίνεται ότι ένα κάποιο, και το αυτό, Είδος υπάρχει σε όλα, και αυτό σε κάνει να νομίζεις ότι το Μέγεθος είναι ένα... τούτο πάλι το Μέγεθος καθαυτό, και τα άλλα μεγάλα πράγματα, αν τα επισκοπήσεις με το βλέμμα της ψυχής σου όλα, επίσης, δεν θα σου αποκαλύψουν πάλι μιαν ιδέα μεγέθους που επιβάλλει να φαίνονται όλα αυτά αναγκαστικά μεγάλα; ... θα αναφανεί λοιπόν ένα άλλο Είδος μεγέθους νέο, βγαλμένο απ' το Μέγεθος καθαυτό και από τα πράγματα που μετέχουν σ' αυτό. Και, κοντά σε όλα αυτά, πάλι θα παρουσιασθεί άλλο Είδος για το οποίο όλα αυτά θα είναι μεγάλα. Και έτσι λοιπόν δεν θα σου είναι πια ένα το κάθε Είδος, αλλ' άπειρα κατά το πλήθος».

<sup>109</sup> Βλ. σχετ., Vlastos, G. (2000). *Πλατωνικές Μελέτες*, ό. π., σσ. 503-508.

### 2.3.4 Η γνωσιοθεωρητική προβληματικότητα του επιχειρήματος

Όμως γιατί, ακόμα και στην περίπτωση της αποφυγής της αντίφασης, θα ήταν προβληματική μια επ' άπειρον αναδρομή των Μορφών; Ο Πλάτωνας δέχεται την αρχή της «μοναδικότητας», σύμφωνα με την οποία υπάρχει μία και μόνο Ιδέα της F. Από το επιχειρήμα του  *τρίτου ανθρώπου*, όμως, δεν υπάρχει μία και μόνο Ιδέα, αλλά άπειρες Μορφές της F. Αν μια Μορφή είναι αυτο-κατηγορική, η σχέση μετοχής μπορεί να ερμηνευθεί ως «ομοιότητα». Μια πραγμάτωση έχει την ιδιότητα F, επειδή είναι παράδειγμα F-ότητας· επειδή μοιάζει με την F-ότητα. Στον  *Παρμενίδη*, εμφανίζεται μια κοινή ιδιότητα (ομοιότητας) που μοιράζεται η Μεγαλοσύνη και τα μεγάλα αντικείμενα, εγείρεται «ένα που βρίσκεται σε πολλά», ένα είδος Μεγαλοσύνης που η Μεγαλοσύνη και τα μεγάλα πράγματα μοιράζονται, η κοινή ιδιότητα ομοιότητας που έχουν τα μεγάλα αντικείμενα (τέτοια λόγω της ομοιότητάς τους με τη Μεγαλοσύνη) με τη Μεγαλοσύνη...

Το επιχειρήμα επαναλαμβάνεται προκαλώντας άπειρη ροή Ειδών. Έτσι, ένας λόγος για την προβληματικότητα της επ' άπειρον αναδρομής είναι ότι έρχεται σε αντίφαση με την αρχή της «μοναδικότητας». Η αναδρομή, όμως, είναι προβληματική και για έναν άλλο λόγο. Ο Πλάτωνας πιστεύει ότι η γνώση είναι δυνατή, και ότι, στις περιπτώσεις που τον απασχολούν, η γνώση απαιτεί εξηγήσεις<sup>110</sup>. Πιστεύει ότι μπορούμε να γνωρίζουμε ότι κάτι είναι F, μόνο αν γνωρίζουμε τη Μορφή της F. Κάτι τέτοιο, όμως, εμπλέκει την ερμηνεία της φύσης της F. Πρέπει να γνωρίζουμε τον ορισμό της F, για να γνωρίζουμε κάτι για την F. Γιατί ο ορισμός εξηγεί τι σημαίνει να είσαι F. Κάθε γνώση για την F, συμπεριλαμβανόμενης της γνώσης του ποια πράγματα είναι F, απαιτεί τέτοιες εξηγήσεις: μπορούμε να πιστεύουμε ότι μια συγκεκριμένη πράξη είναι δίκαιη (και να έχουμε δίκιο στην πίστη μας αυτή) χωρίς να γνωρίζουμε τι είναι Δικαιοσύνη, αλλά δεν μπορούμε να **γνωρίζουμε** ότι κάτι είναι δίκαιο χωρίς να γνωρίζουμε τι είναι Δικαιοσύνη.

Δεδομένης της αρχής της «αυτο-κατηγορήσης» για κάποιες Μορφές, έστω Μορφές της F, είναι και οι ίδιες F. Οπότε, η εξήγηση της φύσεως μιας Μορφής της F, μιας F-ότητας, εμπλέκει το γιατί είναι F. Αν υποθέσουμε ότι είναι F λόγω μιας «ευρύτερης» Μορφής της F, διαφορετικής από την F-ότητα, κ.ο.κ. επ' άπειρον, δεν θα μπορούσαμε ποτέ να γνωρίζουμε αν κάτι είναι F. Προκειμένου να γνωρίζουμε κάτι τέτοιο, πρέπει η F να αυτό-εξηγείται (ως F). Πρέπει να είναι F αφ' εαυτής. Όντας βάσιμο το επιχειρήμα του  *τρίτου ανθρώπου*, τίποτε δεν είναι F αφ' εαυτού. Δεν

<sup>110</sup> Η αντίληψη του Σωκράτη ότι η γνώση απαιτεί κάποιο είδος απολογισμού φαίνεται καθαρότερα στον  *Μένωνα*: «καὶ γὰρ αἱ δόξαι αἱ ἀληθεῖς, ὅσον μὲν ἂν χρόνον παραμένωσιν, καλὸν τὸ χρῆμα καὶ πάντ' ἀγαθὰ ἐργάζονται· πολλὸν δὲ χρόνον οὐκ ἐθέλουσι παραμένειν, ἀλλὰ δραπετεύουσιν ἐκ τῆς ψυχῆς τοῦ ἀνθρώπου, ὥστε οὐ πολλοῦ ἄξιαί εἰσιν, ἕως ἄν τις αὐτὰς δῆσῃ αἰτίας λογισμῶν». (Πλάτων,  *Μένων* 97e-98a). (Γιατί οι ορθές γνώμες είναι καλές, όσο χρόνο τις διατηρεί κανείς, και φέρνουν επιτυχία σε κάθε τι. Όμως δεν θέλουν να μείνουν για καιρό στην ανθρώπινη ψυχή και δραπετεύουν. Η αξία τους λοιπόν είναι μικρή, εκτός και αν κανείς τις δέσει με τον συλλογισμό). Βλ., Πλάτων.  *Λάχης – Μένων – Παρμενίδης*, ό. π., σσ. 164-165. Επίσης, Πλάτων. (έκδοση 2008).  *Μένων*. (Ι. Πετράκης, μεταφρ.). Αθήνα: Πόλις. σσ. 186-187. Λέει, λοιπόν, πως η γνώση, μαζί με την αληθή γνώμη, είναι φορέις της αλήθειας· η δε γνώση για να παραμείνει αληθής γνώμη πρέπει κάποιες φορές να είναι συζευγμένη με έναν εξηγητικό απολογισμό. Σε πολλές περιπτώσεις, η αρμόζουσα δικαιολόγηση συνίσταται στην εξήγηση των φύσεων των οντοτήτων που κάποιος ισχυρίζεται ότι γνωρίζει, αλλά όχι πάντα. Π.χ. μπορεί κανείς να γνωρίζει ποιος είναι ο Μένωνας, ή ο δρόμος για κάπου, χωρίς να χρειάζεται να εξηγήσει την ουσία του. Βλ. σχετ., Kraut, R. (επιμ.) (1999).  *The Cambridge Companion to Plato*. Cambridge: Cambridge University Press. σσ. 210, 218. Γενικά, θα λέγαμε πως για τον Πλάτωνα όλη η γνώση απαιτεί δικαιολόγηση, και σε πολλές περιπτώσεις (όχι σαφώς, όμως, τότε) η δικαιολόγηση προαπαιτεί εξήγηση. Βλ. σχετ., Fine, G. (2004).  *On Ideas: Aristotle's Criticism of Plato's Theory of Forms.*, ό. π., σσ. 49,266.

πρόκειται για κάτι απλό, το ότι το επιχείρημα του τρίτου ανθρώπου προκαλεί την υπόθεση μοναδικότητας κάποιων Μορφών: σηματοδοτεί το αδύνατο της γνώσης σ' εκείνες τις περιπτώσεις<sup>111</sup>.

---

<sup>111</sup> Βλ. σχετ., Fine, G. (2004). *On Ideas: Aristotle's Criticism of Plato's Theory of Forms.*, ό. π., σελ. 204.

## 2.4 Τα καθολικά στη γνωσιοθεωρία

Το πρόβλημα των καθόλου, λοιπόν, αφορά το κατά πόσον οι γενικές μας έννοιες αντιστοιχούν σε γενικές οντότητες («τα καθόλου») στην πραγματικότητα. Εάν αντιστοιχούν σε τέτοιες πραγματικές οντότητες, ο φιλόσοφος αντιμετωπίζει το μεταφυσικό πρόβλημα να εξηγήσει τι είναι αυτές οι οντότητες και πώς είναι δυνατό να υπάρχουν. Στην αντίθετη περίπτωση, αντιμετωπίζει τη γνωσιολογική απειλή ότι οι γενικές μας έννοιες φαίνεται να μην αντιστοιχούν στην πραγματικότητα, με αποτέλεσμα να είναι αδύνατη κάθε γενική γνώση του κόσμου<sup>112</sup>.

Η συγκρότηση της φιλοσοφίας όμως, ως θεμελιακής γνώσης, προϋποθέτει την πραγματικότητα του νοητού. Η δυνατότητα της σκέψης πηγάζει από την ύπαρξη των Ιδεών. Για να έχει ο καθολικός λόγος αντικείμενο, και να μην είναι λόγος κενός, το σύστημα των Ιδεών πρέπει να είναι υπαρκτό. Οι Ιδέες, του Πλάτωνα, υπερβαίνουν το αισθητό· υπάρχουν καθ' αυτές και δεν εξαρτώνται από τίποτα. Αντλούν τη δικαίωσή τους από τον εαυτό τους, χωρίς να παύουν να σχετίζονται με αυτό που είναι ο άνθρωπος μέσα στον φαινόμενο κόσμο. Πρέπει, όμως, να εξετασθεί το είδος της σχέσης της «φαινόμενης» ύπαρξης με την πραγματική. Το αισθητό «συμμετέχει» στο νοητό, αν και χωρισμένο από αυτό. Η Ιδέα (η ουσία, η Μορφή, σε αντίθεση με το υλικό που αλλοιώνεται και φθείρεται) είναι το στοιχείο που επιτρέπει σε μια κρίση να αληθεύει για πάντα· είναι η σταθερή, και διαφανής, πραγματικότητα χάρη στην οποία το υποκείμενο μιας φράσης μπορεί να χαρακτηριστεί με ακρίβεια. Μόνο όταν ορίζουμε αυτό για το οποίο μιλάμε, το ξέρουμε. Και μιλάμε για τις ουσίες και την ιεραρχία τους<sup>113</sup>.

Ανέκαθεν, λοιπόν, ένα από τα βασικά επιχειρήματα για τα καθολικά ήταν σημασιολογικού προσανατολισμού. Σε μια φυσική γλώσσα, ένας μικρός μόνο αριθμός όρων μπορεί να αναφέρεται σε συγκεκριμένα πράγματα σαφώς τοποθετημένα σε χώρο και χρόνο. Κύρια ονόματα, δείξεις, αντωνυμίες και συγκεκριμένες περιγραφές, προφανώς αναφέρονται σε επιμέρους όντα όπως: «Τύχων», «εκείνο», «αυτή», «η μαμά». Για πολλούς όρους, όμως, δεν ισχύει κάτι τέτοιο· χωρίς αυτό να σημαίνει ότι μας είναι ακατανόητοι. Όροι, για παράδειγμα, όπως «δικαιοσύνη», «ομορφιά», «κύκλος», «πέντε», φαίνονται να αναφέρονται σε κάτι πραγματικό, είτε με την έννοια του ιδεώδους προς το οποίο τείνουν τα επιμέρους, είτε ως κάτι καθολικό το οποίο μπορεί να απαντάται σε πολλά επιμέρους, είτε ακόμα και ως κάτι αφηρημένο που μπορεί να το νοήσει η διάνοια, αλλά δεν αποτελεί αντικείμενο αισθητής εμπειρίας.

Η ρεαλιστική αντίληψη για τα καθολικά (ότι είναι υπαρκτά) δεν βασίζεται σε σημασιολογικά επιχειρήματα. Στην προσπάθειά μας να κατανοήσουμε τον κόσμο μέσα στον οποίο ζούμε, οδηγούμαστε να πιστέψουμε, πέρα από την ύπαρξη των επιμέρους αντικειμένων, και σε ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ τους. Ακόμη περισσότερο, αναρωτιόμαστε για τις ιδιότητες που έχουν οι ιδιότητες των αντικειμένων, για τις ιδιότητες που έχουν οι σχέσεις που συνάπτουν τα αντικείμενα μεταξύ τους, όπως και για τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των ιδιοτήτων αυτών κ.ο.κ. Κατ' αυτό τον τρόπο οδηγούμεθα σε *δευτέρου βαθμού* ιδιότητες και σχέσεις, που πραγματώνονται χαρακτηρίζοντας ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ κάποιων επιμέρους, όπως και σε *δευτέρας τάξης* ιδιότητες και σχέσεις, που πραγματώνονται

<sup>112</sup> Βλ. σχετ., Kenny, A. (επιμ.) (2005). *Ιστορία της Δυτικής Φιλοσοφίας*. (Δ. Ρισσάκη, μεταφρ.). Αθήνα: Νεφέλη. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε 1994). σ. 112.

<sup>113</sup> Βλ. σχετ., Châtelet, F. (επιμ.) (2019). *Η Φιλοσοφία*, (τόμ. Α'), ό. π., σσ. 77-84.



στα επιμέρους (απηχώντας την ύπαρξη δευτέρου βαθμού ιδιοτήτων και σχέσεων). Π.χ. το ότι το χρώμα ενός αντικειμένου είναι ένα χρώμα είναι ιδιότητα μιας ιδιότητας· είναι μια δευτέρου βαθμού ιδιότητα. Το ότι το αντικείμενο αυτό είναι χρωματισμένο είναι μια ιδιότητά του· είναι μια δεύτερης τάξης ιδιότητα.

Όταν μελετούμε τον κόσμο, λοιπόν, δεν αντιλαμβανόμαστε μόνο αντικείμενα, αλλά και ότι τα αντικείμενα αυτά έχουν διάφορες ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ τους. Για τον μεταφυσικό ρεαλισμό, πέραν των αντικειμένων του φυσικού κόσμου, η ποικιλία ιδιοτήτων και σχέσεων, τα καθολικά, υπάρχουν εξίσου και μπορούν, αντίθετα με τα επιμέρους, να βρίσκονται ταυτόχρονα σε πολλά διαφορετικά μέρη<sup>114</sup>. Αυτό αποτελεί και το πρώτο βήμα προς έναν μεταφυσικό ρεαλισμό: η αναγνώριση του «... ἐν ἐπὶ πολλοῖς εἶναι ὅλον...» (Πλάτων, *Παρμενίδης* 131b)<sup>115</sup>. Αλλά το δεύτερο βήμα λαμβάνει χώρα όταν χωρούμε, από την απλή απόδοση καθολικών σε επιμέρους, στην πραγμάτευση των καθολικών καθαυτά. Για παράδειγμα, ξεκινά μια συζήτηση για το κατά πόσο ένα πράγμα βρίσκεται εγγύτερα ενός άλλου, ή ένα γεγονός νωρίτερα κάποιου άλλου. Σύντομα, φιλόσοφοι και επιστήμονες, ασχολούνται για το αν η σχέση «εγγύτερα» είναι ισόμορφη της σχέσης «νωρίτερα», ή αν οι σχέσεις αυτές είναι μεταβατικές, ασύμμετρες, ανακλαστικές ή μη, συνδεδεμένες αιτιακά, συνεχείς κ.λπ. Ο ρεαλισμός, ως προς τα καθολικά, ξεκινά να έχει de facto βαρύτητα ακριβώς όταν αναστοχάζομαστε αυτά τα ερωτήματα· όταν κινούμεθα από τα πρώτης στα δεύτερης τάξης καθολικά<sup>116</sup>.

Ένα άλλο, επίσης κεντρικό, επιχείρημα για την ύπαρξη των καθολικών προέρχεται από τα μαθηματικά, και την επιστήμη γενικότερα, δεδομένου ότι η αποφυγή της αναφοράς σε καθολικά φάνηκε να συνοδεύεται αναπόφευκτα από μεγάλες απώλειες<sup>117</sup>. Η έρευνα επεχείρησε να εστιάσει στην ακριβή οριοθέτηση μεταξύ εκείνων των περιοχών των μαθηματικών τα οποία διασώζονται, από την αποφυγή της αναφοράς σε καθολικά, και εκείνων που χάνονται. Έχουμε την περίπτωση της στοιχειώδους θεωρίας των Cantor<sup>118</sup> – Frege, για παράδειγμα, που θεώρησε τα σύνολα ως καθόλου για την περιγραφή μιας ιδιότητας· τα στοιχεία των συνόλων είναι συγκεκριμένες πραγματώσεις της ιδιότητας αυτής. Ο Quine, στο *Set Theory and Its Logic*, αναπτύσσει πλήρως την αριθμητική των φυσικών, για παράδειγμα, χωρίς να απαιτείται η ύπαρξη απείρων συλλογών<sup>119</sup>. Ενώ τέτοια σύνολα (καθολικά) μπορούν να αποφευχθούν στην αριθμητική, και σε τμήματα της θεωρίας

<sup>114</sup> Βλ. σχετ., Bigelow, ό. π., σελ. 9.

<sup>115</sup> Βλ., Πλάτων. (έκδοση 1993). *Παρμενίδης (ἢ περί ἰδεῶν)*, εισ. – μετ. – σχόλια Φιλολογική Ομάδα Κάκτου. Αθήνα: Κάκτος, σελ. 72-73, και Πλάτων. *Παρμενίδης*, εισ. – μετ. – σχόλια Ηλίας Λάγιος. Αθήνα: Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος, σελ. 38-39, με κάποιες φραστικές αλλαγές δικές μας: « - Παρμ.: Ὄντας λοιπόν η Ἰδέα ένα και το αυτό πράγμα που υπάρχει ταυτόχρονα σε πολλά πράγματα χωριστά, μπορεί να χωρίζεται από τον εαυτό της. - Σωκρ.: Όχι, δεν θα χωρίζεται, αν είναι σαν την ημέρα που είναι μία και η αυτή ταυτόχρονα σε πολλά μέρη. Αν η κάθε Ἰδέα είναι κατά το παράδειγμα αυτό, θα μπορούσε να είναι μία και η αυτή ενότητα: πανταχού παρούσα αλλά και η ίδια συγχρόνως».

<sup>116</sup> Βλ. σχετ., Bigelow, ό. π., σσ. 11-15.

<sup>117</sup> «...απαιτείται να προσθέσουμε αφηρημένα αντικείμενα, αν θέλουμε μια σύγχρονη επιστήμη. Συγκεκριμένα πράγματα για τα οποία θέλουμε να μιλήσουμε στην επιστήμη μας υποχρεώνουν να αποδώσουμε τιμές ύπαρξης όχι μόνο σε φυσικά αντικείμενα, αλλά και σε κλάσεις ή σε σχέσεις μεταξύ κλάσεων, σε αριθμούς, συναρτήσεις, και άλλα αντικείμενα των καθαρών μαθηματικών. Γιατί τα μαθηματικά – ... η θεωρία συνόλων, η λογική, η θεωρία αριθμών, η άλγεβρα των πραγματικών και μιγαδικών αριθμών, ο διαφορικός και ο ολοκληρωτικός λογισμός, κ.λπ. – πρέπει να θεωρούνται ως αναπόσπαστο τμήμα της επιστήμης, σε ισοτιμία με τη φυσική, την οικονομία κ.ο.κ., όπου και θεωρείται ότι εφαρμόζονται». Βλ., Quine, W. V. O. (1966). *The Ways of Paradox and Other Essays*. New York: Random House. σελ. 231.

<sup>118</sup> 1845-1918.

<sup>119</sup> Βλ. σχετ., Quine, W. V. O. (1969). *Set Theory and Its Logic*. Cambridge, Massachusetts & London England: The Belknap Press of Harvard University Press. σσ. 74-95.

των ρητών και των πραγματικών αριθμών, κάποιες χρήσεις των πραγματικών στην ανάλυση, στο λογισμό κ.λπ., καθίστανται αδύνατες απ' αυτή την αναγωγή<sup>120</sup>.

Ο μεταφυσικός ρεαλισμός είναι πάνω απ' όλα μαθηματικός· υπερθεματίζει την ύπαρξη των πραγμάτων που συνιστούν την υποκείμενη ύλη των μαθηματικών. Ο Πλατωνισμός, για τον οποίο υπάρχουν τα αφηρημένα αντικείμενα, στην πραγματικότητα είναι, κυρίως, μαθηματικός ρεαλισμός. Στα πλαίσια ενός επιστημονικού πλατωνισμού, τα καθολικά μπορούν να ενθαρρύνουν μια, ρεαλιστικού χαρακτήρα, κατανόηση των μαθηματικών και της λογικής. Μπορούν να δημιουργήσουν ρεαλιστικές αποτιμήσεις της έννοιας της πιθανότητας, των φυσικών νόμων, της αιτιότητας και πολλών άλλων επιστημονικών ερμηνειών<sup>121</sup>. Η αλήθεια είναι πως ο μεταφυσικός ρεαλισμός είναι, κατά κάποιο τρόπο, περισσότερο γενικός, τουλάχιστον κατ' αρχήν· ένας μεταφυσικός ρεαλιστής μπορεί να ισχυρισθεί την ύπαρξη καθολικών που βρίσκονται πέραν του χώρου των μαθηματικών. Από τη στιγμή, όμως, που τα μαθηματικά βρίσκονται ουσιαστικά στη δομή της επιστήμης, ο μεταφυσικός ρεαλισμός είναι ουσιαστικό συστατικό ενός επιστημονικού ρεαλισμού, με την πληρέστερη έννοια του όρου<sup>122</sup>.

---

<sup>120</sup> «...[αλλιώς] θα πρέπει να προσαρμόσει [κανείς] τις φυσικές επιστήμες στην απουσία των μαθηματικών· γιατί τα μαθηματικά, εκτός από κάποιες ασήμαντες πτυχές τους όπως η απλή αριθμητική, είναι με μη αναγωγίμο τρόπο εξαρτημένα από το λογισμό πάνω σε αφηρημένα αντικείμενα». Βλ., Quine, W. V. O. (1960). *Word and Object*. Massachusetts: The Massachusetts Institute of Technology. σελ. 269. «Τα κλασικά μαθηματικά, όπως δείχνει σαφώς το παράδειγμα των πρώτων αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το ένα εκατομμύριο, εμπεριέχονται πλήρως σε μια οντολογία των αφηρημένων αντικειμένων». Βλ., Quine, W. V. O. (1963). *From a Logical Point of View: 9 Logico-Philosophical Essays*. New York: Harper Torchbooks. σελ. 13. Η συζήτηση πάνω στην πραγματικότητα ή μη των συνόλων ήταν, για τον Quine, η σύγχρονη αναβίωση του διαλόγου μεταξύ νομιναλισμού και πλατωνισμού. Ξεκίνησε με το να αποκηρύσσει τις αφηρημένες οντότητες ερμηνεύοντάς τις *συν-κατηγορηματικά*: «...σημαντικές για το πλαίσιο [της πρότασης], αλλά που δεν ονοματίζουν κάτι υπαρκτό». Βλ. σχετ., Goodman, N. & Quine, W. V. O. (1947). *Steps Toward a Constructive Nominalism*. *The Journal of Symbolic Logic*. 12, (4), 105-122. σελ. 105. Αποδέχθηκε, στην πορεία, πως δεν μπορούμε να αποφύγουμε την ύπαρξη συνόλων οπότε, χωρίς να εγκαταλείψει τον νομιναλισμό (αρνούσαν την ύπαρξη καθολικών), κατέληξε πλατωνιστής (δεχόταν την ύπαρξη αφηρημένων αντικειμένων). Βλ. σχετ., Bigelow, ό. π., σσ. 11-13. Το τι ακριβώς εννοούσε όταν μιλούσε για την οντολογική εξάρτηση των μαθηματικών από αφηρημένα αντικείμενα φαίνεται να μην του ήταν ξεκάθαρο. Ωστόσο, ελαφρά τροποποιημένες οι τοποθετήσεις του, δεν χάνουν την αξία τους, ακόμα και αν αρνηθούμε αυτή την οντολογική εξάρτηση. Βλ. σχετ., Chihara, C. S. (1968). *Our Ontological Commitment to Universals*. *Noûs*. 2, (1), 25-46.

<sup>121</sup> Βλ. σχετ., Bigelow, ό. π., σελ. vii.

<sup>122</sup> Βλ. σχετ., Bigelow, ό. π., σσ. 47-48.

## ΜΕΡΟΣ Α΄

### 3. Καθολικά και Θεωρία Συνόλων

#### 3. 1 Η εισαγωγή της έννοιας του συνόλου

Στο έργο *Die Grundlagen der Arithmetik*<sup>123</sup> (*Τα Θεμέλια της Αριθμητικής*, 1884), ο Frege ανοίγει, εκ νέου, το διάλογο για τα καθολικά - όπως συμβαίνει κάθε φορά που λαμβάνει χώρα μια (ποιοτική) εξέλιξη στα μαθηματικά - επιχειρώντας να αναλύσει την έννοια των φυσικών αριθμών. Όπως ο Kant<sup>124</sup>, μιλά για έννοιες (*Begriffe*) περισσότερο, παρά για καθολικά. Οι έννοιες, για τον Frege, δεν είναι ατομικά διανοητικά γεγονότα· υπάρχουν ανεξάρτητα από οποιονδήποτε νου, μοιάζοντας περισσότερο με τις μορφές του Πλάτωνα, παρά με τα καθολικά του Αριστοτέλη. Η ανάλυση της έννοιας των φυσικών αριθμών πραγματώνεται σε τρία στάδια:

Αρχικά, εισήγαγε την ιδέα ότι η αρίθμηση των επιμέρους δεν αποτελεί απόδοση κάποιας ιδιότητας σ' αυτά, αλλά μάλλον σε κάποια άλλη ιδιότητα. Παραδείγματος χάριν, αν ρωτήσουμε «Πόσα αντικείμενα είναι στο τραπέζι;», αναφερόμενοι σε ένα τραπέζι όπου βρίσκονται δύο τράπουλες, η απάντηση μπορεί να είναι: «2 τράπουλες» ή «104 τραπουλόχαρτα». Αυτό σημαίνει ότι η ιδιότητα ύπαρξης μιας τράπουλας στο τραπέζι έχει την ιδιότητα να έχει δύο πραγματώσεις. Επίσης, η ιδιότητα ύπαρξης ενός τραπουλόχαρτου στο τραπέζι έχει την ιδιότητα να έχει 104 πραγματώσεις. Έτσι, οι φυσικοί αριθμοί, γενικά, καταμετρούν επιμέρους μόνο μέσα από το να αποδίδουν ιδιότητες στις ιδιότητες (των επιμέρους)· ιδιότητες της μορφής «η ιδιότητα x έχει n πραγματώσεις».

Στο δεύτερο στάδιο ανάλυσης, ισχυρίζεται ότι η φύση των καθολικών, των εννοιών, είναι τέτοια που η αναφορά σε κάποιο καθολικό, μέσα από ένα όνομα ή μια περιγραφή, είναι αδύνατη κατ' αρχήν. Για παράδειγμα, λέγοντας ότι «Ο Σωκράτης είναι σοφός», το καθολικό που πραγματώνεται από τον Σωκράτη είναι κάτι που εκφράστηκε από το όλο σύμπλεγμα των συμβόλων μέσα στο οποίο εμφυτεύθηκε το

---

<sup>123</sup> Βλ., Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine Logisch Mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner. Επίσης, Frege, G. (έκδοση 2<sup>1993</sup>). *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the Concept of Number*. (J. L. Austin, μεταφρ.). New York: Harper & Brothers, και την ελληνική μετάφραση, Frege, G. (έκδοση 1990). *Τα Θεμέλια της Αριθμητικής*. (Γ. Ρουσόπουλος, μεταφρ.). Αθήνα: Νεφέλη. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε 1884).

<sup>124</sup> Ο Kant απέφυγε τη διαμάχη εμπειριστών-ορθολογιστών αρνούμενος να εξάγει τις έννοιες ως προϊόντα αφαίρεσης από τις κατ' αίσθηση αντιλήψεις, ή από τη λογική αρχή της μη-αντίφασης. Αντίθετα, εστίασε στη λειτουργία του αναστοχασμού επί της μορφής, και του περιεχομένου, της εμπειρίας. Π.χ., η έννοια του στερεού σώματος δεν προκύπτει από την εμπειρία ενός τέτοιου σώματος, ούτε από τη λογική αναγκαιότητά του, αλλά από την αναπαράσταση, εντός μας, του τι γνωρίζουμε για ένα τέτοιο αντικείμενο, και τον αναστοχασμό πάνω σ' αυτή την αναπαράσταση. Ο αναστοχασμός παίρνει αυτό που γίνεται άμεσα γνωστό, ως χαρακτηριστικό ενός πράγματος, και αν βρει το πράγμα αδιανόητο χωρίς το χαρακτηριστικό αυτό μετατρέπεται, το τελευταίο, σε έννοια για το πράγμα. Στην περίπτωση του σώματος, το χαρακτηριστικό της «μη διαπερατότητας» εντοπίζεται πρώτο και, κατόπιν, γίνεται αντικείμενο αναστοχασμού. Καθώς αναγνωρίζεται ως αναγκαίο χαρακτηριστικό για να σκεφτούμε το στερεό σώμα, γίνεται δεκτό ως έννοια ενός τέτοιου σώματος. Βλ. σχετ., Caygill, H. (2000). *A Kant Dictionary*. Cornwall: Blackwell Publishers. σελ. 119.

όνομα «Σωκράτης», προκειμένου να έχουμε την πρόταση. Αν θέλαμε να προσπαθήσουμε να ονοματίσουμε αυτό το καθολικό, με το όνομα «σοφία», συγκρίνοντας την πρότασή μας με την αλληλουχία των ονομάτων «Σωκράτης σοφία», το απλό όνομα «σοφία» αφήνει, σαφώς, μετέωρο κάτι που ήταν παρόν στην απόδοση σοφίας στο Σωκράτη, στα πλαίσια της αρχικής πρότασης<sup>125</sup>.

Μια ιδιότητα μπορεί να εκφρασθεί μόνο με ένα κατηγορημα, και όχι με ένα όνομα, ούτε με τη χρήση όρων της «λογικής» που αναφέρονται σε επιμέρους. Επομένως, αν θέλουμε να αποδώσουμε ύπαρξη στα καθολικά, δεν μπορούμε να το κάνουμε χρησιμοποιώντας ποσοδείκτες πρώτης τάξης, σαν αυτούς που χρησιμοποιούμε για να αποδώσουμε ύπαρξη στα επιμέρους. Από την πρόταση: «Ο Σωκράτης είναι σοφός» μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: «Υπάρχει κάτι που είναι σοφό» και ότι: «Υπάρχει κάτι που είναι Σωκράτης». Συμβολικά:  $(\exists x)$  (σοφό(x)), και  $(\exists x)$  ( $x = \text{Σωκράτης}$ ). Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: «Υπάρχει κάτι που κατέχει ο Σωκράτης», ούτε ότι: «Υπάρχει κάτι που είναι σοφία», δηλαδή:  $(\exists x)$  (έχει (Σωκράτης, x)), ή  $(\exists x)$  ( $x = \text{σοφία}$ ).

Μπορούμε, όμως, να αποδώσουμε ύπαρξη στα καθολικά χρησιμοποιώντας υψηλότερης τάξης ποσοδείκτες, τους οποίους και εισήγαγε στην *Begriffsschrift*<sup>126</sup> (Εννοιολογία, 1879). Δηλαδή, από την πρόταση: «Ο Σωκράτης είναι σοφός», μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: «Υπάρχει κάπως κάτι τέτοιο: ο Σωκράτης είναι έτσι». Συμβολικά,  $(\exists f)$  ( $f(\text{Σωκράτης})$ ). Όμως, αν και υπάρχει κάπως ότι ο Σωκράτης είναι κάτι, αυτό δεν σημαίνει ότι υπάρχει κάτι-που είναι το κάπως-που είναι ο Σωκράτης. Οι έννοιες, τα καθολικά, μπορούν να έχουν μόνο δευτέρας τάξεως ύπαρξη, όχι πρώτης.

Είδαμε ότι, για τον Frege, η αρίθμηση των πραγμάτων ουσιαστικά εμπλέκει την απόδοση ιδιοτήτων σε ιδιότητες, οι οποίες δεν είναι από τα πράγματα που μπορούν να ονομαστούν, αλλά κατηγορούν. Όμως οι αριθμοί, για τον Frege, μπορούν να ονομαστούν γιατί είναι αφηρημένες οντότητες· είναι αντικείμενα, όχι έννοιες.

Το τρίτο στάδιο ανάλυσης των αριθμών, από τον Frege, συνίσταται στην απόπειρα να βρεθούν οντότητες, αντικείμενα, που θα μπορούσαν να ταυτισθούν με τους αριθμούς. Σ' αυτό το στάδιο ανάλυσης κατέληξε στη μοντέρνα θεωρία συνόλων. Για κάθε ιδιότητα, ισχυρίστηκε ο Frege, υπάρχει μια αντίστοιχη οντότητα: η έκταση αυτού του καθολικού, το σύνολο όλων των πραγμάτων (ή όλα τα πραγματικά και δυνατά πράγματα), που πραγματώνουν αυτό το καθολικό. Έτσι, για παράδειγμα, αντίστοιχα με την ιδιότητα ύπαρξης μιας ιδιότητας που έχει δύο πραγματώσεις θα υπάρχει ένα σύνολο συνόλων που έχει δύο στοιχεία<sup>127</sup>.

Τα σύνολα, λοιπόν, αναδύθηκαν σε «διάλογο» με την ιεράρχηση των καθολικών (ιδιοτήτων και σχέσεων) και μπορούν να τοποθετηθούν κάπου σ' αυτήν, αν πιστεύουμε στην ύπαρξη των καθολικών. Η πρώιμη αντίληψη για τη θεωρία συνόλων ήταν ότι πρόκειται για μια θεωρία για τα καθόλου. Ο Cantor ισχυριζόταν:

<sup>125</sup> Έχει μεσολαβήσει εκείνο το κομμάτι ιστορικής εξέλιξης, που έχουμε περιγράψει στην εισαγωγή, στο οποίο «το πνεύμα ανακαλύπτει τον εαυτό του» και «το εκφράζει “λογικά”» με το «είναι», απαντώντας στο αυτονόητο ερώτημα του τρόπου σύνδεσης του μερικού με το γενικό.

<sup>126</sup> Βλ., Frege, G. (έκδοση 1993). *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. New York: Georg Olms Verlag.

<sup>127</sup> Βλ. σχετ., Craig, E. (επιμ.) (2005). *The Shorter Routledge Encyclopedia of Philosophy*. ό. π., σσ. 1032-1033. Η αξιωματικοποίηση της θεωρίας συνόλων, κατά Zermelo-Fraenkel, που υπαγορεύεται από μια στρουκτουραλιστική αντίληψη για την αριθμητική, έρχεται σε αντίθεση με τη απολυτοκρατική θέση των Frege και Russell ότι οι φυσικοί αριθμοί πρέπει να είναι σαφώς προσδιορισμένα αντικείμενα, συγκεκριμένα, οι κλάσεις ισοπληθικών εννοιών ή κλάσεων.

«Γενικώς, θεωρώ “πολλαπλότητα”<sup>128</sup> ή “σύνολο” καθετί που, όντας από πολλά, νοείται ως ένα· δηλαδή, κάθε συμπερίληψη προσδιορισμένων στοιχείων, που μπορεί να ενοποιηθεί σε ένα όλο, δυνάμει ενός νόμου. Πιστεύω ότι μ’ αυτό ορίζω κάτι συγγενικό με το πλατωνικό είδος ή την ιδέα όπως, επίσης, και με αυτό που ο Πλάτων απεκάλεσε μικτό, στο διάλογό του “Φίληβος”<sup>129</sup>. Το τοποθετεί απέναντι στο άπειρο, (δηλαδή το απεριόριστο, το αόριστο, που εγώ το ονομάζω δευτερεύουσας σημασίας άπειρο [δυναμικό]), καθώς και στο πέρας, και το θεωρεί ως ένα συντεταγμένο μίγμα αυτών των δύο τελευταίων»<sup>130</sup>.

Το 1895, τυποποιεί τον ορισμό της έννοιας του συνόλου ως μια «... συλλογή σε μία ολότητα,  $M$ , προσδιορισμένων (σαφών), και καλώς διαφοροποιημένων (διακριτών) αντικειμένων  $m$  (που καλούνται τα “στοιχεία” της  $M$ ) της εποπτείας, ή της σκέψης μας»<sup>131</sup>. Ας αποκαλέσουμε αυτή την έννοια συγκεκριμένο σύνολο. Τα συγκεκριμένα σύνολα προκύπτουν τυπικά ως επεκτάσεις ιδιοτήτων. Το να είναι κάτι μέλος ενός συγκεκριμένου συνόλου  $C$  σημαίνει, ακριβώς, ότι κατέχει ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό  $A$ · ότι είναι  $A$ . Γι’ αυτό το λόγο και ο Peano<sup>132</sup> χρησιμοποίησε το σύμβολο « $\in$ » (πρώτο γράμμα του «εστί», «είναι»). Η ταυτότητα του συνόλου προσδιορίζεται πλήρως από αυτό το χαρακτηριστικό  $A$ .

<sup>128</sup> Είναι πολύ πιθανό η ιστορία της καντοριανής έννοιας του συνόλου, ως πολλαπλότητας, να ανάγεται στην έννοια της πολλαπλότητας του Riemann. Βλ., σχετ., Ferreirós, J. (2007). *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Basel: Birkhäuser. σελ. 72.

<sup>129</sup> Το αγαθό δεν είναι ούτε η ηδονή ούτε η φρόνηση, αλλά κάτι μεικτό: «...τον βίο τον αποτελούμενο και από τα δύο, που... θα ήταν μείγμα και των δύο... της ηδονής και του νου [της περίσκεψης]... κάθε άνθρωπος... θα προτιμήσει...» (Πλάτων, Φίληβος 22a), επίσης: «...ο θεός έδειξε από τη μία μεριά το απεριόριστο... και από την άλλη το πεπερασμένο... Ας θέσουμε αυτά τα δύο ως κλάσεις των ειδών, ενώ το τρίτο αποτελείται από την ανάμειξη αυτών των δύο σε ένα πράγμα.» (Πλάτων, Φίληβος 23 c-d), Βλ. σχετ., Πλάτων. (έκδοση 1993). *Φίληβος (ή περί ηδονής)*. (Φιλολογική Ομάδα Κάκτου, μεταφρ.). Αθήνα: Εκδόσεις Κάκτος. σσ.: 51, 94-95, 98-99.

<sup>130</sup> Στο Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre – Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen, με αγγλική μετάφραση Foundations of a General Theory of Manifolds: A Mathematico-Philosophical Investigation into the Theory of the Infinite, όπως παρατίθεται στο Ewald, W. (ed.) (2007). *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Vol. I-II). Oxford: Clarendon Press. Στο 2<sup>ο</sup> τόμο, σελ. 916. Συμβουλευτήκαμε επίσης τη μετάφραση του Κ. Δ. Γεωργούλη στο Αριστοτέλης. (έκδοση 1992). *Πρώτη Φιλοσοφία (Τα Μετά τα Φυσικά)*, ό. π., σελ. 399.

<sup>131</sup> Βλ. σχετ., Dauben, J. (1990). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. σελ. 170.

<sup>132</sup> Giuseppe Peano (1858-1932), Ιταλός μαθηματικός.

### 3.2 Τα σύνολα ως καθολικά

Ο πλατωνισμός μπορεί να ερμηνευθεί ως το φιλοσοφικό σύστημα στα πλαίσια του οποίου, τα καθολικά (πρώτης τάξης ιδιότητες και σχέσεις διαφόρων επιμέρους, δευτέρου βαθμού ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ άλλων καθολικών, δευτέρας τάξης ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ επιμέρους, κ.ο.κ.), έχουν ψιλή ύπαρξη<sup>133</sup>.

Στην πλατωνική θεωρία των Ιδεών (σε σύγχρονη γλώσσα) λοιπόν, μια ιδιότητα  $F$  συνδέεται με μια οντότητα, το καθολικό  $u_F$ , που αναπαριστά μοναδικά την ιδιότητα. Ένα αντικείμενο  $x$  έχει την ιδιότητα  $F$ , δηλαδή  $F(x)$ , ανν το αντικείμενο  $x$  μετέχει του καθολικού  $u_F$ . Αν με  $\mu$  παραστήσουμε (από τη λέξη *μέθεξι*) τη σχέση μετοχής, η φράση «  $x \mu u_F$  » διαβάζεται: « το  $x$  μετέχει στο  $u_F$  ».

Δοθείσης μιας σχέσης  $\mu$ , μια οντότητα καλείται καθολικό για την ιδιότητα  $F$  (ως προς τη σχέση μετοχής  $\mu$ ) αν ικανοποιεί την ακόλουθη *συνθήκη καθολικότητας*:

$$\forall x, x \mu u_F \text{ ανν } F(x).$$

Τα σύνολα αποτελούν πραγματώσεις πολλών δομών και των σχημάτων που μελετούνται στα μαθηματικά και γι' αυτό είναι πολύ σημαντικά. Ένα ερώτημα που τίθεται είναι: πώς θα μπορούσε η θεωρία συνόλων να περιγράφεται ως μια θεωρία καθολικών; Τα σύνολα είναι καθολικά; Είναι του ίδιου είδους με οντότητες καθολικού χαρακτήρα, τις οποίες μοιράζονται πολλά πράγματα, αν και δεν είναι όλα τα σύνολα τέτοιες οντότητες, με την έννοια της ταυτόχρονης παρουσίας τους σε διάφορα σημεία. Ένα καθ' έκαστον πραγματώνει κάποιο καθολικό, αλλά το ίδιο δεν πραγματώνεται από κάτι άλλο, και τα σύνολα πραγματώνουν καθολικά. Αλλά ταυτόχρονα, τα σύνολα, πραγματώνονται από τα στοιχεία τους. Γι' αυτό δεν είναι καθέκαστα αλλά καθολικά. Όμως, τι καθολικά είναι; Τι πράγματα πραγματώνουν;

Μπορούμε, λοιπόν, να ορίσουμε το καθολικό, που αναπαριστά μια ιδιότητα  $F$ , να είναι το σύνολο των στοιχείων με την ιδιότητα  $F$ :  $u_F = \{x \mid F(x)\}$ . Η σχέση μετοχής, στο σύνολο-καθολικό, είναι η σχέση του ανήκειν σε ένα σύνολο που παριστάνεται με το σύμβολο “ $\in$ ”. Πρόκειται για την υλο-ποίηση της σχέσης μεταξύ του αντικειμένου και του χαρακτηριστικού, της ιδιότητάς του. Έτσι, το σύνολο είναι ένα καθολικό που πραγματώνεται από τα στοιχεία του. Η σχέση του ανήκειν, σ' αυτά τα πλαίσια, είναι η σχέση πραγμάτωσης ενός καθολικού από ένα καθέκαστο περιορισμένη σ' εκείνα τα καθολικά που είναι σύνολα.

Βέβαια, το να ανήκει κάτι σε ένα σύνολο και η πραγμάτωση ενός καθολικού διαφέρουν σε συγκεκριμένες θεμελιακές απόψεις. Μια διαφορά τους διακρίνεται έντονα στα πλαίσια του αξιώματος της έκτασης. Κατά το αξίωμα αυτό, όταν δύο σύνολα είναι διακριτά, μη ταυτόσημα, θα υπάρχει κάτι που είναι στοιχείο του ενός και δεν είναι του άλλου. Αυτό όμως δεν ισχύει για τα καθολικά και την πραγμάτωση γενικά. Όταν κάτι πραγματώνει ένα καθολικό, και δεν πραγματώνει ένα άλλο, δεν σημαίνει ότι τα δύο καθολικά δεν ταυτίζονται. Τα διακριτά καθολικά δεν απαιτείται να έχουν διακριτές πραγματικές εκδηλώσεις. Θεωρούμε τα καθολικά να ικανοποιούν μια *συνθήκη μοναδικότητας*, που θα εκφράζεται μέσω μιας σχέσης ισοδυναμίας “ $\approx$ ”, ως εξής: αν  $u_F$  και  $u'_F$  είναι καθολικά για την ίδια ιδιότητα  $F$ , τότε  $u_F \approx u'_F$ .

<sup>133</sup> Βλ. σχετ., Bigelow, ό. π., σ. 10.

Υπάρχει, όμως, μια ακόμη κρίσιμη διαφορά μεταξύ συνόλων και των υπολοίπων καθολικών. Τα σύνολα δεν μπορούν να έχουν διαφορετική στελέχωση απ' αυτή που έχουν, οπουδήποτε και αν βρίσκονται. Π.χ. μια πολιτική παράταξη θα μπορούσε να έχει ένα πρόσθετο μέλος, αλλά ένα σύνολο όχι. Είτε κάτι είναι μέλος ενός δοθέντος συνόλου, σε όλους τους δυνατούς κόσμους, είτε δεν είναι σε κανέναν. Γι' αυτό, ένας αναγκαίος όρος για να είναι, ένα καθολικό, υποψήφιο σύνολο θα μπορούσε να είναι ο εξής: Ένα καθολικό είναι σύνολο μόνο αν κάθε πραγμάτωσή του είναι τέτοια σε όλους τους δυνατούς κόσμους ή σε κανέναν.

Από την άλλη, οι ουσιώδεις ιδιότητες παρουσιάζουν σε μεγάλο βαθμό τον ίδιο χαρακτήρα με τα σύνολα. Μια ιδιότητα είναι ουσιώδης, για ένα δοθέν αντικείμενο, όταν αυτό δεν μπορεί να υπάρξει δίχως αυτή. Σε κάθε κόσμο που υπάρχει, έχει αυτή την ιδιότητα. Όχι μόνο τα καθέκαστα μα και τα καθολικά έχουν ουσιώδεις ιδιότητες. Όπως και τα σύνολα. Η στελέχωση ενός συνόλου είναι μια ουσιώδης ιδιότητά του.

Τα σύνολα είναι, λοιπόν, καθολικά με διακριτικό γνώρισμα την έκτασή τους, που αποτελεί ουσιαστικά μια αντανάκλαση των διακριτών ουσιών καθενός από αυτά. Ο ουσιώδης σύνδεσμος, μεταξύ ενός συνόλου και των στοιχείων του, στην πραγματικότητα λειτουργεί και προς τις δύο κατευθύνσεις. Το σύνολο δεν μπορεί να υπάρξει χωρίς τα στοιχεία του, αλλά ισχύει και το αντίστροφο: τα στοιχεία δεν μπορούν να υπάρξουν μαζί, χωρίς να πραγματώνουν το σύνολο αυτό. Φυσικά και θα μπορούσε ένα στοιχείο να υπάρξει χωρίς τα άλλα, οπότε και δεν θα μπορούσε να υπάρξει το σύνολο. Το κάθε στοιχείο θα μπορούσε να υπάρξει χωρίς να πραγματώνει το σύνολο. Το ανήκειν σε ένα σύνολο δεν είναι ουσιώδης ιδιότητα των στοιχείων του παρμένων ατομικά. Καθίσταται τέτοια αν τα πάρουμε όλα μαζί. Τα στοιχεία δεν μπορούν να υπάρχουν από κοινού, μη όντας στοιχεία αυτού του συνόλου. Θα λέγαμε το σύνολο είναι ένα είδος πολλαπλής ουσίας. Είναι του ίδιου γενικού χαρακτήρα με τις ουσιώδεις ιδιότητες, αλλά διακρίνεται από αυτές στο ότι είναι ουσιώδης μάλλον για μια πολλαπλότητα πραγμάτων παρά για ένα πράγμα. Μπορεί να θεωρηθεί ως η ιδιότητα του να είσαι ένα από αυτά τα πράγματα. Ένα μονο-σύνολο είναι μια ουσιώδης ιδιότητα του μοναδικού του στοιχείου· η ιδιότητα του να είσαι αυτό το πράγμα<sup>134</sup>.

Η θεωρία συνόλων, λοιπόν, συγκροτήθηκε ως μια θεωρία για τα καθόλου. Γενικά, μια μαθηματική θεωρία θα αποτελεί *θεωρία καθολικών* αν περιλαμβάνει μια διμελή σχέση  $\mu$  και μια σχέση ισοδυναμίας “ $\approx$ ” ώστε με την ιδιότητα  $F$  να υπάρχει μια συνδεδεμένη οντότητα,  $\mathbf{u}_F$ , που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(I) Καθολικότητα:  $\forall x, x \mu \mathbf{u}_F$  ανν  $F(x)$ ,

(II) Μοναδικότητα: αν  $\mathbf{u}_F$  και  $\mathbf{u}'_F$  είναι καθολικά που ικανοποιούν την (I) για την ιδιότητα  $F$ , τότε  $\mathbf{u}_F \approx \mathbf{u}'_F$ .

<sup>134</sup> Βλ. σχετ., Bigelow, ό. π., σσ. 366-369.

### 3.3 Το αξίωμα της συμπερίληψης

Η συνάρτηση είναι μια σχέση που συνδέει κάποιο δοθέν πράγμα με ένα άλλο. Δύο φαινομενικά διαφορετικές συναρτήσεις είναι δύο σχέσεις. Όταν βρίσκονται ταυτόσημες, υπό κάποια έννοια, αυτό που ανακαλύπτεται είναι ότι οποιαδήποτε δύο πράγματα, που συνδέονται στη μία σχέση, συνδέονται και στην άλλη. Οι δύο σχέσεις είναι συνεκτασιακές. Αυτό που έχουν κοινό είναι η έκτασή τους: ένα σύνολο. Τα πρώτα σύνολα προσέχθηκαν από τους μαθηματικούς γιατί ακριβώς αποτελούσαν, με κάποιο τρόπο, ό, τι είχαν κοινό μεταξύ τους διάφορα καθολικά.

Αρχικά, λοιπόν, θεωρήθηκε πως στην ύπαρξη κάποιων συνόλων θα μπορούσαμε να καταλήγουμε, τυπικά, από το περίφημο αξίωμα, ή σχήμα, που υποτέθηκε πως υπηρετεί αυτό το σκοπό, της συμπερίληψης ή αφαίρεσης. Αυτό το αξίωμα μας παρέχει ένα από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα απόπειρας να συνάγουμε οντολογικά συμπεράσματα από σημασιολογικές υποθέσεις. Κατά το σχήμα αυτό, δοθείσης οποιασδήποτε περιγραφής, υπάρχει ένα σύνολο πραγμάτων που χαρακτηρίζονται από αυτή την περιγραφή. Εξάγεται η ύπαρξη κάποιου πράγματος, του συνόλου, από το νόημα μιας περιγραφής.

Με τους όρους μιας θεωρίας καθολικών, λοιπόν, στη θεωρία συνόλων η *συνθήκη καθολικότητας* είναι η ισοδυναμία που καλείται *στοιχειώδες αξίωμα της συμπερίληψης*:

$$\exists Y : \forall x, x \in Y \text{ ανν } F(x).$$

Οι αποφάσεις, όμως, σχετικά με το τι υπάρχει στον κόσμο αναδύονται άμεσα, πριν από οποιονδήποτε εσωτερικό σημασιολογικό αναστοχασμό. Οντολογικού χαρακτήρα ισχυρισμοί μπορούν να τροποποιηθούν υπό το πρίσμα της σημασιολογίας τους, αλλά δεν μπορούμε να αναμένουμε μια οντολογία να απορρέει απλώς από τη γλώσσα. Γι' αυτό και δεν πρέπει να αναμένουμε την εγκυρότητα του σχήματος της συμπερίληψης. Προτιμούμε να σκεφτόμαστε το σύνολο ως κάτι το οποίο έχουν κοινό όλα του τα μέλη: την ιδιότητα καθένα τους να είναι ένα από αυτά. Το ερώτημα είναι κατά πόσο, για κάθε περιγραφή, υπάρχει η ιδιότητα του να είναι κάτι ένα από τα πράγματα με την ιδιότητα αυτή· υπάρχει η ιδιότητα που την κατέχουν όλα, και μόνο αυτά, τα πράγματα που περιγράφονται απ' αυτή;

Μια ασυνέπεια στη συμπερίληψη θα έδειχνε πως υπάρχουν περιγραφές για τις οποίες δεν υπάρχει τέτοια ιδιότητα. Ας σκεφτούμε κάποια πολύ γενική περιγραφή όπως, για παράδειγμα, τους όρους μιας εξηγητικής διαδικασίας: εξηγούμε, όταν συνάγουμε από νόμους και αρχικές συνθήκες. Όμως αυτοί οι νόμοι, και αρχικές συνθήκες, πρέπει επίσης να εξηγηθούν<sup>135</sup>. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία οδηγούμαστε ατέρμονα πίσω στο χρόνο. Όσους όρους με την ιδιότητα να είναι εξηγητικοί, και αν συμπεριλάβουμε, θα υπάρχουν άλλοι που δεν έχουν την ιδιότητα αυτή, αλλά περιγράφονται. Πρόκειται για ιδιότητα της μορφής: «είναι ένα απ' αυτά τα στοιχεία», που πραγματώνεται από κάποια, αλλά όχι από όλα τα στοιχεία που περιγράφονται.

Η πεποίθηση ότι η στοιχειώδης θεωρία συνόλων θα μας παρείχε μια γενική θεωρία των *καθολικών* απεδείχθη αβάσιμη. Το στοιχειώδες αξίωμα της συμπερίληψης οδηγεί σε ασυνέπεια όταν εφαρμοσθεί σε ιδιότητες σαν την:

$$F(X) \equiv \text{το } X \text{ δεν είναι στοιχείο του } X \equiv X \notin X .$$

<sup>135</sup> Βλ. σχετ., Bigelow, ό. π., σελ. 304.



Η κλάση όλων των ανθρώπων δεν είναι άνθρωπος. Η κλάση όλων των ιδεών είναι ιδέα, όμως, όπως και η κλάση όλων των βιβλιοθηκών είναι μια τεράστια βιβλιοθήκη. Βλέπουμε, δηλαδή, πως κάποιες κλάσεις δεν αποτελούν μέρος του εαυτού τους ενώ άλλες αποτελούν. Ο Cantor, σε ένα γράμμα του στον Dedekind<sup>136</sup>, επεσήμαινε ότι δεν θα μπορούσε κανείς να μιλήσει για το σύνολο όλων των συνόλων, χωρίς να καταλήξει σε αντίφαση. Αν είναι  $\mathfrak{R}$  το καθολικό της ιδιότητας  $F$ , το  $\mathfrak{R}$  είναι το σύνολο των συνόλων που δεν είναι στοιχεία του εαυτού τους, οπότε και το στοιχειώδες αξίωμα της συμπερίληψης οδηγεί στην αντίφαση που είναι γνωστή ως παράδοξο του Russell:

$$\mathfrak{R} \in \mathfrak{R} \text{ ανν } \mathfrak{R} \notin \mathfrak{R}^{137}.$$

Το κύριο χαρακτηριστικό του παραδόξου του Russell, και των άλλων συνολοθεωρητικών παραδόξων, είναι η αυτοαναφορά κατά την οποία το καθολικό επιδέχεται την ιδιότητα την οποία και αναπαριστά<sup>138</sup>. Επισημάνθηκε, από τους Russell και Whitehead, ότι πρόκειται για την περίπτωση όπου ένα αντικείμενο ορίζεται με τους όρους μιας κλάσης αντικειμένων που περιέχει το αντικείμενο το οποίο ορίζει. Για παράδειγμα, το σύνολο Russell  $\mathfrak{R}$  μπορεί να είναι, υποτίθεται, ένα από τα  $X$  στη σχέση καθολικότητας:

$$X \in \mathfrak{R} \text{ ανν } X \notin X.$$

Τα σύνολα, όμως, δεν μπορούν να είναι στοιχεία του εαυτού τους. Το σύστημα του Quine (ML system)<sup>139</sup> επιτρέπει, για την καθολική κλάση  $V$ , το  $V \in V$ , αλλά δεν έχει βρεθεί κανένα μοντέλο της Μαθηματικής Λογικής του ML στο οποίο το “ $\in$ ” να ερμηνεύεται ως ανήκειν σε σύνολο.

Η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη θεωρία, των Zermelo<sup>140</sup>-Fraenkel<sup>141</sup> (ZF), θέτει ως αξίωμα ένα υποκατάστατο του αξιώματος της συμπερίληψης που καλείται αξίωμα του διαχωρισμού, το οποίο, με μια μικρή βοήθεια από άλλα αξιώματα, μας δίνει αρκετά σύνολα ώστε να εξυπηρετούνται οι ανάγκες των μαθηματικών. Η γενική ιδέα έχει ως εξής: Δοθέντος ότι υπάρχει η ιδιότητα του να είναι κάτι ένα από αυτά τα στοιχεία, μπορούμε να διαχωρίσουμε, μεταξύ των πραγματώσεων αυτής της ιδιότητας, εκείνες που επιπροσθέτως έχουν κάποια ειδική περιγραφή. Για κάθε σύνολο  $A$  και κατηγορημα  $P$ , μιας ελεύθερης μεταβλητής, υπάρχει σύνολο  $B$  που ικανοποιεί την ισοδυναμία<sup>142</sup>:

$$x \in B \Leftrightarrow x \in A \ \& \ P(x).$$

<sup>136</sup> Richard Dedekind (1831-1916), Γερμανός μαθηματικός.

<sup>137</sup> Ο Cantor είχε συνειδητοποιήσει, επίσης, την προβληματική φύση του συστήματος όλων των συνόλων αφού, αν υπήρχε ως σύνολο, θα ήταν υποχρεωμένο να δώσει το δυναμοσύνολό του ως σύνολο μεγαλύτερης, απ’ το ίδιο, πληθικότητας το οποίο όμως, ταυτόχρονα, όφειλε να περιέχει. Βλ. σχετ., Kvasz, L. (2008). *Patterns of Change: Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, σελ. 79, επίσης, Dauben, J. (1990). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. σελ. 242.

<sup>138</sup> Βλ. σχετ., Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, (v. 1-3) New York, Oxford: Oxford University Press. σ. 1184.

<sup>139</sup> Βλ. σχετ., Quine, W. V. O. (1981). *Mathematical Logic*. Cambridge, Massachusetts & London, England: Harvard Univ. Press, σελ. 140.

<sup>140</sup> Ernst Zermelo, Γερμανός μαθηματικός: 1871-1953.

<sup>141</sup> Abraham Fraenkel, Ισραηλινός μαθηματικός, γεννημένος στη Γερμανία: 1891-1965.

<sup>142</sup> Βλ. σχετ., Moschovakis, Y. (2005). *Notes on Set Theory*. New York: Springer-Verlag. σ. 24, και Μητακίδης, Γ. (1995). *Θεωρία Συνόλων*. Πάτρα: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών. σ. 9.4.

Υπό την συνήθη σημασιολογική άποψη, η συμπερίληψη υπήρξε πάντα η υπόθεση με την πιο αβίαστη ευλογοφάνεια, ως μια αυτο-επιβεβαιούμενη αλήθεια. Η αληθοφάνεια του σχήματος του διαχωρισμού πηγάζει πρωτίστως από την αποφυγή της ασυνέπειας του αξιώματος της συμπερίληψης, ενώ ταυτόχρονα διατηρεί, κατά το δυνατό, το πνεύμα του. Ο κύριος λόγος επιλογής του είναι απλά ότι ακόμη δεν έχει δειχθεί η ασυνέπιά του. Το *σχήμα του διαχωρισμού* δεν μας παρέχει, καθαυτό, ύπαρξη κάποιου συνόλου. Μόνο τη ύπαρξη διαφόρων υποσυνόλων, δοθέντος ότι ήδη έχουμε λόγους να πιστεύουμε σε κάποιο σύνολο, για να ξεκινήσουμε<sup>143</sup>.

Η θεωρία συνόλων έχει, επίσης, το *αξίωμα της έκτασης*, σύμφωνα με το οποίο, δύο σύνολα που έχουν τα ίδια στοιχεία ταυτίζονται<sup>144</sup>:

$$\forall x, (x \in Y \text{ ανν } x \in Y') \Rightarrow Y = Y' .$$

Έτσι, αν τα  $Y$  και  $Y'$  ικανοποιούν το αξιωματικό σχήμα της συμπερίληψης, για την ιδιότητα  $F$ , τότε θα έχουν τα ίδια στοιχεία, δηλαδή θα είναι ίσα:  $Y = Y'$ . Με άλλα λόγια, στη θεωρία συνόλων, η *συνθήκη μοναδικότητας των καθολικών* ικανοποιείται με σχέση ισοδυναμίας “ $\approx$ ” την ισότητα “ $=$ ” μεταξύ συνόλων.

Με τις απαραίτητες τροποποιήσεις, προκειμένου ν' αποφευχθούν τα παράδοξα, η θεωρία συνόλων εξακολουθεί να περιγράφεται ως μια θεωρία των καθολικών. Η σχέση μετοχής είναι η σχέση του *ανήκειν* οπότε, για κατάλληλα περιορισμένα κατηγορήματα, υπάρχει ένα σύνολο που ικανοποιεί τη συνθήκη καθολικότητας. Η ισότητα συνόλων λειτουργεί ως η σχέση ισοδυναμίας στη συνθήκη μοναδικότητας. Αλλά η θεωρία συνόλων δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια γενική θεωρία των καθολικών. Οι τροποποιήσεις, που επάγονται από τα παράδοξα, μετατρέπουν τις διάφορες συνολοθεωρίες σε θεωρίες των *αφηρημένων*, μη αυτο-μετεχόντων, καθολικών αποκλείοντας το να περιέχεται κάποιο σύνολο στον εαυτό του.

<sup>143</sup> Βλ. σχετ., Bigelow, ό. π., σσ. 366-376.

<sup>144</sup> Απηχεί την *αρχή του Leibniz* (1646-1716):  $\forall x \forall y ((x = y) \equiv \forall \psi (\psi x \equiv \psi y))$ . Τουτέστιν, δύο οποιαδήποτε πράγματα είναι τα ίδια ακριβώς όταν με οποιονδήποτε τρόπο και αν είναι το ένα, με τον ίδιο τρόπο είναι και το άλλο. Βλ. σχετ., Bigelow, ό. π., σελ. 160.

### 3.4 Αφηρημένα σύνολα και καθολικά

Η αξιωματική θεωρία συνόλων ανασυγκροτήθηκε χρησιμοποιώντας μια επαναληπτική έννοια συνόλου, ώστε να περιορισθεί το απλό αξίωμα της συμπερίληψης, και να αποτραπούν τα συνολοθεωρητικά παράδοξα<sup>145</sup>. Η επαναληπτική, αυτή, έννοια του συνόλου υποχρεώνει ένα σύνολο  $Y$  να είναι περισσότερο αφηρημένο, ανώτερου τύπου (ή βαθμού), από τα στοιχεία που περιλαμβάνει:  $x \in Y$ .

Συγκεκριμένα, σύνολο θεωρούμε κάθε συλλογή που συγκροτείται σε κάποιο από τα στάδια της ακόλουθης διαδικασίας: Ξεκινάμε με επιμέρους (αν υπάρχουν), δηλαδή με ένα, ή περισσότερα, αντικείμενα που δεν είναι σύνολο, δεν περιλαμβάνει κάποια στοιχεία. Στο «μηδενικό» στάδιο, μορφώνουμε όλες τις δυνατές συλλογές από επιμέρους. Αν δεν υπάρχουν επιμέρους, στο μηδενικό στάδιο, δημιουργείται μόνο μια συλλογή, το κενό σύνολο, που δεν περιλαμβάνει στοιχεία. Σε κάθε επόμενο στάδιο, μορφώνουμε όλες τις δυνατές συλλογές από επιμέρους και σύνολα του προηγούμενου σταδίου. Αυτή είναι μια, grosso modo, περιγραφή της επαναληπτικής θεώρησης των συνόλων<sup>146</sup>. Σύμφωνα με αυτή την περιγραφή, τα σύνολα φτιάχνονται αενάως. Στην πραγματικότητα, σύμφωνα μ' αυτή, ένα σύνολο ξαναδημιουργείται σε κάθε επόμενο στάδιο που ακολουθεί το στάδιο κατά το οποίο πρωτοδημιουργήθηκε. Θα μπορούσαμε όμως, αν θέλαμε, να πούμε ότι κάθε σύνολο δημιουργείται μία και μόνη φορά και να εννοούμε την πρώτη κατά την οποία εμφανίστηκε. Με αυτή την κατασκευή, κανένα σύνολο δεν ανήκει στον εαυτό του, γιατί φτιάχτηκε σε κάποιο στάδιο και έχει ως στοιχεία μόνο επιμέρους και σύνολα φτιαγμένα σε προαιμότερα στάδια. Οπότε δεν υπάρχει και σύνολο όλων των συνόλων.

<sup>145</sup> Η συνολοθεωρία Zermelo-Fraenkel, ή "ZF", είναι η κλασική πρωτοβάθμια θεωρία που εκφράζει την επαναληπτική έννοια του συνόλου κατά τον πληρέστερο δυνατό τρόπο για μια γλώσσα που περιλαμβάνει αριθμήσιμες μεταβλητές, που παίρνουν τιμές στα σύνολα αυτά, και τα σύμβολα " $=$ " και " $\in$ " (που είναι η μόνη μη λογική σταθερά). Υπάρχουν και άλλες θεωρίες, πέραν της ZF, που ενσωματώνουν την επαναληπτική έννοια. Μια απ' αυτές, η Zermelo συνολοθεωρία, ή "Z", είναι υποσύστημα της ZF, με την έννοια ότι κάθε θεώρημα της Z είναι επίσης θεώρημα της ZF. Δύο άλλες, οι von Neumann (1903-1957) – Bernays (Σουηδία, 1888-1977) – Gödel (1906-1978) και A. P. Morse (1911-1984) – J. L. Kelley (1916-1999) συνολοθεωρίες, είναι υπερσυστήματα (επεκτάσεις) της ZF, αλλά είναι περισσότερο γνωστές, στη διατύπωσή τους, ως δευτεροβάθμιες θεωρίες. Βλ. σχετ., Boolos, G. (1971). The Iterative Conception of Set. *The Journal of Philosophy*, 68 (8), Philosophy of Logic and Mathematics, 215-231, σσ. 219-222.

<sup>146</sup> Κάθε έννοια συνόλου περιλαμβάνει τη διαδικασία συγκρότησης μιας συλλογής σε όλο, και τη διαδικασία επανασύστασης των συλλογών ως δομών. Χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη ορολογία, και συμβολισμό, η διαδικασία περιγράφεται ως εξής: Στο μηδενικό στάδιο, ή επίπεδο, ξεκινούμε με άτομα (βλέπε στην επόμενη σελίδα) και κατόπιν συγκροτούμε συλλογές, χρησιμοποιώντας άτομα και στοιχεία του δυναμοσυνόλου, που δομούνται από τη σχέση του περιέχεσθαι. Αν  $V(U)$  είναι ένα σύνολο σύμπαν, με άτομα  $U$ , η θέση στο σύμπαν  $V(U)$  καθορίζει το είδος της δομής του «συνόλου»  $\langle X; \mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C} \rangle$ , όπου  $X$  είναι το σύνολο φορέας, και  $\{\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}\}$  είναι ο οπλισμός της δομής, αποτελούμενος από ένα σύνολο «πράξεων», «σχέσεων», και «σταθερών». Κατ' αυτό τον τρόπο παίρνουμε το σύμπαν κατά von Neumann:  $V_0(U) := U$  ( $U$  είναι το σύνολο των ατόμων),

$$V_{n+1}(U) := V_n \cup \mathcal{P}(V_n(U)), n \in \mathbb{N}, V_\alpha(U) := \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta(U)$$
 (αν  $\alpha$  είναι ένας οριακός διατακτικός) και

$$V(U) := \bigcup_{\alpha \in ON} V_\alpha(U)$$
 όπου ON είναι η κλάση όλων των διατακτικών. Βλ. σχετ., Drossos, C. (2006).

Sets, Categories and Structuralism. Στο G. Sica (επιμ.), *What is Category Theory?* (σ. 95-126). Monza, Italy: Polimetrica, σελ. 105-107.

Το σύνολο, αν το δούμε ως *καθόλου* για μια ιδιότητα, καταλήγει περισσότερο αφηρημένο από τις πραγματώσεις του. Τα *καθολικά*, που οι διάφορες συνολοθεωρίες μας παρέχουν, είναι «αφηρημένα» *καθολικά*, υπό την έννοια ότι είναι περισσότερο αφηρημένα από τα αντικείμενα που έχουν εκείνη την ιδιότητα που το *καθολικό* αναπαριστά.

Και ο Cantor, ως συνέπεια μιας αφαιρετικής διαδικασίας είχε εισάγει την έννοια του πληθαρίθμου: «*Με τον όρο δύναμη ή πληθάριθμο ενός συνόλου  $M$  (που αποτελείται από διακριτά, ξεχωριστά στη διάνοιά μας, στοιχεία  $m, m', \dots$  και κατ' αυτό τον τρόπο, και μόνο, ορισμένα), κατανοώ τη γενική έννοια ή χαρακτήρα (καθολικό) που λαμβάνει κανείς αφαιρώντας τα χαρακτηριστικά από τα στοιχεία του συνόλου καθώς και όλους τους δεσμούς που πιθανώς έχουν (μεταξύ τους ή με άλλα αντικείμενα), και ειδικά τη διάταξη στην οποία βρίσκονται, και βλέποντας, υπ' αυτή τη συνθήκη, μόνο αυτό που έχουν κοινό όλα τα ισοδύναμα, με το  $M$ , σύνολα*»<sup>147</sup>. Όπως δείχνει αυτό το απόσπασμα, κάποιος θα μπορούσε να αποκαλεί αφηρημένα σύνολα ό,τι ο Cantor αποκαλούσε, τελικά, πληθικούς αριθμούς. Αφηρημένο μπορεί να νοηθεί το σύνολο που προκύπτει από ένα συγκεκριμένο σύνολο, όταν κάθε στοιχείο έχει απωλέσει όλες τις εσωτερικές του ποιότητες, πέραν αυτής που το διακρίνει από όλα τα άλλα στοιχεία. Τότε, το αφηρημένο σύνολο είναι μια εικόνα καθαρής διακριτότητας, η εν-σωμάτωση της πληθικότητας καθαυτήν· με άλλα λόγια, η συλλογή ά-σχημων (ά-μορφων), αλλά ωστόσο διακριτών, «σημείων». Το αποκλειστικό, εσωτερικό, χαρακτηριστικό ενός αφηρημένου συνόλου είναι ο αριθμός των στοιχείων του<sup>148</sup>.

Αφηρημένο χαρακτηρίζουμε το σύνολο «...που έχει στοιχεία, καθένα εκ των οποίων δεν έχει καμία δομή, αλλά και το ίδιο, καθ' αυτό, δεν έχει κάποια εσωτερική δομή, πέραν του ότι τα στοιχεία του μπορούν να διακριθούν ως ίσα ή άνισα, ταυτόχρονα με το ότι δεν έχει και κάποια εξωτερική δομή πέραν του αριθμού των στοιχείων του»<sup>149</sup>. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, τα στοιχεία ενός αφηρημένου συνόλου είναι όμοια με άτομα. Τα άτομα είναι δοσμένα αντικείμενα, που θεωρούμε ότι δεν έχουν κάποια συνολοθεωρητική δομή· η ύπαρξή τους είναι ανεξάρτητη οποιασδήποτε συνολοθεωρητικής κατασκευής.

Η θεωρία συνόλων, που βασίζεται στην επαναληπτική έννοια των συνόλων, είναι μια θεωρία των *αφηρημένων καθολικών*. Η πραγμάτωση είναι μια αντισυμμετρική σχέση: αν το  $x$  πραγματώνει το  $y$ , τότε το  $y$  δεν πραγματώνει το  $x$ . Αν δεν συνέβαινε κάτι τέτοιο, και κάποιο  $y$  μπορούσε να πραγματώσει το  $x$  από το οποίο πραγματώθηκε, θα υπήρχαν, στα πλαίσια της κατασκευής που περιγράψαμε πριν, δύο σύνολα που θα ανήκε το ένα στο άλλο. Κάτι τέτοιο, όμως, είναι αδύνατο γιατί αν το  $y$  πραγματώνει το  $x$ , το  $y$  ανήκει στο  $x$ . Οπότε, το  $y$  έχει συγκροτηθεί σε κάποιο πρωιμότερο στάδιο, απ' αυτό στο οποίο συγκροτήθηκε το  $x$ . Κάθε τέτοια αντισυμμετρική σχέση, λοιπόν, γεννά μια ιεραρχία, μια γραμμική διάταξη σαν αυτή της αντισυμμετρικής χρονικής σχέσης «νωρίτερα», ή καλύτερα, μια δομή δέντρου, σαν αυτή της περίπτωσης των οικογενειακών δέντρων που γεννά η αντισυμμετρική σχέση συγγενείας: «γονέας».

<sup>147</sup> Βλ. σχετ., Dauben, J., ό.π., σελ. 221.

<sup>148</sup> Η θεωρία των συγκεκριμένων συνόλων μπορεί να ειπωθεί ως μια επέκταση της θεωρίας ώστε να συμπεριληφθούν τα χαρακτηριστικά. Σ' ένα αφηρημένο σύνολο το μόνο «χαρακτηριστικό» που κατέχουν τα ά-σχημα σημεία του, στα οποία θα αναφερόμαστε ως *στοιχεία του*, είναι αυτό της απλής διακριτότητάς του από τα υπόλοιπα. Βλ. σχετ., Bell, J. (2006). *Abstract and Variable Sets in Category Theory*. Στο G. Sica (επιμ.), *What is Category Theory?* (σ. 9-16). Monza, Italy: Polimetrica International Scientific Publisher, σελ. 10.

<sup>149</sup> Βλ., Lawvere, F. & Rosebrugh, R. (2003). *Sets for Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, σελ. 1.

Ο τύπος ιεράρχησης των καθολικών είναι, τυπικά, πολύ ανάλογος της ιεράρχησης στα σύνολα. Στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να δούμε τη συνολοθεωρητική ιεραρχία, καθαυτήν, ως υποσύνολο της ιεραρχίας των καθολικών αφού το κάθε καθολικό δεν είναι κάποιο σύνολο· κάθε σύνολο, όμως, είναι ένα καθολικό. Τα στοιχεία ενός συνόλου πραγματώνουν το καθολικό που είναι αυτό με το οποίο το σύνολο ισοδυναμεί.

Αλλά, ακόμη και αν τα σύνολα φαίνονται να είναι επαρκή για την πρακτική ενός επαγγελματία μαθηματικού, και να μην χρειαζόμαστε κάποιο από τα υπόλοιπα καθολικά, η επιστήμη και η φιλοσοφία χρειάζονται και άλλα καθολικά τουλάχιστον τόσο, όσο και τα σύνολα.

## ΜΕΡΟΣ Β΄

### 4. Τα συγκεκριμένα καθολικά στη Φιλοσοφία

Προχωρούμε στη μελέτη ενός άλλου τύπου καθολικού, που απαιτείται στην επιστήμη και τη φιλοσοφία, το *συγκεκριμένο καθολικό*. Αν τα αφηρημένα καθολικά είναι ιδεατοί τύποι από τους οποίους αντλούν την ύπαρξή τους οι διάφορες οντότητες, τα συγκεκριμένα καθολικά συγκροτούνται από μια διανοητική πράξη η οποία απελευθερώνει τα κοινά στοιχεία των οντοτήτων αυτών, από τα υπόλοιπα στοιχεία τους, και τα εκφράζει ως «έννοια». Μια εποπτική ιδέα για το συγκεκριμένο καθολικό μιας ιδιότητας, που θα μπορούσαμε να έχουμε, είναι ενός αντικειμένου που έχει την ιδιότητα με έναν τέτοιο καθολικό τρόπο ώστε όλα τα άλλα αντικείμενα, με την ιδιότητα αυτή, να μοιάζουν να μετέχουν σ' αυτή την παραδειγματική, αρχετυπική της, πραγμάτωση.

Η έννοια “συγκεκριμένο καθολικό” ξεκινά με τον Hegel<sup>150</sup>. Τον 16<sup>ο</sup> αιώνα το *abstrahieren* (αφαιρείν) προέκυψε από το λατινικό *abstrahere* που κυριολεκτικά σημαίνει «το να απομακρύνω κάτι από κάτι άλλο». Η μετοχή αορίστου του *abstrahere*, *abstractus*, δημιούργησε, τον 18<sup>ο</sup> αιώνα, τα *abstrakt* και *das Abstrakte* (το αφηρημένο) για να χαρακτηρίσει τα αποτελέσματα μιας τέτοιας αφαίρεσης (*Abstraktion*). Ομοίως, τα *konkret* και *das Konkrete* προέρχονται από τη μετοχή αορίστου *concretus* (αυτό που έχει συνθεθεί, διαμορφωθεί, κατασκευασθεί, συνοψισθεί), του λατινικού *concrecere* (το να διαμορφώνομαι, συνοψίζομαι, συμπυκνώνομαι, συμπτύσσομαι, συστέλλομαι).

Το αφηρημένο συχνά θεωρήθηκε ως η σκέψη, η έννοια ή το καθολικό που αποσπούμε από τη συγκεκριμένη, κατ' αίσθηση πραγματικότητα<sup>151</sup>. Από το 18<sup>ο</sup> αιώνα, οι γερμανοί ρομαντικοί φιλόσοφοι αντέδρασαν στα στοιχεία αφαίρεσης που χαρακτήριζαν τον Διαφωτισμό. Προλαβαίνοντας τον Nietzsche<sup>152</sup> και τον Hegel, ο Herder άσκησε κριτική στην καντιανή διάκριση του *a priori* από το *a posteriori*, της Μορφής, που συγκροτεί η Διάνοια, από την ύλη της. Το αφηρημένο συνδεόταν μεν με το καθολικό και το εννοιολογικό, αλλά και με το μίζερο, το εξαρτημένο ή το άψυχο.

---

<sup>150</sup> 1770-1831: Βλ. σχετ., Inwood, M. J. (1999). *A Hegel Dictionary*. The Blackwell Philosopher Dictionaries. Oxford-Massachusetts: Blackwell Publishers, σσ. 29-31. Επίσης, Inwood, M. J. (2003). *Hegel*. London: Routledge & Kegan Paul. σσ. 366-380.

<sup>151</sup> Ο Kant, σε πολλά από τα έργα του, επέμεινε ότι το *abstrahieren* πρέπει να χρησιμοποιείται αμετάβατα, δηλαδή να μη συνδυάζεται με αντικείμενο, γιατί δεν αποσπούμε κάτι (ειδικά μία έννοια), αλλά ότι η έννοια καθαυτήν, ή εμείς κατά τη χρήση μίας έννοιας, αφαιρούμε από κάτι συγκεκριμένο (παραβλέπουμε), τα επουσιώδη, τα τυχαία χαρακτηριστικά του.

<sup>152</sup> 1844-1900

#### 4.1 Εισαγωγικά σχόλια από τη Φαινομενολογία του Πνεύματος (Geist)<sup>153</sup>

Στη Φαινομενολογία του πνεύματος (ή του νου), εκτίθεται η επιστήμη που μελετά τον τρόπο με τον οποίο μας εμφανίζεται το πνεύμα μας, τον τρόπο με τον οποίο το αντιλαμβανόμαστε· τι κάνουμε όταν σκεφτόμαστε, αποσαφηνίζεται η τυπική φύση του νοείν. Εδώ, το μόνο που μπορεί να κάνει η φιλοσοφία είναι να εμπλακεί σε μία αδιάκοπη κριτική της γνώσης, ώστε να ανέρχεται σε ένα όλο και υψηλότερο επίπεδο, καθώς οι ατέλειες κάθε επιμέρους γνώσης θα ξεπερνιούνται η μία μετά την άλλη. Θα ανακαλύπτονται καινούργιες μορφές συνείδησης εξετάζοντας την κάθε μία από μέσα, όπως ήταν, και δείχνοντας με ποιο τρόπο πιο περιορισμένες μορφές αντίληψης, αναγκαστικά, εξελίχθηκαν σε πιο επαρκείς. Η εξέλιξη αυτή της συνείδησης, προς άλλες μορφές, είναι τέτοια ώστε οι νέες της μορφές να αντιλαμβάνονται κατά τρόπο πιο πλήρη την πραγματικότητα με αποκορύφωμα την «απόλυτη γνώση». Στο έργο αυτό στόχος είναι να καταδειχθεί η δυνατότητα της αληθινής γνώσης. Έτσι, θα λειτουργήσει ως η θεμελίωση του στόχου της φιλοσοφίας να προσφέρει «πραγματική γνώση, αυτού που αληθινά είναι». Η φιλοσοφία θα φτάσει στην προοπτική της Απόλυτης Ιδέας, όπου η γνώση, όντας ολοκληρωμένη, δικαιώνει εαυτήν. Εδώ, το ότι αυτό που είναι ενεργεία πραγματικό «φανερώνεται» δεν σημαίνει ότι αποκαλύπτεται κάποιο ασύλληπτο περιεχόμενό του, αλλά η απουσία κάποιου ασύλληπτου περιεχομένου του, η απουσία ακατανοησίας του.

Με ποιο τρόπο, λοιπόν, γνωρίζουμε την πραγματικότητα; Πώς την καταλαβαίνουμε; Αποκαλύπτοντας μόνες τους μία-μία οι μορφές της συνείδησης ότι δεν αποτελούν την αυθεντική γνώση μας οδηγούν σ' αυτό που ο Hegel αποκαλεί «ορισμένη άρνηση» (determinate negation). Ορισμένη, γιατί με την άρνηση της προηγούμενης μορφής συνείδησης δεν καταλήγουμε στο τίποτα. Ταυτόχρονα με την αναγνώριση της ανεπάρκειας της προηγούμενης μορφής συνείδησης, η «άρνηση» ορίζει και την επόμενη μορφή που θα αντικαταστήσει τη μορφή που καταργήθηκε. Η ορισμένη άρνηση είναι καθαυτήν μία νέα μορφή συνείδησης. Μία συνείδηση που έχει αντιληφθεί την ανεπάρκεια της προηγούμενης και είναι αναγκασμένη να υιοθετήσει μία καινούργια προσέγγιση με σκοπό να υπερνικήσει την προηγούμενη.

Η άνοδος της φιλοσοφίας προς το Απόλυτο είναι η Διαλεκτική. Αντανακλάται σε κάθε σφαίρα της ανθρώπινης προσπάθειας γιατί διαλεκτική και Λόγος (Ratio) είναι ένα. «Λογική» είναι η αφηρημένη μελέτη του Λόγου ως λέξη, περιγραφή, έννοια, εξήγηση, και συλλογιστική. Οι λογικές σχέσεις, όμως, είναι διαδικασίες και ως τέτοιες πρέπει να μελετηθούν. Η «εκδίπλωση», η «έκπτυξη» μίας έννοιας, είναι η εξέλιξη του πνεύματος σε αυτεπίγνωση. Η λογική είναι μία a priori μελέτη της εφαρμογής των εννοιών.

Κάθε σκέψη ενέχει την εφαρμογή μίας έννοιας, αλλά η πρώτη εκδοχή («στιγμή») κάθε έννοιας είναι αφηρημένη. Επιχειρώντας να συλλάβω την πραγματικότητα ξεκινώ, αναγκαστικά, με τους πλέον αφηρημένους όρους όπως «πράγμα», «αντικείμενο». Εν συνεχεία, αντιλαμβάνομαι την ανεπάρκεια της συγκεκριμένης σύλληψης και επιτυγχάνω μία περισσότερο «προσδιορισμένη». Η

<sup>153</sup> Βλ. σχετ., Singer, P. (2006). *Χέγκελ*. (Μ. Χαράλαμψη, μεταφρ.). Αθήνα: Πολύτροπον. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1983), επίσης στο: Hegel, G. W. F. (έκδοση 2007). *Φαινομενολογία του Νου*. (Γ. Φαράκλας, μεταφρ.). Αθήνα: Βιβλιοπωλείον της Εστίας. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1807). σσ. 13-114. Επίσης, βλ. σχετ., Châtelet, F. (1990). *Η Φιλοσοφία*, ό. π., Τόμος Γ'. σσ. 69-95 όπως και στο Kenny, A. (επιμ.) (2005). *Ιστορία της Δυτικής Φιλοσοφίας*. (Δ. Ρισσάκη, μεταφρ.). Αθήνα: Νεφέλη. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε 1994). σσ. 277-284.

ούτως περισσότερο προσδιορισμένη έννοια αντιμάχεται την αφαίρεση με την οποία βρίσκεται σε αντίφαση αφού τίποτε δεν μπορεί να είναι αφηρημένο και συγχρόνως προσδιορισμένο. «Κάθε προσδιορισμός, είναι άρνηση».

Απ' αυτή τη διαμάχη γεννιέται μία νέα έννοια, «αληθέστερη» της πρώτης, και ως προς το ότι κάνει λεπτότερες διακρίσεις, και ως προς το ότι παρουσιάζει μία πιο ολοκληρωμένη εικόνα της πραγματικότητας. Την πρώτη στιγμή παρουσιάζεται μία έννοια, αφηρημένη, «άμεση» και απροσδιόριστη. Άμεση, γιατί απορρέει απευθείας από τη διαδικασία της σκέψης, χωρίς τη βοήθεια άλλων ενδιάμεσων συλλήψεων. Τη δεύτερη στιγμή η αφηρημένη έννοια διαμεσοποιείται από αντίπαλες συλλήψεις, προκειμένου να γίνει «προσδιορισμένη». Δηλαδή, να λέει κάτι συγκεκριμένο για το θέμα της. Την τρίτη στιγμή η διαμάχη ανάμεσα στην αφηρημένη και την προσδιορισμένη σύλληψη, λύεται με μία διανοητική «υπέρβαση», σε μία «αληθέστερη» (πληρέστερη) σύλληψη, η οποία περιέχει και τις δύο. Μ' αυτόν ακριβώς τον τρόπο, η «συνείδηση πραγματώνει εαυτήν, καθώς ανυψώνεται από το αφηρημένο σκέπτεσθαι, στην ορθολογικότητα».

Ο Hegel λέει ότι φτάνει κανείς στα διάφορα στάδια μέσω της αντίφασης. Οι έννοιες, καθώς είναι από τη φύση τους καθολικές, είναι αφηρημένες. Η εφαρμογή τους είναι μία μερίκευση. Ωστόσο, δεν υπάρχει τίποτε έξω από τις έννοιες το οποίο θα μπορούσε να εισαγάγει το στοιχείο της μερικότητας, γιατί δεν έχουμε πρόσβαση σε καμία προ-εννοιολογική πραγματικότητα. (Αυτή είναι η υποκείμενη παραδοχή του υπερβατολογικού<sup>154</sup> ιδεαλισμού). Οι έννοιες, δηλαδή, πρέπει κατά κάποιο τρόπο να αυτο-εφαρμόζονται. Πρέπει να περιέχουν ό, τι είναι αναγκαίο, εντός τους, για να αναγνωριστεί η επιμέρους περίπτωση. Το αφηρημένο καθολικό στοιχείο σε κάθε έννοια πρέπει να αντισταθμίζεται με ένα στοιχείο συγκεκριμένου επιμερισμού. Η σύγκρουση μεταξύ των δύο είναι ό, τι οδηγεί στην ιδέα μίας συγκεκριμένης πραγματικότητας.

Το «είναι», για παράδειγμα, όπως συλλαμβάνεται αρχικά είναι τελείως αφηρημένο. Πρόκειται για μία «απροσδιόριστη αμεσότητα». Μπορώ να κατανοήσω αυτή την ιδέα χωρίς τη βοήθεια κάποιας άλλης. Είναι «άμεση» γιατί είναι τελείως απροσδιόριστη. Εφαρμόζεται στα πάντα. Άρα δεν λέει κάτι συγκεκριμένο για τίποτα. Έχουμε αμεσότητα σε βάρος του προσδιορισμού. Αλλά και βεβαιότητα, σε βάρος του περιεχομένου. Κατά την κατηγορήση του *Είναι*, δεν λέμε τίποτα για το *τι Είναι*. Συνεπώς, το να λέμε ότι υπάρχει *Είναι* σημαίνει ότι δεν λέμε τίποτα. Αυτό, είναι η αντίφαση. Έχουμε εφαρμόσει όχι μόνο την έννοια του *Είναι*, αλλά και του τίποτα, του *μη-Είναι*, που βρίσκεται κρυμμένη μέσα στο *Είναι* και αδημονεί να διεξαγάγει «πόλεμο» μαζί του. Να σκέφτεσαι, να ονομάζεις το *Είναι*, σημαίνει συνάμα να σκέφτεσαι το *Μηδέν*. Το *μη-Είναι* προσδιορίζει, περιορίζει, το *Είναι* και το υποχρεώνει να περάσει στην επόμενη έννοια της διαλεκτικής αλυσίδας, στην έννοια του προσδιορισμένου *Είναι*: του είδους του *Είναι* που έχουν τα γνήσια επιμέρους.

Εν συνεχεία, προκύπτει μία νέα διαλεκτική αντίθεση ανάμεσα στο *Είναι* και στο *προσδιορισμένο Είναι*, η οποία μπορεί να λυθεί μόνο μέσω χρονικών τρόπων του σκέπτεσθαι. Δίνεται έτσι νόημα στην ιδέα ότι ένα και το αυτό πράγμα είναι και δεν είναι. Μέσω του χρόνου, αντιδιαστέλλουμε οντότητες με το να τις μετράμε και να τις διακρίνουμε, αλλά μας παρέχεται και η έννοια του «γίνεσθαι», το επόμενο στάδιο της διαλεκτικής, μέσω της οποίας κατανοούμε το *Είναι* των οργανισμών. Οι οργανισμοί είναι οντότητες σε συνεχή κατάσταση γίνεσθαι που, όμως, παραμένουν οι ίδιες. Όταν σκεφτόμαστε σταθερά την αναγκαία και ανταγωνιστική ταυτόχρονη

<sup>154</sup> Υπερβατολογική ονομάζεται κάθε γνώση η οποία δεν ασχολείται τόσο με τα αντικείμενα, όσο με το δικό μας τρόπο γνώσης των αντικειμένων, καθ' όσον αυτός πρόκειται να είναι a priori δυνατός.



παρουσία του *Είναι* και του *Μηδενός*, εκείνο που σκεφτόμαστε είναι το *Γίγνεσθαι*· το πέρασμα από τον ένα όρο στον άλλο.

Πώς θα ξέρουμε ότι έχουμε φτάσει το «απόλυτο»; Την αληθινή γνώση; «Το τέρμα είναι το σημείο εκείνο που η γνώση δεν αναγκάζεται πλέον να ξεπεράσει τον εαυτό της». Πριν, η συνείδηση ήταν υποχρεωμένη να παραδεχθεί ότι η γνώση της δεν ήταν επαρκής, και να αγωνισθεί για μία πιο επαρκή γνώση. Μία γνώση η οποία βρισκόταν εκτός των δικών της δυνατοτήτων καθώς ζητά να γνωρίζει την πραγματικότητα καθαυτήν. Στο τέλος της διαδικασίας, η πραγματικότητα παύει να είναι κάτι το οποίο είναι πέρα από τις δυνατότητες της συνείδησης στο να το γνωρίσει. Η συνείδηση είναι σε θέση να γνωρίζει άμεσα την πραγματικότητα, και να βρίσκεται σε συμφωνία μαζί της. Δεν έχουμε γνώση των φαινομένων, πλέον, αλλά της ίδιας της πραγματικότητας. Όταν η διαλεκτική αλυσίδα θα έχει συμπληρωθεί, στο τελικό σημείο της γνώσης, η έννοια γίνεται Ιδέα και αποκαλύπτεται η αλήθεια του κόσμου. Η απόλυτη γνώση επιτυγχάνεται όταν το πνεύμα συνειδητοποιήσει ότι αυτό που επιζητά να γνωρίζει, κατ' ουσίαν, είναι ο ίδιος του ο εαυτός ακόμα μια φορά και κάθε φορά...

## 4.2 Η έννοια του συγκεκριμένου καθολικού στον Hegel

«...το εγγεγραμμένο καθολικό ... αναγνωρίζει τον εαυτό του μόνο στις ακάθαρτες, άμορφες και κηλιδωμένες μορφές· αν θελήσουμε να παραμερίσουμε αυτές τις παραμορφώσεις, ώστε να συλλάβουμε το καθολικό στην άθικτη καθαρότητά του, παίρνουμε το ακριβώς αντίθετό του»<sup>155</sup>.

Žižek<sup>156</sup>, *The Sublime Object of Ideology*

Ο Hegel αντιπαραβάλλει το αφηρημένο με το συγκεκριμένο, και αξιολογεί κάτι με τον ένα ή τον άλλο χαρακτηρισμό, ανάλογα με το πλαίσιο στο οποίο κινείται. Κάποιες φορές η διάκριση αυτή εξισώνεται με τη διάκριση ανάμεσα σε ένα καθολικό που απλώς χαρακτηρίζει επιμέρους οντότητες και σε ένα καθολικό που τις συνιστά. Όσον αφορά τα γενικά χαρακτηριστικά ενός πράγματος μπορούν να είναι δύο ειδών: εκείνα των οποίων η κατοχή είναι αναγκαία συνθήκη για την κατοχή άλλων και εκείνα για τα οποία δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Χαρακτηριστικά του πρώτου τύπου, όπως για παράδειγμα το να είναι κάτι ζώο, ή φυτό, ή πρόσωπο, είναι συγκεκριμένα καθολικά, ενώ αυτά που ανήκουν στο δεύτερο τύπο είναι αφηρημένα καθολικά. Απ' αυτή την άποψη η διαφορά φαίνεται να είναι ποιοτική<sup>157</sup>. Η διαφορά ανάμεσα σε αφηρημένα και συγκεκριμένα καθολικά, κάποιες φορές, σκιαγραφείται, από τον ίδιο, και προς μια άλλη κατεύθυνση. Ένα αφηρημένο καθολικό εμπεριέχει μόνο ένα χαρακτηριστικό κάποιου πράγματος, το οποίο και διακρίνεται έντονα, και έχει αποσπασθεί από άλλα χαρακτηριστικά του. Ένα συγκεκριμένο καθολικό, αντιθέτως, αναφέρεται σε πολλά διακριτά, αλλά συμπελεγμένα καθολικά χαρακτηριστικά. Αλήθεια είναι, επίσης, ότι άλλες φορές ο Hegel δεν φαίνεται να θεωρεί το συγκεκριμένο καθολικό ως έναν τύπο καθολικού, αλλά μάλλον να ισχυρίζεται πως όλα τα καθολικά είναι στην πραγματικότητα συγκεκριμένα.

Ειδικότερα, τώρα, όταν ο Hegel μιλά για την «συγκεκριμένη έννοια» και «τη συγκεκριμένη καθολικότητα» θεωρεί έναν αριθμό πραγματικών και διακριτών μεταξύ τους οντοτήτων οι οποίες, όμως, δεν έχουν κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά που να τις κάνουν καθολικές και συγκεκριμένες. Συνήθως εννοεί ότι οι έννοιες ή τα καθολικά δεν είναι απολύτως διακριτά από το κατ' αίσθηση συγκεκριμένο από τη στιγμή που, για παράδειγμα, συγκροτούν την ουσία του συγκεκριμένου, όπως επίσης ότι δεν είναι απολύτως διακριτά από την μερικότητα και την ατομικότητα. Ταυτόχρονα, όμως, αντιτίθεται στη ροπή να βλέπουμε όλες τις έννοιες ή τα καθολικά το ίδιο με την ερυθρότητα ενός πράγματος, για παράδειγμα, τη στιγμή που το χαρακτηριστικό αυτό δεν επηρεάζει σημαντικά τη φύση, ή τις σχέσεις, αυτού του πράγματος με άλλα κόκκινα πράγματα· ένα κόκκινο αντικείμενο μπορεί εύκολα να γίνει (ή να το φανταστούμε να γίνεται) κάποιου άλλου χρώματος χωρίς να αλλάζει τις άλλες ιδιότητές του και να έχει λίγα λοιπά κοινά στοιχεία με άλλα κόκκινα πράγματα. Αντιθέτως, ένα καθολικό σαν αυτό που συνιστά η ζωή, η ουσία των ζωντανών πραγμάτων, κατευθύνει, εν μέρει, την εσωτερική τους διάρθρωση και τα καθιστά ουσιαστικά σχετιζόμενα μεταξύ τους δυνάμει του κοινού τους αυτού στοιχείου. Γι' αυτό και έχουμε μια επιστήμη της ζωής, ταυτόχρονα που θα φαινόταν παράλογο να προταθεί μια επιστήμη για τα κόκκινα αντικείμενα.

<sup>155</sup> Βλ., Žižek, S. (2008). *The Sublime Object of Ideology*. London: Verso. σελ. 166.

<sup>156</sup> Σλοβένος φιλόσοφος γεννημένος το 1949.

<sup>157</sup> Η ζωώδης ύπαρξή μου, για παράδειγμα, είναι θεμελιωδέστερη της προσωπικής μου, με την έννοια ότι οι περισσότερες από τις ιδιότητές μου εδράζονται σ' αυτήν.

Η διάκριση μεταξύ αφηρημένου και συγκεκριμένου καθολικού αρχικά εγείρεται στη συζήτηση για την Έννοια (*Begriff*) και τα διάφορα επίπεδα κρίσεων και συλλογισμών, που συνδέονται με την πραγμάτευσή της, στο πρώτο μέρος του Βιβλίου III της *Λογικής*. Κύριος σκοπός του Hegel κατά τη σκιαγράφηση της αντίθεσης ανάμεσα στο «αφηρημένο» και το «συγκεκριμένο» καθολικό, εκεί, είναι αυτή η αντίθεση να σχετισθεί με τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να θεωρηθεί η σχέση μεταξύ των κατηγοριών της καθολικότητας, της μερικότητας και της ατομικότητας, γιατί ενώ το «αφηρημένο καθολικό... αντιτίθεται στο επιμέρους και το καθέκαστο»<sup>158</sup> δεν συμβαίνει το ίδιο με το συγκεκριμένο καθολικό. Χαρακτηριστικό του τελευταίου είναι ότι «δεν μπορούμε να μιλάμε για το καθολικό χώρια από το πώς προσδιορίζεται· που είναι, ακριβέστερα, η μερικότητα και η ατομικότητά του μιας και το καθολικό καθαυτό, στην απόλυτη αρνητικότητά του, περιλαμβάνει προσδιοριστικότητα»<sup>159</sup>. Τουτέστιν: «Ως αρνητικότητα γενικώς, δηλαδή σύμφωνα με την πρώτη άμεση άρνηση, το καθολικό περιέχει τη δυνατότητα, του εν γένει προσδιορισμού, ως μερικότητα· ως δεύτερη άρνηση, δηλαδή ως άρνηση της άρνησης, είναι απόλυτη δυνατότητα προσδιορισμού, δηλαδή ατομικότητα και σαφήνεια. Το καθολικό συνεπώς είναι η ολότητα της Έννοιας· είναι ό,τι είναι συγκεκριμένο· δεν είναι κενό αλλά, αντιθέτως, έχει δια της Έννοιάς του ένα περιεχόμενο - περιεχόμενο στο οποίο δεν συντηρεί απλώς τον εαυτό του αλλά είναι αυτό καθαυτό και εμμενές σ' αυτό. Μπορούμε, πράγματι, να κάνουμε αφαίρεση στο περιεχόμενο αυτό· τότε, όμως, δεν λαμβάνουμε το καθολικό στοιχείο της Έννοιας, αλλά το αφηρημένο καθολικό που είναι μια απομονωμένη και ατελής στιγμή της Έννοιας, που δεν έχει καμιά αλήθεια»<sup>160</sup>.

Ο Hegel, συνεπώς, συλλαμβάνει το συγκεκριμένο καθολικό ως το «καθολικό της Έννοιας», στο βαθμό που εμπεριέχει μια διαλεκτική σχέση με τη μερικότητα και την ατομικότητα, πράγμα που δεν έχει το αφηρημένο καθολικό. Το καθολικό αυτό είναι πράγματι συγκεκριμένο από τις ακόλουθες τρεις απόψεις:

α. Δεν πρόκειται απλώς για μια ιδιότητα, με την έννοια του δυνατού τρόπου ύπαρξης ενός καθέκαστου. Μάλλον είναι αυτό που είναι το καθέκαστο, στο βαθμό που το καθέκαστο είναι μια πραγμάτωση αυτού του είδους πράγματος· συνεπώς είναι ένα ουσιαστικό καθολικό (π.χ. «άνθρωπος» ή «τριαντάφυλλο») και όχι ένα καθολικό ιδιότητας (π.χ. «κόκκινο» ή «ψηλός»)<sup>161</sup>.

β. Στηρίζει καθολικές προτάσεις σαν αυτές των φυσικών νόμων («οι άνθρωποι είναι έλλογα όντα») και κανονιστικές προτάσεις («επειδή αυτός ο άνθρωπος είναι παράλογος είναι ένα ατυχές παράδειγμα ανθρωπίνου όντος»). Αυτές πρέπει συνεπώς να διακριθούν από καθολικά ποσοδεικτούμενες προτάσεις («όλα τα ανθρώπινα όντα έχουν πτερύγια στο αυτί», «όλοι οι κύκνοι είναι λευκοί»), οι οποίες μας λένε τα χαρακτηριστικά που μοιράζονται μια ομάδα ατόμων περισσότερο, παρά τα χαρακτηριστικά του είδους στο οποίο ανήκουν (οι άνθρωποι ως τέτοιοι είναι έλλογοι)<sup>162</sup>.

<sup>158</sup> Βλ., Hegel, G. W. F. (έκδοση 2010). *The Science of Logic*. (G. di Giovanni, μεταφρ.). Cambridge: Cambridge University Press. §12.34, σελ. 531.

<sup>159</sup> Βλ., Hegel, ό.π., §12.35, σελ. 532.

<sup>160</sup> Ο. π.

<sup>161</sup> Βλ. σχετ., Hegel, G. W. F. (έκδοση 2007). *Hegel's Philosophy of Mind*. (W. Wallace & A. V. Miller, μεταφρ.). Oxford: Clarendon Press. §456 Συμπλήρωμα, σελ. 191, όπου ο Hegel διακρίνει το γένος ως συγκεκριμένο καθολικό από τις επιμέρους ιδιότητες του καθέκαστου: «Αυτό το κοινό στοιχείο είναι είτε κάθε επιμέρους όψη του αντικείμενου υψωμένη στη μορφή της καθολικότητας, όπως για παράδειγμα στο τριαντάφυλλο το κόκκινο χρώμα, είτε το συγκεκριμένο καθολικό, το γένος, για παράδειγμα στο τριαντάφυλλο, το φυτό».

<sup>162</sup> «Το υποκείμενο, έτσι, έχει απολέσει το μορφικό προσδιορισμό της αναστοχαστικής κρίσης που ολοκλήρωσε την πορεία της από το "αυτό" στο "όλα" μέσω του "κάποια". Αντίθετα απ' το "όλοι οι

γ. Μπορούν καθέκαστα, που έχουν διαφορετικές ιδιότητες, να λειτουργούν ως υποδείγματά του με τρόπο ώστε να μην απαιτείται να έχουν μεταξύ τους κάτι κοινό πέρα από το γεγονός ότι υποδειγματίζουν το ίδιο συγκεκριμένο καθολικό (ο τρόπος με τον οποίο ένα καθέκαστο είναι άνθρωπος μπορεί να διαφέρει από τον τρόπο με τον οποίο ένα άλλο καθέκαστο είναι επίσης άνθρωπος)<sup>163</sup>.

Καίριας σημασίας για την αντίληψη που έχει ο Hegel για το συγκεκριμένο καθολικό αποτελεί η φράση «...[ενώ] το αφηρημένο καθολικό... αντιτίθεται στο επιμέρους και ατομικό» το συγκεκριμένο καθολικό όχι. Μ' αυτό τον ισχυρισμό ο Hegel εννοεί τα εξής: Ένα τριαντάφυλλο δεν είναι ένα ατομικό τριαντάφυλλο επειδή υποδειγματίζει το αφηρημένο καθολικό «κόκκινο», αλλά το συγκεκριμένο καθολικό «τριαντάφυλλο». Έτσι, το τελευταίο σχετίζεται διαλεκτικά με την ατομικότητα με τρόπο που το πρώτο δεν το κάνει. Και υποδειγματίζει το αφηρημένο καθολικό «κόκκινο», με τον ίδιο τρόπο που το κάνουν και άλλα κόκκινα αντικείμενα, ενώ υποδειγματίζει το συγκεκριμένο καθολικό «τριαντάφυλλο» διαφορετικά από άλλα τριαντάφυλλα, στο βαθμό που κάποια τριαντάφυλλα είναι ευωδιαστά ενώ άλλα δεν είναι, κάποια είναι αιθαλή και άλλα όχι, κ.λπ. Έτσι, το τελευταίο σχετίζεται διαλεκτικά και με τη μερικότητα με τρόπο που το πρώτο, επίσης, δεν κάνει. Ενώ, λοιπόν, μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε το «κόκκινο» κάνοντας αφαίρεση από την ατομικότητα και τη μερικότητα, δεν μπορούμε να συλλάβουμε το «τριαντάφυλλο» μ' αυτό τον τρόπο. Αυτό το είδος καθολικότητας εμπεριέχει «την ολότητα της Έννοιας» (δηλαδή, τις άλλες στιγμές της μερικότητας και ατομικότητας) με τον τρόπο που ένα αφηρημένο καθολικό δεν θα μπορούσε.

Η θεωρία, λοιπόν, του Hegel για το συγκεκριμένο καθολικό μπορεί να συνοψισθεί ως εξής: το ατομικό δεν είναι τίποτε περισσότερο από μια πραγμάτωση καθολικών (δεν υπάρχουν «σκέτα» ατομικά), αλλά τα καθολικά που συνιστούν το ατομικό δεν είναι απλά καθολικά ιδιοτήτων, όπως αυτά που μας λένε τι χαρακτηριστικά έχει το ατομικό, και όχι αυτό που είναι το ατομικό. Τα ουσιώδη καθολικά, που συνιστούν τη φύση του ατομικού ως τέτοιου, δεν υπάρχουν γενικά, αλλά μόνο ως μερικεύσεις καθολικών ιδιοτήτων, και έτσι, πραγματωμένα στη μορφή των καθέκαστων (άρα ο πλατωνισμός είναι εσφαλμένος). Ξεκινώντας από οποιαδήποτε από τις κατηγορίες της Έννοιας (καθολικότητα, μερικότητα, ατομικότητα), η καθεμιά τους μπορεί να γίνει αντιληπτή μόνο υπό το φως των άλλων δύο: η ατομικότητα συνίσταται από το μερικευμένο ουσιώδες καθολικό (ως ατομικό, ως «ατομικότητα», είμαι άνθρωπος με ορισμένο σύνολο ιδιοτήτων που με ξεχωρίζουν από τους άλλους)· το ουσιώδες καθολικό υπάρχει μόνο στα επιμέρους, μέσα από την μερίκευσή του (το καθολικό «άνθρωπος» υπάρχει, in rebus, πραγματωμένο σε

---

άνθρωποι" οφείλουμε τώρα να πούμε "το ανθρώπινο ον"». Βλ., Hegel, *The Science of Logic*. ό.π., §12.76, σελ. 574. Επίσης, «Ο,τιδήποτε ανήκει σε όλα τα είδη ενός γένους, ανήκει φυσικά στο γένος· αυτό είναι μια έμμεση συνέπεια. Εκφράζει ό,τι έχουμε ήδη δει: ότι το υποκείμενο π.χ. "όλοι οι άνθρωποι" χάνει την προσδιοριστική μορφή του και αυτό που πρέπει να λέγεται στη θέση του είναι "το ανθρώπινο ον"». Βλ., Hegel, *The Science of Logic*. ό.π., §12.77, σελ. 575.

<sup>163</sup> «Όταν οι άνθρωποι μιλούν για την Έννοια, συνήθως έχουν στο μυαλό τους μόνο την αφηρημένη καθολικότητα, και συνεπώς η Έννοια, εξίσου συχνά, προσδιορίζεται ως μια γενική έννοια. Μ' αυτό τον τρόπο, μιλάμε για την «έννοια» του χρώματος, ή ενός φυτού, ενός ζώου κ.ο.κ., και αυτές οι έννοιες υποτίθεται πως αναφέρονται καθώς παραβλέπουμε τα επιμέρους χαρακτηριστικά δια των οποίων τα διάφορα χρώματα, φυτά, ζώα κ.λπ., διακρίνονται μεταξύ τους, και επικεντρωνόμαστε σ' αυτό που έχουν κοινό. Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο η διάνοια αντιλαμβάνεται την Έννοια, και δικαιολογείται το αίσθημα ότι τέτοιες έννοιες είναι απατηλές και κενές, ότι είναι απλά σχήματα και σκιές. Αυτό που είναι καθολικό ως προς την Έννοια δεν είναι στην πραγματικότητα απλώς κάτι κοινό απέναντι στο οποίο στέκεται το επιμέρους. Αντίθετα το καθολικό είναι αυτό που μερικεύεται (ειδικεύεται), παραμένοντας στον εαυτό του μέσα στην μερίκευσή του, με λαγαρή σαφήνεια». Βλ., Hegel, *The Encyclopaedia Logic*. ό.π., §163 (Προσθήκη 1), σελ. 240.

διαφορετικούς ανθρώπους)· και η μερικότητα είναι μια τροπή του ουσιώδους καθολικού που συνιστά το ατομικό (επειδή είμαι άνθρωπος, έχω τις ιδιότητες εκείνες που με κάνουν να διακρίνομαι από τους άλλους ανθρώπους). Είναι η διαλεκτική διασύνδεση μεταξύ των τριών κατηγοριών που ο Hegel χαρακτηρίζει «έκπτυξη», εξέλιξη του πνεύματος σε αυτεπίγνωση, και την οποία πιστεύει πως λαμβάνουμε όταν θεωρούμε το καθολικό ως «συγκεκριμένο», περισσότερο, παρά ως απλώς «αφηρημένο», καθώς μόνο τότε είμαστε ικανοί να διακρίνουμε ανάμεσα σε ουσιώδη καθολικά και σε καθολικά ιδιοτήτων ώστε να μην έχουμε γνώση των φαινομένων απλώς, αλλά της ίδιας της πραγματικότητας<sup>164</sup>.

---

<sup>164</sup> Βλ. σχετ., Stern, R. (2007). Hegel, British Idealism, and the Curious Case of the Concrete Universal. *British Journal for the History of Philosophy*, 15 (1), 115-153, σσ. 125-133.

### 4.3 Τα συγκεκριμένα καθολικά στον αγγλικό ιδεαλισμό

«...το εγγεληανό καθολικό είναι, έτσι, ένα πλάσμα της φαντασίας αφού δεν υπάρχει κάπου στην πραγματικότητα... αλλά η πραγματικότητα, καθαντήν, το σημαίνει, ως σημείο αναφοράς, και του απονέμει τη συμβολική του συνάρειω»<sup>165</sup>.

Žižek, *The Sublime Object of Ideology*

Είδαμε την έννοια του “συγκεκριμένου καθολικού” να ξεκινά με τον Hegel, αλλά θα αναδειχθεί στους Άγγλους ιδεαλιστές<sup>166</sup>, από τα μέσα του 19<sup>ου</sup> μέχρι τις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα<sup>167</sup>, καθώς εστίασαν την προσοχή τους στο Βιβλίο ΙΙ της *Λογικής*. Στηριζόμενοι εκεί ισχυρίστηκαν ότι αποκάλυψαν αυτό το «εξωτικό» και «εξαφανισμένο πλάσμα», που αποτελούσε η έννοια του συγκεκριμένου καθολικού<sup>168</sup>. η κεντρική ιδέα της ιδεαλιστικής φιλοσοφίας του 19<sup>ου</sup> αιώνα<sup>169</sup>.

Το ερώτημα που απασχόλησε τον Hegel και τους Βρετανούς ιδεαλιστές είναι κατά πόσο η σκέψη μας χαρακτηρίζεται από απλές αφαιρέσεις από την πραγματικότητα, και ποιες θα μπορούσαν να είναι οι μεταφυσικές και επιστημολογικές συνέπειες στην περίπτωση απόδειξης του αντιθέτου.

Ο βασικός ισχυρισμός, που αποδίδεται ως χαρακτηριστικός των βρετανών ιδεαλιστών και ο οποίος απετέλεσε και αντικείμενο σφοδρής κριτικής στην εποχή που διατυπώθηκε, συνοψίστηκε από τους κριτές του ο εξής: «το ατομικό, ως ατομικό, είναι ένα καθολικό»<sup>170</sup>. Η σκέψη, πίσω από αυτή την αντίληψη για το καθολικό, θεωρήθηκε πως είναι ότι τα καθολικά έχουν μια δομή του τύπου «ένα-στα-πολλά» σε σχέση με τις πραγματώσεις τους. Αποτελούν, δηλαδή, τη σταθερή, την κοινή δομή μεσ’ την πολυμορφία. Στο βαθμό που, ως προς τα χαρακτηριστικά τους, τα επιμέρους έχουν αυτή τη δομή, πρέπει να τα σκεφτόμαστε ως «συγκεκριμένα καθολικά».

Μια από τις ηγετικές μορφές του κινήματος, ο F. H. Bradley<sup>171</sup>, γράφει πως ενώ από μια άποψη κάτι που είναι ατομικό (όπως ένας άνθρωπος) είναι επιμέρους επειδή αποκλείει όλα τα άλλα τα ατομικά, από μια άλλη άποψη είναι «ένα καθολικό,

<sup>165</sup> Βλ., Žižek, S. (2008). *The Sublime Object of Ideology*. London: Verso. σελ. 167.

<sup>166</sup> Πρόκειται για φιλοσοφικό ρεύμα του οποίου οι κυριότεροι εκπρόσωποι εμφορούνταν από ένα είδος απόλυτου ιδεαλισμού: η πραγματικότητα είναι μια απλή, ενοποιημένη συναίσθηση, μια κοσμική εμπειρία, χωρίς παρελθόν, παρόν ή μέλλον, αιωνίως τέλεια, που δεν περιλαμβάνει καμιά πεπερασμένη ύπαρξη. Οι αντιλήψεις αυτές έχουν τις ρίζες τους στη φιλοσοφία των Spinoza (Ολλανδό-Εβραίος φιλόσοφος: 1632-1677), Kant και Hegel, με τη διαφορά ότι οι βρετανοί ιδεαλιστές τις επεξεργάστηκαν περαιτέρω, ανεξάρτητα και πρωτότυπα. Προς αυτή την κατεύθυνση τους κινητοποιούσε η επιθυμία τους να αντισταθούν στον υλισμό και να υποστηρίξουν την ενστικτώδη αντίληψη, που έχουμε, για το νόημα του ανθρώπινου βίου.

<sup>167</sup> Βλ. σχετ., Stern, R. (2007). Hegel, British Idealism, and the Curious Case of the Concrete Universal. *British Journal for the History of Philosophy*, 15 (1), 115-153, σελ. 115.

<sup>168</sup> Βλ. σχετ., Mander, W. J. (2000). Bosanquet and the Concrete Universal. *The Modern Schoolman*. 77, (4), 293-308. σελ. 293.

<sup>169</sup> Βλ. σχετ., Milne, A. (1962). *The Social Philosophy of English Idealism*. London: Allen & Unwin. σελ. 15.

<sup>170</sup> Βλ. σχετ., Smith, N. K. (1927). The Nature of Universals (I). *Mind*. 36, (142), 137-157. σελ. 144. Επίσης, Smith, N. K. (1927). The Nature of Universals (II). *Mind*. 36, (143), 265-280, και Smith, N. K. (1927). The Nature of Universals (III). *Mind*. 36, (144), 393-422.

<sup>171</sup> Βρετανός, 1846-1924.

γιατί είναι ένας άνθρωπος σε όλα τα διάφορα χαρακτηριστικά του»<sup>172</sup>, και συνεχίζει: «στη φράση “ο Καίσαρ είναι άρρωστος”, δεν επιβεβαιώνεται τίποτε άλλο, για τον Καίσαρα, πέρα από το ότι είναι άρρωστος· είναι ο κοινός δεσμός πολλών χαρακτηριστικών και γι’ αυτό καθολικό»<sup>173</sup>, οπότε, «το ατομικό είναι... ένα συγκεκριμένο καθολικό»<sup>174</sup>. Ο B. Bosanquet<sup>175</sup>, επίσης, γράφει: «Ας θεωρήσουμε μια πρόταση σαν την: “Ο Καίσαρ διέβη το Ρουβίκωνα”... το σημείο που τονίζει αυτή η απόφαση είναι ότι πρόκειται ακριβώς για τον ίδιο άνθρωπο εν μέσω των διαφορετικών σχέσεων: του να είναι ο κατακτητής των Γαλατών, αλλά και ο βαδίζων εντός της Ιταλίας. Η ταυτότητα είναι το ατομικό, ή το συγκεκριμένο καθολικό, που παραμένει σταθερό εν μέσω αυτών των σχέσεων»<sup>176</sup>.

Η πρόταση του Bosanquet ότι οφείλουμε «να θεωρήσουμε ένα ατομικό, χαρακτηρισμένο από ένα κύριο όνομα, ως παράδειγμα ενός συγκεκριμένου καθολικού»<sup>177</sup> φαίνεται να είναι η βασική και διακριτή θέση των βρετανών ιδεαλιστών. Η δυσκολία με αυτή τη θέση είναι ότι φαίνεται να εμπεριέχει μια σύγχυση: πώς είναι δυνατό ένα ατομικό να είναι κάτι καθολικό (συγκεκριμένο ή άλλου τύπου); Φυσικά υπάρχει μια “ένα στα πολλά” σχέση μεταξύ ενός ατομικού και των μερών του, χαρακτηριστικών του κ.λπ., όπως μεταξύ ενός καθολικού και των πραγματώσεών του, αλλά αυτή η δομική ομοιότητα δεν είναι λόγος να τα συγχέουμε. Ο Bradley μας λέει: «Το ατομικό είναι ταυτόχρονα ένα συγκεκριμένο επιμέρους και ένα συγκεκριμένο καθολικό... από διαφορετικές οπτικές γωνίες» περιγράφοντας τη θεώρηση του ατομικού στις «περιοριστικές και αποκλειστικές σχέσεις με άλλα φαινόμενα» και ως «ένα, εν μέσω όλων των διαφορετικών χαρακτηριστικών του»<sup>178</sup>.

Οι Βρετανοί ιδεαλιστές συνέλαβαν το συγκεκριμένο καθολικό ως έναν ιδιαίτερο τύπο καθολικού: «το καθολικό στη μορφή ενός κόσμου»<sup>179</sup> περισσότερο, όπως τέθηκε από τον Bosanquet, παρά στη μορφή μιας κλάσης. Με το «καθολικό στη μορφή ενός κόσμου» ο Bosanquet εννοούσε ότι τα ατομικά, που αποτελούν παραδείγματα αυτού του καθολικού, σχετίζονται μεταξύ τους σε ένα σύστημα αμοιβαίας αλληλεξάρτησης, ενώ τα ατομικά που απλώς ανήκουν στην ίδια κλάση όχι. Ο Josiah Royce<sup>180</sup> θέτει την ιδέα ως εξής: «Αυτό το καθολικό δεν είναι καθόλου αφαίρεση, αλλά ένα εντελώς συγκεκριμένο όλο καθώς όλες οι πραγματώσεις του δεν είναι απλά παραδείγματά του, αλλά τις εγκολλώνεται, παρουσιάζονται ως στιγμές του, και υπάρχουν μόνο σε σχέση μεταξύ τους και με το ίδιο. Είναι σαν το αμπέλι με τα τσαμπιά»<sup>181</sup>. Για τον John Caird<sup>182</sup>: «Η σκέψη είναι ικανή για μια διαφορετική και

<sup>172</sup> Βλ. Bradley, F. H. (1950). *Principles of Logic* (τ. 1-2). Oxford: Oxford University Press. Vol. I. σελ. 188.

<sup>173</sup> Βλ., ό.π., σελ. 191.

<sup>174</sup> Βλ., ό.π., σελ. 188.

<sup>175</sup> Βρετανός φιλόσοφος, πολιτικός επιστήμονας και κοινωνικός αναμορφωτής. Έζησε την περίοδο 1848-1923.

<sup>176</sup> Βλ., Bosanquet, B. (1891). *Essays and Addresses*. London: Swan Sonnenschein & Co. σσ. 165-166.

<sup>177</sup> Βλ., Bosanquet, ό.π., σελ. 167.

<sup>178</sup> Βλ. Bradley, ό.π., σελ. 188.

<sup>179</sup> Βλ., Bosanquet, B. (1912). *The Principle of Individuality and Value*. London: Macmillan and Co., Ltd. σελ. 38.

<sup>180</sup> Κορυφαίος αμερικάνος φιλόσοφος, θιασώτης του απόλυτου ιδεαλισμού. Μεταφυσική του αντίληψη, που υποστηριζόταν και από τις θέσεις του Hegel πρώτα και του Bradley αργότερα, υπήρξε ότι όλες οι πλευρές της πραγματικότητας, συμπεριλαμβανομένων αυτών τις οποίες βιώνουμε ως ασύνδετες ή αντιφατικές, περικλείονται συναρμοσμένες από το πνεύμα μιας απλής συνειδήσης. Έζησε από το 1855 έως το 1916.

<sup>181</sup> Βλ., Royce, J. (1892). *The Spirit of Modern Philosophy*. Boston and New York: Houghton Mifflin Company. σελ. 224.

<sup>182</sup> Σκώτος θεολόγος, 1820-1898.

βαθύτερη κίνηση. Μπορεί να αναχθεί σε μια καθολικότητα που δεν της είναι ξένη, αλλά η απολύτως εσωτερική φύση των πραγμάτων καθαυτά· δεν πρόκειται για το καθολικό από αφαίρεση από τα επιμέρους, αλλά για την ενότητα που εμμένει σ' αυτά και βρίσκει σ' αυτά την αναγκαία της έκφραση. Δεν αποτελεί μια αυθαίρετη επινόηση του παρατηρούντος και ταξινομούντος νου, που ενοποιεί στην φαντασία του πράγματα ουσιωδώς διαφορετικά, αλλά μια ιδέα που εκφράζει την εσωτερική διαλεκτική, την κίνηση, τη διαδικασία προς την ενότητα, που εγκαταβιώνει και συνιστά την ύπαρξη των αντικειμένων καθαυτά. Αυτή η βαθύτερη και αληθέστερη καθολικότητα είναι αυτό που μπορεί και χαρακτηρίζεται ιδεώδης, ή οργανική καθολικότητα»<sup>183</sup>.

Τα καθολικά, εδώ, είναι ιδιότητες που πραγματώνονται σε επιμέρους, μόνο που τα συγκεκριμένα καθολικά συγκεφαλαιώνουν αυτά τα καθέκαστα σε ένα ολιστικό σύστημα, καθιστώντας τα τμήματα μιας μεγαλύτερης ατομικής οντότητας, πράγμα που τα αφηρημένα καθολικά δεν κάνουν. Δίνεται λοιπόν η διακριτή αντίληψη της ιδέας του συγκεκριμένου καθολικού, ως μιας ιδιότητας που συνδέει τα καθέκαστα σε μεγαλύτερες ολότητες με έναν υπερατομικό τρόπο<sup>184</sup>.



Ο T. H. Green<sup>185</sup> ισχυρίζεται ότι «μπορούμε να διακρίνουμε δύο ασύμβατες, στην πραγματικότητα, θεωρίες για τη γνώση που διατρέχουν ολόκληρη την ελληνική φιλοσοφία...». Η ασυμβατότητα των θεωριών αυτών έγκειται στο γεγονός ότι ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης είδαν την καθολικότητα και με αφηρημένους και με συγκεκριμένους όρους<sup>186</sup>. τη μια πλευρά, μάλιστα, της πλατωνικής και αριστοτελικής τοποθέτησης ο Green τη βλέπει ως κυρίως υπεύθυνη για την εμφάνιση κατ' εξοχήν του νομιναλισμού, όπως θα δούμε παρακάτω. Συγκεκριμένα, Πλάτων και Αριστοτέλης, είχαν απ' τη μια μεριά μια εξωτερική αντίληψη για το καθολικό, ως ιδιότητας ιδιοτήτων, που μας επιτρέπει να ομαδοποιούμε, κάθε φορά, τα επιμέρους σε μια κλάση, στη βάση των ομοιοτήτων που παρουσιάζουν οι κατ' αίσθηση αντιλήψεις μας γι' αυτά – οπότε, για παράδειγμα, απ' αυτή την άποψη «η ουσία ενός οξέως θα είναι ότι μας ανατριχιάζει, όντας η ιδιότητα δια της οποίας προσδιορίζεται στη σκέψη πρώτα απ' όλα η αντίστοιχη αίσθηση, και η οποία κατόπιν συνδέεται με το όνομα “οξύ”»<sup>187</sup>. Ωστόσο, σημειώνει ο Green, «Με την ταυτοποίηση του καθολικού με μια κλάση, η αληθής όψη του χάνεται τόσο όσο ενισχύεται.»<sup>188</sup> γιατί το καθολικό φαίνεται συμβεβηκός του επιμέρους και ως τέτοιο, το τελευταίο, γίνεται αντικείμενο διακριτής, από το πρώτο, οντολογικής πραγμάτευσης, ως ένα «σκέτο ατομικό» προσβάσιμο από τις αισθήσεις και μόνο: «Μέσα από μια τέτοια διαδικασία η κενότητα [του καθολικού] γίνεται εντονότερη και ταυτόχρονα το επιμέρους διεκδικεί την ανεξαρτησία του. Αντίθετα από το να θεωρείται ως αυτό που γίνεται καθολικό ευθύς αμέσως με το που κρίνεται ή είναι γνωστό ως τέτοιο, χάρις στην ιδιότητα με την οποία μας γνωστοποιείται, συνδέεται με το καθολικό ως μέλος μιας κλάσης στην οποία ανήκει. Σ' αυτή την θεώρηση είναι μάταιο να αρνηθείς την προτεραιότητα και

<sup>183</sup> Βλ., Caird, J. (1920). *An Introduction to the Philosophy of Religion*. Glasgow: Maclehose, Jackson & Co. σελ. 217-218.

<sup>184</sup> Βλ. σχετ., Stern, ό.π., σελ., 124.

<sup>185</sup> 1836-1882. Άγγλος φιλόσοφος, πολιτικός στοχαστής και μετριοπαθής υποστηρικτής ριζικών τομών στην πολιτική. Ηγετικό μέλος του κινήματος του βρετανικού ιδεαλισμού και δάσκαλος του B. Bosanquet.

<sup>186</sup> Βλ., Green, T. H. (1888). *The Philosophy of Aristotle*. Στο R. L. Nettleship (Επιμ.), *Works of Thomas Hill Green* (τ. 1-3). τ. 3 (σσ. 46-91). London: Longmans, Green, and Co. σ. 53.

<sup>187</sup> Ο. π., σ. 57.

<sup>188</sup> Ο. π.



ανεξαρτησία [του ατομικού]. Γι' αυτό και καταλήγουν να θεωρούνται, τα επιμέρους, ως ένα σύνολο πραγμάτων για τα οποία μπορούμε να έχουμε γνώση, και τα καθολικά ως ένα άλλο. Αλλά το "αισθητό", σύμφωνα με τον Ιδεαλισμό αυτό, είναι το απλώς επιμέρους. Είναι έτσι, επειδή δεν βρίσκεται σε κάποια προσδιορισμένη σχέση με οτιδήποτε άλλο και, συνεπώς, ούτε με κάτι θετικό. Το απλώς μερικό που θεωρήθηκε κατ' αυτό τον τρόπο, όμως, υψώθηκε στη θέση μιας πραγματικής οντότητας, οπότε και στο "κατ' αίσθηση" συνέβη το ανάλογο. Τούτος ο ιδεαλισμός έχτισε ξανά αυτό που κατέστρεψε, και το κατ' αίσθηση πράγμα έγινε, καθαυτό, το προσδιορισμένο υποκείμενο ιδιοτήτων»<sup>189</sup>.

Σ' αυτή την τοποθέτηση, η μια πλευρά της πλατωνικής και αριστοτελικής αντίληψης για το καθολικό είναι υπεύθυνη για την κατάληξη στη μεταφυσική του «καθαρού ατομικού» και στην προτεραιότητα της αίσθησης επί της σκέψης<sup>190</sup>: από τη στιγμή που η αντίληψή μας για την καθολικότητα είναι «αφηρημένη» και επιτρέπει, συνεπώς, τη δυνατότητα η μερικότητα να είναι κάτι πέρα και πάνω από την καθολικότητα, δίνοντας στην ατομικότητα αυτή «προτεραιότητα και ανεξαρτησία», η έννοια του «καθαρού ατομικού» εγείρεται αναπόφευκτα, και μαζί μ' αυτή η ιδέα της αντιμετώπισης της «αντίληψης» ως πρότερης και διακριτής από την «σύλληψη» της «αίσθησης» από τη «σκέψη». Είναι αυτή η πλευρά της πλατωνικής και αριστοτελικής τοποθέτησης που ο Green βλέπει ως κυρίως υπεύθυνες για την εμφάνιση ενός νομιναλισμού: «Το σφάλμα αυτού του ακατέργαστου "ρεαλισμού" είναι ότι πλατωνικός, αριστοτελικός, ή σχολαστικός, είναι ουσιαστικά νομιναλισμός. Θεωρεί το καθολικό αληθινό, αλλά το βρίσκει απλώς στο νόημα ενός ονόματος... Ο ρεαλισμός της αρχαίας λογικής, θεωρώντας για πραγματικότητά του τα είδη που δηλώνονται με ένα κοινό όνομα, κάθε φορά, είναι εσφαλμένος. **Κάνει τα καθολικά του μια κλάση, αντίθετα από το να είναι μια σχέση**, και θεωρεί ως ουσιώδη χαρακτηριστικά της κλάσης εκείνα μόνο που συνάγονται από το όνομά της, δηλαδή τα περισσότερο επιφανειακά. Έχοντας, έτσι, ξεκινήσει με μια φτωχή αντίληψη, ως πρώτη της πραγματικότητα, χωρεί στη διαδικασία της αφαίρεσης, στην οποία καθίσταται ακόμη περισσότερο φιλή καταλήγοντας σε κάτι που δεν έχει καθόλου ιδιότητες»<sup>191</sup>.

Ωστόσο, ο Green ισχυρίζεται, υπάρχει μια άλλη πλευρά στην πλατωνική και την αριστοτελική θέση που προτείνει μια διαφορετική εικόνα και έναν «περισσότερο πλήρη και, συνεπώς, αληθέστερο ιδεαλισμό»<sup>192</sup>. Αυτό μπορεί να φανεί, κατά τον Green, στην αριστοτελική θεωρία για την ύλη, γιατί ενώ, από τη μία μεριά, ο Αριστοτέλης χειρίζεται την ύλη ως το υπόστρωμα που βρίσκεται κάτω από τις ιδιότητες και τις σχέσεις του ατομικού, από την άλλη, αντιμετωπίζει το επιμέρους ως μερίκευση του καθολικού, οπότε η ύλη, εκτός της οποίας μορφώνεται το ατομικό, είναι προσβάσιμη από το πνεύμα.

«Σύμφωνα [με την πρώτη άποψη], η "ύλη" συνίσταται από τα επιμέρους πράγματα που "βρίσκονται εγγύτερα στην αίσθηση" και από τα οποία η σκέψη αφαιρεί τις ιδιότητες που συνιστούν τη "μορφή" ή το είδος. Δια μιας περαιτέρω αφαίρεσης ιδιοτήτων φτάνουμε στο "γένος" - τελικά στο "summmum genus"<sup>193</sup> - το οποίο βρίσκεται στο πέρας της διαδικασίας απόστασης από την "ύλη". Στη "Μεταφυσική" [του Αριστοτέλη], από την άλλη, το "γενικότατον" καθαυτό παρουσιάζεται ως η "ύλη" η

<sup>189</sup> Ο. π.

<sup>190</sup> Το επιχείρημα πίσω απ' αυτή την πραγμάτευση είναι αναγνωρίσιμα εγγεγραμμένα.

<sup>191</sup> Ο. π., σελ. 60-61.

<sup>192</sup> Ο. π., σελ. 62.

<sup>193</sup> Το τί των Στωικών.

διαμορφούμενη από μια διαδικασία μορφοποίησης ως την πιο καθορισμένη συμπλοκή χαρακτηριστικών. Εδώ βλέπουμε την ύλη να έχει αλλάξει θέσεις»<sup>194</sup>.

Ως αποτέλεσμα αυτής της αντιστροφής, ο Green ισχυρίζεται, «η διαδικασία της σκέψης δεν παρουσιάζεται ως εκείνη της αφαίρεσης, αλλά της συγκεκριμενοποίησης», γιατί τώρα το ατομικό «δεν είναι πλέον μία σκέτη μονάδα, αλλά μια ενότητα διαφορετικότητας, το κέντρο μιας πολλαπλότητας σχέσεων, ένα υποκείμενο ιδιοτήτων. Δεν είναι ένα “αφηρημένο καθολικό” αλλά έχει ένα στοιχείο καθολικότητας χάρις στο οποίο μπορεί να έρθει σε σχέση με όλα τα άλλα πράγματα. Η καθολικότητά του είναι όρος της μερικότητάς του»<sup>195</sup>.

Η σωστή εικόνα είναι αυτή που βλέπει την καθολικότητα και την ατομικότητα ως αμοιβαία εξαρτώμενες έννοιες: «Η “ουσία” ως το εξωτερικό πράγμα... είναι ατομική, αποκλείουσα όλων των πραγμάτων πέραν του εαυτού της, αλλιώς δεν θα ήταν αντικείμενο προσδιορισμένης γνώσης. Αλλά δεν είναι απλώς ατομική. Αν ήταν έτσι, θα ήταν, όπως κάποιες φορές μας την παρουσιάζει ο Αριστοτέλης, απροσδιόριστη και συνεπώς άγνωστη “ύλη”... Είναι ένα ατομικό καθολικευμένο μέσα από τις επιμέρους σχέσεις ή ποιότητές του. Εδώ η διαδικασία πάλι μπορεί να αντιστραφεί. Αν δεν υπάρχει καθολικό στοιχείο στα γνωστά πράγματα δεν θα μπορούσε να υπάρξει ενότητα στη γνώση, κοινότητα σκέψης. Αλλά αυτό το καθολικό δεν είναι απλώς έτσι. Αν ήταν “πάντα το ίδιο” ώστε να ήταν άμοιρο οποιασδήποτε διάκρισης, σαν τον σκιώδη σκοπό της πλατωνικής διαλεκτικής, θα ήταν, όπως εκτίθεται στον Αριστοτέλη, το απροσδιόριστο και άγνωστο. Πρέπει να είναι αυτό που αποτελεί την άρνηση όλων των επιμέρους σχέσεων ώστε να προσδιορίζεται από το σύνολό τους. Χάρις σ’ αυτήν την αρνητική σχέση, ως ταυτοτικό με τον εαυτό του αποκλείοντας όλα τα υπόλοιπα πράγματα, είναι ατομικό. Είναι ένα καθολικό ατομικευμένο μέσα από τη μερικότητά του. Έτσι βλέπουμε ότι η πρώτη ούσία, ή ατομική, και η δευτέρα ούσία, η ουσία που συνίσταται από γενικά χαρακτηριστικά, δεν πρέπει να τοποθετηθούν, όπως τις τοποθέτησε ο Αριστοτέλης απέναντι, σαν η μία να αποκλείει, σαν να μπορεί να παρουσιαστεί μόνη της, χωρίς την άλλη»<sup>196</sup>. Είναι τόσο αναγκαία συσχετιζόμενες σαν το

<sup>194</sup> Ο.π.

<sup>195</sup> Ο.π., σελ. 63.

<sup>196</sup> Η ουσία, στον Αριστοτέλη, έχει ποικιλία σημασιών. Είναι το *είναι*· η ουσιαστικότητα που παρουσιάζει κάθε ον. Πρωταρχικώς διακρίνεται α) σε ουσία-υποκείμενο και β) σε ουσία του «*τί ἦν εἶναι*». Χώρος των καθαυτῶν οντολογικῶν αναζητήσεων είναι η κατηγορία της ουσίας-υποκειμένου, που δηλώνει το *τόδε τι*, το υποκείμενο θεωρούμενο ως ἔσχατος φορέας ιδιοτήτων, αντιθέσεων και καθορισμών. Επ’ αυτού μπορούν να αποδοθούν όλες οι υπόλοιπες κατηγορίες (δηλαδή οι τρόποι με τους οποίους εμφανίζεται η ουσία, οι εκφράσεις που μπορούν να της αποδοθούν). Αποτελεί την πρώτη ουσία, ως «*substratum*», ως εκείνο που υπόκειται ως βάση. Υφίσταται ἀφ’ εαυτῆς, και τίποτε ἄλλο δεν υπόκειται ως βάση αυτής. Είναι αυτό το οποίο δεν κατηγορείται πάνω σε οτιδήποτε ἄλλο. Γι’ αυτό και δεν είναι δυνατό να μετατραπεί σε κατηγορήμα. Το καθ’ ἕκαστο άτομο δεν μπορεί να λειτουργήσει ως κατηγορήμα. Γενικά, πρόκειται για την ύλη, το εἶδος, και το, ἀπ’ αὐτὰ τα δύο, συγκεκριμένο. Είναι το συγκεκριμένο τούτο, και ἀφ’ εαυτοῦ υφιστάμενο, καθ’ ἕκαστο πράγμα. Το σύνολο των κατηγοριακῶν προσδιορισμῶν του συγκεκριμένου φορέα-πράγματος. Βλ. σχετ., Windelband, W. & Heimssoeth, H. (1986). *Εγχειρίδιο Ἱστορίας της Φιλοσοφίας*. (τόμ. α’). ὁ.π., σελ. 163. Δεύτερη ερμηνευτική κατανόηση της ουσίας είναι το «*τί ἦν αὐτῶ εἶναι*». Αυτό σημαίνει: α. «*το εἶναι ἐκάστῳ*», δηλαδή η καθαρή οντότητα, το καθαρό εἶδος που έχει καθετί και β. «*το τί ἦν*», δηλαδή ἕνα σταθερό χαρακτηριστικό δοσμένο προκαταβολικῶς σε ἕνα ον, που ὄχι μόνο ταίριαζε στο παρελθόν ἀλλά και στο σὺν ὄντι και στο μέλλον. Το *τί ἦν εἶναι* σημαίνει το *τι ἦτανε να εἶναι* ἕνα πράγμα, ἀπὸ μίας ἀρχῆς, σύμφωνα με τον ουσιαστικό προκαθορισμό του. Αυτό θα εἶναι και τώρα, και στο μέλλον. Εκφράζει την, πέρα ἀπὸ το χρόνο, σταθερή ταυτότητα της ουσίας του, καθ’ ἕκαστον, ὄντος. Αυτό που μένει σταθερό και παραμόνιμο ἀπέναντι σε κάθε ρέοντα προσδιορισμό που του αποδίδεται, ἢ δεν του αποδίδεται πλέον. Είναι ο υποκείμενος, ως βάση ὅλων των ἄλλων προσδιορισμῶν, κάθε φορά προσδιορισμός του αντικειμένου. Το ουσιαστικῶς «*τί ἐστίν*». Το *τί ἐστίν* ενός ἀνθρώπου, για παράδειγμα, εἶναι ἐκεῖνο που τον κάνει να εἶναι ἀνθρώπος· η καθολικὴ ἔννοια του *Εἶναι* του ἀνθρώπου. Το

υποκείμενο και το αντικείμενο, σαν τον εαυτό και τον κόσμο. Η καθεμία, από τη δική της ενέργεια που είναι η κρυμμένη “αυθορμησία” της σκέψης, δημιουργεί με αναγκαίο τρόπο το αντίθετό της. Ούτε είναι, όπως θεώρησε ο Αριστοτέλης με οποιαδήποτε ειδική σημασία, η “ύλη” η αντίθετη της “μορφής”. Η καθεμία, παρμένη καθαυτήν, είναι ύλη απροσδιόριστη και άρνηση του γνώσιμου. Καθεμία πάλι, έτσι θεωρημένη, είναι ύλη σαν το “υποκείμενο” το δεκτικό μιας μορφής – μορφής, ωστόσο, που δεν επιβάλλεται εξωτερικά, αλλά προβάλλεται από μέσα. Κάθε μια, τέλος, μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα κενό “υπόστρωμα”, ή σαν ένα σύμπλεγμα από χαρακτηριστικά, σύμφωνα με το ότι είναι μεμονωμένη ή θεωρημένη στην πραγμάτωσή της καθώς περνά στο αντίθετό της»<sup>197</sup>.



Στον Bosanquet παρατηρούμε καθαρότερα την εγγύτητα με την εγελιανή εικόνα, για την έννοια του συγκεκριμένου καθολικού, καθώς το ζήτημα της «αφαιρετικής λειτουργίας της σκέψης» αποτελεί, πρωτίστως, ερώτημα που εμπλέκει το καθεστώς της λογικής. Ο J. Passmore, στο *A Hundred Years of Philosophy* παρατηρεί: «Οι ιδεαλιστές αντίπαλοι της λογικής, ισχυριζόταν ο Bosanquet, δεν γνώριζαν τι είναι η λογική. Γι' αυτούς, τον Ward<sup>198</sup> για παράδειγμα, η λογική σκέψη είναι η διαδικασία του να εργάζεσαι προς όλο και περισσότερο κενές περιεχομένου αφαιρέσεις, ξεκινώντας από το συγκεκριμένο της καθημερινότητας προς έναν κόσμο γενικών μορφών που αποτυγχάνει πλήρως να στηρίξει τον πλούτο και την πολυπλοκότητα των εμπειριών της καθημερινότητάς μας. Αλλά το να σκεφτόμαστε λογικά, διαμαρτύρεται ο Bosanquet, σημαίνει [δυστυχώς] να θέτουμε το αφηρημένο μάλλον παρά το συγκεκριμένο καθολικό ως λογικό ιδεώδες»<sup>199</sup>.

Όπως ο Green, ο Bosanquet αντιτέθηκε «στην παράδοση της βρετανικής σχολής» η οποία «ξεκινά από μια θεωρία για την οποία η σκέψη είναι φθίνουσα αίσθηση» οπότε και κατά την άποψή της, «η σκέψη είναι μια ικανότητα για αφαίρεση και γενίκευση και η επιστήμη αναχωρεί από τις εμπειρίες γεγονότων που έχουμε»<sup>200</sup>. Αντίθετα με αυτή την άποψη, ο Bosanquet ισχυρίζεται ότι «η σκέψη είναι που συγκροτεί και στηρίζει τη δομή της εμπειρίας, και... είναι οι νοητικοί προσδιορισμοί που επενδύουν ακόμη και την κατ' αίσθηση αντίληψη με την αξία και το νόημά της»<sup>201</sup>. Όταν αντιλαμβάνεται κανείς την καθολικότητα της σκέψης, κατ' αυτό τον τρόπο, δεν αφαιρείται κάτι από τη μοναδικότητα του δεδομένου, αλλά στην πραγματικότητα

---

ουσιώδες περιεχόμενο όλων των υπολοίπων καθορισμών της πρώτης ουσίας, ως φορέα ή υποκείμενου. Το αντικείμενο χάνει την ταυτότητά του και γίνεται κάτι άλλο όταν δεν υπόκειται ως βάση το *τί ἦν* είναι της ουσίας του. Συνεπώς, η δεύτερη ουσία, πρέπει να νοείται συνδεδεμένη αναγκαία με την πρώτη αφού, όπου δεν υπάρχει η πρώτη δεν υπάρχει κανένα συγκεκριμένο αντικείμενο, κανένα παρόν «τόδε τι»· και όπου δεν υπάρχει η δεύτερη το «τόδε τι» αυτό, το καθ' ἑκάστο, δεν έχει κάποια ουσιώδη ταυτότητα με τον εαυτό του. Βλ. σχετ., Αριστοτέλης. (έκδοση 41992). *Πρώτη Φιλοσοφία (Τα Μετά τα Φυσικά)*, ό. π., σσ. 378-381. Επίσης, Δημητρακόπουλος, Μ. (2003). *Στοιχείωση Ευρωπαϊκής Φιλοσοφίας*. Αθήνα. σσ. 128-131.

<sup>197</sup> Ο.π., σελ. 70-71.

<sup>198</sup> Ο Απόλυτος Ιδεαλισμός υπονόμωσε τα ίδια ιδεώδη που υποτίθεται πως υπεράσπιζε. Σε μια απλή και ενοποιημένη ολότητα, που είναι η πραγματικότητα, δεν υπάρχει χώρος για ατομικά εγώ. Παύει να έχει νόημα η ελευθερία μας, όταν οι χρονικοί προσδιορισμοί δεν είναι πραγματικοί. Και οι ηθικές μας προσπάθειες μένουν μετέωρες, σε μια πραγματικότητα αιωνίως τέλεια. Η φιλοσοφία του καθηγητή του Cambridge, James Ward (1843-1925), αποτελεί μια προσπάθεια ξεπεράσματος αυτών των αδιεξόδων μέσα από το συγκεκριισμό του ιδεαλιστικού προγράμματος με μια πλουραλιστικού χαρακτήρα μεταφυσική.

<sup>199</sup> Βλ., Passmore, J. (1968). *A Hundred Years of Philosophy*. Middlesex: Penguin Books. σελ. 86

<sup>200</sup> Βλ., Bosanquet, B. (1912). *The Principle of Individuality and Value*. ό. π., σσ. 54-55.

<sup>201</sup> Βλ., ό. π., σ. 55.

καθιστώντας αυτή τη μοναδικότητα προσδιορισμένη: «Όπως όταν συστήνει ένα κόσμο [η σκέψη] τείνει να επιστρέψει στο έσχατο βάθος και την ολότητα της εμπειρίας από την οποία το πρώτο της βήμα ήταν να απομακρυνθεί. Σε έναν “κόσμο”, σε ένα “συγκεκριμένο καθολικό”, δεν χάνουμε σε αμεσότητα και σημασία απομακρυνόμενοι από την πρωταρχική εμπειρία· αντιθέτως κάθε λεπτομέρεια αυξήθηκε ανυπολόγιστα σε ζωντανία και νόημα, λόγω της εσωτερικής ώσμωσης και διασύνδεσης [σκέψης και εμπειρίας], δια των οποίων η σκέψη ανακάλυψε τις υπαρκτικές της δυνατότητες. Το σλόγκαν του, κατά συγκεκριμένο τρόπο, διανοείσθαι είναι “*Philosophistisiren ist dephlegmatisiren - vivificiren*”» (Το να φιλοσοφείς σημαίνει να απαλλάσσεσαι από την απάθεια - να αποκτάς ζωντανή συνείδηση κάποιας πλευράς της πραγματικότητας)<sup>202</sup>.

Χρησιμοποιώντας την κενότητα του «εκείνο» σε σχέση με το «τι» ο Bosanquet αντιτίθεται στην αφαιρετική εικόνα που υπάρχει για τη σκέψη, γενικά, και για τη λογική, ειδικότερα: «Έχει μεγάλη σημασία η υποχρέωσή μας να διαλύσουμε την αντίληψη ότι οι υψηλότεροι βαθμοί γνώσης είναι αναγκαστικά, και στη φύση της νόησης, διαμορφωμένοι αφαιρετικά, παραβλέποντας οτιδήποτε παρουσιάζει ενδιαφέρον και ιδιομορφία στον πραγματικό κόσμο. Τίποτε δεν υπήρξε περισσότερο μοιραίο για την αλήθεια και τη ζωτικότητα των ιδεών από αυτή την προκατάληψη... Αν η παρούσα αντενέργεια προς την τυπική λογική καταλήξει στο να εδραιωθεί μια περισσότερο ζωντανή αντίληψη για την καθολικότητα απ’ αυτή που την υποβιβάζει σε μια απλή αφαίρεση, θα επέλθει μια θεμελιώδης αναμόρφωση στις φιλοσοφικές πρώτες αρχές»<sup>203</sup>.

Και στον Nettleship<sup>204</sup> βρίσκουμε την καθολικότητα και την ατομικότητα να σχετίζονται διαλεκτικά: «όταν λέμε πως όλες οι έννοιες είναι γενικές, πρέπει να προσθέτουμε ότι καμιά έννοια δεν είναι “γενική” αν αυτό σημαίνει ότι δεν είναι ατομική. Η πιο γενική έννοια στον κόσμο έχει τη δική της ατομικότητα»<sup>205</sup>. Για τον Nettleship, προκειμένου να έχεις την έννοια «τριγώνου», για παράδειγμα, δεν χρειάζεται να έχεις μια γενική ιδέα στην οποία έχει χαθεί κάθε μερικότητα, καθώς η κατοχή της έννοιας απαιτεί να μπορούμε να βλέπουμε ότι μπορούν να υπάρξουν διαφορετικοί τύποι τριγώνου, και ότι γι’ αυτούς τους τύπους υπάρχουν ατομικά που λειτουργούν ως υποδείγματά τους, με διαφορετικούς τρόπους, έτσι ώστε η σκέψη να μπορεί να συλλάβει καθολικά, σαν το καθολικό του «τριγώνου» π.χ., χωρίς να χάνει από μπροστά της την ατομικότητα: «Παίρνοντας τη γενικότητα μιας έννοιας απ’ αυτή την άποψη δεν μπορούμε να πούμε ότι η γενική έννοια προέκυψε από αφαίρεση γιατί αυτή η έννοια δεν έγινε γενική μέσα από μια αφαιρετική διαδικασία· η γενικότητά της σημαίνει τη δυνατότητά της να είναι αφηρημένη. Ούτε μπορούμε εύστοχα να πούμε ότι έχει προέλθει από μια διαδικασία αφαίρεσης από τα επιμέρους· γιατί η γενικότητά της δεν αποκλείει αλλά μας βοηθά να συνάγουμε τη μερικότητα»<sup>206</sup>.

<sup>202</sup> Βλ. ό. π. σσ. 55-56. Η φράση στα γερμανικά είναι του Novalis (Georg Phillipp Friedrich Freiherr von Hardenberg, συγγραφέας και φιλόσοφος του πρώιμου γερμανικού ρομαντισμού. Έζησε την περίοδο 1772-1801), βλ., Novalis. (έκδοση 1981). *Schriften: Das Philosophische Werk I.* (vol. 2). Stuttgart: Verlag W. Kohlhammer. σελ. 526.

<sup>203</sup> Βλ., Bosanquet, B. (1911). *Logic, or the Morphology of Knowledge* (τ. 1-2). Oxford: Clarendon Press. τ. 1. σσ. 60-61. Επίσης, βλ. σχετ., Mander, W. J. (2000). Bosanquet and the Concrete Universal. *The Modern Schoolman*. 77, (4), 293-308. σσ. 298-300, 303-307.

<sup>204</sup> Richard Lewis Nettleship, άγγλος φιλόσοφος: 1846-1892.

<sup>205</sup> Βλ., Nettleship, R. L. (1901). *Philosophical Remains*. London: Macmillan and Co., Ltd. σελ. 226.

<sup>206</sup> Βλ., ό. π., σελ. 222.

Τέλος, ένας από τους τελευταίους ιδεαλιστές, ο Brand Blanshard<sup>207</sup>, ασκεί κριτική στην αφαιρετική αντίληψη για τις γενικές ιδέες λέγοντας: «Έχει συχνά λεχθεί ότι συλλαμβάνουμε τέτοιες ιδέες “αφαιρώντας από τα επιμέρους πράγματα ό, τι έχουν κοινό”. Αλλά έχουμε δει ότι αυτά τα “επιμέρους πράγματα” είναι εξαρχής κάτι περισσότερο από επιμέρους, ότι ακόμα και όταν αντιλαμβάνεσαι ένα πράγμα το αντιλαμβάνεσαι ως κάτι, και έτσι χρησιμοποιείς ήδη τη γενικότητα που υποτίθεται ότι θα κατακτούσες από την αφαίρεση σε δεύτερο χρόνο»<sup>208</sup>. «Με κατάλληλους όρους, τουλάχιστον ταυτοποιούμε, και ταυτοποίηση σημαίνει να βρεις σε κάτι την ενσωμάτωση κάποιου καθολικού... Αν το πράγμα δεν παρουσιάζεται καθαυτό ως προσδιορισμός κάποιου καθολικού, οποιουδήποτε, αν ένα πράγμα δεν ανήκει σε κανένα είδος, δεν μπορούμε να το αντιληφθούμε. Όλη η γνώση είναι αντίληψη καθολικών. Ωριμάζουμε γνωσιακά με το να ανταλλάσσουμε μια γενικότερη σύλληψη για μια πιο συγκεκριμένη. Είναι μια κίνηση στην οποία το ακαθόριστο προσδιορίζει εαυτόν, το λανθάνον αντιλαμβάνεται τον εαυτό του, το σχετικώς ά-σχημο παίρνει σάρκα και σχήμα»<sup>209</sup>.

Ωστόσο, αν είναι να γίνεται αντιληπτό το ατομικό μόνο ως ένα πράγμα ενός συγκεκριμένου τύπου, ως καθολικό, πώς κάτι τέτοιο είναι συμβατό με την ατομικότητα του πράγματος; Αυτό το πρόβλημα προκύπτει, μας λέει ο Blanshard, αν το καθολικό το χειριζόμαστε ως «ένα στοιχείο που παραμένει ακριβώς το ίδιο μέσα από όλες του τις πραγματώσεις, ένα στοιχείο που... μπορεί να μετακινηθεί από ένα πλαίσιο και να χρησιμοποιηθεί σε ένα άλλο χωρίς την παραμικρή διαμόρφωση»<sup>210</sup>, κατά τον τρόπο ενός αφηρημένου καθολικού. Ενάντια σ' αυτή την άποψη, ο Blanshard ισχυρίζεται ότι το καθολικό μπορεί να είναι συγκεκριμένο· δηλαδή, μπορεί να διατηρεί την ταυτότητά του ακόμα και όταν συγκεκριμενοποιείται με έναν τρόπο παρά με έναν άλλο, και ότι δεν απαιτείται τίποτε περισσότερο απ' αυτό για να συσταθεί ένα ατομικό: «Το καθολικό, χωρίς να είναι ένα ξεχωριστό στοιχείο, είναι τόσο σύμφυτο στις διαφοροποιήσεις του ώστε χωρίς αυτές δεν θα ήταν τίποτε. Η αντίστροφη σχέση είναι περισσότερο φανερή. Αν απομακρύνουμε από τις μορφές τις γραμμές που τις κάνουν τέτοιες, δεν μένει τίποτε. Μπορεί να ειπωθεί ότι ίσως υπάρχουν ακόμη γραμμές, έστω και αν δεν εντάσσονται σε κάποια μορφή. Αλλά οι γραμμές δεν θα ήταν εκείνες αν δεν ήταν όρια της μορφής· αν η μορφή χαθεί, χάνονται και οι ίδιες. Έτσι, όπως η μορφή έχει ύπαρξη μόνο στις διαφοροποιήσεις της, έτσι και αυτές υπάρχουν μόνο σαν διαφοροποιήσεις της»<sup>211</sup>.

<sup>207</sup> 1892-1987, Αμερικανός φιλόσοφος. Ο ιδεαλισμός του, κατ' ουσίαν, συγκεκριαλιώνεται στο ότι η πραγματικότητα είναι το τέλος που αναζητά η σκέψη, με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο ένα δέντρο βαλανιδιάς είναι το ίδιο με το δενδρύλλιο που φυτεύτηκε αρχικά. Η πραγματικότητα, δηλαδή, και η σκέψη είναι αζεδιάλυτα συνδεδεμένες. «Το να σκέφτεσαι ένα πράγμα σημαίνει να το έχεις, σε ένα βαθμό, καθαυτό μεσ' το νου σου». Βλ. Blanshard, B. (1964). *The Nature of Thought* (vols. 1-2). London: George Allen & Unwin Ltd., vol. 2, σσ. 261-262. Όσο η σκέψη αναζητά το σύστημα, ταυτόχρονα αναζητά την πραγματικότητα, χωρίς η πραγματικότητα να αποτελεί απλώς το σκοπό της σκέψης στο μεταφυσικό πεδίο· η πραγματικότητα ορίζεται αναφορικά με τη σκέψη. Καθώς κατανοούμε όλο και περισσότερο ένα συγκεκριμένο αντικείμενο που θεωρούμε, καθώς ο νους μας συναντά όλο και ακριβέστερα το αντικείμενο μέσα του, τόσο πλησιάζει την πραγματικότητα. Καμιά έννοια πραγματικότητας, εξωτερικής και ξεχωριστής από τον ανθρώπινο νου, δεν μπορεί να υπάρξει. Η πραγματικότητα είναι το όριο που προσεγγίζει η σκέψη. Βλ. σχετ., Faust, J. (1998). Idealism Meets Realism: The Problem of Convergence in Blanshard's *The Nature of Thought*. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*. XXXIV, (4), 923-947. σσ. 930-931.

<sup>208</sup> Βλ., Blanshard, B. (1964). *The Nature of Thought*, ό.π., vol. 1, σελ. 571.

<sup>209</sup> Ο. π., σσ. 613-614.

<sup>210</sup> Ο. π., σελ. 576.

<sup>211</sup> Ο. π., σελ. 584.

#### 4.4 Η κατανόηση ως διαλεκτική του επιμέρους και του συγκεκριμένου καθολικού

Στον Gadamer<sup>212</sup>, υπάρχει ένα είδος διαλεκτικής μεταξύ των καθολικών και των επιμέρους<sup>213</sup>: «Εφαρμογή είναι ακριβώς το να φέρνεις το καθολικό και το επιμέρους σε μια ισοδύναμη σχέση· και είναι κατ' αυτό τον τρόπο και μόνο, όπως ισχυρίζεται ο Gadamer, που επιτυγχάνεται κατανόηση. Το ενδιαφέρον... επιστημολογικά είναι ότι, στην πραγματικότητα, το αφηρημένο καθολικό δεν έχει νόημα δίχως τις επιμέρους περιπτώσεις που εφαρμόζεται και, ομοίως, το επιμέρους αποκτά νόημα μόνο υπό το φως του καθολικού που του εφαρμόζεται. Κατανόηση, συνεπώς, επιτυγχάνεται μόνο στη διαλεκτική κατάληξη, ισορροπία, αυτών των δύο πόλων... μπορεί [δηλαδή] κανείς να αναγνωρίσει [εδώ] έναν ερμηνευτικό κύκλο του όλου και των μερών διατυπωμένο με όρους εναρμόνισης καθολικού και επιμέρους»<sup>214</sup>, «Η κατανόηση... είναι μια μίξη οριζόντων...»<sup>215</sup>, «Η εμπειρία, προκειμένου να καταστεί “καθολική”, πρέπει να μοιραστεί – πρέπει να γίνει μια μοιρασμένη, διαλογική κατανόηση. Η, με όρους εγγελιανούς, το “εγώ” πρέπει να καταστεί “εμείς”»<sup>216</sup>.

Το συγκεκριμένο καθολικό είναι ουσιαστικά ένα «γίγνεσθαι», «μια κίνηση» και ταυτόχρονα μια πραγματική οντότητα που χαρακτηρίζει και άλλες πραγματικές οντότητες. Το γίγνεσθαι αυτό παραπέμπει στη μεταβολή των «οριζόντων» του Husserl<sup>217</sup>: «...η έννοια του “ορίζοντα” συνδέεται από τον Husserl με τη δύναμη πλήρωσης του περιεχομένου μιας πραγματικά δοσμένης εμπειρίας. Κάθε αρχική αντίληψη (εικόνα, γνώση, νόημα) είναι αποδυναμωμένη, σχηματισμένη αλλά την ίδια στιγμή έχει τη δυνατότητα συμπλήρωσης, εμπλουτισμού του περιεχομένου, αποκάλυψης του λανθάνοντος. Στη διαδικασία των αναφορικών αντιληπτικών δράσεων επισυμβαίνει μια μεταβολή ποικίλων παραμέτρων που προσδιορίζουν ένα αντικείμενο στην εμπειρία (η απόσταση, το υπόβαθρο, ο βαθμός φωτεινότητας, κ.λπ.). Οι δυνατές μεταβολές της αντίληψης αυτού του αντικειμένου συγκροτούν αυτό που καλείται συγχρονικός ορίζοντας μιας νήφουσας συνείδησης... ο ορίζοντας δίνεται και από ένα περιβάλλον εσωτερικών εμπειριών. Κάθε συγκεκριμένη αντίληψη γεννιέται και αναπτύσσεται εντός του πλαισίου άλλων αντιλήψεων οι οποίες, χάρις στη συνθετική ικανότητα της συνείδησης, ρέουν μαζί της εντός ενός σταθερού καθολικού γνωσιακού χώρου»<sup>218</sup>.

<sup>212</sup> Hans-Georg Gadamer γερμανός φιλόσοφος, 1900-2002.

<sup>213</sup> «...διαλεκτική κατάληξη, στη σκέψη του Gadamer, όσον αφορά ταυτόχρονα τη σχέση μεταξύ καθολικών και επιμέρους και τη στενά συσχετισμένη σχέση μεταξύ των εννοιών της χρονικότητας και της αχρονικότητας». Βλ., Kerby, A. (1991). Gadamer's Concrete Universal. *Man and World*. 24, 49-61, σελ. 52.

<sup>214</sup> Βλ. ό. π., σελ. 54.

<sup>215</sup> Βλ. ό. π., σελ. 58.

<sup>216</sup> Βλ. ό. π., σσ. 58-59.

<sup>217</sup> Edmund Gustav Albrecht Husserl, γερμανός φιλόσοφος και μαθηματικός θεμελιωτής του φιλοσοφικού κλάδου της φαινομενολογίας, 1859-1938.

<sup>218</sup> Βλ., Kurenkova, R., Plekhanov, Y. & Rogacheva, E. (2005). The Transcendental-Phenomenological Meaning of the Notion of «Experience» in E. Husserl and J. Dewey's Philosophy. *Analecta Husserliana*. LXXXIV, 33-41, σελ. 38.

## 4.5 Συγκεκριμένο καθολικό και αυτο-μετοχή

Όταν στη θεολογία μιλάμε για τον *Λόγο*, ή στις τέχνες και τη λογοτεχνία για τη *μεγάλη Τέχνη* που χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο συμβάν για να παραδειγματίσει συγκεκριμένες αλλά με καθολικό χαρακτήρα ανθρώπινες καταστάσεις, αναφερόμαστε με εποπτικό τρόπο στην έννοια του συγκεκριμένου καθολικού. Στα πλαίσια της παρούσας μελέτης, τη φιλοσοφική έννοια, καθαυτήν, την περιορίζουμε ως εξής:

Συγκεκριμένο καθολικό μιας ιδιότητας  $F$  λέμε το «τέλειο υπόδειγμα» του να έχει κάτι την ιδιότητα  $F$ . Δηλαδή, να έχει μόνο εκείνα τα χαρακτηριστικά που είναι αναγκαία για να έχει κάτι την ιδιότητα  $F$ . Το *συγκεκριμένο καθολικό*  $\mathbf{u}_F$ , λοιπόν, μιας ιδιότητας  $F$ , έχει την ιδιότητα αυτή· συμβολικά,  $F(\mathbf{u}_F)$ . Αναπαριστά το να έχει κάτι την ιδιότητα  $F$  κατά ένα τόσο τέλειο και υποδειγματικό τρόπο που κάθε αντικείμενο θα έχει επίσης την ιδιότητα  $F$  αν και μόνον αν μοιάζει (μετέχει) του καθολικού  $\mathbf{u}_F$ .

Ένα καθολικό  $\mathbf{u}_F$  είναι *συγκεκριμένο* αν μετέχει του εαυτού του, δηλαδή  $\mathbf{u}_F \mu \mathbf{u}_F$ , ή  $F(\mathbf{u}_F)$ . Ένα καθολικό  $\mathbf{u}_F$  καλείται *αφηρημένο* αν δεν μετέχει του εαυτού του, δηλαδή  $\neg(\mathbf{u}_F \mu \mathbf{u}_F)$ <sup>219</sup>.

Η ανακατασκευή της θεωρίας συνόλων ως η θεωρία των αφηρημένων καθολικών άνοιξε το πεδίο και για μια θεωρία των συγκεκριμένων καθολικών που θα είναι πάντα μετέχοντα του εαυτού τους. Μια τέτοια θεωρία θα αναγνώριζε και τον αυτο-κατηγορικό χαρακτήρα της πλατωνικής θεωρίας των ιδεών, όποτε αυτός παρατηρείται (όπως θα δούμε αμέσως μετά). Ισχυρισμός μας είναι ότι μια τέτοια ακριβής μαθηματική θεωρία είναι η θεωρία κατηγοριών.

Η έννοια του συγκεκριμένου καθόλου επιτρέπει, αφενός, τη συστηματική φιλοσοφικο-λογική ερμηνεία των καθολικών απεικονιστικών ιδιοτήτων της θεωρίας κατηγοριών. Αφετέρου, η θεωρία κατηγοριών παρέχει ένα ακριβές μαθηματικό μοντέλο για την αυτό-δηλωτική έκφραση της θεωρίας που είχε ο Πλάτωνας για κάποιες Ιδέες, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο. Τυποποιεί δηλαδή, με αυστηρό τρόπο, πολλές από τις φιλοσοφικές ιδέες για τα καθόλου όπως την ιδέα του καθόλου ως αυτό που καταδεικνύει την ουσία μιας ιδιότητας χωρίς καμιά ατέλεια, και την πλατωνική ιδέα ότι όλες οι πραγματώσεις μιας ιδιότητας έχουν την ιδιότητα χάρη στη μετοχή τους στο καθόλου.

<sup>219</sup> Βλ. σχετ., Ellerman, P. D. (1988). Category Theory and Concrete Universals. *Erkenntnis*, 28, 409-429. Το άρθρο αυτό απετέλεσε την πηγή έμπνευσης και το κύριο μονοπάτι, με βάση το οποίο κινηθήκαμε, σ' αυτή την εργασία.

#### 4.6 Έννοια συγκεκριμένου καθολικού στον Πλάτωνα;

Η έννοια του συγκεκριμένου καθολικού συναντάται στη θεωρία των Ιδεών του Πλάτωνα; Οι Ιδέες, πολύ συχνά, θεωρούνται ως αφηρημένα, ως μη-μετέχοντα-εαυτόν καθολικά, τελείως διακριτά και «υπεράνω» των πραγματώσεων τους. Με τα λόγια ενός σχολιαστή του Πλάτωνα: «*Τα καθολικά καθαυτά δεν είναι, τέλεια ή όχι, στιγμιότυπα του εαυτού τους. Η Περιττότητα δεν είναι περιττή, η Δικαιοσύνη δεν είναι δίκαιη, ούτε η Ισότητα είναι ίση με κάτι άλλο*»<sup>220</sup>.

Όμως ο Πλάτωνας πολλές φορές δίνει παραδείγματα αυτό-μετοχής όπως π.χ. ότι η δικαιοσύνη είναι κάτι το δίκαιο: «*Η Δικαιοσύνη από τη φύση της δεν μπορεί παρά να είναι δίκαιο πράγμα... Αν η Οσιότητα η ίδια δεν είναι όσιο πράγμα, ποιο άλλο θα μπορούσε να είναι όσιο;*»<sup>221</sup> Επιπλέον ο Πλάτωνας συχνά χρησιμοποίησε εκφράσεις που υποδήλωναν αυτο-κατηγορήση των καθόλου: «*Αλλά ο Πλάτωνας μίλησε και με τρόπο που δεν υπέβαλλε μόνο ότι τα είδη υπάρχουν χωριστά (είναι χωρίς)*»<sup>222</sup> απ' όλα τα επιμέρους, αλλά και ότι κάποια επιμέρους που προσονόμαζε «καθαυτά», όπως π.χ. «...ο άνθρωπος καθαυτός...» ή «...το κρεβάτι καθαυτό...» αποτελούν ιδιαίτερα ακριβή, πιστά επιμέρους του Είδους που αναζητάται, μοντέλα τα οποία, άλλα επιμέρους του ίδιου Είδους, προσεγγίζουν»<sup>223</sup>.

Αλλά, για πολλούς ειδικούς, η αντίληψη του είδους ως υπόδειγμα, ως συγκεκριμένο καθολικό, είναι λάθος: «...είναι λάθος το είδος να θεωρείται και ως γενικό χαρακτηριστικό. Τα γενικά χαρακτηριστικά δεν χαρακτηρίζονται απ' τους εαυτούς τους, π.χ. η Ανθρωπότητα δεν είναι άνθρωπος. Το λάθος ενθαρρύνεται από το γεγονός ότι στα ελληνικά η ίδια φράση μπορεί να δηλώνει ταυτόχρονα το συγκεκριμένο και το αφηρημένο. Π.χ. το Λευκόν να σημαίνει ταυτόχρονα το λευκό πράγμα και τη Λευκότητα οπότε είναι αμφίβολο αν «λευκό καθαυτό» σημαίνει το κατεξοχήν λευκό πράγμα, ή τη λευκότητα μέσω αφάιρεσης»<sup>224</sup>. Σε κάποια πλατωνικά χωρία το νόημα είναι διαφορούμενο. Μπορούν να μεταφραστούν σαν να αναφέρονται στο συγκεκριμένο καθολικό (το κατεξοχήν λευκό πράγμα), αλλά και στο αφηρημένο καθολικό (η Λευκότητα).

<sup>220</sup> Βλ. Allen, R. E. (1960). Participation and Predication in Plato's Middle Dialogues. *The Philosophical Review*, 69 (2), 147-164.

<sup>221</sup> Βλ. Πλάτων. (έκδοση 2009). *Πρωταγόρας* (330 d – 330 e), εισ. – μετ. – ερμηνευτικά σχόλια Ηλίας Σ. Σπυρόπουλος. Θεσσαλονίκη: Ζήτρος, σελ. 150-152.

<sup>222</sup> «*Αλλά πες μου, ο ίδιος έχεις κάνει τη διάκριση για την οποία μιλείς, χωρίζοντας τις ιδέες αυτές καθαυτές και ξεχωρίζοντας εκείνα που μετέχουν πάλι σ' αυτές;*» (130 b), και «*Αλήθεια, και για τα εζής πράγματα, Σωκράτη, ... απορείς επίσης αν πρέπει να παραδεχθείς ότι υπάρχει για καθένα απ' αυτά χωριστή ιδέα, διαφορετική απ' αυτά τα πράγματα...*» (130 c), βλ., Πλάτων. *Παρμενίδης*, εισ. – μετ. – σχόλια Ηλίας Λάγιος. Αθήνα: Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος, σελ. 34-37, και Πλάτων. (έκδοση 1993). *Παρμενίδης (ή περί ιδεών)* 130b, εισ. – μετ. – σχόλια Φιλολογική Ομάδα Κάκτου. Αθήνα: Κάκτος, σελ. 68-71. Να παρατηρήσουμε, εδώ, πως στο χωρίο αυτό ο Πλάτωνας δεν χρησιμοποιεί τη φράση «είναι χωρίς» με την παραπάνω έννοια, βλ. Fine, G. (2004). *Plato on Knowledge and Forms: Selected Essays*. Oxford: Clarendon Press, σελ. 34. Ο Vlastos, στο Vlastos, G. (1991). *Socrates: Ironist and Moral Philosopher*. Cambridge: Cambridge University Press, σελ. 256, ισχυρίζεται πως η χωριστή ύπαρξη των ιδεών προκύπτει από την επαναλαμβανόμενη σε πλήθος χωρίων, στο *Φαίδωνα*, χρήση της φράσης «αυτά καθαυτά», όπως στα 78 D5-6, 66 A2, 83 B1-2, κλπ. Βλ., Πλάτων. (έκδοση 2007). *Φαίδων (Περί Ψυχής)*, εισ. – μετ. – σχόλια Θεόδωρος Γ. Μαυρόπουλος. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτρος, σσ. 510-511, 454-455, 530-531.

<sup>223</sup> Βλ. Kneale, W., & Kneale, M. (1971). *The Development of Logic*. Oxford: Clarendon Press, σελ. 19-20.

<sup>224</sup> Βλ., ό.π.



Το ερώτημα είναι αν υπάρχουν γενικά στο πλατωνικό έργο αποδεικτικά στοιχεία ότι ο Πλάτωνας απέρριψε την υπόθεση της «αυτο-κατηγορήσης»: «Το Είδος που αντιστοιχεί σε ένα δεδομένο γνώρισμα έχει αυτό το γνώρισμα και το ίδιο». Η πραγματική αντίρρηση κατά της «αυτο-κατηγορήσης» είναι σημασιολογική: δεν μπορεί να ισχύει σε περιπτώσεις που ένα Είδος δεν είναι δυνατό να περιέχεται στο σημασιολογικό πεδίο του αντίστοιχου κατηγορήματος. Για παράδειγμα, ο όρος «λευκός» δεν μπορεί να κατηγορηθεί στο Είδος «Λευκότητα» γιατί αναφέρεται μόνο σε πράγματα που μπορούν να προσδιοριστούν ως «έγχρωμα», «ορατά», «εκτατά», κ.λπ. που δεν είναι τα Είδη.

Η βιβλιογραφία, η σχετική με το έργο του Πλάτωνα, δεν έχει καταλήξει στο ερώτημα της αυτο-κατηγορήσης. Η έρευνα τον δείχνει να συγκαταβαίνει και στις δύο απόψεις. Πολλά καθολικά δεν μετέχουν του εαυτού τους, ενώ άλλα μετέχουν. Όταν για παράδειγμα έγραφε τον Παρμενίδη έβρισκε κάποια βασιμότητα τόσο στην άρνηση όσο και στην κατάφαση της αυτο-μέθεξης στην περίπτωση αυτοχαρακτηριζόμενων Ειδών του ανώτατου επιπέδου γενίκευσης σαν την Ενότητα και το Ον. Η κατάφαση της αυτομέθεξης θα πρόσφερε για παράδειγμα έναν εύκολο τρόπο ανακοπής της αναγωγής στο άπειρο του επιχειρήματος του τρίτου ανθρώπου: αν η F-ότητα μετέχει στον εαυτό της, δεν απαιτείται κάποιο άλλο Είδος για να εξηγηθεί το γεγονός ότι η F-ότητα, και όλα τα επιμέρους F, είναι F. Όμως η έννοια της αυτομέθεξης αντιβαίνει στη διαίσθηση γιατί στον ελληνικό πεζό λόγο το ρήμα μετέχειν αναφέρεται πάντα σε κάτι άλλο. Εξάλλου, αν είχε δεσμευθεί ότι όλα τα Είδη είναι αυτο-κατηγορητικά θα είχε αυτόματα κλονίσει ανεπανόρθωτα τη συνοχή της θεωρίας του γιατί τότε το Είδος της Πολλαπλότητας θα έπρεπε να είναι πολλαπλό όπως και της Κίνησης κινητό, τη στιγμή που κάθε Είδος του συστήματός του πρέπει υποχρεωτικά να είναι μοναδιαίο και ακίνητο<sup>225</sup>. Η διφορούμενη αυτή στάση μπορεί να δικαιολογηθεί από τη στιγμή που η προβληματικότητα της αυτο-κατηγορήσης καταδείχθηκε στον 20<sup>ο</sup> αι. με τις συνολοθεωρητικές αντινομίες, όπως είδαμε.

Πάντως, ο προτασιακός τύπος «η A είναι B» ερμηνευμένος έτσι ώστε να βεβαιώνει το κατηγορούμενο όχι για το αφηρημένο ουσιαστικό που κατέχει τη θέση του υποκειμένου, αλλά για κάθε μια από τις επιμέρους εκφάνσεις του, αποκαλείται «*παυλική κατηγορήση*»<sup>226</sup>, και πολλές προτάσεις των πλατωνικών διαλόγων που θεωρήθηκαν παραδείγματα αυτο-κατηγορήσης στο παρελθόν αποδεικνύονται παυλικές κατηγορήσεις. Σε γνωσιολογικά συμφραζόμενα, η αυτο-κατηγορητική ερμηνεία της φόρμουλας «το F είναι F» θα αποτελούσε για τον Πλάτωνα καθαρή ενόχληση, αλλά σε άλλα συμφραζόμενα, όπου τα Είδη αναλαμβάνουν το ρόλο αντικειμένων αξίας, είναι εξαιρετικά ευλογοφανής.

Για παράδειγμα στο *Συμπόσιο* αναφέρει το Είδος της Ωραιότητας ως «... ὃ ἔστι καλόν.» (Πλάτων, *Συμπόσιον* 211c-d)<sup>227</sup>, θέλοντας πράγματι να αποδώσει ως κατηγορήμα το «*είναι ωραίο*» στο Είδος της Ωραιότητας γιατί τα συμφραζόμενα δείχνουν καθαρά ότι αυτό ακριβώς θέλει, και πρέπει να πει, προκειμένου να εφαρμόσει τη θεωρία του έρωτα που εκθέτει<sup>228</sup>. Ερμηνεύοντας κανείς την πρόταση

<sup>225</sup> Βλ. σχετ., Vlastos, G. (2000). *Πλατωνικές Μελέτες*, ό. π., σσ. 479-486.

<sup>226</sup> Παίρνοντας ως πρότυπο την πρόταση του απ. Παύλου: «Η αγάπη μακροθυμεί, σπλαχνίζεται». Βλ. σχετ., ό. π., σσ. 334, 356-364.

<sup>227</sup> Πλάτων. (έκδοση 2009). *Συμπόσιον*. (Ι. Συκουτρής, μετάφρ.). Αθήναι: Ιωάννης Δ. Κολλάρος & Σια. Α.Ε. σσ. 182-183.

<sup>228</sup> Αν το Είδος της Ωραιότητας καθαυτό δεν αποτελούσε το αιώνια, απόλυτα, γενικά και άνογα ωραίο αντικείμενο πόθου του πλατωνικού εραστή θα κατέρρεε η ουσία της πλατωνικής διδασκαλίας περί έρωτος που βασίζεται στο ότι αυτό που αγαπάται είναι το ωραίο και η ίδια η Ωραιότητα είναι περισσότερο αξιέραστη από οποιαδήποτε επιμέρους έκφρασή της. Βλ. σχετ., Vlastos, G. (2000). *Πλατωνικές Μελέτες*, ό. π., σελ. 369.

«*Η Ωραιότητα είναι ωραία*» ως παυλική κατηγορήση τη μετατρέπει σε ασήμαντη ταυτολογία τη στιγμή που ο πλατωνικός έρωτας αποπειράται να αναπροσανατολίσει την επιθυμία, και να αλλάξει τον αισθησιασμό. Η Ωραιότητα είναι το υπέρτατα ωραίο πράγμα. Έτσι εκφράζεται συμπυκνωμένα μια απελευθερωτική και ενεργοποιός σοφία, αυτή της πλατωνικής διδασκαλίας, ικανή να αλλάξει τη ζωή μας<sup>229</sup>.

---

<sup>229</sup> Βλ. σχετ., Vlastos, G. (2000). *Πλατωνικές Μελέτες*, ό. π., σσ. 369-370.

## ΜΕΡΟΣ Γ΄

### 5. Εισαγωγικές έννοιες από τη Θεωρία Κατηγοριών

#### 5. 1 Εισαγωγή<sup>230</sup>

Η θεωρία κατηγοριών δημιουργήθηκε στα πρώτα χρόνια της δεκαετίας του 1940, από τους S. Eilenberg<sup>231</sup> και S. MacLane<sup>232</sup>, για την αντιμετώπιση προβλημάτων στην αλγεβρική τοπολογία<sup>233</sup>. Στη διάρκεια της δεκαετίας του '50 προβλήματα όχι μόνο στην αλγεβρική τοπολογία, αλλά και στη μιγαδική ή τη συναρτησιακή ανάλυση και την αλγεβρική γεωμετρία οδήγησαν τους D. M. Kan και A. Grothendieck (γεννήθηκε το 1928) σε παραπέρα προόδους, όπως η ανακάλυψη των προσαρτημένων συναρτητών, των αβελιανών κατηγοριών, και της ομολογιακής άλγεβρας. Από τότε, και ειδικότερα κατά τα τελευταία είκοσι χρόνια, η θεωρία κατηγοριών έχει ένα όλο και ευρύτερο πεδίο δράσης ως θεμελιώδες εργαλείο ικανό για διαύγαση (και κάποιες φορές ακόμα και επέκταση) και κατανόηση της μαθηματικής γνώσης και των εφαρμογών της.

Βασική ιδέα αποτελεί η παρατήρηση ότι πολλές περιοχές των μαθηματικών αφορούν στη μελέτη αντικειμένων και απεικονίσεων μεταξύ τους: για παράδειγμα, σύνολα και συναρτήσεις, διανυσματικοί χώροι και γραμμικοί μετασχηματισμοί, ομάδες και ομομορφισμοί ομάδων κ.λπ. Αυτή η ομοιομορφία μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο έρευνας όταν απαλλαγούμε από τις λεπτομέρειες των συνόλων, των ομάδων ή των διανυσματικών χώρων (εσωτερικά) και εστιάσουμε μόνο στις συναρτήσεις, τους ομομορφισμούς, ή τους μετασχηματισμούς και τους όρους σύνθεσής τους (εξωτερικά). Μια άμεση συνέπεια αυτού του τρόπου θεώρησης των μαθηματικών ήταν ότι η έννοια του μορφισμού, όπως προέκυψε αφαιρετικά από την έννοια της συνάρτησης (ή της απεικόνισης), μπορεί να χρησιμοποιηθεί, αντί της σχέσεως του περιέχεσθαι, ως θεμέλιος λίθος και για μαθηματικές κατασκευές, αλλά και για την έκφραση των ιδιοτήτων κάποιων μαθηματικών οντοτήτων. Συγκεκριμένα, αντί να περιγράφονται οι ιδιότητες μιας συλλογής με αναφορά στα μέλη της, τουτέστιν με αναφορά στην εσωτερική της δομή, μπορούμε να αναφερόμαστε στις εξωτερικές σχέσεις της με άλλες συλλογές.

Καίρια υπήρξε η ανακάλυψη του F. W. Lawvere (γεννήθηκε το 1937) ότι κάποιες κατηγορίες μπορούν να ειπωθούν ως σύμπαντα μεταβλητών συνόλων, ικανών να τυποποιήσουν θεωρίες που δεν έχουν μοντέλα στο σύμπαν των σταθερών συνόλων. Καθώς προόδευε η σύγχρονη λογική - στη μορφή που ξεκίνησε από τους Frege, Peano και Russell - ήταν ανάγκη να γενικευθεί η έννοια του συνόλου, ιδιαίτερα όταν γίνονταν απόπειρες να εφαρμοσθεί η λογική σε φυσικές γλώσσες. Τα αντικείμενα στα οποία αναφερόμαστε, σ' αυτές τις γλώσσες, είναι εφήμερα και

<sup>230</sup> Βλ. σχετ., Magnan, F. & Gonzalo, E. R. (1994). *Category Theory as a Conceptual Tool in the Study of Cognition*. στο J. Macnamara & E. G. Reyes (επιμ.), *The Logical Foundations of Cognition* (σσ. 57-90). New York: Oxford University Press.

<sup>231</sup> Αμερικανο-πολωνός μαθηματικός, 1913-1998.

<sup>232</sup> Αμερικανός μαθηματικός, 1909-2005.

<sup>233</sup> Στα πλαίσια αυτού του κλάδου των μαθηματικών κατασκευάζονται έννοιες που συνδέουν το πεδίο της τοπολογίας με αυτό της άλγεβρας και ειδικότερα της θεωρίας ομάδων.

μεταβλητά, αντίθετα με τους αριθμούς και τα σύνολα που είναι α-χρονικά και σταθερά. Η θεωρία κατηγοριών μπορεί να μας παράσχει τη δυνατότητα να αποφύγουμε τους υπερ-καθορισμούς που προκύπτουν από τις ιδιαιτερότητες της θεωρίας συνόλων<sup>234</sup> και έχει ήδη εφαρμοσθεί σε μια ποικιλία αντικειμένων, από τη φυσική ως τη γλωσσολογία. Αποτελεί εννοιολογικό εργαλείο στις γνωσιακές επιστήμες, καθώς πλεονεκτεί σε σχέση με τη θεωρία συνόλων στην ανάλυση και εννοιολόγηση βασικών ικανοτήτων του ανθρώπινου νου όπως αυτές της αναφοράς, της μέτρησης και της μάθησης.

Όσον αφορά τα ίδια τα μαθηματικά, θεμελιώδης υπήρξε η ανακάλυψη ότι οι περισσότερες έννοιες και κατασκευές σε διάφορα μαθηματικά πεδία μπορούσαν να χαρακτηρισθούν με όρους καθολικών ιδιοτήτων, δηλαδή ιδιοτήτων που μπορούν να τυποποιηθούν χρησιμοποιώντας ως πρωταρχικές τις έννοιες: αντικείμενο, μορφισμός, πεδίο (μορφισμού), συν-πεδίο (μορφισμού) και σύνθεση, που γενικεύουν (κατά κάποιο τρόπο) τις έννοιες του συνόλου, της συνάρτησης, του πεδίου ορισμού και του πεδίου τιμών αντίστοιχα, στη θεωρία συνόλων:

Θεωρία Συνόλων	Κατηγορίες
Σύνολο	Αντικείμενο
Συνάρτηση	Μορφισμός
Πεδίο Ορισμού, Πεδίο Τιμών	Πεδίο, Συν-πεδίο

Η θεωρία κατηγοριών μπορεί να παράσχει τους όρους να περιγραφεί και να μελετηθεί κάτι που έχει καθολικό χαρακτήρα στα μαθηματικά ή και σε άλλα επιστημονικά αντικείμενα. Αν δεχθούμε να ταυτίσουμε τη λογική με τη μελέτη αυτού που είναι καθολικό, η θεωρία κατηγοριών παρέχει τους όρους περιγραφής της λογικής, συγκεκριμένα, που επιβάλλει το υπό έρευνα αντικείμενο. Μια λογική που τίθεται προς διερεύνηση και ανακάλυψη περισσότερο, παρά αξιώνεται εξωτερικά.

Ο ανθρώπινος νους έχει την ικανότητα να πραγματώνει ένα μεγάλο αριθμό κατασκευών που φαίνονται τόσο φυσικές και καθολικές ώστε φαίνεται να είναι αναγκαίες. Η θεωρία κατηγοριών θα μπορούσε, ενδεχομένως, να είναι μια θεωρία περιγραφής κατασκευών που φαίνονται κατά φυσικό τρόπο αναγκαίες, οπότε και τα καθολικά του νου θα εκφράζονταν με όρους καθολικών ιδιοτήτων.

Ως θεωρία των συγκεκριμένων καθολικών, η θεωρία κατηγοριών, είναι διαφορετικής υφής από τη θεωρία συνόλων (θεωρία των αφηρημένων καθολικών). Δοθείσης μιας συλλογής όλων των στοιχείων με κάποια ιδιότητα, στα πλαίσια της θεωρίας συνόλων, μπορεί να συγκροτηθεί μια πιο αφηρημένη οντότητα, το σύνολο αυτών, που είναι καθολικό. Σχηματικά, θα λέγαμε πως η θεωρία κατηγοριών **δεν μπορεί να αξιώσει τα καθολικά της**, γιατί είναι συγκεκριμένα· αντίθετα, όπως θα δούμε, **πρέπει κάθε φορά να τα βρίσκει**.

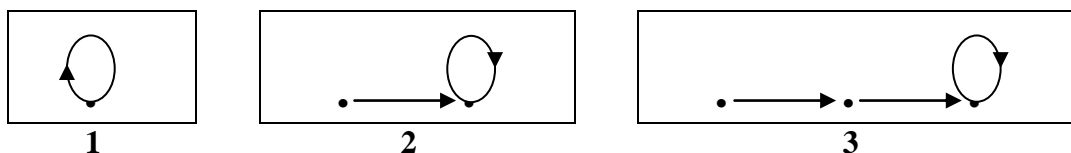
<sup>234</sup> Όπως ακριβώς στην εξέλιξη της φυσικής, όταν ήταν αισθητή η ανάγκη μιας γενικευμένης έννοιας διανύσματος, και η απάντηση κατέληξε βαθειά και απλή: ένα γενικευμένο διάνυσμα είναι στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου· μιας αλγεβρικής δομής που ικανοποιεί κάποιους απλούς νόμους. Έτσι, δεν υπερκαθορίζουμε ένα γενικευμένο διάνυσμα με το να το ορίζουμε ως ένα είδος «υπερδιανύσματος» με περισσότερες διευθύνσεις και γωνίες και ικανοποιώντας πολύπλοκες συνθήκες που γενικεύουν τις προηγούμενες. Αριστοτελικά μιλώντας, η ουσία ενός διανύσματος είναι ότι ανήκει σε έναν διανυσματικό χώρο.

## 5.2 Ένα παράδειγμα de facto λογικής: Η μέτρηση ως διαδικασία

Κατηγορία, περιγραφικά, λέμε μια συλλογή αντικειμένων και μορφισμών έτσι που σε κάθε μορφισμό μπορούμε να συνδέσουμε δύο αντικείμενα - το πεδίο και το συνπεδίο - με ιδιότητες: σε κάθε αντικείμενο να αντιστοιχεί ένας ταυτοτικός μορφισμός, οι μορφισμοί να συντίθενται (υπό την προϋπόθεση συμβατότητας) εντός των μορφισμών της κατηγορίας, η κατάλληλη σύνθεση ενός μορφισμού με τους ταυτοτικούς του πεδίου και συνπεδίου να τον αφήνει αναλλοίωτο και η σύνθεση να είναι προσεταιριστική<sup>235</sup>. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πώς, στα πλαίσια της κατηγορικής θεώρησης, μπορεί να διαφανεί η αντικειμενική λογική μιας διαδικασίας μαθηματικού χαρακτήρα. Παράδειγμα θα αποτελέσει η διαδικασία της μέτρησης.

Η μέτρηση αντανακλά την ικανότητα του νου να χρησιμοποιεί μια επαναλαμβανόμενη αλγοριθμική διαδικασία, την οποία εφαρμόζει κάθε φορά στο αποτέλεσμα της αμέσως προηγούμενης χρήσης της. Ουσιαστικά επαναλαμβάνουμε μια σειρά ενεργειών, και κάθε ενέργεια συχνά γίνεται αντιληπτή ως συνάρτηση. Η κυκλικότητα στην εφαρμογή μιας συνάρτησης παραπέμπει στη σύνθεση με τον εαυτό της. Κάτι τέτοιο έχει νόημα μόνο όταν το πεδίο ταυτίζεται με το συνπεδίο της. Οπότε και οδηγούμαστε στην έννοια του *εξελικτικού συνόλου*. *Εξελικτικό σύνολο* λέμε τη συνάρτηση της οποίας το πεδίο ταυτίζεται με το συνπεδίο. Πρόκειται, με άλλα λόγια, για ένα σύνολο εφοδιασμένο με έναν ενδομορφισμό. Θα κινηθούμε, λοιπόν, στην κατηγορία των εξελικτικών συνόλων με αντικείμενα του τύπου  $(A, f)$  όπου το  $A$  είναι σύνολο και η  $f: A \rightarrow A$ , συνάρτηση.

Ας δούμε τι συμβαίνει όταν μετράμε το πλήθος των ανθρώπων που βρίσκονται μέσα σε ένα δωμάτιο. Πρώτα διαλέγουμε έναν άνθρωπο και του αποδίδουμε τον αριθμό 1. Προχωρούμε στο να διαλέξουμε ένα δεύτερο άτομο και του αποδίδουμε τον αριθμό 2, κ.ο.κ., έως ότου επιλεγεί ο καθένας άπαξ και του δοθεί ένας αριθμός. Σ' αυτές τις διαδοχικές επιλογές, ουσιαστικά, συσχετίζονται η δομή ενός εξελικτικού συνόλου με το σύνολο των ανθρώπων του δωματίου: ο ενδομορφισμός αντιστοιχίζει σε κάθε άνθρωπο: αυτόν που επελέγη ως επόμενος και τον ίδιο στον εαυτό του. Το εξελικτικό σύνολο είναι εφοδιασμένο με ένα αρχικό σημείο (το πρώτο άτομο που επελέγη) και με μια συνάρτηση από το σύνολο των ατόμων επί του συνόλου των φυσικών. Ο αριθμός που αντιστοιχίζεται στο τελευταίο άτομο που επελέγη είναι ακριβώς ο αριθμός των ανθρώπων που έχουμε «μετρήσει». Μπορούμε να παραστήσουμε μια τέτοια δομή ζωγραφίζοντας ένα σημείο για κάθε μέλος του συνόλου, το πλήθος των στοιχείων του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε, και ένα βέλος από κάθε τελεία στην επόμενη που «θα μετρηθεί». Με το βέλος δείχνουμε την «επιλογή». Με τον βρόχο την αριθμητική απόδοση.



Το αρχέτυπο της νοητικής διαδικασίας της αρίθμησης, που θεωρούμε, είναι το εξελικτικό σύνολο των φυσικών με: ενδομορφισμό τον επόμενο, και πρώτο σημείο το

<sup>235</sup> Βλ. σχετ., Maignan, ό.π. Η θεωρία κατηγοριών βασίζεται στη σύνθεση ως θεμελιώδη πράξη με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που η κλασική συνολο-θεωρία βασίζεται στη σχέση του ανήκειν.

1. Τι είναι αυτό που διακρίνει αυτό το σύστημα από άλλα εξελικτικά σύνολα; Η απάντηση, γνωστή ως αξίωμα των Peano - Lawvere, δίνεται από την ακόλουθη καθολική ιδιότητα: Είναι το αρχικό εξελικτικό σύνολο με πρώτο στοιχείο. Συγκεκριμένα: Δοθέντος οποιουδήποτε εξελικτικού συνόλου  $A$  με ενδομορφισμό  $f$  και πρώτο στοιχείο  $a$ , υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση από το  $\mathbb{N}$  στο  $A$  που διατηρεί τη δομή, με την έννοια ότι, αντιστοιχίζει το 1 στο  $a$  και αν κάποιος φυσικός  $n$  αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο  $x$  του  $A$  τότε ο «επόμενος»  $n+1$  αντιστοιχίζεται στο  $f(x)$ , το «επόμενο» του  $x$ .

Στο παράδειγμά μας υπάρχει μια και μόνο συνάρτηση, που διατηρεί τη δομή, μεταξύ του  $\mathbb{N}$  και του εξελικτικού συστήματος των ανθρώπων, μέσα στο δωμάτιο, που επάγεται από τις διαδοχικές επιλογές μας. Αν είναι, για παράδειγμα, 15 άνθρωποι στον τελευταίο θα αντιστοιχισθούν όλοι οι αριθμοί από το 15 και πάνω. Αυτό δίνει και έναν ισοδύναμο τρόπο μέτρησης: ο πρώτος φυσικός αριθμός στον οποίο αντιστοιχίζεται το τελευταίο άτομο είναι ο αριθμός των ατόμων που «μετρήθηκαν».

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις της πραγματικής διαδικασίας μέτρησης έχουν ως ενδιαφέρον πόρισμα, για τη λογική των πεπερασμένων συλλογών «...σε μία ολότητα... προσδιορισμένων (σαφών), και καλώς διαφοροποιημένων (διακριτών) αντικειμένων... της εποπτείας, ή της σκέψης μας»<sup>236</sup>, ότι είναι Boolean<sup>237</sup>. Πράγματι, έστω  $S$  μια τέτοια συλλογή, που μπορεί να μετρηθεί από κάποιο φυσικό αριθμό, και  $T$  μια επιμέρους συλλογή που αποτελείται από αυτά που έχουν ήδη μετρηθεί. Για να συνεχίσουμε πρέπει να είμαστε ικανοί να αποφασίσουμε για κάποιο αυθαίρετο στοιχείο του  $S$  αν έχει μετρηθεί ή όχι (δηλαδή αν ανήκει στο  $T$ ). Με άλλα λόγια, οι επιμέρους συλλογές της  $S$  συνιστούν μια Boolean άλγεβρα αφού αναγνωρίζεται η τομή, η ένωση, το συμπλήρωμά τους και η κενή συλλογή. Δεν ξεκινήσαμε με μια έτοιμη λογική που επιβάλαμε σ' αυτές τις συλλογές. Μάλλον ανακαλύψαμε τη λογική τους θεωρώντας τη διαδικασία της μέτρησης που εφαρμόζεται σ' αυτές. Κάτι τέτοιο αποτελεί παράδειγμα λογικής που επιβάλλεται από τα πράγματα (de facto).

<sup>236</sup> Βλ., Dauben, J., ό.π., σελ. 170.

<sup>237</sup> Boolean άλγεβρα είναι ένα σύνολο  $B$  στοιχείων  $a, b, c, \dots$  με τις ακόλουθες ιδιότητες, για κάθε  $a, b, c$  στο  $B$ : (i) το  $B$  έχει δύο διμελείς πράξεις  $\wedge$  και  $\vee$  που ικανοποιούν τους ταυτοδύναμους νόμους:  $a \wedge a = a$ ,  $a \vee a = a$ , τους αντιμεταθετικούς νόμους:  $a \wedge b = b \wedge a$ , και  $a \vee b = b \vee a$ , τους επιμεριστικούς νόμους:  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ,  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ , (ii) τους νόμους διαγραφής:  $a \wedge (a \vee b) = a$ ,  $a \vee (a \wedge b) = a$ , (iii) είναι αμοιβαία επιμεριστικές:  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ,  $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ , (iv) το  $B$  περιλαμβάνει καθολικά φράγματα  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{1}$  που ικανοποιούν τις σχέσεις  $\mathbf{0} \wedge a = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{0} \vee a = a$ ,  $\mathbf{1} \wedge a = a$ ,  $\mathbf{1} \vee a = \mathbf{1}$ , (v) το  $B$  έχει μια μονομελή πράξη:  $a \rightarrow a'$ , του συμπληρώματος, που υπακούει στους ακόλουθους νόμους  $a \wedge a' = \mathbf{0}$ ,  $a \vee a' = \mathbf{1}$ . Με πράξεις την τομή, την ένωση και το συμπλήρωμα, τα υποσύνολα οποιουδήποτε συνόλου συγκροτούν μια Boolean άλγεβρα.

## 5.3 Αξιώματα και έννοιες της Θεωρίας Κατηγοριών

### 5.3.1 Τα αξιώματα

Μια κατηγορία, λοιπόν,  $\mathcal{C}$  αποτελείται από:

(α) μια συλλογή αντικειμένων  $Ob(\mathcal{C})$ :  $A, B, C, \dots$

(β) μια συλλογή μορφισμών (ή βελών)  $Mor(\mathcal{C})$  τέτοια που, για κάθε ζευγάρι αντικειμένων  $\langle A, B \rangle$ , ορίζεται ένα σύνολο μορφισμών (το  $hom$ -σύνολο, όπως συνήθως αποκαλείται):  $hom_{\mathcal{C}}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$  με στοιχεία που παριστάνουμε ως βέλη  $f: A \rightarrow B$ .

(γ) για κάθε  $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$  και  $g \in hom_{\mathcal{C}}(B, C)$ , υπάρχει η σύνθεση  $gf: A \rightarrow B \rightarrow C$  στο  $hom_{\mathcal{C}}(A, C)$ .

(δ) Η σύνθεση των μορφισμών είναι μια προσεταιριστική πράξη.

(ε) Για κάθε αντικείμενο  $A$  υπάρχει ένας μορφισμός  $1_A \in hom_{\mathcal{C}}(A, A)$  που καλείται ταυτοτικός του  $A$ , τέτοιος που για κάθε  $f: A \rightarrow B$  και  $g: C \rightarrow A$ ,  $f1_A = f$  και  $1_A g = g$  (Αξίωμα της ταυτότητας)<sup>238</sup>.

### 5.3.2 Παραδείγματα κατηγοριών

Η κατηγορία **Set** έχει αντικείμενα τα σύνολα και μορφισμούς τις συναρτήσεις. Πρόκειται για παράσταση της αφηρημένης δομής, που μοιράζονται μεταξύ τους τα συστήματα τα δομημένα από σύνολα, ως τύπος συστήματος που είναι κατηγορικά δομημένο. Έτσι, ο τύπος κατηγορίας αυτός, μας επιτρέπει να μιλάμε για τη δομή που μοιράζονται μεταξύ τους όλα τα αφηρημένου είδους συστήματα, που είναι δομημένα από σύνολα, αν τα δούμε ως στιγμιότυπα το ιδίου αφηρημένου είδους. Είναι το αποτέλεσμα της προσπάθειας πλαισίωσης του αφηρημένου είδους συστήματος που είναι δομημένο από σύνολα. Αυτό δεν σημαίνει ότι τα «αντικείμενα» είναι σύνολα και οι «μορφισμοί» συναρτήσεις. Μάλλον σημαίνει ότι σε αυτό τον τύπο συστήματος οι προτάσεις, που μιλούν για «αντικείμενα» και «μορφισμούς», μπορούν να ερμηνευθούν σαν να είχαν να κάνουν με αφηρημένα είδη συνόλων και συναρτήσεων<sup>239</sup>.

Επίσης, η κατηγορία **Grp** έχει αντικείμενα ομάδες και μορφισμούς τους ομομορφισμούς ομάδων<sup>240</sup>.

Ένα μονοειδές  $(M, \oplus, e_M)$ <sup>241</sup> μπορεί να θεωρηθεί κατηγορία ενός αντικειμένου, με μορφισμούς όσα και τα στοιχεία του. Σύνθεση των μορφισμών

<sup>238</sup> Τα παραπάνω αποτελούν ορισμό της λεγόμενης *τοπικά μικρής κατηγορίας*. Αποφεύγουμε τη χρήση κλάσεων μορφισμών στον ορισμό για να μην προκύψουν ζητήματα μεγεθών που κάνουν πιο πολύπλοκη την πραγμάτευση. Αν στο (α) θεωρήσουμε σύνολο αντικειμένων, αντί για κλάση, τότε έχουμε τη λεγόμενη *μικρή κατηγορία*. Αλλιώς η κατηγορία λέγεται *μεγάλη*. Αν οι συλλογές των αντικειμένων και των μορφισμών είναι πεπερασμένα σύνολα, η κατηγορία λέγεται *πεπερασμένη*.

<sup>239</sup> Βλ. σχετ., Landry, E. & Marquis, J. (2005). Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical. *Philosophia Mathematica*. 13, (III), 1-43. σελ. 36.

<sup>240</sup> Ομομορφισμός ομάδων είναι μια συνάρτηση μεταξύ ομάδων η οποία αντιστοιχίζει: το ουδέτερο στοιχείο της μιας στην άλλη, το αντίστροφο ενός στοιχείου της μιας στο αντίστροφο της εικόνας του, μέσω του ομομορφισμού, στην άλλη και το αποτέλεσμα της πράξης μεταξύ δύο στοιχείων της πρώτης στο αποτέλεσμα της πράξης των εικόνων τους, μέσω του ομομορφισμού, στη δεύτερη.

ορίζουμε την πράξη μεταξύ δύο στοιχείων της κατηγορίας-μονοειδούς η οποία, συνεπώς, είναι προσεταιριστική. Ενώ για κάθε στοιχείο  $X$  υπάρχει μοναδικός ταυτοτικός μορφισμός (το ταυτοτικό στοιχείο του μονοειδούς) που ικανοποιεί το αξίωμα της ταυτότητας.

Επίσης, ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο  $(P, \leq)$  μπορεί να θεωρηθεί κατηγορία με αντικείμενα τα στοιχεία του  $P$  και μορφισμούς τις ανισοτικές σχέσεις που ενδεχομένως ικανοποιούν ανά δύο. Επομένως, μια ειδική περίπτωση μερικώς διατεταγμένου συνόλου, όπως είναι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου, μπορεί να θεωρηθεί κατηγορία με αντικείμενα και μορφισμούς αυτούς που προαναφέραμε.

Μια κατηγορία, της οποίας οι μόνοι μορφισμοί είναι οι ταυτοτικοί, ονομάζεται *διακριτή* κατηγορία. Κάθε κλάση αντικειμένων, εφοδιασμένη με ταυτοτικές απεικονίσεις, ορίζει μια διακριτή κατηγορία.

### 5.3.3 Η έννοια του ισομορφισμού

Ένας μορφισμός  $f: A \rightarrow B$  είναι ισομορφισμός αν υπάρχει μορφισμός  $g: B \rightarrow A$  τέτοιος που  $fg = 1_B$  και  $gf = 1_A$ . Σ' αυτή την περίπτωση τα αντικείμενα  $A$  και  $B$  ονομάζονται *ισόμορφα*, πράγμα που συμβολίζουμε:  $A \cong B$ .

Τα ισομορφικά αντικείμενα «είναι ίδια». Μπορεί κανείς να χωρεί, από το ένα στο άλλο, ελεύθερα δια του ισομορφισμού ή δια του αντιστρόφου του, ο οποίος είναι επίσης ισομορφισμός. Τέτοιοι μορφισμοί εδραιώνουν μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων (ενδεχομένως) των αντικειμένων, διατηρώντας τις σχετικές με αυτά δομές. Ένα αντικείμενο είναι *μοναδικό έως ισομορφισμού*, ως προς κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό, αν είναι ισόμορφο με όλα τα υπόλοιπα αντικείμενα που επίσης το διαθέτουν. Μια έννοια ορίζεται έως ισομορφισμού όταν η περιγραφή της προσδιορίζει ένα αντικείμενο μοναδικά έως ισομορφισμού.

Για τη θεωρία κατηγοριών θα μπορούσαμε να πούμε πως είναι το αντικείμενο που παρέχει μια αφηρημένη τυποποίηση της ιδέας του μαθηματικού ισομορφισμού και εξετάζει έννοιες που παραμένουν αναλλοίωτες υπό τους διάφορους τύπους ισομορφισμού. Στη θεωρία κατηγοριών, το «είναι ισόμορφο προς το» είναι ουσιαστικά συνώνυμο με το «είναι». Οι περισσότεροι από τους βασικούς ορισμούς και κατασκευές δεν προσδιορίζουν ένα αντικείμενο αλλά ένα αντικείμενο έως ισομορφισμού.

### 5.3.4 Αρχικό και τελικό αντικείμενο<sup>242</sup>

*Τελικό αντικείμενο* 1 μιας κατηγορίας  $\mathcal{C}$  ονομάζεται το αντικείμενο για το οποίο ισχύει:  $\forall X \in Ob(\mathcal{C}), \exists! \text{μορφισμός } X \xrightarrow{!} 1$ .

Αντιστρέφοντας όλα τα βέλη μπορούμε να ορίσουμε τη *δ्वική έννοια*:

*Αρχικό αντικείμενο* 0 μιας κατηγορίας  $\mathcal{C}$  ονομάζεται το αντικείμενο για το οποίο ισχύει ότι:  $\forall X \in Ob(\mathcal{C}), \exists! \text{μορφισμός } 0 \xrightarrow{!} X$ .

Ενδιαφέρον είναι ότι δύο τελικά αντικείμενα, όπως και δύο αρχικά, είναι ισομορφικά κατά μοναδικό τρόπο σε κάθε κατηγορία, δηλαδή υπάρχει μοναδικός

<sup>241</sup> Πρόκειται για ημιομάδα (σύνολο στο οποίο έχει οριστεί μια διμελής προσεταιριστική πράξη) με ουδέτερο στοιχείο της πράξης.

<sup>242</sup> Βλ., σχετ., Magnan, ό.π., σσ. 76-89.



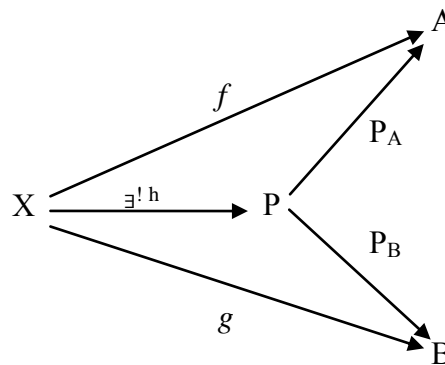
ισομορφισμός μεταξύ τους, οπότε και συνηθίζεται να τα συγκεφαλαιώνουμε σε έναν αντιπρόσωπο και να μιλούμε για το τελικό και το αρχικό αντικείμενο.

Στη **Set**, αρχικό αντικείμενο είναι το κενό σύνολο  $\emptyset$ . Δοθέντος συνόλου  $A$ , μπορούμε να βρούμε μια και μοναδική συνάρτηση από το  $\emptyset$  στο  $A$ , την *κενή*<sup>243</sup>. Τελικά αντικείμενα είναι τα μονοσύνολα αφού για καθένα από τα σύνολα  $A$  υπάρχει μία και μόνη συνάρτηση που πηγαίνει όλα τα στοιχεία του  $A$  στο  $\{x\}$ .

Σε ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο  $(P, \leq)$ , το οποίο θεωρούμε ως κατηγορία, το αρχικό αντικείμενο (αν υπάρχει) είναι ένα στοιχείο  $0 \in P$  το οποίο είναι μικρότερο κάθε στοιχείου του  $P$  (δηλαδή, το ελάχιστο). Αντιστοίχως, τελικό αντικείμενο (αν υπάρχει) είναι ένα στοιχείο  $1$  του  $P$  μεγαλύτερο από κάθε στοιχείο του (δηλαδή, το μέγιστο).

### 5.3.5 Γινόμενα

*Γινόμενο* δύο αντικειμένων  $A$  και  $B$  μιας κατηγορίας είναι ένα αντικείμενο  $P$  μαζί με δύο μορφοισμούς  $P \xrightarrow{P_A} A$  κ'  $P \xrightarrow{P_B} B$  έτσι που  $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  και όλα τα ζευγάρια μορφοισμών από το  $X$  προς τα  $A$  και  $B$ ,  $\exists!$  μορφοισμός  $X \xrightarrow{h} P$ , που συνήθως συμβολίζεται  $\langle f, g \rangle$ , ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να αντιμετατίθεται:



Το γινόμενο των αντικειμένων  $A$  και  $B$  συμβολίζεται  $A \times B$  και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό Gentzen η καθολική ιδιότητα του γινομένου εκφράζεται:

$$\frac{C \longrightarrow A \times B}{C \longrightarrow A, \quad C \longrightarrow B}$$

Στη **Set**, το κατηγορικό γινόμενο αντιστοιχεί στο καρτεσιανό γινόμενο. Σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $(P, \leq)$ , το οποίο θεωρούμε ως κατηγορία, το γινόμενο των στοιχείων του  $p$  και  $q$ , εφόσον υπάρχει, είναι το μέγιστο κάτω φράγμα τους, δηλαδή το infimum  $p \wedge q$ <sup>244</sup>.

<sup>243</sup> Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις ως υποσύνολα καρτεσιανών γινομένων, το  $\emptyset$  είναι το μόνο υποσύνολο του  $\emptyset \times A$ , οπότε και η *κενή*  $\emptyset$  είναι η μόνη συνάρτηση από το  $\emptyset$  στο  $A$ .

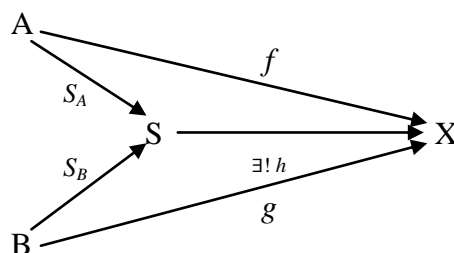
<sup>244</sup> Γιατί πρέπει  $p \times q \leq p$  και  $p \times q \leq q$  (δηλαδή το  $p \times q$  να είναι κάτω φράγμα των  $p$  και  $q$ ), ταυτόχρονα που για κάθε  $c \leq p$  και  $c \leq q$ , να ισχύει επίσης ότι  $c \leq p \times q$ .

Το παράδειγμα της τομής συνόλων είναι μια ειδική περίπτωση της έννοιας του κατηγορικού γινομένου στο δυναμοσύνολο ενός συνόλου όταν το θεωρούμε ως κατηγορία.

### 5.3.6 Συν-γινόμενα

Η δυική έννοια του γινομένου καλείται συν-γινόμενο και ορίζεται ως εξής:

*Συν-γινόμενο* δύο αντικειμένων  $A$  και  $B$  μιας κατηγορίας είναι ένα αντικείμενο  $S$  μαζί με δύο μορφοισμούς  $A \xrightarrow{S_A} S$  κ'  $B \xrightarrow{S_B} S$  έτσι που  $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$ , και όλα τα ζευγάρια μορφοισμών  $A \xrightarrow{f} X$  κ'  $B \xrightarrow{g} X$ ,  $\exists!$  μορφοισμός  $S \xrightarrow{h} X$ , έτσι που το ακόλουθο διάγραμμα να αντιμετατίθεται:



Ακολουθώντας πάλι το συμβολισμό Gentzen:

$$\frac{A + B \longrightarrow C}{A \longrightarrow C, \quad B \longrightarrow C}$$

Στη **Set**, το κατηγορικό συν-γινόμενο των  $A_1$  και  $A_2$  είναι η διαζευγμένη ένωση  $A_1 + A_2$ , με στοιχεία διατεταγμένα ζεύγη με πρώτο στοιχείο κάποιο στοιχείο του  $A_i$  και δεύτερο το ίδιο το  $A_i$ , για  $i = 1, 2$ .

Σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $(P, \leq)$ , το οποίο θεωρούμε ως κατηγορία, το συν-γινόμενο των στοιχείων του  $p$  και  $q$ , εφόσον υπάρχει, είναι το ελάχιστο άνω φράγμα τους, δηλαδή το supremum  $p \vee q$ <sup>245</sup>.

### 5.3.7 Συναρτητές

Έστω  $\mathcal{C}$  και  $\mathcal{D}$  δύο κατηγορίες. Ένας συναρτητής  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  είναι μια απεικόνιση που αντιστοιχίζει: σε κάθε αντικείμενο  $A \in Ob(\mathcal{C})$  ένα αντικείμενο  $F(A) \in Ob(\mathcal{D})$ , και σε κάθε μορφοισμό  $f: A \rightarrow B$  στη  $\mathcal{C}$  έναν μορφοισμό  $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ , στη  $\mathcal{D}$ , τέτοιον που  $F(1_X) = 1_{F(X)}$  και  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ .

<sup>245</sup> Γιατί πρέπει  $p \leq p + q$  και  $q \leq p + q$  (δηλαδή το  $p + q$  να είναι ένα άνω φράγμα των  $p$  και  $q$ ), ταυτόχρονα που για κάθε  $p \leq c$  και  $q \leq c$ , να ισχύει επίσης ότι  $p + q \leq c$ .

### 5.3.8 Διαγράμματα

Όταν μιλούμε για κάποιο  $\mathcal{D}$  διάγραμμα στην κατηγορία  $\mathcal{C}$  αναφερόμαστε, εποπτικά μιλώντας, σε μια οικογένεια αντικειμένων  $\{D_i\}_{i \in I}$  αντικειμένων της  $\mathcal{C}$  με μορφισμούς  $D_i \xrightarrow{x} D_j$  της  $\mathcal{C}$  που συνδέουν τα αντικείμενα αυτά. Η λέξη φέρει, αν και όχι πάντα, το ίδιο νόημα με εκείνο ενός τμήματος μιας κατηγορίας. Ένα διάγραμμα του οποίου η συλλογή των αντικειμένων και των μορφισμών είναι σύνολα, και όχι κλάσεις, θα ονομάζεται *μικρό*.

Ένας άλλος τρόπος να μιλήσουμε για τα διαγράμματα, στη Θεωρία Κατηγοριών, είναι να τα φανταστούμε ως το κατηγορικό ανάλογο μιας οικογένειας συνόλων, σε καθένα από τα οποία αντιστοιχεί ένας δείκτης, στοιχείο ενός σταθερού συνόλου δεικτών. Μια συνάρτηση, δηλαδή, από ένα σταθερό σύνολο δεικτών στην οικογένεια των συνόλων. Η διαφορά έγκειται, αν μη τι άλλο, στο ότι κατηγορικά πρέπει να λάβουμε υπόψη και τους μορφισμούς μεταξύ των αντικειμένων. Οπότε διάγραμμα, κατ' αναλογία, θα λέγαμε τη συλλογή από αντικείμενα και μορφισμούς στα οποία αντιστοιχεί «δείκτες» μια σταθερή κατηγορία: ένας συναρτητής, με άλλα λόγια, από μια σταθερή δείκτρια κατηγορία σε μια άλλη.

Έτσι, διάγραμμα τύπου  $\mathcal{J}$ , σε μια κατηγορία  $\mathcal{C}$ , ονομάζουμε έναν συναρτητή  $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ . Η κατηγορία  $\mathcal{J}$  καλείται *δείκτρια κατηγορία* ή *σχήμα* (*scheme*) του διαγράμματος  $D$ . Τα αντικείμενα και οι μορφισμοί στην  $\mathcal{J}$  δεν έχουν κάποια άλλη σημασία πέραν του τρόπου με τον οποίο συμπλέκονται. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι το διάγραμμα  $D$  απλώς υποδεικνύει μια συλλογή αντικειμένων και μορφισμών στη  $\mathcal{C}$  όπως αυτή είναι σχεδιασμένη στη  $\mathcal{J}$ . Εύλογα, το διάγραμμα θα καλείται *μικρό* ή *πεπερασμένο* όταν το σχήμα είναι μια *μικρή* ή *πεπερασμένη* κατηγορία, και *διακριτό* όταν η δείκτρια κατηγορία είναι *διακριτή*.

Παρατηρούμε πως τεχνικά δεν υπάρχει διαφορά ανάμεσα σε ένα διάγραμμα και έναν συναρτητή ή μεταξύ ενός σχήματος και μιας κατηγορίας. Η ιδιαιτερότητα στο επίπεδο ορολογίας αντανακλά την γνωστή, από τη συνολοθεωρία, κατάσταση όπου σταθεροποιούμε μια δείκτρια κατηγορία και αφήνουμε να μεταβάλλεται ο συναρτητής και, κατ' επέκταση, η δεύτερη κατηγορία.

### 5.3.9 Κώνος και συν-κώνος διαγράμματος

Έστω  $\mathcal{D}$  διάγραμμα στην κατηγορία  $\mathcal{C}$ . Κώνος για το διάγραμμα  $\mathcal{D}$  είναι ένα αντικείμενο  $X$ , της κατηγορίας  $\mathcal{C}$ , μαζί με μια οικογένεια μορφισμών  $\{X \xrightarrow{f_i} D_i\}_{i \in I}$  (όπου  $\{D_i\}_{i \in I}$  είναι η οικογένεια αντικειμένων του  $\mathcal{D}$ ) τέτοιων που όλοι οι μορφισμοί  $D_i \xrightarrow{x} D_j$  του  $\mathcal{D}$ , στο ακόλουθο διάγραμμα αντιμετωπίζονται:

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{x} & D_j \\ & \searrow f_i & \nearrow f_j \\ & X & \end{array}$$

Με αντιστροφή των μορφισμών προκύπτει η δυική έννοια, ο συν-κώνος.

### 5.3.10 Όρια και συνόρια

Όριο ενός διαγράμματος  $\mathcal{D}$  (μιας κατηγορίας  $\mathcal{C}$ ) είναι ένας κώνος  $X$  για το  $\mathcal{D}$  τέτοιος που, για κάθε άλλο κώνο  $X'$  του  $\mathcal{D}$ , υπάρχει ένας και μόνο μορφισμός  $f$  τέτοιος που το παρακάτω διάγραμμα αντιμετωπίζεται για όλα τα  $D_i$ :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xleftarrow{f} & X \\ & \searrow f_i' & \swarrow f_j \\ & D_i & \end{array}$$

Με αντιστροφή των μορφισμών προκύπτει η δυική έννοια, το συνόριο.

Μια κατηγορία ονομάζεται πλήρης (και αντίστοιχα συν-πλήρης) όταν κάθε μικρό διάγραμμά της έχει όριο (αντίστοιχα συνόριο).

Σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο  $(P, \leq)$ , το οποίο θεωρούμε ως κατηγορία, τα όρια αντιστοιχούν σε μέγιστα κάτω φράγματα και τα συνόρια σε ελάχιστα άνω φράγματα.

## 5.4 Οι φυσικοί αριθμοί ως καθολικό

Ως θεωρία των συγκεκριμένων καθολικών, ο θεμελιακός ρόλος της θεωρίας κατηγοριών είναι να χαρακτηρίσει αυτό που είναι σημαντικό στα μαθηματικά, εκθέτοντας τις συγκεκριμένες καθολικές ιδιότητες του. Για παράδειγμα, γιατί είναι σημαντικοί οι φυσικοί αριθμοί; Από την άποψη της συνολο-θεωρητικής θεωρίας μοντέλων<sup>246</sup> οι φυσικοί αριθμοί είναι ένα, μεταξύ απείρων, μοντέλο γλώσσας που περιέχει ένα στοιχείο που έχει επισημανθεί (το 0 στο  $\mathbb{N}$ ) και μια μονομελή συνάρτηση (τη συνάρτηση «επόμενος», στο  $\mathbb{N}$ ). Αντί να παράσχει ακόμα μία κατασκευή των φυσικών, η θεωρία κατηγοριών μας παρέχει την καθολική ιδιότητα που δείχνει γιατί είναι σημαντικοί: αποτελούν το καθολικό σύνολο απαρίθμησης. Συγκεκριμένα:

### Τα αξιώματα του Peano:

Έστω  $\mathbb{N}$  ένα σύνολο με ένα στοιχείο που έχει επισημανθεί, το 0, και μια συνάρτηση  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , τέτοια που:

1. Η  $\sigma$  είναι 1-1.
2. Το 0  $\notin$  στην εικόνα  $\sigma(\mathbb{N})$ .
3. (Αρχή της επαγωγής) Για οποιοδήποτε  $P \subseteq \mathbb{N}$  τέτοιο που: το 0  $\in P$  και  $(\forall n \in \mathbb{N}, n \in P \Rightarrow \sigma(n) \in P)$ , θα ισχύει ότι  $P = \mathbb{N}$ .

Έστω  $\mathcal{C}$  η κατηγορία της οποίας:

- τα αντικείμενα είναι σύνολα  $S$  εφοδιασμένα με ένα στοιχείο που έχει επισημανθεί,  $z$ , και έναν ενδομορφισμό  $f: S \rightarrow S$ , και

- οι μορφισμοί είναι συνολοσυναρτήσεις που διατηρούν τα στοιχεία που έχουν επισημανθεί και είναι συμβιβαστές με τους ενδομορφισμούς. Δηλαδή, αν  $\langle S, z, f \rangle$  και  $\langle S', z', f' \rangle$  είναι στη  $\mathcal{C}$ , τότε ένας μορφισμός  $\langle S, z, f \rangle \rightarrow \langle S', z', f' \rangle$  δίνεται από μία συνάρτηση  $g: S \rightarrow S'$  έτσι που  $g(z) = z'$  και για οποιοδήποτε  $s$  στο  $S$ ,  $f'(g(s)) = g(f(s))$  (το «επόμενο» της εικόνας του  $s$  μέσω του  $g$ , ταυτίζεται με την εικόνα μέσω του  $g$  του «επόμενου» του  $s$ ).

Τότε, η καθολική ιδιότητα που χαρακτηρίζει τους φυσικούς αριθμούς είναι η εξής:

Αξίωμα Peano – Lawvere: Το  $\langle \mathbb{N}, 0, \sigma \rangle$  είναι ένα αρχικό αντικείμενο στην κατηγορία  $\mathcal{C}$ .

Δηλαδή, για κάθε αντικείμενο  $\langle S, z, f \rangle$  στη  $\mathcal{C}$  υπάρχει μοναδικός μορφισμός  $g: \langle \mathbb{N}, 0, \sigma \rangle \rightarrow \langle S, z, f \rangle$ . Η σχέση μετοχής εκφράζεται ως εξής:

$$\langle S', z', f' \rangle \mu \langle S, z, f \rangle \text{ αν } \exists! \text{ μορφισμός } \langle S, z, f \rangle \rightarrow \langle S', z', f' \rangle.$$

Η ιδιότητα  $F(\langle S, z, f \rangle)$  ορίζεται ως εξής: υπάρχει μια ακολουθία  $s_0, s_1, \dots$ , στο  $S$  τέτοια που  $s_0 = z$  και το επόμενο στοιχείο στην ακολουθία δίνεται από την  $f$ ,  $f(s_n) = s_{n+1}$ , για όλα τα  $n$ .

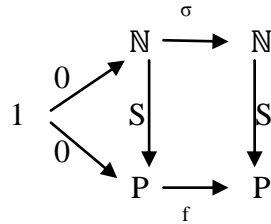
Οι φυσικοί αριθμοί  $\langle \mathbb{N}, 0, \sigma \rangle$  είναι το συγκεκριμένο καθολικό αυτής της ιδιότητας. Αποτελούν το καθολικό σύνολο απαρίθμησης. Δοθέντος οποιουδήποτε αντικειμένου  $\langle S, z, f \rangle$  στη  $\mathcal{C}$  υπάρχει μοναδικός μορφισμός  $g$ :

<sup>246</sup> Στη Θεωρία Μοντέλων μελετούμε μαθηματικές δομές (π.χ. ομάδες, δακτυλίους, κλπ.) που είναι μοντέλα τυπικών γλωσσών, δηλαδή δίνουν νόημα στις προτάσεις τους, χρησιμοποιώντας εργαλεία της μαθηματικής λογικής.

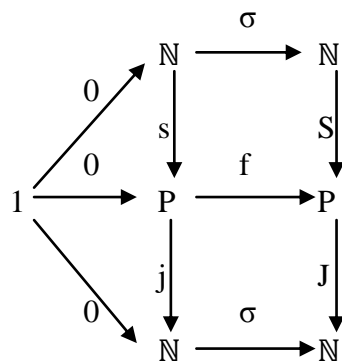
$\langle \mathbb{N}, 0, \sigma \rangle \rightarrow \langle S, z, f \rangle$ . Η μοναδική απεικόνιση μετοχής δίνεται από τις επαναλήψεις της  $f$  εφαρμοζόμενης στο  $z$ . Δηλαδή,  $g(n) = f^n(z)$ , όπου  $g(0) = z$ . Η ακολουθία  $s_0, s_1, \dots$ , στο  $S$  δίνεται από την εικόνα της  $g$ .

Ας δούμε πώς μπορεί η αρχή της επαγωγής να παραχθεί από την καθολική ιδιότητα των φυσικών αριθμών:

Έστω κάποιο  $P \subseteq \mathbb{N}$  τέτοιο που: το  $0 \in P$  και  $(\forall n \in \mathbb{N}, n \in P \Rightarrow \sigma(n) \in P)$ . Τότε, η  $f(n) = \sigma(n)$  ορίζει μια συνάρτηση  $f: P \rightarrow P$  ώστε το  $\langle P, 0, f \rangle$  να είναι αντικείμενο της  $\mathcal{C}$ . Επίσης, τότε, υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση μετοχής  $s: \mathbb{N} \rightarrow P$  τέτοια που το τρίγωνο και το τετράγωνο του ακόλουθου διαγράμματος να αντιμετατίθενται:



Η απεικόνιση υπαγωγής<sup>247</sup>  $j: P \rightarrow \mathbb{N}$  κάνει το τρίγωνο και το τετράγωνο του παρακάτω διαγράμματος να αντιμετατίθενται:



Έτσι, το εξωτερικό τρίγωνο και τετράγωνο αντιμετατίθενται και η  $js: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  είναι η μοναδική αυτο-μετοχική απεικόνιση για το  $\mathbb{N}$ , οπότε είναι η ταυτοτική απεικόνιση  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Άρα, η συνάρτηση υπαγωγής  $j: P \rightarrow \mathbb{N}$  πρέπει να είναι επί, δηλαδή  $P = \mathbb{N}$ . ■

<sup>247</sup> Ως εμφύτευση που πηγαίνει κάθε στοιχείο στον εαυτό του.

## ΜΕΡΟΣ Δ'

### 6. Η Θεωρία Κατηγοριών ως μαθηματική θεωρία των συγκεκριμένων καθολικών

#### 6.1 Εισαγωγή

Για να αποτελέσει η θεωρία κατηγοριών μια *θεωρία των καθολικών*, όπως έχουμε προαναφέρει, θα ορίσουμε τη διμελή σχέση μετοχής  $\mu$  και τη σχέση ισοδυναμίας " $\approx$ ", των καθολικών για μια ιδιότητα  $F$ , ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες καθολικότητας ( $\forall X, X \mu u_F \text{ ανν } F(X)$ ) και μοναδικότητας (αν  $u_F$  και  $u'_F$  είναι καθολικά που ικανοποιούν τη συνθήκη καθολικότητας για την ιδιότητα  $F$ , τότε  $u_F \approx u'_F$ ).

Για τα συγκεκριμένα καθολικά της θεωρίας κατηγοριών **η σχέση μετοχής είναι η σχέση μοναδικής παραγοντοποίησης**. Σε μια κατηγορία διαμορφώνεται ως εξής: «  $X \mu u$  » θα σημαίνει πως υπάρχει μοναδικός μορφισμός  $X \rightarrow u$ . Τότε το  $X$  καλείται *μοναδικά παραγοντοποιήσιμο* δια του  $u$ , και ο μορφισμός  $X \rightarrow u$  είναι ο *μορφισμός παραγοντοποίησης* ή *μορφισμός μετοχής*, που είναι εξ ορισμού μοναδικός.

Στη συνθήκη καθολικότητας για το καθολικό  $u$ :  $\forall X, X \mu u \text{ ανν } F(X)$ , η ύπαρξη του ταυτοτικού μορφισμού  $1_u : u \rightarrow u$  εκφράζει τη μετοχή του συγκεκριμένου καθολικού στον εαυτό του. Τα καθολικά της θεωρίας κατηγοριών είναι αυτομετέχοντα, συγκεκριμένα.

Στη θεωρία κατηγοριών **η σχέση ισοδυναμίας που χρησιμοποιείται στη συνθήκη μοναδικότητας των καθολικών είναι ο ισομορφισμός «  $\cong$  »**. Θα επιβεβαιώσουμε αμέσως παρακάτω το ότι δύο συγκεκριμένα καθολικά για την ίδια ιδιότητα είναι ισόμορφα:

Από τη συνθήκη καθολικότητας, δύο συγκεκριμένα καθολικά της ίδιας ιδιότητας  $u$  και  $u'$  πρέπει να μετέχουν το ένα του άλλου. Έστω  $f : u \rightarrow u'$  και  $g : u' \rightarrow u$  οι μοναδικοί μορφισμοί που δίνονται από την ισχύ της αμοιβαίας μετοχής. Τότε, από τη σύνθεση  $g f : u' \rightarrow u'$  είναι ο μοναδικός μορφισμός  $u' \rightarrow u'$ . Όμως, ο  $1_{u'}$  είναι ένας άλλος τέτοιος μορφισμός οπότε, και λόγω της μοναδικότητας,  $g f = 1_{u'}$ . Ομοίως η  $f g : u \rightarrow u$  είναι ο μοναδικός μορφισμός αυτομετοχής για το  $u$  οπότε  $f g = 1_u$ . Άρα η αμοιβαία μετοχή του  $u$  και  $u'$  δίνει  $u \cong u'$ .

Τελικά, η θεωρία κατηγοριών αποτιμάται ως μια θεωρία των καθόλου με σχέση μετοχής την «μοναδικής παραγοντοποίησης» και σχέση ισοδυναμίας τον ισομορφισμό.

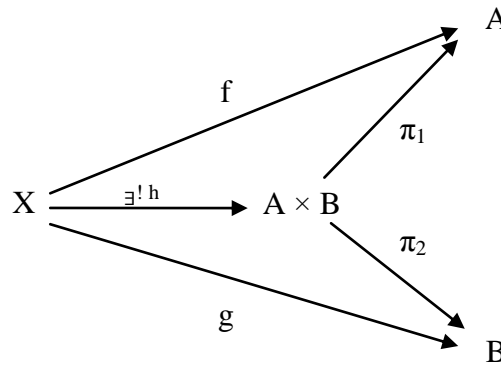
## 6.2 Τα γινόμενα ως καθόλου

Στη γενική περίπτωση, οι οντότητες που μας ενδιαφέρουν είναι οι μορφισμοί περισσότερο απ'ότι τα αντικείμενα που εμφανίζονται ως πεδία και συνπεδία των μορφισμών. Δοθέντων αντικειμένων  $A$  και  $B$  σε μια κατηγορία  $\mathcal{C}$  (π.χ. των συνόλων) θεωρούμε την ιδιότητα  $F$  που εφαρμόζεται σε ζεύγη μορφισμών με ένα κοινό πεδίο  $X$  και τα  $A$  και  $B$  ως συνπεδία ως εξής:  $F(\langle f, g \rangle)$  σημαίνει πως για κάποιο αντικείμενο  $X$ , οι  $f$  και  $g$  έχουν πεδίο το  $X$  και συνπεδία τα  $A$  και  $B$ . Δηλαδή:

$F(\langle f, g \rangle)$  σημαίνει ότι για κάποιο αντικείμενο  $X$ , οι  $f: X \rightarrow A$  &  $g: X \rightarrow B$ .

Το καθολικό γι' αυτή την ιδιότητα, αν υπάρχει, θα είναι ένα ζευγάρι μορφισμών  $\pi_1: A \times B \rightarrow A$  &  $\pi_2: A \times B \rightarrow B$  με ένα κοινό πεδίο, που συνήθως συμβολίζεται  $A \times B$ , τέτοιο που κάθε άλλο ζευγάρι μορφισμών  $f: X \rightarrow A$  και  $g: X \rightarrow B$  να παραγοντοποιείται μοναδικά δια του ζευγαριού αυτού. Το ζευγάρι αυτό λέγεται *ζευγάρι των προβολών*  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ .

Παραγοντοποιούνται μοναδικά σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός  $h: X \rightarrow A \times B$ , τέτοιος που τα τρίγωνα του διαγράμματος αντιμετωπίζονται:



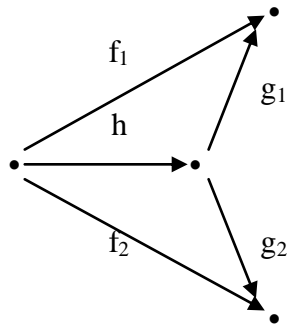
Η συνθήκη καθολικότητας:  $F(\langle f, g \rangle)$  αν  $\langle f, g \rangle$  παραγοντοποιείται μοναδικά δια του  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$  ικανοποιείται αφού: Αν το  $\langle f, g \rangle$  έχει την ιδιότητα, τότε εξ ορισμού παραγοντοποιείται μοναδικά δια του  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ . Και αν το  $\langle f, g \rangle$  παραγοντοποιείται μοναδικά δια (δηλαδή μετέχει) του  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$  η ιδιότητα ανακλάται προς τα πίσω από το συγκεκριμένο καθολικό  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$  στις οντότητες που συμμετέχουν σ' αυτό ως εξής: αφού το  $\langle f, g \rangle$  παραγοντοποιείται μοναδικά δια του  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ , θα ισχύει εξ ορισμού ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός  $h$  τέτοιος που  $f = \pi_1 h$  και  $g = \pi_2 h$  για κάποιον παράγοντα-μορφισμό  $h: X \rightarrow A \times B$ . Οπότε οι  $f$  και  $g$  θα έχουν την ιδιότητα να είναι μορφισμοί από το ίδιο κοινό πεδίο στο  $A$  και  $B$ , δηλαδή,  $F(\langle f, g \rangle)$ .

Σε πολλές περιπτώσεις τα καθολικά είναι μορφισμοί ή συλλογές μορφισμών. Είναι, όμως, πάντα δυνατό να ορισθούν νέες κατηγορίες που σ' αυτές, οι συλλογές μορφισμών, γίνονται αντικείμενα στη νέα κατηγορία.

Στο γινόμενο, για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε μια νέα κατηγορία  $\mathcal{C}'$  στην οποία τα αντικείμενα είναι τα ζεύγη  $\langle f_1, f_2 \rangle$  μορφισμών της  $\mathcal{C}$  με κοινό πεδίο. Δοθέντων δύο αντικειμένων  $\langle f_1, f_2 \rangle$  και  $\langle g_1, g_2 \rangle$  με συν-πεδίο  $(f_i) =$  συν-πεδίο  $(g_i)$  για  $i=1,2$  ένας μορφισμός  $h: \langle f_1, f_2 \rangle \rightarrow \langle g_1, g_2 \rangle$  στη  $\mathcal{C}'$  είναι ένας μορφισμός στη  $\mathcal{C}$  από το πεδίο των  $f$  στο πεδίο των  $g$ :  $g_1 h = f_1$  &  $g_2 h = f_2$ .



$$\begin{array}{ccc} \langle f_1, f_2 \rangle & \xrightarrow{\quad} & \langle g_1, g_2 \rangle \\ \bullet & \xrightarrow{\quad} & \bullet \\ & \text{h} & \end{array}$$



Σ' αυτή τη νέα κατηγορία  $\mathcal{C}$ , το ζευγάρι  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ , ταιριάζει στον ορισμό ενός καθολικού αντικειμένου:

$$\forall \langle f_1, f_2 \rangle \text{ στην } \mathcal{C}, \exists! \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \rightarrow \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \text{ ανη } F(\langle f_1, f_2 \rangle).$$

### 6.3 Καθολικά ως ουσίες

Είπαμε πως θεωρούμε το συγκεκριμένο καθολικό μιας ιδιότητας, ως αυτό που αναπαριστά τα ουσιαστικά χαρακτηριστικά της. Αποτελεί το «τέλειο υπόδειγμα» του να έχει κάτι την ιδιότητα αυτή, έχοντας μόνο εκείνα τα χαρακτηριστικά που είναι απαραίτητα για κάτι τέτοιο. Αναπαριστά, το να έχει κάτι την ιδιότητα, κατά ένα τόσο τέλειο και υποδειγματικό τρόπο, που κάθε αντικείμενο θα έχει επίσης την ιδιότητα αυτή αν και μόνον αν μετέχει αυτού του καθολικού. Όλα τα αντικείμενα της θεωρίας κατηγοριών που έχουν ιδιότητες καθολικής απεικόνισης όπως τα όρια και τα συνόρια είναι συγκεκριμένα καθολικά για καθολικές ιδιότητες. Έτσι, τα καθολικά της θεωρίας κατηγοριών μπορούν τυπικά να παρασταθούν ως το όριο (ή συνόριο) μιας διαδικασίας «φιλτραρίσματος», «κάθαρσης από ατέλειες», θα λέγαμε, προκειμένου να φτάσουμε στην «καθαρή» ουσία της ιδιότητας.

Έχουμε πει πως στη θεωρία κατηγοριών η σχέση μετοχής είναι η σχέση μοναδικής παραγοντοποίησης. Οπότε, η σχέση παραγοντοποίησης μπορεί να θεωρηθεί ως μια σχέση ασθενούς μετοχής. Δοθείσης της σχέσης μοναδικής παραγοντοποίησης για μια ιδιότητα  $F$ ,  $\mu$ , η σχέση παραγοντοποίησης καθρεφτίζει την ιδιότητα, με την έννοια: αν  $F(Y)$ , και το  $X$  παραγοντοποιείται δια του  $Y$ , τότε  $F(X)$ . Αν  $X$  και  $Y$  είναι πραγματώσεις της  $F$  και το  $X$  παραγοντοποιείται από το  $Y$ , τότε το  $Y$  θεωρείται το ίδιο ή περισσότερο ουσιώδες από το  $X$  ως προς την  $F$ . Με άλλα λόγια, η ασθενούς-μετοχής σχέση για την  $F$  μπορεί να θεωρηθεί ως η προδιάταξη της «ουσιαστικότητας» (όντας ανακλαστική και μεταβατική) για τις πραγματώσεις της  $F$ . Οπότε, το συγκεκριμένο καθολικό για την  $F$ , εξ' ορισμού, θα ήταν το ίδιο, ή περισσότερο, ουσιαστικό από όλες τις πραγματώσεις της  $F$ : δηλαδή η «ουσία» της  $F$ .

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το δυναμοσύνολο ενός συνόλου (μερικά διατεταγμένο σύνολο που το αντιμετωπίζουμε ως κατηγορία)<sup>248</sup>. Με σχέση μερικής διάταξης τη σχέση του περιέχεσθαι « $\subseteq$ », με τη βοήθεια της οποίας ορίζεται και η σχέση μετοχής, δοθέντων δύο συνόλων  $A$  και  $B$  φανταζόμαστε την ιδιότητα:

$$F(X) \equiv X \subseteq A \ \& \ X \subseteq B$$

Η τομή  $A \cap B$  είναι το καθολικό  $\mu_F$  γι' αυτή την ιδιότητα  $F(X)$ , όπως το υποδεικνύει ως infimum των  $A$  και  $B$  η σχέση καθολικότητας, αφού:

$$\forall X, X \subseteq A \cap B \text{ ανν } X \subseteq A \ \& \ X \subseteq B.$$

Το καθολικό έχει την ιδιότητα που παριστά αφού:  $A \cap B \subseteq A \ \& \ A \cap B \subseteq B$ , οπότε είναι ένα καθολικό που μετέχει του εαυτού του, είναι ένα συγκεκριμένο καθολικό. Η αντισυμμετρική ιδιότητα:  $Y \subseteq Y' \ \& \ Y' \subseteq Y \Rightarrow Y = Y'$ , εξασφαλίζει την ισότητα ως σχέση ισοδυναμίας, στη συνθήκη μοναδικότητας των καθολικών.

Αν ένα σύνολο  $X$  έχει την ιδιότητα, αλλά δεν είναι το καθολικό, θα έχει κάποιες «ατέλειες» ως προς την ιδιότητα  $F$ : κάποια και όχι όλα τα κοινά στοιχεία των  $A$  και  $B$ . Αν απομακρύνουμε όλες τις «ατέλειες», δηλαδή προσθέσουμε στο  $X$  όλα τα άλλα κοινά στοιχεία των  $A$  και  $B$  τότε φτάνουμε στην «ουσία» της ιδιότητας, το συγκεκριμένο καθολικό,  $A \cap B$ , για την ιδιότητα. Η «οριακή» διαδικασία, προκειμένου να φτάσουμε στο καθολικό, μπορεί να εκφραστεί σε πιο κατηγορική μορφή.

<sup>248</sup> Τα παρακάτω αφορούν και σε κάθε μερικά διατεταγμένο σύνολο.

Η ιδιότητα:  $F(X) \equiv X \subseteq A \ \& \ X \subseteq B$  διατηρείται και για απεριόριστες ενώσεις, δηλαδή: αν  $F(X_\lambda)$ , για κάθε  $X_\lambda$  στο  $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ , τότε  $F(\cup_\lambda X_\lambda)$ . Έτσι, δοθείσης οποιασδήποτε συλλογής πραγματώσεων  $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  της ιδιότητας  $F$ , η ένωσή τους είναι ουσιωδώς το ίδιο, ή και περισσότερο,  $F$  από τις πραγματώσεις. Κανένα από τα σύνολα της συλλογής δεν είναι ατέλειες της ένωσης. Περιέχονται στην ένωση, η οποία περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία που η έλλειψή τους συνιστά ατέλεια για κάθε μια από τις πραγματώσεις  $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  της ιδιότητας  $F$ . Το όριο αυτής της διαδικασίας, «η ουσία της  $F$ -ότητας» μπορεί να συναχθεί ως η ένωση όλων των πραγματώσεων της  $F$ :

$$\cup \{X \mid X \subseteq A \ \& \ X \subseteq B\} = A \cap B.$$

Όλα τα παραδείγματα της θεωρίας κατηγοριών μπορούν να διατυπωθούν δυϊκά, «αντιστρέφοντας τα βέλη». Αντιστρέφοντας τη σχέση του περιέχεσθαι στον ορισμό της  $F$ , οδηγούμαστε στην ιδιότητα:

$$G(X) \equiv A \subseteq X \ \& \ B \subseteq X.$$

Η σχέση μετοχής  $\mu$  για την  $G$  ορίζεται μέσω της αντίστροφης του περιέχεσθαι, αυτής του περιέχειν: « $\supseteq$ », και η ένωση των  $A$  και  $B$  είναι το συγκεκριμένο καθολικό. Η συνθήκη καθολικότητας είναι:

$$\forall X, X \supseteq A \cup B \text{ ανν } X \supseteq A \ \& \ X \supseteq B$$

και το καθολικό, η ουσία της  $G$ -ότητας, μπορεί να ληφθεί ως η τομή όλων των συνόλων με την ιδιότητα  $G$ :

$$\cap \{X \mid X \supseteq A \ \& \ X \supseteq B\} = A \cup B.$$

## 6.4 Όρια και συνόρια ως ουσίες

Η τομή και η ένωση των συνόλων, σε μια σχέση διάταξης σαν αυτή του περιέχεται, είναι παραδείγματα ορίων και συνόρων σε κατηγορίες. Όλα τα όρια και τα συνόρια είναι συγκεκριμένα καθολικά κάποιων ιδιοτήτων. Το αποτέλεσμα ότι η τομή (ή το όριο)  $A \cap B$  μπορεί να ληφθεί ως η ένωση (ή το συνόριο) όλων των πραγματώσεων κάποιας ιδιότητας, επεκτείνεται σε όλα τα όρια και συνόρια. Κάθε όριο (αντίστοιχα συνόριο) είναι το συνόριο (όριο) των πραγματώσεων της προσδιορίζουσάς του ιδιότητας. Με φιλοσοφικούς όρους, το όριο ή το συνόριο είναι η ουσία στην οποία φτάνουμε μέσα από την «οριακή» διαδικασία κάθαρσης όλων των πραγματώσεων της ιδιότητας από τις ατέλειές τους. Αυτό το αποτέλεσμα θα καταδειχθεί χρησιμοποιώντας ένα όριο.

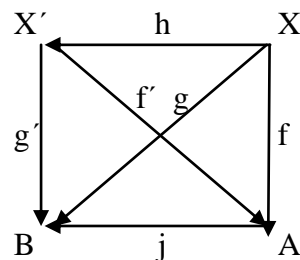
Έστω η ιδιότητα  $G$  που εφαρμόζεται σε ζεύγη μορφοισμών,  $\langle f, g \rangle$ , με κοινό πεδίο κάποιο αντικείμενο και τα αντικείμενα  $A$  και  $B$ , συνπεδία των  $f$  και  $g$  αντίστοιχα, (μεταξύ των οποίων υπάρχει ένας μορφοισμός  $j: A \rightarrow B$ ), που ορίζεται ως εξής: Το ζευγάρι  $\langle f, g \rangle$  έχει την ιδιότητα  $G$ , δηλαδή,  $G(\langle f, g \rangle)$  ανν αντιμετωπίζεται με τον  $j$ , δηλαδή:  $G(\langle f, g \rangle)$  ανν  $j f = g$ .

Δοθέντος ενός άλλου ζεύγους μορφοισμών  $\langle f', g' \rangle$  (με κοινό πεδίο ένα αντικείμενο  $X'$ ) με την ιδιότητα  $G$ , ένας μορφοισμός  $h$  μεταξύ των ζευγών μορφοισμών  $\langle f, g \rangle$  και  $\langle f', g' \rangle$ ,  $h: \langle f, g \rangle \rightarrow \langle f', g' \rangle$ , ορίζεται ως ο μορφοισμός μεταξύ των πεδίων,  $h: X \rightarrow X'$  με τις ιδιότητες  $f = f' h$  και  $g = g' h$ .

Αν υπάρχει μορφοισμός μεταξύ των ζευγών μορφοισμών  $\langle f, g \rangle$  και  $\langle f', g' \rangle$ , τότε λέμε ότι το  $\langle f, g \rangle$  παραγοντοποιείται από το  $\langle f', g' \rangle$ .

Αυτή η παραγοντοποίηση είναι μοναδική: είναι η σχέση μετοχής  $\mu$  για την  $G$ .

Αν το  $\langle f', g' \rangle$  έχει την ιδιότητα  $G$ , δηλαδή αντιμετωπίζεται με τον  $j$ , και υπάρχει ένας μορφοισμός  $h: \langle f, g \rangle \rightarrow \langle f', g' \rangle$ , τότε το  $\langle f, g \rangle$  έχει επίσης την ιδιότητα  $G$ , δηλαδή αντιμετωπίζεται και αυτό με τον  $j$ , γιατί:

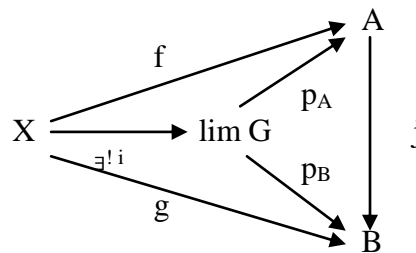


$$g = g' h = j f' h = j f.$$

Στην περίπτωση αυτή το  $\langle f', g' \rangle$  καλείται το ίδιο ή περισσότερο ουσιώδες από το  $\langle f, g \rangle$ , ως προς την ιδιότητα  $G$ .

Έτσι, η σχέση μετοχής ορίζει μια προδιάταξη ουσιαστικότητας στις πραγματώσεις της  $G$ : Δοθείσης μιας  $G$ -πραγμάτωσης,  $\langle f, g \rangle$ , «ατελέστερη»  $G$ -πραγμάτωση λέμε αυτή που παραγοντοποιείται από την  $\langle f, g \rangle$ .

Το συγκεκριμένο καθολικό για την  $G$ , αν υπάρχει στη  $\mathcal{C}$ , δίνεται από ένα ζευγάρι μορφισμών  $\langle p_A, p_B \rangle$ , επί των  $A$  και  $B$ , με ένα κοινό πεδίο που συμβολίζεται  $\lim G$ . Το ζευγάρι αυτό αντιμετωπίζεται με τον  $j$  και είναι καθολικό μεταξύ των ζευγών μορφισμών, επί των  $A$  και  $B$  με κοινό πεδίο, που αντιμετωπίζονται με το  $j$ . Δηλαδή, δοθέντος ενός άλλου ζευγαριού,  $\langle f, g \rangle$ , με την ιδιότητα  $G$ , υπάρχει μοναδικός μορφισμός παραγοντοποίησης,  $i: X \rightarrow \lim G$ , τέτοιος που  $p_A i = f$  και  $p_B i = g$  όπως φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:

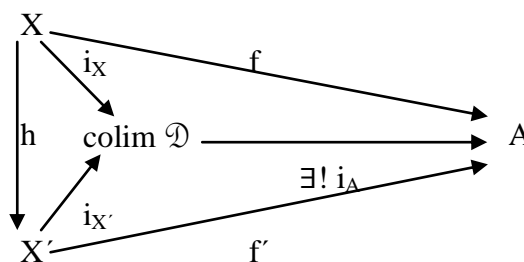


Σκοπός εδώ είναι να δειχθεί ότι ένα συνόριο των πραγματώσεων της ιδιότητας  $G$ , έχει επίσης την ιδιότητα  $G$  και είναι το ίδιο ή και περισσότερο ουσιαδές από τις πραγματώσεις. Οπότε το όριο  $\lim G$  θα είναι το συνόριο όλων των πραγματώσεων της  $G$ .

Ας θεωρήσουμε κάποιο σύνολο πραγματώσεων της  $G$ ,  $\langle f, g \rangle$ , με μορφισμούς  $h: \langle f, g \rangle \rightarrow \langle f', g' \rangle$ . Τα κοινά πεδία των ζευγών,  $X$  και  $X'$ , μαζί με τους μορφισμούς  $h: X \rightarrow X'$ , ορίζουν ένα διάγραμμα  $\mathcal{D}$  στην κατηγορία  $\mathcal{C}$ .

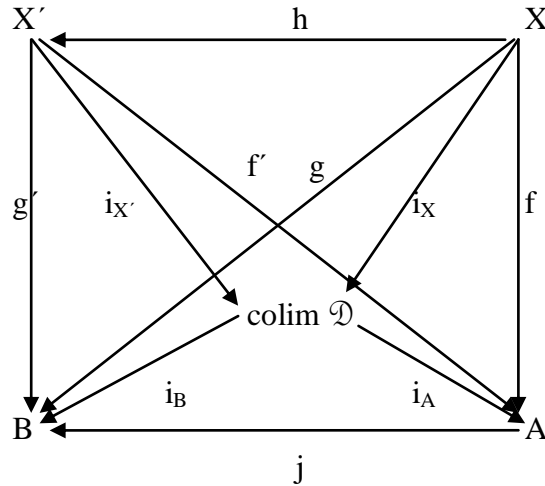
Το συνόριο του διαγράμματος δίνεται από ένα αντικείμενο  $\text{colim } \mathcal{D}$  και ένα σύνολο μορφισμών  $i_X: X \rightarrow \text{colim } \mathcal{D}$ , για  $X$  στο διάγραμμα. Οι μορφισμοί  $i_X$  αντιμετωπίζονται με τους μορφισμούς  $h$  του διαγράμματος, με την έννοια ότι  $i_{X'} h = i_X$  και το συνόριο είναι το καθολικό ενός τέτοιου συνόλου μορφισμών.

Οι  $f$  μορφισμοί από τα ζεύγη  $\langle f, g \rangle$  συγκροτούν ένα σύνολο μορφισμών που αντιμετωπίζονται με τους  $h$  μορφισμούς, στο διάγραμμα  $\mathcal{D}$ , οπότε υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός παραγοντοποίησης,  $i_A: \text{colim } \mathcal{D} \rightarrow A$ , τέτοιος που για όλους τους  $f$ ,  $i_A i_X = f$ . Δηλαδή, όλα τα τρίγωνα στο ακόλουθο διάγραμμα αντιμετωπίζονται:



Οι  $g$  μορφοισμοί από τα ζευγάρια  $\langle f, g \rangle$  συγκροτούν ένα άλλο τέτοιο σύνολο μορφοισμών οπότε υπάρχει ένας μοναδικός μορφοισμός  $i_B : \text{colim } \mathcal{D} \rightarrow B$ , τέτοιος που για όλους τους  $g$ ,  $i_B i_X = g$ .

Θα αποδείξουμε ότι το ζεύγος  $\langle i_A, i_B \rangle$  έχει την ιδιότητα  $G$ .



Για κάθε  $X$  στο διάγραμμα  $\mathcal{D}$ ,  $g = jf = j(i_A i_X) = (j i_A) i_X$ . Αλλά ο  $i_B$  είναι ο μοναδικός μορφοισμός που για κάθε  $X$  στο διάγραμμα  $i_B i_X = g$ . Οπότε  $i_B = j i_A$ , δηλαδή το  $\langle i_A, i_B \rangle$  αντιμετατίθεται με τον  $j$ .

Δια του μορφοισμού  $i_X : X \rightarrow \text{colim } \mathcal{D}$ , το  $\langle f, g \rangle$  παραγοντοποιείται από το  $\langle i_A, i_B \rangle$ , για κάθε  $X$  στο διάγραμμα. Άρα, το συνόριο οποιουδήποτε συνόλου πραγματώσεων της  $G$ , μας δίνει μια πραγμάτωση της  $G$  που είναι το ίδιο ή περισσότερο ουσιώδης αυτών.

Το όριο  $\lim G$  μπορεί να συναχθεί ως το συνόριο του διαγράμματος που συγκροτείται από όλες τις πραγματώσεις της  $G$ , αν υπάρχει. Η συλλογή όλων των πραγματώσεων της  $G$  δεν συγκροτεί αναγκαία ένα μικρό διάγραμμα<sup>249</sup>, αλλά το συνόριο υπάρχει (αν το  $\lim G$  υπάρχει) από τη στιγμή που το  $\lim G$  θα είναι ένα τελικό αντικείμενο στο διάγραμμα.

Αυτό το παράδειγμα δείχνει το γενικό ζήτημα: Τα όρια, και τα συνόρια, της θεωρίας κατηγοριών μπορούν να ληφθούν ως το αποτέλεσμα «κάθαρσης» όλων των πραγματώσεων της ορίζοντας ιδιότητα  $G$  από τις ατέλειές τους προκειμένου να φθάσουμε στην «ουσία» της  $G$ -ότητας.

<sup>249</sup> Κάτι που, προφανώς, συμβαίνει πάντα στις μικρές κατηγορίες οπότε αν είναι συν-πλήρης είναι και πλήρης και η προαναφερθείσα κατασκευή δουλεύει. Ουσιαστικά βρισκόμαστε στην περίπτωση ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου, του οποίου όλα τα υποσύνολα έχουν supremum και infimum· δηλαδή μιλάμε για ένα πλήρες δικτυωτό.

## 6.5 Η κατηγορική αντιμετώπιση του επιχειρήματος του τρίτου ανθρώπου

Η θεωρία κατηγοριών παρέχει ένα μαθηματικό μοντέλο για το επιχείρημα του τρίτου ανθρώπου και δείχνει πώς να αποφύγουμε την αναδρομή. Έχουμε δείξει ότι δοθείσης μιας συλλογής ή ενός διαγράμματος  $\mathcal{D}$  πραγματώσεων μιας συγκεκριμένης ιδιότητας  $F$ , θα μπορούσε να κατασκευασθεί μια οντότητα  $\text{colim } \mathcal{D}$  που θα ήταν εξίσου ή περισσότερο ουσιαστικά  $F$  απ' ό,τι οι οντότητες της συλλογής. Αυτό είναι το μαθηματικό μοντέλο της διαδικασίας διαμόρφωσης του «ενός στα πολλά». Το Ένα ( $\text{colim } \mathcal{D}$ ) έχει την ιδιότητα  $F$ , που είναι μοιρασμένη στα πολλά, και τα πολλά μετέχουν στο Ένα. Μια νέα συλλογή ή διάγραμμα  $\mathcal{D}^*$  θα μπορούσε να διαμορφωθεί, χρησιμοποιώντας τα πολλά και το Ένα, και έτσι ένα νέο Ένα\* ( $\text{colim } \mathcal{D}^*$ ) επίσης. Μ' αυτό τον τρόπο, η θεωρία κατηγοριών τυποποιεί αυστηρά το επιχείρημα του 3<sup>ου</sup> ανθρώπου.

Είδαμε πως το πρόβλημα στο επιχείρημα του τρίτου ανθρώπου θα μπορούσε να ξεπερασθεί με τη μη αποδοχή της θέσεως της «μη ταυτότητας»: «Αν κάτι έχει ένα δεδομένο γνώρισμα επειδή μετέχει σε ένα Είδος, δεν ταυτίζεται με το Είδος αυτό». Άρα, αν δεχθούμε ότι : «Αν κάτι έχει ένα δεδομένο γνώρισμα επειδή μετέχει σε ένα Είδος, μπορεί και να ταυτίζεται με το Είδος αυτό». «Το Ένα» δεν είναι απαραίτητα «ένα στα πολλά». Μπορεί να είναι ισόμορφο με κάποιο μεταξύ των πολλών. Με μαθηματικούς όρους ένα συνόριο ή ένα όριο μπορεί να παρίσταται σε κάποιο από τα στοιχεία του διαγράμματος. Στην ειδική περίπτωση των συνόλων που διατάσσονται μερικώς από τη σχέση του περιέχεσθαι η ένωση ή η τομή μιας συλλογής συνόλων δεν είναι απαραίτητα διακριτή των συνόλων αλλά να είναι ένα μεταξύ των πολλών.

Για παράδειγμα, έστω  $A = \cup \{A_\beta\}$ , το Ένα που δημιουργήθηκε ως ένωση μιας συλλογής πολλών συνόλων  $\{A_\beta\}$ . Τότε, μπορούμε να προσθέσουμε το  $A$  στη συλλογή και να συγκροτήσουμε το νέο Ένα\* ως :  $A^* = ( \cup \{A_\beta\} ) \cup A$ . Αυτή η διαδικασία δεν οδηγεί στην αναδρομή του τρίτου ανθρώπου, αφού  $A^* = A$ .

Γενικά αν το συνόριο,  $\text{colim } \mathcal{D}$ , ενός διαγράμματος  $\mathcal{D}$  προσκολλάται επ' αυτού για να συγκροτήσει ένα νέο διάγραμμα  $\mathcal{D}^*$ , τότε γίνεται ένα «τελικό αντικείμενο» στο νέο διάγραμμα  $\mathcal{D}^*$  και  $\text{colim } \mathcal{D}^* \cong \text{colim } \mathcal{D}$ .

## 6.6 Η συνεπαγωγή ως σχέση μεταξύ καθολικών

Στη θεωρία των ιδεών του Πλάτωνα, ένας λογικός συμπερασμός είναι έγκυρος επειδή υπακούει στις αναγκαίες συνδέσεις μεταξύ καθολικών. Η τριότητα, για παράδειγμα, επάγει την περιττότητα γιατί το καθολικό της τριότητας «επι-φέρει»<sup>250</sup>, μοιράζεται μαζί με άλλα παρόμοια καθολικά, το καθολικό της περιττότητας.

Σε μια μαθηματική θεωρία των καθολικών, η σχέση συνεπαγωγής μεταξύ καθολικών ορίζεται ως εξής: δοθέντων καθολικών  $u_F$  και  $u_G$ , το  $u_G$  συνεπάγεται το  $u_F$  αν  $\forall X, X \mu u_G \Rightarrow X \mu u_F$ .

Στη θεωρία συνόλων, η σχέση μετοχής  $\mu$  είναι η σχέση του ανήκειν  $\in$  οπότε και η σχέση συνεπαγωγής μεταξύ των συνόλων ως αφηρημένων καθολικών είναι η σχέση του περιέχεται. Έτσι, στη θεωρία συνόλων ως θεωρία των αφηρημένων καθολικών, η σχέση συνεπαγωγής (περιέχεται) μεταξύ καθολικών δεν είναι ίδια με τη σχέση μετοχής του ανήκειν. Μεγάλος κόπος ξοδεύτηκε ιστορικά στη λογική προκειμένου να αντιληφθούμε καθαρά τη διαφορά ανάμεσα στο περιέχεται και το ανήκειν, όπως για παράδειγμα στις φράσεις: «όλα τα λουλούδια είναι ωραία» και «το λουλούδι είναι ωραίο».

Στη θεωρία κατηγοριών, η σχέση μετοχής  $\mu$  είναι η σχέση μοναδικής παραγοντοποίησης και τα καθολικά είναι αυτομετέχοντα. Είδαμε πως, αν το  $u_G$  συνεπάγεται το  $u_F$ , τότε  $\forall X, X \mu u_G \Rightarrow X \mu u_F$ . Όμως  $u_G \mu u_G$ . Από την προηγούμενη συνεπαγωγή θα έχουμε  $u_G \mu u_F$ . Οπότε, το ότι το  $u_G$  συνεπάγεται το  $u_F$  σημαίνει  $u_G \mu u_F$ .

Αντίστροφα, αν το  $u_G \mu u_F$ , και ισχύει η σχέση  $X \mu u_G$ , τότε  $X \mu u_F$  (λόγω σύνθεσης των μορφισμών μετοχής). Οπότε το  $X$  είναι μια πραγμάτωση της  $F$ :

$\forall X, X \mu u_G \Rightarrow X \mu u_F$ : το  $u_G$  συνεπάγεται το  $u_F$ . Τελικά,  $u_G \mu u_F$  σημαίνει  $u_G$  συνεπάγεται το  $u_F$ .

Άρα,  $u_G$  συνεπάγεται το  $u_F$  αν  $u_G \mu u_F$ .

Είδαμε πως η σχέση συνεπαγωγής ταυτίζεται με τον περιορισμό, της σχέσεως μετοχής, στα καθολικά. Για να μιλήσουμε με έναν φιλοσοφικό τρόπο, έστω «το τριαντάφυλλο» και «το ωραίο» είναι τα συγκεκριμένα καθολικά των αντιστοίχων ιδιοτήτων. Στη θεωρία των συγκεκριμένων καθολικών η καθολική κρίση «όλα τα τριαντάφυλλα είναι ωραία» και η ενική κρίση «το τριαντάφυλλο είναι ωραίο» είναι ισοδύναμες. Και οι δύο εκφράζουν την πρόταση ότι το Τριαντάφυλλο μετέχει (δηλαδή συνεπάγεται) το Όμορφο και η πρόταση αυτή είναι διακριτή της πρότασης «Το τριαντάφυλλο είναι ωραίο» (για ένα φυτό στην αυλή μας).

Ένα θεωρητικό παράδειγμα συνεπαγωγής (μετοχής) μεταξύ καθολικών στη θεωρία κατηγοριών έχουμε θεωρώντας την ιδιότητα  $G (< f, g >)$  να υπάρχουν μορφισμοί από κάποιο κοινό πεδίο στα  $A$  και  $B$  που αντιμετωπίζονται με έναν μορφισμό  $j: A \rightarrow B$ , δηλαδή  $jf = g$ . Έστω  $F (< f, g >)$  η ιδιότητα απλής ύπαρξης

<sup>250</sup> Βλ., Vlastos, G. (2000). *Πλατωνικές Μελέτες*, ό. π., σελ. 158.



μορφισμών από ένα κοινό πεδίο στα  $A$  και  $B$ . Προφανώς ισχύει η ακόλουθη λογική συνεπαγωγή:

$$\forall \langle f, g \rangle, \text{ αν } G(\langle f, g \rangle) \text{ τότε } F(\langle f, g \rangle).$$

Από τις συνθήκες καθολικότητας για τα καθολικά  $u_G = \langle p_A, p_B \rangle$  και

$u_F = \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ ,  $\forall \langle f, g \rangle$ , αν  $\langle f, g \rangle \mu \langle p_A, p_B \rangle$ , τότε  $\langle f, g \rangle \mu \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ , οπότε  $\langle p_A, p_B \rangle$  συνεπάγεται  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ . Δηλαδή το  $\langle p_A, p_B \rangle$  μετέχει του  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ . Άρα υπάρχει μορφισμός μοναδικής παραγοντοποίησης  $i: \langle p_A, p_B \rangle \rightarrow \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ . Αν η περιβάλλουσα κατηγορία  $\mathcal{C}$  είναι η κατηγορία των συνόλων, το κοινό πεδίο  $\lim G$  του  $\langle p_A, p_B \rangle$  μπορεί να αναπαρασταθεί ως το υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου,  $A \times B$ , που αποτελείται από τα διατεταγμένα ζεύγη  $\langle x, i(x) \rangle$  για  $x \in A$  και  $i$  η εμφύτευση  $i: \lim G \rightarrow A \times B$ .

## ΕΠΙΛΟΓΟΣ

### 7. Συμπεράσματα - Συνέπειες

#### 7.1 Γενικά

Ο Whitehead περιέγραψε την ευρωπαϊκή φιλοσοφία ως υποσημειώσεις στον Πλάτωνα και τη θεωρία των Ιδεών. Η ερμηνεία της θεωρίας κατηγοριών, ως μαθηματικής θεωρίας των συγκεκριμένων καθολικών, παρέχει ένα αυστηρό αυτό-κατηγορικό μαθηματικό μοντέλο για τη θεωρία των Ιδεών του Πλάτωνα. Αν δεχθούμε ότι η Λογική μελετά αυτό που είναι καθολικό, τότε στη Θεωρία Κατηγοριών η Λογική προσδιορίζεται ως θεωρία των συγκεκριμένων καθολικών. Μια ιδιότητα  $F$  μπορεί να θεωρηθεί ως ένα αντικείμενο, που είναι το συγκεκριμένο καθολικό  $\mathbf{u}_F$ , και το γεγονός ότι το  $X$  είναι μια  $F$ -πραγμάτωση εκφράζεται δι' ενός μορφισμού μοναδικής μετοχής  $X \rightarrow \mathbf{u}_F$ . Μια καθολική συνεπαγωγή  $(X) (G(X) \Rightarrow FX$ , ομοίως, περιγράφεται δι' ενός μορφισμού μοναδικής μετοχής,  $\mathbf{u}_G \rightarrow \mathbf{u}_F$ , στον οποίο ένα καθολικό συνεπάγεται, «επιφέρει», ένα άλλο καθολικό.

Ποια, όμως, η σχέση της θεωρίας των κατηγοριών με τα θεμέλια των μαθηματικών; Γενικά θα λέγαμε πως η αντίληψη της Θεωρίας Κατηγοριών, ως λογικής των συγκεκριμένων καθολικών, παρουσιάζει μια κάπως διαφορετική εικόνα στη σχέση της με τα θεμέλια απ' ότι η θεωρία συνόλων. Τα συγκεκριμένα καθολικά είναι αυτό-μετέχοντα, δεν «γενικεύουν» τα αφηρημένα, οπότε και ως θεωρία των συγκεκριμένων καθολικών δεν προσπαθεί να γενικεύσει τη θεωρία συνόλων, αφού αυτή είναι θεωρία των αφηρημένων καθολικών. Ο επαγγελματίας μαθηματικός γνωρίζει πως μας παρέχει ένα κριτήριο σημαντικότητας στα μαθηματικά. Μας εφοδιάζει με καθολικές έννοιες, που χαρακτηρίζουν σημαντικές δομές ή μορφές μέσα σε όλα τα μαθηματικά. Με τη βοήθεια των εννοιών της μπορεί να απομονώσει κανείς την καθολική πραγμάτωση, από όλες τις πραγματώσεις μιας ιδιότητας. Το Συγκεκριμένο Καθολικό είναι η πιο σημαντική πραγμάτωση μιας ιδιότητας γιατί αναπαριστά την ιδιότητα με παραδειγματικό τρόπο. Δείχνει την ουσία της ιδιότητας χωρίς ατέλειες, και όλες οι άλλες πραγματώσεις έχουν την ιδιότητα χάρις στη μετοχή τους σ' αυτό. Στις επόμενες παραγράφους θα συζητήσουμε περαιτέρω τις διαφορές που παρουσιάζει η αντίληψη για τα μαθηματικά της Θεωρίας Συνόλων, με αυτήν της Θεωρίας Κατηγοριών.

## 7.2 Ζητήματα Θεμελίωσης των Μαθηματικών<sup>251</sup>

### 7.2.1 Η Θεωρία Συνόλων και τα Θεμέλια των Μαθηματικών

Η Θεωρία Συνόλων φαίνεται να παρέχει μια εννοιολογική ενοποίηση στα μαθηματικά, η οποία είναι φιλοσοφικά σημαντική γιατί, κατ' ουσίαν, πρόκειται για οντολογική αναγωγή: τα μαθηματικά είναι σύνολα. Ταυτόχρονα, στο συνολοθεωρητικό σύμπαν, και στις ιδιότητές του, μπορεί να δοθεί η γενική εποπτική εικόνα της σωρευτικής ιεράρχησης. Ο λογικολόγος, απ' την άλλη, που κατασκευάζει μια τυπική θεωρία συνόλων επιτυγχάνει έτσι να δώσει ένα λογικό θεμέλιο και για το σύνολο των μαθηματικών. Για τον επαγγελματία μαθηματικό, οι διάφορες κατασκευές, που του είναι απαραίτητες, χτίζονται από μια ομοιόμορφη εργαλειοθήκη: ενώσεις, τομές, γινόμενα, αντικείμενα πηλικά, κ.λπ. Πέραν αυτού, του επιτρέπει διακρίσεις μεγέθους, που είναι καίριες κάποιες φορές. Επίσης, η Θεωρία Συνόλων καθοδηγεί την έρευνα, προτείνοντας τρόπους ορισμού και κατασκευής των κατάλληλων αντικειμένων για συγκεκριμένες αποδείξεις, με φυσικό τρόπο και επιτρέπει να κινείται εύκολα κανείς από ένα «στενό» εννοιολογικό πλαίσιο σε ένα ευρύτερο. Με άλλα λόγια, παρέχει και μεθοδολογικά ή πραγματιστικά θεμέλια.

Έτσι, ο ισχυρισμός ότι η Θεωρία Συνόλων είναι το κατάλληλο θεμέλιο για τα μαθηματικά φαίνεται να επιβεβαιώνεται κατά πέντε διαφορετικούς τρόπους:

1. Τα μαθηματικά φαίνονται να είναι όντως η επιστήμη εντός του βασιλείου των συνόλων.

2. Η Συνολοθεωρία είναι μέρος της Λογικής, που είναι η καθολική επιστήμη πάνω στην οποία βασίζεται κάθε άλλη. Πρόκειται για Λογική, εφαρμοσμένη επάνω στις μαθηματικές έννοιες.

3. Η Θεωρία Συνόλων συλλαμβάνει το θεμελιώδες: τις περισσότερο γενικές γνωσιακές λειτουργίες, πάνω στις οποίες βασίζεται το σύνολο της μαθηματικής γνώσης.

4. Τα αξιώματά της, αποτελούν επιστημολογικό θησαυρό: είναι συνεπή, αληθή και σαφή.

5. Η Θεωρία Συνόλων είναι απαραίτητη στα μαθηματικά, γιατί μας παρέχει έναν ομοιόμορφο και σαφή τρόπο να εξετάζουμε ζητήματα μεγέθους, να διατυπώνουμε ορισμούς, να κατασκευάζουμε καινούργιες έννοιες και να αναπτύσσουμε αποδεικτικές τεχνικές. Έτσι, φαίνεται πως, ευρετικά και μεθοδολογικά, η επιλογή της αποτελεί μονόδρομο.

Όμως, η έκφραση «θεμέλια των Μαθηματικών», όπως και κάθε γνωστικού πεδίου, κρύβει διαφορετικές διαστάσεις.

Πρώτα, έχουμε αυτό που συνήθως, και εσφαλμένα, καλείται *οντολογικά θεμέλια* ενός πεδίου: τα αντικείμενα για τα οποία υποτίθεται ότι μιλάει, το πεδίο αυτό.

Δεύτερον, έχουμε τα *λογικά θεμέλια* ενός πεδίου: αυτά μας δίνουν τη «λογική» κατ' αρχήν. Δηλαδή τη θεωρία παραγωγής που χρησιμοποιείται στο πεδίο αυτό μαζί με τις σχετικές βασικές έννοιες που εμπλέκονται, καθώς οι τελευταίες δίνονται από τα αξιώματα της θεωρίας.

<sup>251</sup> Στην ενότητα αυτή εκθέτουμε συνοπτικά και συμπληρώνουμε, όπου απαιτείται κάτι τέτοιο, την πραγμάτευση της έννοιας της θεμελίωσης ενός πεδίου, που γίνεται στο άρθρο: Βλ. σχετ., Marquis, J.-P. (1995). *Category Theory and the Foundations of Mathematics: Philosophical Excavations. Synthese*. 103, 421-447.

Τρίτον, έχουμε τα *σημασιολογικά θεμέλια*: συνδέονται κατάλληλα το τυπικό σύστημα με την «οντολογία», οπότε και γνωρίζουμε κατ' αρχήν πώς, και προς τι, αναφέρεται η γλώσσα μας· πώς και τί σημαίνει.

Τέταρτον, έχουμε τα *μεθοδολογικά ή πραγματιστικά θεμέλια*: Αυτά μας δείχνουν ποιες είναι οι αρχές, οι μέθοδοι και οι έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν για να κατασκευαστούν και να αναλυθούν τα αντικείμενα του πεδίου.

Τέλος, έχουμε τα *επιστημολογικά θεμέλια* ενός πεδίου: Για παράδειγμα, μπορεί να έχει δειχθεί ότι ένα τμήμα των μαθηματικών είναι αναλυτικό, και συνεπώς αυτό το τμήμα κατέχει όλες τις ιδιότητες της αναλυτικής γνώσης, όποιες και να είναι αυτές.

Έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες «σχέσεις θεμελίωσης» των μαθηματικών: «Η (τάδε) θεωρία είναι ένα...» *λογικό, γνωσιακό, επιστημολογικό, σημασιακό, οντολογικό, μεθοδολογικό ή πραγματικό* «...θεμέλιο για τα μαθηματικά».

## 7.2.2 Μια σύντομη ανάλυση της έκφρασης «θεμέλιο για...»

Στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να κάνουμε πιο σαφείς αυτές τις σχέσεις θεμελίωσης των Μαθηματικών δείχνοντας από καιρού εις καιρόν γιατί, και με ποιο τρόπο, κάποιες απ' αυτές τις σχέσεις πρέπει να διακρίνονται μεταξύ τους, και πώς αυτές οι διακρίσεις σχετίζονται με ζητήματα θεμελίωσης.

### 7.2.2.1 Το λογικό θεμέλιο

Πρόκειται για κάτι οικείο με την πρώτη ματιά. Αν  $T$  είναι ένα σύστημα μαθηματικών αντικειμένων όπως οι αβελιανές ομάδες, οι χώροι Hilbert<sup>252</sup>, οι τοπολογικοί χώροι, τα σύνολα, ή μια γεωμετρία, ακολουθώντας την κλασική αντίληψη των λογικών θεμελίων ενός πεδίου, η  $S$  αποτελεί λογικό θεμέλιο για το  $T$  όταν είναι μια τυπική, αξιωματικοποιημένη θεωρία του  $T$ .

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ορίσουμε μια «γλώσσα». Δηλαδή, ένα συντακτικό σύστημα με μια λογική που υπονοείται (π.χ. μια πρωτοβάθμια λογική<sup>253</sup>). Το συντακτικό θα δίνει μια λίστα των αξιωμάτων του  $T$  (κατά το δυνατόν). Έτσι, η  $S$  θα είναι, ουσιαστικά, μια συστηματική ανακατασκευή του  $T$ , η οποία δείχνει σαφώς ποιο είναι το σύστημα λογικής παραγωγής που εμπλέκεται, και ποια είναι τα αξιώματα που απαιτούνται. Θα υποδεικνύει, συνεπώς, τις πρωταρχικές έννοιες, ιδιότητες και αρχές κατασκευής του πεδίου. Οπότε, θα περιγράφει, εντέλει, ποια είναι τα αντικείμενα του  $T$  που μπορούν να ορισθούν εντός της. Τρία, λοιπόν, είναι τα ουσιαστικά στοιχεία που εμπλέκονται: η προσδιοριστικότητα, η αποδειξιμότητα και η επαληθευσιμότητα<sup>254</sup>.

Αν  $\Omega$  είναι το «σύμπαν» των μαθηματικών αντικειμένων, και  $L$  το «σύμπαν» των Λογικών, η διμελής σχέση «η  $S$  είναι μια λογική θεμελίωση του συστήματος  $T$ » είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου  $L \times \Omega$ . Η  $S$  θα είναι ένα παραγωγικό σύστημα, για το  $T$ , αλλά πρέπει και να προσδιορίζεται μια σχέση επαληθευσιμότητας μεταξύ της  $S$  και του  $T$ . Προκειμένου, λοιπόν, να είμαστε σε θέση να αποτιμήσουμε ένα θεμέλιο, πρέπει να είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε,

<sup>252</sup> Ο χώρος Hilbert είναι γενικά ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος, με εσωτερικό γινόμενο, που είναι και πλήρης μετρικός χώρος, ως προς τη συνάρτηση της απόστασης που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο.

<sup>253</sup> Η πρωτοβάθμια λογική είναι ένα τυπικό λογικό σύστημα που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά, τη φιλοσοφία, τη γλωσσολογία και την επιστήμη των υπολογιστών. Διακρίνεται από την προτασιακή λογική λόγω της χρήσης των ποσοδεικτών. Κάθε ερμηνεία της πρωτοβάθμιας λογικής περιλαμβάνει ένα γλωσσικό χώρο επί του οποίου κινούνται οι ποσοδείκτες. Στις υψηλότερης βαθμίδος θεωρίες υπάρχουν κατηγορήματα με ορίσματα άλλα κατηγορήματα ή συναρτήσεις. Στις ερμηνείες των πρωτοβάθμιων θεωριών τα κατηγορήματα συνδέονται με σύνολα· στις ερμηνείες θεωριών υψηλότερου βαθμού μπορούν να συνδέονται και με σύνολα συνόλων. Η πρωτοβάθμια λογική είναι σημαντική για τα θεμέλια των μαθηματικών, όντας η κλασική τυπική λογική των αξιωματικών συστημάτων. Έχει επαρκή εκφραστική δύναμη για να τυποποιήσει και τη Zermelo-Fraenkel συνολοθεωρία και την πρωτοβάθμια αριθμητική του Peano, αλλά κανένα αξιωματικό σύστημα στην πρωτοβάθμια λογική δεν είναι αρκετά ισχυρό για να περιγράψει πλήρως άπειρες δομές όπως οι φυσικοί αριθμοί ή η πραγματική ευθεία. Κατηγορηματικά αξιωματικά συστήματα γι' αυτές τις δομές μπορούμε να λάβουμε εντός ισχυροτέρων λογικών σαν τις δευτεροβάθμιες.

<sup>254</sup> Πρόκειται για κάτι διαφορετικό από ό, τι μπορούσε να εννοεί κανείς στο ξεκίνημα του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Έως τότε λογικό θεμέλιο για ένα πεδίο ήταν αποκλειστικά μια αξιωματική ανακατασκευή του πεδίου. Η βασική προϋπόθεση για να αποτελεί κάτι λογικό θεμέλιο, ήταν να επιτρέπει τυπικές αποδείξεις από μια λίστα αξιωμάτων του δοθέντος πεδίου. Με άλλα λόγια, η σχέση επαληθευσιμότητας δεν έπαιξε κανένα ρόλο.

με τον πιο αφηρημένο τρόπο, τι είναι ένα σύστημα συμπερασμού και τι μια σχέση επαλήθευσης. Όμως, εδώ υπάρχουν εδώ δύο βασικά ζητήματα.

Πρώτον, για κάθε δοθέν  $T$  υπάρχουν συνήθως διαθέσιμα πολλά διαφορετικά συστήματα  $S$ , τα οποία είτε βασίζονται στην ίδια λογική (όπως π.χ. οι διαφορετικές αξιωματικοποιήσεις της θεωρίας ομάδων), είτε είναι γραμμένα σε διαφορετικά λογικά συστήματα (όπως π.χ. η πρωτοβάθμια<sup>255</sup> και δευτεροβάθμια αριθμητική<sup>256</sup>). Στην πρώτη περίπτωση, οι διαφορετικές παρουσιάσεις του συστήματος, των ομάδων για παράδειγμα, στην πραγματικότητα είναι ίδιες· η μόνη διαφορά που μπορούν να έχουν, έχει να κάνει με την επιλογή των αρχικών πράξεων. Το σύνολο των πράξεων που μπορούν να ορισθούν, όμως, και στις δύο περιπτώσεις, είναι ίδιο. Έτσι, υπάρχει ένας αναλλοίωτος πυρήνας, μια αναλλοίωτη θεωρία ομάδων. Τα ίδια ισχύουν για τις διαφορετικές παραστάσεις του λογισμού των αποδείξεων. Πρόκειται για διαφορετικές παραστάσεις της ίδιας λογικής. Ενδιαφερόμαστε περισσότερο για τη λογική παρά για τις διάφορες παρουσιάσεις. Στη περίπτωση αυτή, βέβαια, η επιλογή των αρχικών πράξεων, που θεωρούνται αντίστοιχα λογικές, δημιουργεί ριζικά διαφορετικές δομές. Θα θέλαμε να έχουμε ό,τι είναι απαραίτητο προκειμένου να συγκρίνουμε ή να σχετίσουμε με συστηματικότητα τις διαφορετικές λογικές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ή να στηρίζουν ένα δοθέν σύστημα  $T$ .

Δεύτερον, μπορούμε να απαιτήσουμε το  $T$  να είναι ένα μαθηματικό σύστημα. Δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη συλλογή όλων των μαθηματικών συστημάτων ως ένα όλο, αλλά ίσως μπορούμε να προσδιορίσουμε σε κάθε περίπτωση αν ένα δοθέν σύστημα, ή οικεγένεια από συστήματα, είναι μαθηματικά ή όχι. Δεν μπορούμε, όμως να είμαστε ελαστικοί με το  $T$  γιατί θέλουμε, με τις μέχρι τώρα κατακτήσεις, να δηλώνει την σωρευτική ιεραρχία, ή την κατηγορία όλων (των μικρών) κατηγοριών, κ.λπ. Γι' αυτό, η κλασική συνολοθεωρητική έννοια επαλήθευσιμότητας που μπορούμε να επικαλεστούμε, ενδέχεται να αποδειχθεί ακατάλληλη· δεν είναι απαραίτητο, το  $T$ , να είναι ένα κλασικό συνολοθεωρητικό μοντέλο.

---

<sup>255</sup> Πρωτοβάθμια ή Peano αριθμητική λέμε το σύνολο των αξιωμάτων για τους φυσικούς αριθμούς που προκύπτει από τα αξιώματα Peano - Dedekind αν προστεθούν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (οι οποίες, όπως και η σχέση διάταξης, μπορούν επίσης να ορισθούν χρησιμοποιώντας πρωτοβάθμια αξιώματα), ενώ ταυτόχρονα αντικατασταθεί το δευτεροβάθμιο αξίωμα της επαγωγής για τους φυσικούς (το οποίο περιλαμβάνει ποσόδειξη πάνω σε σύνολα φυσικών, πράγμα που δεν μπορεί να κάνει μια πρωτοβάθμια λογική) με ένα πρωτοβάθμιο αξιωματικό σχήμα. Για παράδειγμα, δεν είναι δυνατό, στην πρωτοβάθμια λογική, να πει κανείς ότι κάθε σύνολο φυσικών αριθμών που περιλαμβάνει το 0 και είναι κλειστό ως προς τη «διαδοχή» είναι το ίδιο το σύνολο των φυσικών. Αυτό που μπορεί να διατυπωθεί είναι ότι κάθε προσδιορισμένο σύνολο φυσικών αριθμών έχει αυτή την ιδιότητα. Επειδή, λοιπόν, δεν είναι δυνατό να ποσοδείξουμε πάνω σε προσδιορισμένα υποσύνολα αποκλειστικά με ένα απλό αξίωμα, το αξιωματικό αυτό σχήμα της επαγωγής περιλαμβάνει ένα στιγμιότυπο του αξιώματος της επαγωγής για κάθε προσδιορισμό ενός υποσυνόλου φυσικών.

<sup>256</sup> Στη μαθηματική λογική, η δευτεροβάθμια αριθμητική είναι μια συλλογή αξιωματικών συστημάτων που τυποποιούν τους φυσικούς αριθμούς και τα υποσύνολά τους. Πρόκειται για μια εναλλακτική της αξιωματικής θεωρίας συνόλων ως θεμελίου για τα περισσότερα, αλλά όχι όλα, τα μαθηματικά. Εισήχθη από τους Hilbert και Bernays το 1934, και η κλασική αξιωματικοποίησή της συμβολίζεται  $Z_2$ . Η δευτεροβάθμια αριθμητική περιλαμβάνει, όντας πολύ ισχυρότερη της, την πρωτοβάθμια αντίστοιχη της αριθμητική του Peano. Επιτρέπει ποσόδειξη επί συνόλων αριθμών, αλλά και επί αριθμών. Δεδομένου ότι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να παρασταθούν ως άπειρες σειρές συνόλων φυσικών αριθμών, και επειδή η δευτεροβάθμια αριθμητική επιτρέπει ποσόδειξη πάνω σε τέτοια σύνολα, είναι δυνατό να τυποποιήσει τους πραγματικούς αριθμούς εντός της. Γι' αυτό και κάποιες φορές, η δευτεροβάθμια αριθμητική, καλείται «ανάλυση». Η δευτεροβάθμια αριθμητική μπορεί να ειπωθεί και σαν ασθενής έκδοση της συνολοθεωρίας, στην οποία κάθε στοιχείο είναι φυσικός αριθμός ή σύνολο φυσικών αριθμών. Αν και κατά πολύ ασθενέστερη από την Zermelo-Fraenkel, μπορεί να αποδείξει, ουσιαστικά, όλα τα αποτελέσματα των κλασικών μαθηματικών που μπορούν να εκφραστούν στη γλώσσα της.

Κάθε περαιτέρω απόπειρα διασαφήνισης της σχέσης «θεμέλιο για» οφείλει να εμπεριέχει τις ακόλουθες βασικές απαιτήσεις:

1. Οφείλουμε να διακρίνουμε αυστηρά ανάμεσα σε καθαρά δομικά ζητήματα και περισσότερο συμβατικά. Για παράδειγμα, οι οπλισμοί<sup>257</sup> και οι λίστες αξιωμάτων ενός μαθηματικού πεδίου δεν πρέπει να αποτελούν μέρος του λογικού θεμελίου *per se*.

2. Η λογική δομή ενός μαθηματικού συστήματος είναι συγκεκριμένη, από τη στιγμή που έχουμε επιλέξει τι θα αποτιμάται ως λογική πράξη. Η επιλογή, όμως, δεν γίνεται με καθαρά λογικά κριτήρια. Γνωσιακά, επιστημολογικά, ευρετικά, και πραγματιστικά κριτήρια παίζουν σημαίνοντα ρόλο σ' αυτή την επιλογή<sup>258</sup>.

3. Ωστόσο, πρέπει κανείς να μπορεί να συγκρίνει και να αντιπαραβάλλει τις διαφορετικές λογικές που συνεπάγονται από αυτές τις επιλογές<sup>259</sup>.

### 7.2.2.2 Το γνωσιακό θεμέλιο

Το να είναι η  $S$  ένα γνωσιακό θεμέλιο για το  $T$ , μπορεί να ερμηνευθεί κατά τρεις διαφορετικούς τρόπους: ισχυρώς, ασθενώς και υπερβατολογικώς.

Η  $S$  είναι, ισχυρά, ένα γνωσιακό θεμέλιο όταν δεν μπορούμε να γνωρίζουμε ή να κατανοούμε το  $T$  χωρίς την κατάληψη της  $S$ . Η  $S$ , μας απαντά στο ερώτημα: ποιες λειτουργίες και δυνατότητες είναι παρούσες κατά την κατάληψη του  $T$ ; Η  $S$  κινείται εντός των νοητικών μας λειτουργιών και το  $T$  επί των μαθηματικών συστημάτων. Στην ισχυρότερή του μορφή αυτό περιγράφεται υποδειγματικά από τα στάδια του Piaget<sup>260</sup>. Το μεγαλύτερο μέρος του σημερινού διαλόγου που αφορά την εποπτεία και

<sup>257</sup> Οπλισμός (signature) μιας τυπικής γλώσσας της λογικής (ειδικότερα της μαθηματικής λογικής) είναι το σύνολο των μη λογικών της συμβόλων. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνει σύμβολα συναρτήσεων όπως:  $\{+, \times, 0, 1\}$ , σύμβολα σχέσεων σαν το « $\leq$ », ή κατηγορήματα σαν το « $\in$ » καθώς και μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε συνάρτηση ή σχέση ή κατηγορημα, τον αριθμό των ποσοτήτων στα οποία αναφέρονται κάθε φορά. Το σύμβολο μιας μηδενομελούς συνάρτησης ονομάζεται σύμβολο σταθεράς.

<sup>258</sup> Αυτό είναι έντονα φανερό στην κατηγορική λογική (κλάδο της Θεωρίας Κατηγοριών, στα πλαίσια του οποίου η σύνταξη και η σημασιολογία μιας γλώσσας παρίστανται από μια κατηγορία και η μετάφραση από έναν συναρτητή). Μια δοθείσα κατηγορία περιλαμβάνει όλα τα είδη ορίων, συνορίων και ιδιοτήτων ακριβείας. Κάποια απ' όλα αυτά πρέπει να επιλεγούν ή ταυτοποιηθούν ως λογικές πράξεις.

<sup>259</sup> Μια προσέγγιση που ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας προσφέρεται από την κατηγορική λογική και τη βασική έννοια του sketch: Δοθείσης μιας κατηγορίας  $C$  μαθηματικών δομών, η  $C$  είναι ισοδύναμη με την κατηγορία των μοντέλων ενός sketch  $S$ . Η τελευταία έννοια μας επιτρέπει να μείνουμε μακριά από γλωσσικές και συμβατικές θεωρήσεις αφού τα sketches είναι γεωμετρικές δομές· ακριβέστερα, είναι γραφήματα. Ένα sketch είναι η φυσική σύνταξη μιας κατηγορίας μοντέλων και αντιστοιχεί στην παραδοσιακή έννοια της «γλώσσας». Τυπικά, ένα sketch είναι μια κατηγορία  $D$ , μαζί με ένα σύνολο οριακών κώνων και ένα σύνολο συνοριακών κώνων. Μοντέλο του sketch, σε μια κατηγορία  $C$ , είναι ένας συναρτητής  $M : D \rightarrow C$ , ο οποίος αντιστοιχεί κάθε προσδιορισμένο κώνο σε ένα οριακό κώνο στη  $C$  και κάθε προσδιορισμένο συν-κώνο σε ένα συνοριακό συν-κώνο στη  $C$ . Οι μορφισμοί των μοντέλων είναι φυσικοί μετασχηματισμοί (τρόποι μετασχηματισμού ενός συναρτητή σε έναν άλλο ώστε να διατηρείται η εσωτερική δομή των εμπλεκόμενων κατηγοριών, όπως παραδείγματος χάρη η σύνθεση των μορφισμών· ένας «μορφισμός συναρτητών»). Πρόκειται για έναν γενικό τρόπο να προσδιορίζεις δομές πάνω στα αντικείμενα μιας κατηγορίας, διαμορφώνοντας ένα κατηγορικο-θεωρητικό ανάλογο της λογικής έννοιας μιας θεωρίας και των μοντέλων της. Τα sketches επιτρέπουν πολλαπλές διατάξεις μοντέλων και μοντέλα σε κάθε κατηγορία.

<sup>260</sup> Ο Jean Piaget (1896-1980), ήταν Ελβετός εξελικτικός ψυχολόγος και φιλόσοφος, γνωστός για τις επιστημολογικές του μελέτες με παιδιά. Θεώρησε, στα πλαίσια των μελετών του για τη γνωστική εξέλιξη των παιδιών, ότι οι μητρικές-δομές των Bourbaki (αλγεβρικές, τοπολογικές και δομές διάταξης) αποτελούσαν ένα είδος θεμελίου για τα μαθηματικά που απηχούσαν, τρόπον τινά, τις πρώτες

αντίληψη των αφηρημένων μαθηματικών αντικειμένων και του οντολογικού τους αντίκτυπου ανήκει στην εδώ προβληματική. Μιλάμε, πλέον, για το νοούν υποκείμενο. Το που και πώς μπορούν να μπουν τα γνωσιακά θεμέλια στα θεμέλια των μαθηματικών, και η σχέση τους με τα λογικά θεμέλια, όμως, αποτελεί ένα από τα βασικά σημεία διαφωνίας μεταξύ των φιλοσόφων.

Στα πλαίσια της ερμηνείας της γνωσιακής θεμελίωσης, του  $T$  από την  $S$ , ως ασθενούς, μπορούμε να μιλάμε για «παιδαγωγικά δόκιμη» και «ευρετικά αποδοτική» θεμελίωση ενός πεδίου.

Στην παιδαγωγική κατεύθυνση απαντώνται οι ερωτήσεις: πώς θα μπορούσε κανείς να μάθει το  $T$ ; Πώς θα μπορούσε να το διδάξει; Τι απαιτείται; Για παράδειγμα, προτού κανείς ξεκινήσει να ερευνά γεωμετρία ή ανάλυση στον  $\mathbb{R}^n$  καλό θα ήταν να τις γνωρίσει στον  $\mathbb{R}^2$  και στον  $\mathbb{R}^3$ . προτού κάνει μιγαδική ανάλυση, να ξεκινήσει με πραγματική ανάλυση. Ή, για να μάθει διαφορική γεωμετρία, πρέπει να γνωρίζει στοιχεία γραμμικής άλγεβρας<sup>261</sup>. Εδώ συζητάμε για μαθηματικά συστήματα: η  $S$  κινείται εντός των μαθηματικών συστημάτων. Το  $T$ , σ' αυτή την περίπτωση, μπορεί να είναι: (i) μια γενίκευση της  $S$ , όπως στην περίπτωση της ανάλυσης στον  $\mathbb{R}^n$  και στον  $\mathbb{R}^2$ , (ii) μια αφαίρεση της  $S$ , όπως στην περίπτωση της Boolean άλγεβρας και της άλγεβρας των συνόλων<sup>262</sup>, (iii) μια επέκταση της  $S$ , όπως στην περίπτωση των ρητών αριθμών και των ακεραίων, ή (iv) μια θεωρία χτισμένη πάνω στα αντικείμενα και τις σχέσεις της  $S$ , όπως στην περίπτωση της γεωμετρίας και της γραμμικής άλγεβρας ή της αλγεβρικής γεωμετρίας και της θεωρίας των αντιμεταθετικών δακτυλίων<sup>263</sup>. Ίσως είναι ευκολότερο για το υποκείμενο, σε βαθμό υποχρεωτικό

---

νοητικές λειτουργίες μέσω των οποίων τα παιδιά αλληλεπιδρούν με τον κόσμο. Όμως, η ουσιαστική επίδραση των Bourbaki, στα σύγχρονα μαθηματικά, δεν έχει σε τίποτα να κάνει με την έννοια της δομής, και οι μητρικές-δομές τους είναι μόνο κατά έναν άτυπο τρόπο θεμελιακές. Βλ. σχετ., Corry, L. (1992). Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure. *Synthese*. 92, 315-348. σσ. 315, 316, 341. Ο Hans Freudenthal σχολίασε την εσφαλμένη αντίληψη του Piaget ως εξής: «Ο πιο εντυπωσιακός τρόπος οργάνωσης των Μαθηματικών είναι, ασφαλώς, οι Bourbaki. Πόσο πειστικός είναι αυτός ο τρόπος οργάνωσης! Τόσο που ο Piaget θα μπορούσε να ζαναβρεί το σύστημά τους στην εξελικτική ψυχολογία... Ο Piaget δεν είναι μαθηματικός, γι' αυτό και δεν θα μπορούσε να γνωρίζει πόσο επισφαλές είναι το μαθηματικό σύστημα που χτίζουν». Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company. σελ. 46. Σε διαφορετική κατεύθυνση, από του Piaget, κινούνται οι αντιλήψεις του Dedekind: «Έτσι, από τη στιγμή της γέννησης, συνεχώς και με αυξανόμενη ένταση οδηγούμεθα στο να σχετίζουμε πράγματα μεταξύ τους και συνεπώς να χρησιμοποιούμε τη νοητική ικανότητα στην οποία εδράζεται η δημιουργία των αριθμών...», επίσης: «Αν εξετάσουμε ενδελεχώς τι συμβαίνει κατά την μέτρηση μιας συλλογής, ενός αριθμού, πραγμάτων, καταλήγουμε στην ικανότητα του νου να σχετίζει πράγματα μεταξύ τους, να αντιστοιχεί ένα πράγμα σε ένα άλλο, ή να αναπαριστά ένα πράγμα με τη χρήση ενός άλλου ικανότητα, χωρίς την οποία, δεν είναι δυνατή η σκέψη. Πάνω σ' αυτό το μοναδικό και συνεπώς απόλυτα απαραίτητο θεμέλιο, ..., πρέπει, έτσι όπως κρίνω τα πράγματα, να στηριχθεί όλη η επιστήμη των αριθμών». Βλ. σχετ., Dedekind, R. (1963). *Essays on the Theory of Numbers*. New York: Dover Publications Inc. σσ. 34, 32. Με άλλα λόγια, για τον Dedekind, πίσω από την έννοια των αριθμών βρίσκονται πιο θεμελιακές νοητικές διαδικασίες, γνωσιακού χαρακτήρα ικανότητες, από τις οποίες και δημιουργούνται.

<sup>261</sup> Θεωρία διανυσματικών χώρων και πινάκων, την έννοια του ευθέος αθροίσματος, του χώρου πηλίκου, του ομομορφισμού διανυσματικών χώρων, του δυϊκού χώρου, των διγραμμικών μορφών, κ. ά.

<sup>262</sup> Η άλγεβρα των συνόλων περιγράφει και εφαρμόζει τις βασικές ιδιότητες και νόμους των συνόλων: τις συνολοθεωρητικές πράξεις της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος μαζί με τις σχέσεις ισοτιμίας μεταξύ συνόλων και του περιέχεσθαι. Επίσης, αναπτύσσει συστηματικές διαδικασίες αποτίμησης εκφράσεων και υπολογισμών που εμπλέκουν αυτές τις πράξεις και σχέσεις.

<sup>263</sup> Αντιμεταθετικούς λέμε τους δακτυλίους με αντιμεταθετική την πολλαπλασιαστική πράξη. Η αλγεβρική γεωμετρία είναι κλάδος των μαθηματικών που συνδυάζει τεχνικές της άλγεβρας, ειδικότερα της αντιμεταθετικής [κλάδος της άλγεβρας που μελετά τους αντιμεταθετικούς δακτυλίους, τα ιδεώδη τους (προσθετικές υποομάδες των δακτυλίων, κλειστές ως προς τον πολλαπλασιασμό στοιχείων τους με στοιχεία του δακτυλίου) και modules πάνω σ' αυτούς (αβελιανές προσθετικές ομάδες εφοδιασμένες και με βαθμωτό γινόμενο, που ικανοποιεί τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου με βαθμωτά μεγέθη



κάποιες φορές, να κατανοήσει την S προτού αντιμετωπίσει το T. Κάτι τέτοιο είναι σαφές για τις περιπτώσεις (i) και (ii), αλλά αμφισβητήσιμο για τις (iii) και (iv). Τότε, ενδέχεται να πρέπει να χωρήσουμε στα μονοπάτια των γνωσιακών επιστημών και πάλι, όπως στην περίπτωση της ισχυρώς γνωσιακής θεμελίωσης.

Μια «ευρετικά αποδοτική» θεμελίωση, με νόημα, υπάρχει μόνο σε ένα μαθηματικό πεδίο που επιδέχεται την ανακάλυψη και κατανόηση νέων πραγμάτων. Η Θεωρία Συνόλων μπορεί ίσως να θεωρηθεί ως κατάλληλο ευρετικό θεμέλιο για κάποια τμήματα της μαθηματικής έρευνας. Η απλότητα της γλώσσας και των εννοιών βοηθούν στη διατύπωση «εποπτικών» (με μια επιφύλαξη) εικασιών. Απ' την άλλη οι κατηγορικές συνταγές, του στυλ «ψάξε για προσαρτημένους συναρτητές» κ.λπ., μπορούν επίσης να οδηγήσουν σε καλύτερη κατανόηση και ανακαλύψεις. Εδώ είναι που έρχονται στο προσκήνιο ερωτήματα σχετικά με τις αναπαραστάσεις που επιλέγουμε και τα αναπαραστάσιμα ή μη συστήματα. Η διατύπωση στα μαθηματικά είναι ένα μεγάλο ζήτημα. Η κατανόηση, η ανακάλυψη, αλλά και η απόδειξη νέων αποτελεσμάτων γίνονται κάποιες φορές δυνατά με την εισαγωγή του κατάλληλου συντακτικού. Οπότε, ένα αναπαραστατικό σύστημα μπορεί να είναι περισσότερο κατάλληλο από ένα άλλο: θα προτείνει συγκεκριμένες κατευθύνσεις, γενικεύσεις και αφαιρέσεις. Πάλι η Θεωρία Συνόλων φαίνεται ελκυστική, αφού σ' αυτήν κάθε σύνθετος μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να τυποποιηθεί. Το ζήτημα είναι πώς υπάρχουν και οι, φαινομενικά, «ψυχολογικοί» παράγοντες, οι οποίοι καταλήγουν όχι απλώς να σχετίζονται, αλλά και να είναι κρίσιμοι, κάποιες φορές, στην ανακάλυψη νέων μαθηματικών, και την εφαρμογή τους. Και πάλι έχουμε να κάνουμε με τη γνωσιοθεωρία και τις γνωσιακές επιστήμες. Το σίγουρο είναι ότι η καταφυγή στη λογική θεμελίωση δεν βοηθά πάντα. Τα λογικά θεμέλια ενός εννοιολογικού συστήματος μπορούν να είναι λιγότερο προσβάσιμα γνωσιακά από ότι οι έννοιες που υποτίθεται θεμελιώνει<sup>264</sup>.

Όσον αφορά τις υπερβατολογικές αναπαραστάσεις, αυτές είναι οι a priori ικανότητες και οι όροι τους οποίους οφείλουμε, κατά αναγκαίο τρόπο, να έχουμε, ή να ικανοποιούμε, για να είναι δυνατή η συγκεκριμένη γνώση. Ασφαλώς, πρέπει να δοθούν από μια υπερβατολογική μέθοδο<sup>265</sup>.

---

ορισμένα επί του δακτυλίου), στον οποίο και βασίζονται πέραν της αλγεβρικής γεωμετρίας και η θεωρία αλγεβρικών αριθμών (κλάδος της θεωρίας αριθμών που μελετά αλγεβρικές δομές σχετιζόμενες με αλγεβρικούς ακεραίους αριθμούς, δηλαδή μιγαδικούς που αποτελούν ρίζες διωνύμων με ακεραίους συντελεστές)], με τη γλώσσα και τα προβλήματα της γεωμετρίας.

<sup>264</sup> Κάτι τέτοιο αναγνωριζόταν από τον Russell: «Υπάρχει μια καταφανής ανοησία στο να προχωρεί κανείς, όπως στη λογική θεωρία των αριθμών, μέσα από πολλές, μάλλον δυσνόητες προτάσεις της συμβολικής λογικής, στην «απόδειξη» προτάσεων σαν την:  $2 + 2 = 4$ · αφού είναι προφανές ότι το συμπέρασμα είναι περισσότερο συγκεκριμένο από τις αρχικές προτάσεις, και η υποτιθέμενη απόδειξη φαίνεται, συνεπώς, μάταιη». Βλ. σχετ., όπως παρατίθεται στο: Marquis, J.-P. (1995). ό.π. σελ. 441.

<sup>265</sup> Υπάρχουν αναρίθμητα σχετικά παραδείγματα. Στο Foundations of Mathematics, του Hilbert, διαβάζουμε: «Τα μαθηματικά δεν θεμελιώνονται στη λογική, και μόνο, περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη επιστήμη· μάλλον κάτι πρέπει, ήδη, να έχει δοθεί στην αναπαραστατική μας ικανότητα, ως συνθήκη για τη χρήση των λογικών συμπερασμών και την παρουσίαση των λογικών πράξεων, συγκεκριμένα, πέραν της λογικής, αντικείμενα που εποπτικά είναι παρόντα, ως άμεση εμπειρία πρότερη οποιασδήποτε σκέψης. Για έναν αξιόπιστο συμπερασμό πρέπει να είναι δυνατό να θεωρούμε αυτά τα αντικείμενα πλήρως, σε όλα τα μέρη τους, και το γεγονός ότι υπάρχουν, ότι διαφέρουν μεταξύ τους, και ότι ακολουθούν το ένα το άλλο, ότι είναι συνδεδεμένα αιτιακά δηλαδή, να δίνεται άμεσα εποπτικά, μαζί με τα αντικείμενα, ως κάτι που ούτε είναι δυνατό να αναχθεί σε κάτι άλλο, ούτε χρειάζεται αναγωγή. Αυτή είναι η βασική φιλοσοφική θέση που θεωρώ αναγκαία για τα μαθηματικά και γενικά για κάθε επιστημονικό στοχασμό, κατανόηση και επικοινωνία. Και στα μαθηματικά, συγκεκριμένα, αυτό που σκεφτόμαστε είναι συγκεκριμένα σύμβολα καθαυτά, των οποίων το σχήμα, σύμφωνα με την αντίληψη που είχαμε, είναι άμεσα καθαρό και αναγνωρίσιμο. Αυτό είναι και το ελάχιστο που πρέπει να προϋποθεθεί κανένας επιστήμονας δεν μπορεί να το αρνηθεί, και συνεπώς ο καθένας πρέπει να στηρίζει κάτι τέτοιο,

### 7.2.2.3 Το επιστημολογικό θεμέλιο

Τα επιστημολογικά θεμέλια συνδέονται με επιθυμητές επιστημολογικές ιδιότητες, όπως η αναλυτικότητα, η σαφήνεια, η ορθολογικότητα, η αντικειμενικότητα, η συνέπεια κ.ά. Δοθείσης μιας εξ αυτών των ιδιοτήτων, για παράδειγμα της σαφήνειας, στα πλαίσια μιας επιτυχούς επιστημολογικής θεμελίωσης θεωρούμε πως εξηγείται γιατί, ή πώς, το  $T$  έχει αυτή την ιδιότητα. Για παράδειγμα, ένας λογικολόγος θα μπορούσε να πει ότι η λογική παρέχει επιστημολογικό θεμέλιο στα μαθηματικά<sup>266</sup>.

Το όλο πλαίσιο έχει ως εξής: στην  $S$  παριστάνεται ένα γνωσιακό corpus που επιλέχθηκε για τις επιστημολογικές του ιδιότητες, και το  $T$  είναι ένα άλλο γνωσιακό corpus που συνδέεται με την  $S$  κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι επιθυμητές επιστημολογικές ιδιότητες της  $S$  μεταβιβάζονται στο  $T$ . Ο απλούστερος τρόπος να εξασφαλισθεί κάτι τέτοιο είναι μέσω μιας αναγωγής του  $T$  στην  $S$ . Ενδεχομένως συμβαίνει και όταν το  $T$  είναι μια επέκταση της  $S$ . Η όταν ερμηνεύεται η μία θεωρία στην άλλη. Προβληματικές έννοιες ή προτάσεις, κάποιες φορές δικαιολογούνται αν μεταφραστούν σε όρους αποδεκτών εννοιών ή προτάσεων. Οι μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες, για παράδειγμα, απέκτησαν κύρος όταν τους δόθηκαν ερμηνείες στα πλαίσια της Ευκλείδειου γεωμετρίας.

### 7.2.2.4 Το σημασιολογικό θεμέλιο

Υπάρχουν ευάριθμα παραδείγματα, στην ιστορία των μαθηματικών, αξιωματικών συστημάτων που δεν είχαν μοντέλα οπότε και απουσίαζαν τα

---

*συνειδητά ή μη*). Βλ., Hilbert, D. (1927). *The Foundations of Mathematics*, στο J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*. (1967). Cambridge, MA: Harvard University Press. σσ. 464-465. Στον Russell έχουμε μια παρόμοια προσέγγιση, στη θεώρησή του για τα αξιώματα της Προβολικής Γεωμετρίας: «Αυτό με το οποίο πρέπει να ξεκινήσουμε σ' αυτό το πεδίο είναι η δυνατότητα διάκρισης των διαφόρων σημείων μεταξύ τους. Αυτό πρέπει να σημειωθεί... ως το πρώτο αξίωμα της Γεωμετρίας. Το πώς μπορούμε να ορίσουμε ένα σημείο και να το διακρίνουμε από τα υπόλοιπα είναι άσχετο προς το παρόν...». Δεν είναι σαφές πώς μπορούμε να διακρίνουμε τα διάφορα σημεία: αντιληπτικά ή νοητικά· πώς ονοματίζουμε διαφορετικά πράγματα που καλούνται «σημεία». Πάντως, επιχειρείται να θεμελιωθεί, το σύνολο της Προβολικής Γεωμετρίας, δια μιας υπερβατολογικής παραγωγής: «... Θα 'θελα να τονίσω ότι η Προβολική Γεωμετρία είναι αποκλειστικά *a priori*· έχει να κάνει με ένα αντικείμενο του οποίου οι ιδιότητες παράγονται λογικά από τον ορισμό του και δεν ανακαλύπτονται από εμπειρικά δεδομένα· του οποίου ο ορισμός, πάλι, θεμελιώνεται στη δυνατότητά μας να έχουμε εμπειρία της ποικιλίας στη σχέση, ή της πολλαπλότητας στην ενότητα· και συνεπώς όλη η επιστήμη παράγεται λογικά και παράγεται από, τη δυνατότητα μιας τέτοιας εμπειρίας». Βλ., Russell, B. (1956). *An Essay on the Foundations of Geometry*. NY: Dover Publications, Inc. σσ. 119, 146.

<sup>266</sup> Στην πραγματικότητα, αυτός είναι και ο βασικός ισχυρισμός του λογικισμού: σχολή σκέψης, στη φιλοσοφία των μαθηματικών, που προτάσσει την άποψη ότι τα μαθηματικά είναι μια επέκταση της λογικής στην οποία, εν μέρει, και ανάγονται. Η ιδιότητα που ο Frege απέδωσε στη λογική, και με την οποία ήλπιζε ότι θα διαποτίζονταν τα μαθηματικά, εξαιρουμένης της γεωμετρίας, ήταν η αναλυτικότητα. Οι Frege και Russell προσπαθούσαν να προάγουν ένα θεμέλιο για τα μαθηματικά κατασκευάζοντας ένα απλό, αλλά υψηλο-βάθμιο, σύστημα αξιωμάτων στο οποίο θα μπορούσαν να ορισθούν όλα τα μαθηματικά αντικείμενα και να αποδειχθούν όλες οι συνήθεις ιδιότητές τους, όπως φαίνεται πως το κάνει τώρα η θεωρία Συνόλων. Στις πρώτες τους απόπειρες πίστευαν ότι τα αξιώματά τους είχαν να κάνουν με έννοιες (ή όρους) γενικά και όχι με στοιχεία και σύνολα, οπότε και τα αντικείμενα που θα προέκυπταν απ' αυτές τις έννοιες ήταν προϊόντα μιας καθαρής λογικής. Αυτή ήταν η αντίληψη του Frege, αλλά και του πρώιμου Russell προτού μετακινηθεί σε μια περισσότερο εκτασιακή θέση υπό την επίδραση των απόψεων του Wittgenstein και του Frank Plumpton Ramsey (1903-1930, βρετανού μαθηματικού με σημαντική συνεισφορά στα μαθηματικά, τη φιλοσοφία και την οικονομία).

σημασιολογικά θεμέλια: π.χ. η εξέλιξη των μη-Ευκλειδίων γεωμετριών κατά τον 19<sup>ο</sup> αιώνα. Εδώ, η *S*, είναι ένα «σύμπαν» αντικειμένων με κατάλληλες ιδιότητες: ένα μοντέλο με τη συνήθη έννοια. Από την εποχή του Tarski<sup>267</sup>, μια σημασιολογία, δηλαδή μια θεωρία της αναφοράς και της αλήθειας, βασίζεται σε μια σχέση επαλήθευσης. Δεν μπορούμε να αδιαφορούμε για ερωτήματα που σχετίζονται με τις παραστάσεις και τις γλώσσες των σημασιολογικών θεμελίων, από τη στιγμή που το βασικό πρόβλημα εδώ είναι το ερώτημα της έννοιας της αναφοράς. Έτσι, ίσως χρειαστεί να είμαστε πολύ ευαίσθητοι στα γλωσσικά ζητήματα, τα οποία πρέπει να αποφύγουμε, όσο το δυνατόν, στην καθαρά λογική ανάλυση.

### 7.2.2.5 Το οντολογικό θεμέλιο

Εδώ, υποτίθεται, δίνονται απαντήσεις στο ερώτημα: από τι είναι φτιαγμένες οι οντότητες του *T*; Τι είδους ύπαρξη κατέχουν; Αν το *T* είναι ένα τυπικό σύστημα, ίσως νομίσουμε πως η οντολογική θεμελίωση είναι η προβολή μιας σχέσης αναφοράς, της σημασιολογικής θεμελίωσης. Ωστόσο, αυτό είναι λάθος. Η οντολογία ενδιαφέρεται για το οντολογικό status του τυπικού συστήματος, ως τέτοιου, και όχι ως συστήματος που συμβολίζει κάτι άλλο.

Από τη στιγμή που προσανατολιζόμαστε στα θεμέλια των μαθηματικών, επικεντρωνόμαστε στο οντολογικό status των μαθηματικών οντοτήτων. Σ' αυτή την περίπτωση, η *S* μπορεί να είναι είτε ένας κόσμος υπερ-εμπειρικών και υπερ-νοητικών μαθηματικών οντοτήτων, ή ένα σύστημα εννοιών σαν τις νοητικές διαδικασίες, ή εμπειρικές οντότητες και διεργασίες. Εδώ, πάλι το γνωρίζων υποκείμενο είναι στο κέντρο της προσοχής. Καταλαβαίνουμε ότι είναι αδύνατο να διαχωρίσει κανείς μια οντολογική θεμελίωση από μια γνωσιακή. Στο *T* αντανακλάται το σύστημα των γνωσιακών λειτουργιών που εμπλέκονται σε ένα υποκείμενο που «κάνει μαθηματικά». Με άλλα λόγια, η *S* μας λέει τι υποβόσκει οντολογικά σε μια μαθηματική δραστηριότητα θεωρημένη ως γνωσιακή διαδικασία. Κατά κάποιο τρόπο, η οντολογία ενός συστήματος και η ισχυρώς γνωσιακή θεμελίωσή του είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Αν και μπορούν να διακριθούν δεν μπορούν να διαχωρισθούν.

### 7.2.2.6 Το μεθοδολογικό θεμέλιο

Μεθοδολογική είναι η θεμελίωση που αποπειράται να απαντήσει στο ερώτημα: ποιες είναι οι αρχές, ή οι μέθοδοι, που εξασφαλίζουν ότι το αντικείμενο με μια δοθείσα ιδιότητα είναι έγκυρο, ότι μπορεί να υπάρξει, ή ότι είναι διαφορετικό από άλλα του ίδιου τύπου; Εδώ, οι έννοιες της *S* χρησιμοποιούνται ως εργαλεία, για να «δημιουργήσουν», ή να ταξινομήσουν, ακόμα και να αποδείξουν κάτι για τα αντικείμενα του *T*. Οι μαθηματικοί, σήμερα, χρησιμοποιούν την έκφραση «θεμέλια» με αυτόν ακριβώς τον τρόπο<sup>268</sup>.

<sup>267</sup> Alfred Tarski (1901-1983), Πολωνός λογικολόγος και μαθηματικός.

<sup>268</sup> Πολύ συχνά σε βιβλία αντιμεταθετικής άλγεβρας ή θεωρίας αντιμεταθετικών δακτυλίων θα συναντήσουμε απόψεις σαν κι αυτή: «Πέραν του ότι είναι μια όμορφη και βαθειά θεωρία, η θεωρία των αντιμεταθετικών δακτυλίων είναι σημαντική ως θεμέλιο για την αλγεβρική γεωμετρία και τη μιγαδική αναλυτική γεωμετρία [που εφαρμόζει στοιχεία από τη θεωρία των μιγαδικών αριθμών στην επιπεδομετρία]». Βλ., Matsumura, H. (1989). *Commutative Ring Theory*. Cambridge: Cambridge University Press. σελ. ix.

Κάτι τέτοιο συνιστά μια νέα χρήση της έκφρασης «μεθοδολογικό θεμέλιο». Συμπεριλαμβάνοντας κάποια εργαλεία σε ένα πεδίο, δεν του παρέχουμε ούτε οντολογικά, ούτε λογικά θεμέλια. Οι ομάδες παίζουν, για παράδειγμα, σημαντικό ρόλο στην τοπολογία και τη γεωμετρία: το σύνολο της αλγεβρικής γεωμετρίας στηρίζεται στις αμοιβαίες σχέσεις τοπολογικών χώρων και ομάδων. Αλλά αυτές οι διασυνδέσεις δεν διαμορφώνουν την έννοια του τοπολογικού χώρου, δεν μας δίνουν ένα νέο λογικό θεμέλιο για την τοπολογία, ούτε μας μιλούν για το πώς να ερμηνεύσουμε μια θεωρία των τοπολογικών χώρων, κ.λπ. Είναι μια καινούργια σχέση μεταξύ δύο μαθηματικών συστημάτων. Η  $S$  και το  $T$ , γενικά, είναι ανεξάρτητα συστήματα, γνωσιακά και λογικά. Στις περισσότερες των περιπτώσεων τα αντικείμενα της  $S$  κατασκευάζονται από τα αντικείμενα του  $T$ , όπως στην περίπτωση των ομάδων στην τοπολογία.

Βέβαια, ένα μεθοδολογικό θεμέλιο μπορεί να παίζει σημαίνοντα κανονιστικό ρόλο, σε ένα πεδίο, με το να μας δίνει τα εργαλεία να αναζητήσουμε νέα αντικείμενα και ιδιότητες. Στην πραγματικότητα, τα λογικά θεμέλια είναι, υπό κάποια έννοια, κατασκευασμένα από τα μεθοδολογικά. Τα μεθοδολογικά εμφανίζονται κατά την κατασκευή ενός πεδίου, εκεί που τα λογικά θεμέλια συνιστούν μια συγκεκριμένη ανακατασκευή του.

### 7.2.3 «Σχέσεις θεμελίωσης» και φιλοσοφία των Μαθηματικών

Ποιά, τώρα, η σχέση μεταξύ των διαφόρων ειδών θεμελίωσης και της φιλοσοφίας των μαθηματικών; Μια φιλοσοφία για τα μαθηματικά διακρίνεται από μια άλλη, ακριβώς λόγω της διάταξης που επιφυλάσσει, κατά σειρά σπουδαιότητας, στις θεμελιώσεις αυτές. Εντός μιας φιλοσοφίας των μαθηματικών, κάποιες χάνουν το θεμελιακό τους status, γιατί αποδεικνύεται ότι έπονται άλλων περισσότερο θεμελιακών, και άλλες αγνοούνται εντελώς.

Το ίδιο συμβαίνει στα πλαίσια της συζήτησης γύρω από το θεμελιακό status της Θεωρίας των Κατηγοριών για τα Μαθηματικά. Τα εμπλεκόμενα μέρη, αξιολογούν και διατάσσουν διαφορετικά αυτά τα είδη θεμελιώσεων. Θα παρατηρήσουμε, ότι οι υποστηρικτές της αναφέρονται μόνο στις οντολογικού, λογικού, μεθοδολογικού και ευρετικού χαρακτήρα θεμελιώσεις. Οι δύο εναπομείνουσες είναι αξιοσημείωτα απύσες: η γνωσιακή και η επιστημολογική. Τα επιχειρήματα που παρουσιάζονται ενάντια στη Θεωρία των Κατηγοριών βασίζονται ακριβώς σ' αυτές.

## 7.2.4 Η Θεωρία Κατηγοριών εντός ή εκτός του θεμελιωτικού προγράμματος;

### 7.2.4.1 Εντός

Ο Lawvere, αρχικά, στήριξε την παραδοσιακή οπτική της λογικής θεμελίωσης των μαθηματικών, οπότε και επιχείρησε την αξιωματική παρουσίαση της κατηγορίας των κατηγοριών στα πλαίσια της πρωτοβάθμιας λογικής. Αναγνωρίζει στη θεωρία κατηγοριών την ιδιότητα να μπορεί να παράσχει μια ενοποίηση στα μαθηματικά, έχει την πεποίθηση ότι αυτή η εννοιολογική ενοποίηση μπορεί να μεταφρασθεί σε μια οντολογική αναγωγή, και γίνεται μια σχετική απόπειρα χτίζοντας το κατάλληλο λογικό θεμέλιο. Ενδεικτικά παραθέτουμε το επόμενο απόσπασμα: «*Στη μαθηματική πρόοδο των τελευταίων δεκαετιών, μπορεί κανείς να δει, σαφώς, να εγείρεται η πεποίθηση πως οι ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων μπορούν να διατυπωθούν καλύτερα με αναφορά στην αφηρημένη δομή των αντικειμένων αυτών, παρά με αναφορά στα στοιχεία εξ'ων συνετέθησαν. Το εύλογο ερώτημα, συνεπώς, είναι αν κανείς μπορεί να παράσχει ένα θεμέλιο για τα μαθηματικά που να εκφράζει σε βάθος την αντίληψη για το τι είναι αυτά... Εδώ, με τον όρο “θεμέλιο”, εννοούμε ένα απλό σύστημα πρωτοβάθμιων αξιωμάτων, στο οποίο μπορούν να ορισθούν όλα τα συνήθη μαθηματικά αντικείμενα και να αποδειχθούν όλες οι συνήθεις ιδιότητές τους*»<sup>269</sup>.

Σε ένα επόμενο κείμενο, παρουσιάζεται μια άλλη εικόνα: «*Θεμέλια θα εννοούμε εδώ τη μελέτη αυτού που είναι καθολικό στα μαθηματικά. Τα θεμέλια, απ' αυτή την άποψη, δεν μπορούν να ταυτισθούν με κάποιο “αρχικό σημείο”, ή κάποιου τύπου “δικαιολόγηση” των μαθηματικών, αν και μπορεί κανείς να καρπωθεί επιμέρους αποτελέσματα και ως προς αυτά. Μεταξύ των πιθανών συνεπειών από τα θεμέλια, έτσι όπως ορίστηκαν, θα μπορούσαν να είναι κατευθυντήριες γραμμές για το πώς περνάμε από τον ένα κλάδο των μαθηματικών στον άλλο, ή εκτιμήσεις για την σχέση που μπορούν να έχουν μεταξύ τους οι διάφορες ερευνητικές κατευθύνσεις*»<sup>270</sup>. Χωρίς να είναι ασύμβατη η θέση αυτή με την προηγούμενη, παραμερίζει την παραδοσιακή αντίληψη για τα θεμέλια ότι πρέπει να παρέχουν κάποιου είδους δικαιολόγηση των μαθηματικών. Ο επιστημολογικός χαρακτήρας μιας θεμελίωσης είναι απών, και μαζί μ' αυτόν εξαφανίζεται και ο λογικός· το «αρχικό σημείο». Αντιθέτως, κατευθυνόμαστε προς μια αυτόνομη μεθοδολογικού χαρακτήρα θεμελίωση μαζί με τα ευρετικά της παρεπόμενα. Υποτίθεται πως η Θεωρία Κατηγοριών μας επιτρέπει να δούμε και να κατανοήσουμε τι κάνει συγκεκριμένες κατασκευές και αποτελέσματα δυνατά<sup>271</sup>.

Στην πραγματικότητα ο προσανατολισμός του Lawvere είναι έντονα ιστορικός και διαλεκτικός. Δεν υπάρχει ένα πράγμα που λέγεται θεμέλια των Μαθηματικών. Το όλο πλαίσιο πρέπει να γίνει αντιληπτό ως εξελισσόμενο. Αυτή η παραδοχή, σε συνδυασμό με την ιστορική και διαλεκτική φύση της μαθηματικής γνώσης, σημαίνει ότι μάλλον από το να επιβάλλουν το τι συνιστά τα Μαθηματικά, τα

<sup>269</sup> Βλ., Lawvere, F. W. (1966). The Category of Categories as a Foundation for Mathematics. *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*. La Jolla, New York: Springer-Verlag, 1-21. σελ. 1.

<sup>270</sup> Βλ., Lawvere, F. W. (1969). Adjointness in Foundations. *Dialectica*. 23, (3/4), 281-296. σελ. 281.

<sup>271</sup> Τα καθολικά που ο Lawvere έχει κατά νου είναι οι καθολικοί μορφισμοί της Θεωρίας Κατηγοριών.

«θεμέλια» πρέπει να περιγράφουν τις αρχές των Μαθηματικών και τα ουσιώδη χαρακτηριστικά τους<sup>272</sup>.

Το εξαιρετικά ενδιαφέρον όσον αφορά τις κεντρικές έννοιες της Θεωρίας Κατηγοριών, όπως η έννοια του φυσικού μετασχηματισμού, της προσάρτησης κ.λπ. είναι ότι δεν μπορούμε να τις εκλάβουμε ως πρωταρχικές. Βρισκόμαστε δηλαδή στη θέση όπου αυτό που φαίνεται θεμελιώδες, δεν είναι πρωταρχικό από τη λογική σκοπιά. Ωστόσο, είναι σαφές ότι έχουμε να κάνουμε με κάτι θεμελιώδες.

Οι κύριοι ισχυρισμοί υπέρ, λοιπόν, είναι οι ακόλουθοι:

1. Η Θεωρία Κατηγοριών (μαζί με τη Θεωρία Τόπων) είναι ευρετικώς θεμελιώδης.

2. Η θεωρία για την κατηγορία όλων των κατηγοριών αποτελεί το οντολογικό-λογικό θεμέλιο των μαθηματικών.

3. Η Θεωρία Κατηγοριών παρέχει ένα μεθοδολογικό θεμέλιο για τα μαθηματικά.

4. Οι Τόποι παρέχουν ένα κατάλληλο λογικό θεμέλιο για τα συνήθη μαθηματικά μέσα από την εσωτερική τους γλώσσα.

5. Η Θεωρία Τόπων παρέχει ένα κατάλληλο πλαίσιο για την έρευνα «τοπικών» λογικών θεμελίων, δηλαδή θεμελίων για συγκεκριμένες περιοχές των μαθηματικών, όπως η διαφορική γεωμετρία, για παράδειγμα, ή η αλγεβρική γεωμετρία· ακόμη δε περισσότερο, τα αξιώματα για έναν Τόπο συνιστούν τις θεμελιώδεις αναλλοίωτες των λογικών θεμελίων των μαθηματικών.

#### 7.2.4.2 Εκτός

Ένα γενικό επιχείρημα, ενάντια στο θεμελιωτικό ρόλο που μπορεί να παίζει για τα Μαθηματικά η Θεωρία Κατηγοριών, είναι διατυπωμένο από τον Feferman: «Απλώς, το ζήτημα είναι ότι όταν εξηγούμε τη γενική έννοια της δομής, και επιμέρους ειδών δομών σαν τις ομάδες, τους δακτυλίους κ.λπ. προϋποθέτουμε, κατ' αποκλειστικό τρόπο, τις ιδέες της πράξης και της συλλογής»<sup>273</sup>. Με άλλα λόγια, οι έννοιες της κλάσης και της πράξης είναι πρότερες, καθαρά υπό ένα γνωσιακό πρίσμα, οποιονδήποτε δομικών εννοιών, όπως αυτές που χρησιμοποιούνται στη Θεωρία Κατηγοριών. Η κρίσιμη παραδοχή εδώ φαίνεται να είναι ότι μια λογική θεμελίωση των Μαθηματικών, που αποτελούν θεωρία βασισμένη στις έννοιες της συλλογής και της πράξης, πρέπει να εκφράζεται με όρους εννοιών που είναι γνωσιακώς θεμελιώδεις.

Όμως, ποιο είναι το status αυτού του τελευταίου ισχυρισμού; Είτε είναι ένας εμπειρικός ισχυρισμός, και συνεπώς πρέπει να εξετασθεί καταλλήλως είτε είναι ένα υπερβατολογικό επιχείρημα που διατείνεται ότι κάθε έννοια δομής βασίζεται αναγκαία στις έννοιες της συλλογής και της πράξης. Στην πρώτη περίπτωση, η έρευνα στα θεμέλια των μαθηματικών θα βασιστεί σε πειραματικά δεδομένα. Στη

---

<sup>272</sup> «Ένα θεμέλιο κάνει σαφή τόσο τα ουσιώδη χαρακτηριστικά, τα περιεχόμενα και τις λειτουργίες μιας επιστήμης, όσο τις αρχές της και τους γενικούς νόμους εξέλιξής της. Ο σκοπός της ανάδειξης όλων αυτών είναι να μας παρασχεθεί ένας οδηγός μάθησης, χρήσης και ακόμα παραπέρα ανάπτυξης της επιστήμης. Ένα “καθαρό” θεμέλιο που ξεχνά αυτό το σκοπό, και επιδιώκει ένα θεωρητικό “θεμέλιο” για τους δικούς του λόγους, σαφώς είναι ένα μη-θεμέλιο». Βλ., Lawvere, F. & Rosebrugh, R. ό.π., σελ. 235.

<sup>273</sup> Βλ., Feferman, S. (1977). *Categorical Foundations and Foundations of Category Theory*. Στο R. Butts (Επιμ.), *Logic, Foundations of Mathematics and Computability* (σ. 149-169). Dordrecht: D. Reidel. σελ. 150.

δεύτερη περίπτωση, πρέπει κάποιος να εξηγήσει τον τύπο της αναγκαιότητας που εμπλέκεται, πράγμα πολύ δύσκολο.

Είναι αλήθεια, ότι κανείς μέχρι σήμερα δεν έχει υποστηρίξει ότι η θεωρία Κατηγοριών θα όφειλε να παράσχει μια λογικού χαρακτήρα θεμελίωση των μαθηματικών, αφού εντός της απηχούνται βασικές γνωσιακές ικανότητες. Ο σύνδεσμος μεταξύ γνωσιακού και λογικού είναι απών από την κατηγορική εικόνα.

Εξάλλου, το αρχικό ενάντιο επιχείρημα θα μπορούσε να αντιστραφεί και να γίνει επιχείρημα υπέρ της Θεωρίας Κατηγοριών. Κατ' αρχάς, δεν είναι αλήθεια ότι κάθε δομική έννοια πρέπει να ορισθεί μέσα από τις έννοιες της συλλογής και της πράξης. Μια δεύτερη προσέγγιση των δομών, μπορεί είναι δυναμική. Υπάρχει μια στατική ή γεωμετρική προσέγγιση στις δομές βασισμένη στην έννοια της συλλογής (η οποία είναι αναπόφευκτη), και στην έννοια της σχέσης (όχι της πράξης). Οι ομάδες, οι δακτύλιοι και όλες οι αλγεβρικές δομές, συμπεριλαμβανομένων των κατηγοριών, μπορούν να ειδωθούν από μια δυναμική άποψη. Αλλά υπάρχουν άλλοι τύποι δομών, γεωμετρικές και τοπολογικές, μεταξύ των οποίων μπορούμε να συμπεριλάβουμε τις κατηγορίες, οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν καλύτερα ως στατικά ή γεωμετρικά αντικείμενα (αυτή η άποψη γίνεται ακόμη περισσότερο σαφής όταν σκέφτεται κανείς ανώτερης τάξης κατηγορίες). Έτσι, μπορεί κάποιος να εξηγήσει τις κατηγορίες απ' ευθείας με όρους γεωμετρικούς, αποφεύγοντας την έννοια της πράξης. Από την άλλη, και εντός της δυναμικής άποψης, μπορεί κάποιος να ισχυρισθεί ότι οι βασικές πράξεις της Θεωρίας Κατηγοριών είναι ακριβώς οι έννοιες της συλλογής και της πράξης (η περίπτωση του μορφισμού).

Τα παραπάνω σημαίνουν ότι είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί το ίδιο το επιχείρημα του Feferman για να στηριχθεί η άποψη ότι η Θεωρία Κατηγοριών είναι ακριβώς η θεωρία που συλλαμβάνει τις έννοιες της συλλογής και της πράξης στο σωστό βαθμό γενικότητας. Αυτός ο ισχυρισμός θα μπορούσε να συνδέσει τα λογικά θεμέλια των Μαθηματικών με τις κατακτήσεις των γνωσιακών επιστημών.

Στις επόμενες παραγράφους, θα δούμε επιμέρους πτυχές των προαναφερθέντων με μεγαλύτερη λεπτομέρεια, ή και από άλλη σκοπιά, παραμένοντας έξω από τεχνικού χαρακτήρα πραγματεύσεις.

## 7.2.5 Τα σύνολα και οι κατηγορίες ως κωδικοποιήσεις

Έχουμε λοιπόν δύο εννοιολογικά συστήματα, που ενοποιούν τα μαθηματικά με διαφορετικούς τρόπους, αν και οι σχέσεις μεταξύ τους δεν έχουν ξεκαθαρισθεί ακόμα. Από εννοιολογικής απόψεως μπορούμε να έχουμε τα ακόλουθα:

(i) Οι κατηγορίες να είναι δομημένα σύνολα, οπότε και η Θεωρία Κατηγοριών να είναι ένα επιμέρους κεφάλαιο της Θεωρίας Συνόλων.

(ii) Τα σύνολα να είναι μη δομημένες κατηγορίες, οπότε και η Θεωρία Συνόλων να είναι ένα ειδικό κεφάλαιο της Θεωρίας Κατηγοριών.

(iii) Η Θεωρίες Συνόλων και Κατηγοριών είναι συμπληρωματικοί τρόποι οργάνωσης του μαθηματικού «σύμπαντος», μη αναγώγιμες η μία στην άλλη. Κάθε μαθηματικό σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί ως σύνολο ή κατηγορία, ανάλογα με τα συμφραζόμενα και τις ανάγκες. Αυτή η συμπληρωματικότητα είναι η παραδοσιακή συμπληρωματικότητα μεταξύ αριθμητικής και γεωμετρίας, και δεν μπορεί να αγνοηθεί από τη στιγμή που απηχεί βασικά χαρακτηριστικά της γνωσιακής μας κατασκευής<sup>274</sup>.

(iv) Τα σύνολα, οι κατηγορίες, ή και τα δύο, θα εξαφανιστούν γιατί αποτελούν απλώς συμβατικά συμβολικά συστήματα, κατά τον ίδιο τρόπο που εξαφανίστηκε η έννοια του αιθέρα από τη φυσική.

Σαφώς, τα (i) και (ii) στηρίζονται στην πεποίθηση ότι το σκελετό του μαθηματικού σύμπαντος τον συνιστούν αναγώγιμες οντότητες. Έτσι, υποστηρίζοντας αυτές τις απόψεις βρίσκουμε ισχυρές και αντιφατικές οντολογικές πεποιθήσεις. Ωστόσο, και οι δύο ισχυρισμοί αντιμετωπίζουν τεχνικές δυσκολίες. Ο (i) είναι αποδεκτός αν μπορούμε να θέσουμε το ερώτημα του συνολο-θεωρητικού θεμελίου της θεωρίας κατηγοριών. Το κύριο πρόβλημα είναι η ακατάπαυστη ανάγκη για «μεγάλες» κατηγορίες. Πρέπει κανείς να κάνει σημασιολογικές ή συντακτικές ρυθμίσεις. Ομοίως η (ii) είναι αποδεκτή αν δείξει κανείς ότι η θεωρία συνόλων μπορεί να αφαιρεθεί χωρίς σημαντικές απώλειες από όλα τα πεδία των μαθηματικών, ειδικότερα από τη θεωρία κατηγοριών καθαυτήν.

Οι (iii) και (iv) είναι εντελώς διαφορετικής φύσεως. Βασίζονται στην πεποίθηση ότι δεν υπάρχουν παγιωμένα και συμπεριληπτικά, όλων των μαθηματικών, λογικά και σημασιολογικά θεμέλια. Στην (iii), η Θεωρία Συνόλων και η Θεωρία Κατηγοριών θεωρούνται αναπαραστατικά συστήματα, με τις αρετές και τα ελαττώματά τους. Συλλαμβάνουν, και οι δύο θεωρίες, ουσιώδη τμήματα των μαθηματικών, με διαφορετικούς τρόπους. Η (iv) είναι απλή εικασία.

Φαίνεται, τελικά, να μην υπάρχει a priori επιχείρημα που να δικαιολογεί τον αποκλεισμό της θεωρίας συνόλων, ή της θεωρίας κατηγοριών, από τη θεμελίωση των μαθηματικών. Η θεωρία κατηγοριών έχει, τουλάχιστον, να παίξει έναν σοβαρό μεθοδολογικό ρόλο στα σύγχρονα μαθηματικά, με τον ίδιο τρόπο που έπαιξε η θεωρία συνόλων καίριο μεθοδολογικό ρόλο, στα τέλη του 19<sup>ου</sup> και στον 20<sup>ο</sup> αιώνα.

<sup>274</sup> «Θα ισχυριζόμουν ότι ο φυσιολογικός διαχωρισμός που κάνει ο εγκέφαλος μας κατά την επεξεργασία του χώρου από του χρόνου, στηρίζει τη θέση ότι μια πλήρης ενοποίηση των μαθηματικών είναι αδύνατη». Mathias, A. R. D. (1992). The Ignorance of Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*. 14, (3), 4-13. σελ. 11. Έτσι, τα λογικά θεμέλια των μαθηματικών πρέπει να είναι και έτσι και αλλιώς, λόγω των γνωσιακών μας χαρακτηριστικών. Πράγμα που σημαίνει ότι η σχέση λογικής θεμελίωσης θα στηρίζεται στη σχέση γνωσιακής θεμελίωσης.



## 7.3 Η Θεωρία Κατηγοριών και το στρουκτουραλιστικό πρόγραμμα στα Μαθηματικά

### 7.3.1 Η θέση της εποπτείας στις Θεωρίες Συνόλων και Κατηγοριών<sup>275</sup>

Υπάρχει η τάση σήμερα να θεωρείται ότι τα μαθηματικά, προοδευτικά, γίνονται όλο και περισσότερο αφηρημένα και λιγότερο εποπτικά. Όμως ο ρόλος της εποπτείας, παρόλο που αλλάζει καθαυτήν, παραμένει γενικά ο ίδιος με αυτόν της εποχής του Ευκλείδη. Οι μαθηματικές έννοιες μεταβάλλονται ραγδαία· ανακαλύπτονται νέες και τροποποιούνται οι παλαιότερες, αλλά η μεταβολή των μαθηματικών εποπτειών είναι το ίδιο δραματική, αν και δυσκολότερα εντοπίζεται γιατί, αντίθετα από τις έννοιες, σπανίως οι εποπτείες επιτρέπουν ακριβείς λεκτικές περιγραφές. Η ανακάλυψη των μη-Ευκλειδείων γεωμετριών, το 1830, αναφέρεται ως η χρονική στιγμή όπου η γεωμετρία χάνει τον παραδοσιακό δεσμό της με τις εμπειρικές χωρικές εποπτείες, για παράδειγμα. Όμως, η γεωμετρική εποπτεία του Riemann δεν καταργεί την Ευκλείδεια· της δίνει ένα χαρακτήρα τοπικότητας και την επεκτείνει με νέα σχήματα και νέες εποπτείες του χώρου.

Ανέκαθεν υπήρχε η αντίληψη ότι οι χωρικές εποπτείες αποτελούν ένα επισφαλές στοιχείο που πρέπει να αποφεύγεται στην επιστήμη και τα μαθηματικά. Στο τέλος του 19<sup>ου</sup> αιώνα, η ιδέα αποκοπής τους από τη γεωμετρία πήρε τέτοια τροπή που την έκανε πολύ σημαντική για τα μαθηματικά του αιώνα που ακολούθησε. Το 1899 ο Hilbert εκδίδει τα *Θεμέλια της Γεωμετρίας* για τα οποία, σε ένα γράμμα του προς τον Frege, λέει: «Είναι συνεπές κάθε θεωρία να περιλαμβάνει ένα πλαίσιο, ή σχήμα, εννοιών και τις αναγκαίες σχέσεις μεταξύ τους, ενώ τα βασικά στοιχεία να ερμηνεύονται κατά το δοκούν...»<sup>276</sup>. Η εποπτεία, υποτίθεται, είναι απαραίτητη στη μαθηματική έρευνα αλλά δεν παίζει κανένα ρόλο στη δικαιολόγηση των αποτελεσμάτων της. Στην πραγματικότητα, όμως, η εποπτεία εξακολουθεί να παίζει το θεμελιακό της ρόλο, ακόμα και σε μια θεωρία κατά τα πρότυπα του Hilbert. Στο ξεκίνημα των *Θεμελίων*, ο Hilbert περιγράφει το πεδίο της νέας του Γεωμετρίας ως μια οικογένεια «*συστημάτων πραγμάτων*»<sup>277</sup>. Η έννοια αυτή φαίνεται αφηρημένη, αποκομμένη από κάθε εποπτεία και έχει πράγματι έναν τέτοιο χαρακτήρα όσο παραμένει αντικείμενο της λογικής ή της μεταφυσικής. Όταν γίνεται μέρος των μαθηματικών η κατάσταση αλλάζει δραματικά και θα το δούμε θεωρώντας δύο διαφορετικούς μαθηματικούς τρόπους να σκέφτεσαι ένα «*σύστημα πραγμάτων*»: ως σύνολο και ως κατηγορία.

Στα σύνολα, για παράδειγμα, η πρωτοπόρα δουλειά του Cantor οδήγησε στην ανακάλυψη νέων εννοιών, αλλά και την προαγωγή παλαιότερων εποπτειών σε νέες. Στην εισαγωγή των άπειρων διατακτικών δίνει στη συνήθη πράξη  $+1$ , που μας επιτρέπει να πάρουμε οποιονδήποτε πεπερασμένο φυσικό αριθμό από το 0, το όνομα «*πρώτη αρχή δημιουργίας*» και τη θεωρεί προφανή· την κατανοεί στα πλαίσια της συνήθους εποπτείας. Κατόπιν, εισάγει τη «*δεύτερη αρχή δημιουργίας*» που εφαρμόζεται στο άπειρο όριο  $\omega$  των ακολουθιών από φυσικούς όλων των

<sup>275</sup> Στην ενότητα αυτή εκθέτουμε, ευσύνοπτα και κριτικά, τις απόψεις που διατυπώνονται στο ακόλουθο άρθρο: Rodin, A. (2010, Ιανουάριος). How Mathematical Concepts get their Bodies. *Topoi*. 29, 53-60.

<sup>276</sup> Βλ., Frege, G. (1971). *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, (E.-H. W. Kluge, μετάφρ.). New Haven and London: Yale University Press. σελ. 13.

<sup>277</sup> Βλ., Hilbert, D. (1902). *The Foundations of Geometry*. (E. J. Townsend, μετάφρ.). Chicago: The Open Court Publishing Company. σελ. 3.

πεπερασμένων διατακτικών ως εξής: με τη χρήση της πρώτης αρχής λαμβάνει αριθμούς της μορφής  $\omega+1$ ,  $\omega+2$ ,... κ.λπ., και επεκτείνει, στην ουσία, την παραδοσιακή εποπτεία που έχουμε για τη μέτρηση με μια νέα εποπτεία «άπειρης» μέτρησης<sup>278</sup>.

Οι βασιζόμενες στην εποπτεία πρόοδοι που έφερε ο Cantor στη Θεωρία Συνόλων δεν έχασαν την αξία τους, όταν η θεωρία τέθηκε στην αυστηρή αξιωματική βάση της ZF, καθώς η αξιωματική μέθοδος δεν μας απαλλάσσει από τις εποπτείες στη συνολοθεωρία, στη γεωμετρία, ή αλλού. Τα σύνολα στη ZF, και σε οποιαδήποτε αξιωματική θεωρία, είναι συστήματα «πραγμάτων που συμπεριφέρονται καλά» που δεν οδηγούν, δηλαδή, σε γνωστά παράδοξα. Ο Frege θα αναρωτιόταν πότε ένα αξίωμα είναι αληθές. Ο Hilbert θα ισχυριζόταν πως αυτό που έχει σημασία και νόημα είναι το ερώτημα της λογικής συνέπειας ενός αξιωματικού συστήματος. Η συνέπεια της ZF δεν μπορεί ναδειχθεί χωρίς να υιοθετήσουμε μια ισχυρότερη θεωρία, εκτός εάν υποθέσουμε τη συνέπειά της και περιμένουμε κάποια αντίφαση, αν προκύψει, οπότε και θα γίνουν οι κατάλληλες τροποποιήσεις για να την αποφύγουμε. Έτσι, άλλωστε, έχει πάρει και τη σημερινή της μορφή. Ο μόνος τρόπος εύλογης αποτίμησης της ZF αξιωματικοποίησης, ως συνεπούς, είναι η ευλογοφάνεια των αξιωμάτων και των γνωστών συνεπειών τους. Και ο Frege τον ίδιο ακριβώς τρόπο χρησιμοποιεί πολλές φορές για να νομιμοποιήσει αξιωματικές επιλογές του: το «ζευγάρι» φαίνεται μη προβληματικό γιατί συνάδει με μια συνήθη πρακτική χειρισμού αντικειμένων την οποία μπορούμε να αναπαράγουμε με σύμβολα: πάρε το  $x$ , το  $y$ , χρησιμοποίησε τα σύμβολα « $\{$ » και « $\}$ » και συνδύασέ τα στο  $\{x, y\}$ . Πρόκειται για κάτι που μπορεί κανείς εύκολα να κάνει ή να φανταστεί να κάνει.

Απ' την άλλη, βέβαια, ο φαινομενικά εποπτικός χαρακτήρας της έννοιας του συνόλου συχνά καταλήγει παραπλανητικός, όπως στην περίπτωση της εποπτικής απορίας της διαφοράς ανάμεσα στο σύνολο  $x$  και το μονοσύνολο  $\{x\}$ , ή του μονοσυνόλου  $\{\emptyset\}$ . Επίσης, είναι αλήθεια πως υπάρχει σύγκρουση κάποιες φορές μεταξύ της γενικότητας της έννοιας του συνόλου και του ειδικού χαρακτήρα που συνδέεται με αυτή. Το να σκεπτόμαστε, για παράδειγμα, κάποια γεωμετρικά αντικείμενα ως σύνολα σημείων δεν είναι αντιφατικό, αλλά αυτός ο τρόπος δεν είναι κατάλληλος να εδραιώσει μια εποπτεία χρήσιμη στο να υπηρετήσει γεωμετρικές έννοιες που συνδεόνται μ' αυτά τα αντικείμενα.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι ο εποπτικός χαρακτήρας της συνολοθεωρίας, με την υπάρχουσα μορφή της, δύσκολα μπορεί να εξελιχθεί συστηματικά. Γιατί αυτή η πλευρά της θεωρίας δεν λήφθηκε σοβαρά υπόψη κατά την αξιωματικοποίησή της, ούτε κατά τη συνολοθεωρητική θεμελίωση των μαθηματικών. Η ιδέα δεν ήταν να αποφευχθεί η χρήση των εποπτειών στη μαθηματική πρακτική, πράγμα μη ρεαλιστικό, αλλά ο χειρισμός τους να είναι αποτέλεσμα τέχνης ή ταλέντου, περισσότερο, παρά ως μέρος της θεωρίας. Έτσι, τα συνολοθεωρητικά θεμέλια γέννησαν κάποιες ειδικές και συχνά μπερδεμένες εποπτείες, χωρίς κάποιο συστηματικό οδηγό που θα μας βοηθούσε να τις χειριστούμε.

Η έννοια της κατηγορίας μπορεί να ειπωθεί ως μια άλλη μαθηματική συνειδητοποίηση του «συστήματος πραγμάτων» του Hilbert. Κοιτώντας κανείς τα «πράγματα» της μαθηματικής έρευνας του 20<sup>ου</sup> αιώνα παρατηρεί να συνοδεύονται κάθε φορά από μια έννοια απεικόνισης ή μετασχηματισμού που διατηρεί τη δομή. Στα πλαίσια της θεωρίας Κατηγοριών το ρόλο αυτό παίζει ο μορφισμός μεταξύ αντικειμένων μιας κατηγορίας ή ο συναρτητής μεταξύ κατηγοριών.

---

<sup>278</sup> Βλ. σχετ., Dauben, J. (1990). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. σελ. 105.

Όταν κατανοούμε την έννοια της σχέσης σε ένα ευρύτερο φιλοσοφικό πλαίσιο φαίνεται δικαιολογημένα να λέμε ότι οι μορφισμοί «σχετίζουν» τα αντικείμενα μεταξύ τους. Όμως οι μορφισμοί δεν είναι σχέσεις στη συνήθη έννοια της λογικής γιατί ενώ οι συνήθεις σχέσεις ορίζονται «καθολικά» για ένα δοθέν σύνολο σχετιζομένων, κάθε μορφισμός προσδιορίζεται «τοπικά» ως προς την αφηρητή και το στόχο του. Αυτή η τεχνική λεπτομέρεια δείχνει πως παρόλη την προφανή ομοιότητα καμιά εκ των δύο μεθόδων δεν ανάγεται άμεσα στην άλλη αν και καθεμιά μιμείται την άλλη.

Η κατηγορική μέθοδος φαίνεται να μη χρειάζεται να «απομακρυνθεί από την εποπτεία» γιατί ένα μοντέλο, ή ερμηνεία, μιας κατηγορίας  $A$  σε μια κατηγορία  $B$  είναι ένας συναρτητής της μορφής  $A \rightarrow B$ . Κάτι τέτοιο επιτρέπει να χειριζόμαστε τις κατηγορίες  $A$  και  $B$  ισότιμα χωρίς να λογίζουμε τη μία ως συγκεκριμένη και την άλλη ως αφηρημένη. Έτσι, ενώ στην κλασική συνολοθεωρητική τοποθέτηση η έννοια της ερμηνείας αντιμετωπίζεται από το ξεχωριστό μετα-μαθηματικό αντικείμενο της θεωρίας μοντέλων, και συνήθως αφήνεται χωρίς κάποια συγκεκριμένη πραγμάτευση στα υπόλοιπα μαθηματικά, στην κατηγορική θέσμιση γίνεται τυπική κατασκευή ισότιμη των άλλων. Τα κατηγορικά θεμέλια, με άλλα λόγια, επιτρέπουν την αποφυγή της διαίρεσης σε μαθηματικά και μετα-μαθηματικά.

## 7.3.2 Κατηγορίες χωρίς δομές<sup>279</sup>

### 7.3.2.1 Εισαγωγή

Πού και πώς διατηρείται, και ισχύει, η έτοιμη γνώση μέσα στην Ιστορία; Κατά τον Popper<sup>280</sup> το παραπάνω συμβαίνει σε μια μεταφυσική περιοχή, τον «Κόσμο 3»<sup>281</sup>, γιατί δεν ανάγεται σε διανοητικές καταστάσεις ούτε σε κάποιες φυσικές διαδικασίες: «Η γνώση αντικειμενικά συνίσταται σε νοητικά περιεχόμενα και όχι σε νοητικές διαδικασίες. Αποτελείται από το περιεχόμενο των γλωσσικά δομημένων θεωριών μας· εκείνο που κατά προσέγγιση μπορεί να μεταφρασθεί από μια γλώσσα στην άλλη. Το αντικειμενικό νοητικό περιεχόμενο είναι αυτό που παραμένει αναλλοίωτο σε μια σχετικά καλή μετάφραση. Είναι αυτό που ο μεταφραστής προσπαθεί να διατηρήσει αναλλοίωτο»<sup>282</sup>. Το νοητικό περιεχόμενο δεν ταυτίζεται με τη ρητή του διατύπωση, αλλά με την αναλλοίωτη των γλωσσικών μεταφράσεών της εντός των διαφόρων Λόγων. Πρόκειται για μία γλωσσική μορφή «έως μεταφράσεως».

Η αντίληψη αυτή για το περιεχόμενο της σκέψης, όμως, δεν ισχύει για την επιστημονική γνώση και, ειδικότερα, τα μαθηματικά. Το πυθαγόρειο θεώρημα για παράδειγμα, όπως είναι διατυπωμένο στα *Στοιχεία*, διαφέρει ουσιωδώς (θεμελιακά) από τη διατύπωσή του ως η σχέση:  $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow (\vec{y} - \vec{x})^2 = \vec{y}^2 + \vec{x}^2$ . Η επιστημονική γνώση είναι έγκυρη, και με διάρκεια, μέσα από μια μόνιμη αναθεώρηση· όχι από μια απλή επανάληψη γλωσσικών σχημάτων, ή όντας η μεταφραστικά αναλλοίωτη πληροφορία μεταξύ διαφόρων Λόγων. Η αέναη αναζήτηση, δε, αφορά στις ανεξερεύνητες πλευρές της πραγματικότητας, αλλά και στις γνωστές και καλά θεμελιωμένες γνώσεις γι' αυτήν. Ακόμα και τα θεμέλια ανακαινίζονται: είτε με την ανασκευή των παλαιότερων, είτε με τη θέσπιση νέων. Ένα ερώτημα, βέβαια, που τίθεται εδώ είναι το εξής: κατά πόσο η έννοια του θεμελίου μπορεί να θεωρείται (και να αναθεωρείται), κάθε φορά, ανεξάρτητα από αυτό που θεμελιώνει;

### 7.3.2.2 Οι βασικές θέσεις

Πολλοί υποστηρικτές της θεωρίας κατηγοριών πιστεύουν πως είναι μια επαρκής θεωρία στο να παράσχει καλύτερα θεωρήματα για τα δομιστικά μαθηματικά απ' ό,τι τα συνολοθεωρητικά θεμέλια: τα αντικείμενα αποτελούν ό,τι οι άλλες προσεγγίσεις αποκαλούν δομές, και περιγράφονται στη σχέση τους με τα άλλα αντικείμενα, μέσω μορφισμών, και όχι, εσωτερικά, μέσω της σχέσεως του ανήκειν.

<sup>279</sup> Ομοίως, και στην ενότητα αυτή εκτίθενται, γενικά, οι θέσεις που διατυπώνονται στο άρθρο: Rodin, A. (2011, Ιανουάριος). Categories Without Structures. *Philosophia Mathematica*. III, (00), 1-27.

<sup>280</sup> Sir Raimund Popper (1902-1994). Αυστρο-βρετανός φιλόσοφος, καθηγητής του London School of Economics. Θεωρείται ένας από τους μεγαλύτερους φιλοσόφους της επιστήμης του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Συνέγραψε εκτενή κείμενα κοινωνικής και πολιτικής φιλοσοφίας.

<sup>281</sup> Ο «κόσμος 1» είναι ο κόσμος των φυσικών διαδικασιών και αντικειμένων, ενώ ο «κόσμος 2» των διανοητικών καταστάσεων. Βλ. σχετ., Popper. (1978). *Three Worlds: The Tanner Lecture on Human Values*. [Φυλλάδιο]. University of Michigan. σσ. 143-144.

<sup>282</sup> Βλ. σχετ., Popper. (1978). *Three Worlds: The Tanner Lecture on Human Values*. [Φυλλάδιο]. University of Michigan. σελ. 156.

Όμως, τα μαθηματικά που μπορούν να θεμελιωθούν στη θεωρία κατηγοριών μπορούν να είναι μόνο με μια ιδιαίτερη έννοια δομιστικά<sup>283</sup>. Η θεωρία κατηγοριών μας παρέχει ένα νέο τρόπο κατανόησης των Μαθηματικών που συνδέεται, ιστορικά και διαλεκτικά, με τον δομισμό αλλά που, καθαυτήν, είναι αρκετά διαφορετική· θα την ονομάσουμε «κατηγορική» αντίληψη. Ο S. Awodey<sup>284</sup> γράφει: «*Το υποκείμενο υλικό των καθαρών μαθηματικών είναι η σταθερή μορφή και όχι ένα σύμπαν μαθηματικών αντικειμένων που αποτελούνται από λογικά άτομα*»<sup>285</sup>. όμως, το υλικό των καθαρών μαθηματικών είναι ο αναλλοίωτος μετασχηματισμός και όχι η αναλλοίωτη μορφή. Οι MacLane και Awodey πιστεύουν πως η Θεωρία Κατηγοριών παρέχει στήριξη στον Μαθηματικό Στρουκτουραλισμό, αλλά θα φανεί ότι η έννοια της κατηγορίας πρέπει να ειδωθεί ως γενίκευση της έννοιας της δομής και όχι ως είδος δομής.

### 7.3.2.3 Μαθηματικός Στρουκτουραλισμός

Ο μαθηματικός δομισμός ή στρουκτουραλισμός, «ο στρουκτουραλιστικός χαρακτήρας των σύγχρονων Μαθηματικών», γενικά μιλώντας, είναι μια κατεύθυνση στη φιλοσοφία των Μαθηματικών, ένας επιμέρους και εύκολα αναγνωρίσιμος τρόπος να κάνει κάποιος μαθηματικά, σύμφωνα με τον οποίο οι μαθηματικές θεωρίες περιγράφουν δομές και ο προσδιορισμός των Μαθηματικών αντικειμένων εξαντλείται από τη θέση τους εντός αυτών των δομών, μη έχοντας ουσιαστικά κάποιες εσωτερικές ιδιότητες. Ιστορικά, ανιχνεύεται στις εξελίξεις του 19<sup>ου</sup> αιώνα που αφορούν στην ανάδυση της αξιωματικής μεθόδου και των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών οδηγώντας μας στο να αναγνωρίσουμε πολλούς αφηρημένους χώρους, ανεξάρτητους του φυσικού χώρου ή των χωρικών μας εποπτειών. Όταν αυτός ο τρόπος του μαθηματικώς πράττειν αποκρυσταλλώθηκε και έγινε αποδεκτός στη δεκαετία του 1930, έγιναν διάφορες απόπειρες να παρασχεθεί μια τυπική θεωρία ώστε, εντός του πλαισίου της, η άτυπη ιδέα μιας «μαθηματικής δομής» να μπορούσε να γίνει μαθηματικώς σαφής<sup>286</sup>.

<sup>283</sup> Είναι αλήθεια πως δύσκολα οι θεωρητικοί των κατηγοριών, ακόμα και αυτοί που προσανατολίζονται στα θεμέλια των Μαθηματικών, θα αποκαλούσαν τους εαυτούς τους στρουκτουραλιστές. Βλ. σχετ., Landry, E. & Marquis, J., ό.π., σελ. 20.

<sup>284</sup> Steve Awodey, Καθηγητής στο τμήμα Φιλοσοφίας του Carnegie Mellon University.

<sup>285</sup> Βλ., Awodey, S. (1996). *Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective*. *Philosophia Mathematica*, 4, (3), 209-237. σελ. 235.

<sup>286</sup> Πάνω στην έννοια του «στρουκτουραλιστικού χαρακτήρα των μαθηματικών» υπάρχουν πολλές συγχύσεις ακριβώς επειδή μερδεύονται η τυπική με τις άτυπες αντιλήψεις για τον όρο. Παραδοσιακά (και αδικώς εν πολλοίς) έχει συνδεθεί, με το όνομα των Bourbaki. Nikolas Bourbaki είναι το ψευδώνυμο που υιοθετήθηκε τη δεκαετία του 1930 από μια ομάδα νέων Γάλλων μαθηματικών, οι οποίοι όντας δυσαρεστημένοι με την κατάσταση των Μαθηματικών στη Γαλλία της εποχής, θεώρησαν τις μεθόδους των παλαιών δασκάλων (Hadamard, Picard, Borel, Goursat, κ.λπ) ακατάλληλες για τη σύγχρονη έρευνα. Ανέλαβαν, λοιπόν, το έργο να φέρουν τα γαλλικά μαθηματικά στο σήμερα με την έκδοση μιας ευρύτατης πραγματείας με τίτλο *Éléments de Mathématique*, της οποίας κάθε τόμος θα πραγματευόταν έναν διαφορετικό κλάδο των Μαθηματικών. Η ιδέα συνελήφθη το 1933 και η πρώτη συνάντησή τους πραγματοποιήθηκε τον Ιούλιο του 1935. Τα ιδρυτικά μέλη της ομάδας ήταν ο Jean Dieudonné, Henry Cartan, André Weil, Paul Delsarte, Claude Chevalley, Szolem Mandelbrojt, Jean Coulomb, Charles Ehresmann και ο René de Possel. Τα επόμενα χρόνια εντάχθηκαν στην ομάδα και άλλοι διάσημοι μαθηματικοί, μεταξύ των οποίων ο Samuel Eilenberg, ο Jean Pierre Serre, ο Alexander Grothendieck και άλλοι. Ξεκίνησαν το έργο τους στα τέλη της δεκαετίας του 1930 αντιμετωπίζοντας μια άνευ προηγουμένου ποικιλία ερευνητικών αποτελεσμάτων, κάποια εκ των οποίων ανήκαν σε ασύνδετους, μεταξύ τους, κλάδους των Μαθηματικών. Βλ. σχετ., Corry, L. ό.π., σσ. 316, 318. Το ερώτημα που προέκυψε πιο έντονα από ποτέ ήταν αν εξακολουθεί να έχει νόημα να μιλούμε για ένα

Το ότι «τα Μαθηματικά μελετούν δομές» μπορεί να ερμηνευθεί κατά δύο τρόπους, τουλάχιστον: είτε, ότι τα Μαθηματικά έχουν να κάνουν με δομές, είτε ότι έχουν να κάνουν με συστήματα που έχουν δομή, με δομημένα συστήματα. Επίσης, ο στρουκτουραλισμός διακρίνεται σε δύο επίπεδα: συγκεκριμένος και αφηρημένος. Ο B. Hale, όπως και ο G. Hellman, διακρίνουν τρία είδη στρουκτουραλισμών: τον στρουκτουραλισμό μοντέλων, τον αφηρημένο στρουκτουραλισμό και τον γνήσιο στρουκτουραλισμό. Ο στρουκτουραλισμός μοντέλων θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί στρουκτουραλισμός στο συγκεκριμένο επίπεδο. Αφηρημένο θα λέγαμε τον συνολοθεωρητικό, *ante rem*, στρουκτουραλισμό στο αφηρημένο επίπεδο<sup>287</sup>. Οι στρουκτουραλιστές αυτής της κατεύθυνσης αναζητούν να ορίσουν τι είναι μια αφηρημένη δομή, καθαυτήν, θεωρώντας αφαιρετικά συγκεκριμένα είδη από συστήματα δομημένα από σύνολα, ως συστατικά αυτού που είναι μια αφηρημένη

---

επιστημονικό αντικείμενο που καλείται «Μαθηματικά» ή «...αν η περιοχή των Μαθηματικών γίνεται ένας πύργος της Βαβέλ, στον οποίο αυτόνομα αντικείμενα απομακρύνονται όλο και περισσότερο μεταξύ τους, όχι απλώς ως προς τους σκοπούς τους, αλλά και ως προς τις μεθόδους, ακόμα και στη γλώσσα τους». Βλ., Bourbaki, N. (1950). *The Architecture of Mathematics. The American Monthly*. 57, (4), 221-232. σελ. 221. Για τους Bourbaki, αυτή η πολυμορφία ήταν περισσότερο φαινομενική και ανέλαβαν το έργο να παρουσιάσουν τη συνολική εικόνα της μαθηματικής γνώσης με έναν συστηματικό και ενοποιημένο τρόπο, στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου συμβολικού συστήματος, απευθύνοντας παρόμοιες ερωτήσεις, και χρησιμοποιώντας παρόμοια εννοιολογικά εργαλεία και μεθόδους, στους διαφορετικούς αυτούς κλάδους, με την πεποίθηση ότι η έννοια της δομής επρόκειτο να παίξει ζωτικό ρόλο στο έργο τους αυτό· όπως ακριβώς είχε επιχειρήσει να κάνει για την Άλγεβρα, από στρουκτουραλιστική σκοπιά, ο B. L. van der Waerden το 1930, στο βιβλίο του *Moderne Algebra*. Αλλά οι Bourbaki πήγαν ένα βήμα παραπέρα και προσπάθησαν να παράξουν μια τυπική θεωρία των δομών που θα παρείχε ένα κοινό θεμέλιο για όλες τις θεωρίες στην πραγματεία τους. Το πρώτο βιβλίο της πραγματείας ήταν το *Theory of Sets*, στο οποίο περιλαμβάνονταν μια σύνοψη (που εκδόθηκε το 1939) και τέσσερα κεφάλαια (με το τελευταίο να εκδίδεται το 1957). Στη σύνοψη αντανάκλωνταν η αρχική τους πρόθεση: Η *Θεωρία Συνόλων* θα παρείχε μια τυπικά αυστηρή βάση για το σύνολο της πραγματείας, και στην έννοια της δομής θα αναπαρίστατο το ύστατο επίπεδο του εγχειρήματος. Η αρχική τους αντίληψη για την έννοια της δομής, όμως, αποδείχθηκε ανεπαρκής στα χρόνια που ακολούθησαν, μέχρι και την ολοκλήρωση του βιβλίου. Η *Θεωρία Συνόλων* εμφανίζεται περισσότερο ως ένας τομέας των Μαθηματικών με στημένο, *ad hoc* χαρακτήρα που επεβλήθη στους ίδιους από τις διακηρύξεις τους για τα Μαθηματικά, παρά ως μια πλούσια και θαλαρή πηγή ιδεών και μαθηματικών εργαλείων. Εξάλλου, κατά τα τέλη της δεκαετίας του 1950 και στις αρχές της δεκαετίας του 1960, φαινόταν δυνατό να ορισθούν οι διάφορες μαθηματικές έννοιες, και να χαρακτηρισθούν πολλοί κλάδοι των Μαθηματικών, απευθείας στη γλώσσα της Θεωρίας Κατηγοριών και, σε κάποιες περιπτώσεις, φαινόταν να παρέχει το πιο κατάλληλο πλαίσιο για κάτι τέτοιο. Οι έννοιες του συναρτητή και οι κλάδοι της Αλγεβρικής Τοπολογίας, της Ομολογιακής Άλγεβρας και της Αλγεβρικής Γεωμετρίας ήταν αυθεντικά παραδείγματα. Ο Lawvere, μάλιστα, πρότεινε ότι ακόμα και η Λογική ή η Θεωρία Συνόλων και ο, τιδήποτε άλλο που μπορούσε να ορισθεί συνολοθεωρητικά, οφείλει να ορισθεί με κατηγορικούς όρους. Όχι επειδή ήθελε να απαλλαγεί από τα σύνολα και τα στοιχεία τους, αλλά επειδή αντιλαμβάνονταν τα σύνολα, όπως και κάθε μαθηματική οντότητα, ως μέρος του κατηγορικού σύμπαντος. Οπότε, ενδυνάμωσε τον ισχυρισμό ότι η Θεωρία Κατηγοριών παρέχει το πλαίσιο για μια εννοιολογική ανάλυση ζητημάτων που σχετίζονται με τη Λογική και τα θεμέλια των Μαθηματικών. Οι Bourbaki είχαν ήδη συνειδητοποιήσει ότι πρέπει να περιοριστούν και να συμπεριλάβουν στην πραγματεία τους μόνο ένα τμήμα των Μαθηματικών στο οποίο, η έννοια της δομής, σταδιακά θα κινούταν σε ένα απλώς βοηθητικό επίπεδο. Γενικά θα λέγαμε ότι η *Θεωρία Συνόλων*, και ειδικότερα η έννοια της δομής, δεν είναι ουσιώδεις στα *Éléments*. Διδακτικώς και μαθηματικώς η *Θεωρία Συνόλων* μπορεί να παρακαμφθεί πλήρως γιατί δεν έχει καμία ευρετική αξία ούτε και αποτελεί λογικό προαπαιτούμενο. Βλ. σχετ., Corry, L. *ό.π.*, σσ. 316-317, 320-321, 337-338. Επίσης, βλ. σχετ., Landry, E. & Marquis, J. (2005). *ό.π.*, σσ. 8, 10.

<sup>287</sup> Οι Bourbaki υιοθετούσαν και τα δύο επίπεδα: υπάρχουν τύποι δομών, αλλά και σύνολα που είναι συστατικά αυτών των τύπων, οπότε και η «δομή» είναι ένας, αφαιρετικά θεωρημένος, τύπος ενός δομημένου, από σύνολα, συστήματος. Βλ. σχετ., Landry, E. & Marquis, J. (2005). *ό.π.*, σελ. 21. Επίσης, τα άρθρα, Hale, B. (1996). Structuralism's Unpaid Epistemological Debts. *Philosophia Mathematica*. 4, (3), 124-147., και Hellman, G. (1996). Structuralism Without Structures. *Philosophia Mathematica*. 4, (3), 100-123.

δομή: «[σύμφωνα με τον αφαιρετικό στρουκτουραλιστή]... οι δομές... είναι οντότητες αφ' εαυτών, κάποιες όψεις τους είναι παρόμοιες με δομές μοντέλων, αλλά διακριτές αυτών λόγω του γεγονότος ότι τα στοιχεία τους δεν έχουν μη-δομικές ιδιότητες, αλλά πρέπει να θεωρούνται ως "απλές θέσεις" στη δομή... Απ' αυτή την άποψη, μια αφηρημένη δομή είναι απλά ό, τι απέμεινε όταν ξεκινώντας από μια δομή μοντέλο αφαιρούμε ό, τι είναι ουσιαστικό και αφήνοντας πίσω ό, τι είναι κοινό σε όλες τις άλλες δομές μοντέλων που είναι ισόμορφες με αυτήν»<sup>288</sup>.

Επιστημολογικά, ο στρουκτουραλισμός συνηγορεί υπέρ μιας ρεαλιστικής αντίληψης για αντικειμενικά αποδιδόμενες αληθοτιμές στις μαθηματικές προτάσεις. Εστιάζει στο είδος της οντότητας που αποτελεί το μαθηματικό αντικείμενο, και όχι στο είδος της ύπαρξης (την οντολογία) των μαθηματικών αντικειμένων και δομών. Η οντολογία τους υπαγορεύεται απ' αυτή της δομής, εντός της οποίας εγκαταβιώνουν κάθε φορά.

Η έννοια του ισομορφισμού παίζει στα δομιστικά μαθηματικά ρόλο ισότητας, ταυτότητας. Κάθε φορά, λοιπόν, ερευνούμε τη δομή που μοιράζονται συστήματα που είναι δομικά ταυτόσημα. Ο Hilbert, θεμελιωτής του Μαθηματικού Δομισμού<sup>289</sup>, σε ένα γράμμα, στα πλαίσια της συμβουλευτικής αλληλογραφίας του με τον Frege, τόνισε την πολυδιάστατη φύση των δομιστικών θεωριών: «...οποιαδήποτε θεωρία μπορεί πάντα να εφαρμοσθεί σε έναν άπειρο αριθμό συστημάτων βασικών στοιχείων. Οποιοσδήποτε δεν έχει παρά να εφαρμόσει έναν μονοσήμαντο και αντιστρέψιμο 1-1 μετασχηματισμό στα στοιχεία του δοθέντος συστήματος και να συμφωνήσει ότι το αξίωμα για τα μετασχηματισθέντα αντικείμενα είναι αντιστοίχως όμοιο»<sup>290</sup>. Για τον Geoffrey Hellman<sup>291</sup>: «Ο Δομισμός (Στρουκτουραλισμός) είναι μια αντίληψη για την υποκείμενη ύλη των μαθηματικών σύμφωνα με την οποία αυτό που μας ενδιαφέρει είναι οι δομικές σχέσεις, ανεξάρτητα από την εσωτερική φύση των σχετιζόμενων αντικειμένων. Τα Μαθηματικά είναι η ελεύθερη εξερεύνηση δομιστικών δυνατοτήτων, πρωτίστως μέσα από τη δημιουργική διαμόρφωση εννοιών, την αξιωματικοποίηση και

<sup>288</sup> Βλ., Hale, B. ό.π., σελ. 125.

<sup>289</sup> Πέραν της στρουκτουραλιστικής ερμηνείας των *Grundlagen*, ο νέο-καντιανών επιρροών, από τον Bernays που διατηρούσε στενούς δεσμούς με τη σχολή του Leonard Nelson (Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος, 1882-1927) στο Göttingen, σκοπός του Hilbert να θεμελιώσει όλα τα Μαθηματικά σε μια περατοκρατική/εποπτική αριθμητική (όπου η μαθηματική σκέψη θα περιορίζεται σε εκείνα τα αντικείμενα που είναι εποπτικά παρόντα ως άμεση εμπειρία πρότερη κάθε σκέψης, και σε εκείνες τις διαδικασίες και μεθόδους συμπερασμού, γι' αυτά τα αντικείμενα, που δεν απαιτούν την εισαγωγή αφηρημένων εννοιών αν δεν αναφέρονται σε συμπληρωμένες άπειρες ολότητες), αποκλείει οποιαδήποτε στρουκτουραλιστική ανάλυση της αριθμητικής και συνεπώς των Μαθηματικών. Ο ίδιος δήλωνε στο άρθρο του «Για το άπειρο»: «Ο Kant μας δίδαξε - και πράγματι αποτελεί διάχυτη στο δόγμα του αντίληψη-, ότι τα Μαθηματικά έχουν την προδιάθεση εκ κατασκευής να νομιμοποιηθούν ανεξάρτητα από οποιαδήποτε Λογική και έτσι δεν είναι ποτέ δυνατό να εφοδιαστούν με ένα Λογικό θεμέλιο και μόνο· γι' αυτό και οι προσπάθειες των Frege και Dedekind επρόκειτο να αποτύχουν». Βλ., Hilbert, D. (1967). *On the Infinite*. στο J. van Heijenoort (επιμ.), *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* (σ. 367-392). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. σελ. 376. Ο χαρακτηρισμός του περατοκρατισμού από τον Hilbert αναφέρεται συχνά στην καντιανή εποπτεία, και τα αντικείμενα του περατοκρατισμού είναι αντικείμενα που δίνονται εποπτικά. Στην καντιανή επιστημολογία, η αμεσότητα είναι ένα προσδιοριστικό χαρακτηριστικό της εποπτικής γνώσης. Όμως, τι είδους εποπτεία είχε κατά νου ο Hilbert; Στα πρώτα του άρθρα ήταν ένα είδος αντίληπτικής εποπτείας, ενώ στα επόμενα επρόκειτο για μια μορφή της καθαρής εποπτείας με την καντιανή έννοια. Στο κείμενό του, *Η Θεμελίωση της Στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών* (1931) θεωρεί τον περατοκρατικό τρόπο σκέψης ως μια διακριτή πηγή a priori γνώσης μαζί με την καθαρή εποπτεία (του χώρου και του χρόνου) και τη διάνοια, ισχυριζόμενος ότι «...αναγνώρισε και χαρακτήρισε την τρίτη πηγή γνώσης που συνοδεύει την εμπειρία και τη λογική». Βλ. σχητ., Ewald, W. (ed.) (2007). Vol. 2, ό.π., σελ. 1150.

<sup>290</sup> Βλ., Frege, G. (1971). *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, (E.-H. W. Kluge, μετάφρ.). New Haven and London: Yale University Press. σσ. 13-14.

<sup>291</sup> Πρόεδρος του τμήματος Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου της Minnesota στην Minneapolis.

την παραγωγή. Τα αντικείμενα, που καθιστούν το οποιοδήποτε επιμέρους σύστημα υπόδειγμα της δομής που μας ενδιαφέρει, είναι αδιάφορα. Αυτό που μας απασχολεί είναι ότι ικανοποιούν συγκεκριμένες γενικές συνθήκες, τυπικά εκπεφρασμένες σε αξιώματα που ορίζουν τη δομή ή τις δομές που μας ενδιαφέρουν, χαρακτηριστικές κάποιου κλάδου των μαθηματικών»<sup>292</sup>.

Υπάρχει, όμως, και κατηγορικο-θεωρητικά πλαισιωμένος στρουκτουραλισμός. Μια θεμελιώδης συνεισφορά, εδώ, του M. Makkaί είναι ότι, στις τυπικές γλώσσες, η σχέση ταυτότητας για τις διάφορες οντότητες δεν δίνεται a priori, από πρωτοβάθμια αξιώματα. Η σχέση ταυτότητας παράγεται εντός ενός κατάλληλου περιβάλλοντος, κάθε φορά. Αυτή η άποψη είναι μια φυσική, και κατά συναφή τρόπο, επέκταση της, δομικά ερμηνευμένης, αρχής του νοηματικού πλαισίου που λέει ότι πρέπει πρώτα κανείς να προσδιορίσει ένα πλαίσιο, για να συζητηθεί η δομή που μοιράζονται οι διάφορες οντότητες· κατόπιν, ένα κριτήριο ταυτότητας για τα αντικείμενα, που έχουν την ίδια δομή, δίνεται από το πλαίσιο το ίδιο. Το απλούστερο παράδειγμα αυτού, είναι η πρόταση ότι η έννοια του ισομορφισμού είναι το κατάλληλο κριτήριο ταυτότητας για τα αντικείμενα σε μια κατηγορία και ότι ορίζεται με κατηγορικούς όρους. Μ' αυτή την έννοια, μια κατηγορία δρα ως ένα περιβάλλον, ανάλυσης τύπων συστημάτων, με τους όρους της δομής που μοιράζονται<sup>293</sup>.

Για τον στρουκτουραλισμό, μια ομάδα είναι οποιοδήποτε «σύστημα» που αποτελείται από «αντικείμενα»  $a, b, \dots$  και μια διμελή πράξη, την  $\oplus$ , μια σταθερά, τη μονάδα, και μια μονομελή πράξη, την πράξη του αντιστρόφου. Συμβολικά θα γράψαμε:

$G_1$ :  $H \oplus$  είναι προσεταιριστική πράξη.

$G_2$ :  $1 : a \oplus 1 = 1 \oplus a = a$ .

$G_3$ :  $\forall a, \exists a' : a \oplus a' = a' \oplus a = 1$ <sup>294</sup>.

Μια πεπερασμένη και μια άπειρη ομάδα δεν μπορούν να είναι ισόμορφες άρα είναι διαφορετικές με τη δομιστική έννοια. Οπότε, τα αξιώματα  $G_1$ - $G_3$  περιγράφουν δομές ενός επιμέρους τύπου, κάθε φορά, όχι μια επιμέρους δομή. Τι σημαίνει όμως «τύπος δομών»; Απαιτείται, a priori, η έννοια της δομής που μπορεί να νοηθεί μόνο εφόσον γνωρίζουμε το θεμελιώδη ρόλο του ισομορφισμού.

### 7.3.2.4 Ισομορφισμοί, «Αναλλοίωτες Μορφές» και Ομομορφισμοί Ομάδων

Ένας μη στρουκτουραλιστής μπορεί να παρατηρήσει πως τα αξιώματα  $G_1$ - $G_3$  ικανοποιούνται από έναν αριθμό «επιμέρους συστημάτων» (όχι δομών) που καλούνται ομάδες. Αν  $G$  είναι μια κλάση τέτοιων συστημάτων (ομάδων) και δύο εξ' αυτών  $G$  και  $G'$  είναι ισόμορφες, τότε:

$I_1$ : Τα στοιχεία της  $G$  είναι σε 1-1 αντιστοιχία με τα στοιχεία της  $G'$  και

$I_2$ :  $\forall a, b, c \in G : a \oplus b = c$ , τα αντίστοιχα  $a', b', c'$  ικανοποιούν την  $a' \otimes b' = c'$  με  $\otimes$  την πράξη στη  $G'$ .

<sup>292</sup> Βλ., σελ. 270 στον 9<sup>ο</sup> τόμο του Borchert, ό.π.

<sup>293</sup> Βλ. σχετ., Landry, E. & Marquis, J. ό.π., σελ. 19.

<sup>294</sup> Με αυτή τη διατύπωση εξασφαλίζεται η ερμηνεία της έννοιας της ομάδας σε οποιαδήποτε κατηγορία με πεπερασμένα γινόμενα (κατηγορία, στην οποία κάθε πεπερασμένο διακριτό διάγραμμα έχει όριο). Π.χ. στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων έχουμε την ερμηνεία της ως τοπολογική ομάδα, στην κατηγορία των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων ως ομάδα Lie (Marius Sophus Lie, Νορβηγός μαθηματικός, 1842-1899), κ.λπ.



Ο ισομορφισμός είναι μια σχέση ισοδυναμίας στην  $\mathbb{G}$  και την διαιρεί σε κλάσεις. Οι διαφορές μεταξύ των ισομορφων ομάδων μπορούν να παραβλεφθούν και να λάβουμε, κατ' αυτόν τον τρόπο, πολλές έννοιες ομάδων-ως-δομών (και όχι τη γενική έννοια της ομάδας ως τύπου δομής). Κάθε επιμέρους δομή θα μπορούσε να είναι κάτι που μοιράζονται όλα τα μέλη της αντίστοιχης κλάσης ισοδυναμίας. Μ' αυτή την έννοια «τα αντικείμενα, που κάνουν κάποιο επιμέρους σύστημα να υποδεικνύει την υπό έρευνα δομή, μας είναι αδιάφορα». Η προαναφερθείσα αφαίρεση αποκαλείται δομική<sup>295</sup>.

Ένας διαφορετικός, τρίτος, τρόπος να σκέπτεται κανείς τον ισομορφισμό είναι ως μετασχηματισμός  $i: G \rightarrow G'$ . Όντας συμμετρική κατασκευή, οι  $G$  και  $G'$  μπορούν να εναλλάσσουν ρόλους οπότε ο ένας και μοναδικός ισομορφισμός-ως-μετασχηματισμός εγείρει δύο ισομορφισμούς-ως-μετασχηματισμούς,  $i: G \rightarrow G'$  και  $i': G' \rightarrow G$ , με  $i \circ i': G \rightarrow G$  και  $i' \circ i: G' \rightarrow G'$  ταυτοτικές, οπότε και  $i^{-1} = i'$  και  $i'^{-1} = i$ . Ο μετασχηματισμός, θα λέγαμε αλλιώς, καλείται ισομορφισμός όταν αντιστρέφεται. Τότε, μια δομή μοιρασμένη στα συστήματα που έχουν έτσι μετασχηματισθεί μπορεί να θεωρηθεί αναλλοίωτη· δηλαδή μια μορφή αναλλοίωτη υπό δοθέντος μετασχηματισμού.

Η έννοια του ομομορφισμού γενικεύει τον ισομορφισμό με την έννοια πως ορίζεται η συνάρτηση  $f: G \rightarrow G'$  που ικανοποιεί το  $I_2$ . Ανήκει στην κατηγορία των απεικονίσεων που «διατηρούν τη δομή», κάτι που όμως γίνεται παραπλανητικό από τη στιγμή που για κάθε δύο ομάδες  $G, G'$  υπάρχει ομομορφισμός  $f: G \rightarrow \{e_{G'}\}$  ο οποίος δεν παρέχει καμιά πληροφορία για τις  $G, G'$ . Με τη χρήση του ομομορφισμού δεν μπορούμε να χωρίσουμε τη  $\mathbb{G}$  σε κλάσεις ισοδυναμίας με ισοδύναμες τις ομομορφικές ομάδες. Η ύπαρξη του ομομορφισμού  $h: G \rightarrow G'$  δεν επάγει την ύπαρξη του  $h: G' \rightarrow G$ , και η αντιστρεψιμότητα είναι κρίσιμη για τη δομιστική αφαίρεση.

### 7.3.2.5 Η υπόθεση επίτασης του στρουκτουραλιστικού προγράμματος μέσα από την Κατηγορικο-θεωρητική θεμελίωση των μαθηματικών

Δοθείσης μιας σχέσης ισοδυναμίας ορισμένης σε μια κλάση μαθηματικών αντικειμένων, ο Frege θεώρησε τη δυνατότητα αντικατάστασης κάθε κλάσης ισοδυναμίας από ένα απλό αντικείμενο μέσω μιας πράξης αφαίρεσης. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας το αποκαλεί αφηρημένο αντικείμενο, όχι δομή, ούτε και το σκέφτεται σα δομή. Απαιτείται, συνεπώς, κάτι περισσότερο για να διακριθεί η δομική αφαίρεση από τους άλλους τύπους μαθηματικής αφαίρεσης.

Τι είναι τα στοιχεία μιας ομάδας-ως-δομή; Θέλουμε να μην έχουν κάποια «εσωτερική φύση», να είναι απλά «αντικείμενα» ή «αφηρημένα στοιχεία», προϊόντα της αφαίρεσης δια της οποίας λάβαμε την έννοια της ομάδας-ως-δομή και να ανήκουν σε καλά διακριτές συλλογές. Εδώ συναντά ο Στρουκτουραλισμός τη Συνολοθεωρία. Έχοντας στη διάθεσή μας την έννοια του συνόλου, δίνουμε τον κλασικό δομιστικό ορισμό της ομάδας ως «δομημένο σύνολο»· εφοδιασμένο με τη διμελή πράξη που ικανοποιεί τα αξιώματα  $G_1 - G_3$ <sup>296</sup>.

<sup>295</sup> Δεν μπορεί κανείς, βέβαια, να ξεχάσει τελείως τα υποκείμενα συστήματα μιας και κάτι τέτοιο θα κατέστρεφε το νόημα της έννοιας της εκάστοτε μαθηματικής δομής.

<sup>296</sup> Γενικότερα, κάθε μαθηματική δομή (π.χ. μετρικός χώρος, τοπολογικός, κ.λπ.) μπορεί να θεωρηθεί, και να τυποποιηθεί, ως σύνολο αντικειμένων με σαφείς και διακριτές σχέσεις και πράξεις εντός του συνόλου· και η θεωρία συνόλων έχει τα εφόδια να περιγράψει αλληλοσυσχετίσεις μεταξύ δομών ζωτικές για τα ανώτερα μαθηματικά.

Οι μαθηματικοί δεν θεωρούν τις ισόμορφες ομάδες ή άλλες δομές ως ένα αντικείμενο. Γι' αυτό η έννοια αφαίρεσης του Frege δεν είναι σημαντική για τη δομιστική αφαίρεση. Το ερώτημα για το αν δύο ισόμορφες δομές ταυτίζονται είναι άσκοπη όσο και το αν δύο αριθμοί ίσοι ταυτίζονται. Η θεωρία συνόλων κάνει περιττή τη συζήτηση του ισομορφισμού ως μετασχηματισμού αφού η 1-1 αντιστοιχία αναλύεται με όρους ζευγών στοιχείων. Όμως στη γεωμετρία, και τη φυσική, η έννοια του μετασχηματισμού είναι διαδεδομένη.

Οπότε, όσον αφορά τη θεμελίωση των μαθηματικών, μπορούμε να θεωρήσουμε την έννοια της συλλογής πιο θεμελιακή απ' του μετασχηματισμού ή αντίστροφα. Η πρώτη δίνει μια εκδοχή των συνολοθεωρητικών θεμελίων των μαθηματικών ενώ η δεύτερη των κατηγορικο-θεωρητικών. Η ιδέα των κατηγορικών θεμελίων μπορεί να θεωρηθεί από μια δομιστική αφετηρία οπότε και σε κάποιον τύπο δομής θα αποδίδονται οι ιδιότητες της κατηγορίας των δομών αυτού του τύπου. Στην περίπτωση της κατηγορίας των συνόλων, για παράδειγμα, έχουμε μια εναλλακτική κατηγορικο-θεωρητική συνολοθεωρία όπου τα σύνολα θεωρούνται αφηρημένα αντικείμενα που συγκροτούν μια κατηγορία με επιθυμητές ιδιότητες<sup>297</sup>.

Η αυξανόμενη δημοτικότητα της θεωρίας Κατηγοριών, ως μιας γλώσσας των σημερινών μαθηματικών, και η προσπάθεια χτισίματος κατηγορικών θεμελίων των μαθηματικών, αντιμετωπίζονται ως ένα παραπέρα βήμα του στρουκτουραλιστικού προγράμματος, ενώ στην πραγματικότητα δεν διατηρούνται βασικές αρχές του Μαθηματικού Στρουκτουραλισμού. Οι εξελίξεις δείχνουν προς μια πολύ διαφορετική αντίληψη για τα μαθηματικά και την επιστήμη γενικά.

Γιατί, όμως, τα κατηγορικά θεμέλια φαίνονται ως μια εκδοχή των στρουκτουραλιστικών; Είδαμε ότι η έννοια του συνόλου παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο στα δομιστικά μαθηματικά. Ο συνολοθεωρητικός στρουκτουραλισμός πέτυχε να παράσχει ένα ενοποιημένο πλαίσιο για όλους τους κύριους κλάδους των μαθηματικών. Βέβαια η θεωρία Συνόλων, καθαυτήν, σπάνια αντιμετωπίζεται ως δομιστική θεωρία στο βαθμό της θεωρίας ομάδων. Ο Hellman γράφει: «*Παρόλη την πολλαπλότητα των θεωριών συνόλων που διαφέρουν στα αξιώματα καλής θεμελίωσης, επιλογής, μεγάλων πληθαρίσμων, κατασκευασιμότητας κ.ά. αυτά αναγιγνώσκονται σταθερά ως υποθέσεις για αλήθειες του "αληθινού κόσμου των συνόλων" μάλλον, παρά επιδέχονται μια στρουκτουραλιστική θεώρηση*»<sup>298</sup>.

Επίσης, καθώς η δομιστική έννοια της ομάδας ερμηνεύεται ως «σύνολο με δομή» ή «δομημένο σύνολο» περισσότερο, παρά ως καθαρή δομή (ό, τι και να σημαίνει κάτι τέτοιο), το σύνολο φορέας μιας ομάδας γίνεται αντιληπτό ως ένα υπόβαθρο που στηρίζει τη δομή περισσότερο παρά αποτελεί μέρος της<sup>299</sup>. Αυτό θυμίζει τη μεταφυσική του Αριστοτέλη για την Ύλη και τη Μορφή. Αλλά, η ανάγκη συνολοθεωρητικής «ύλης» δεν συμφωνεί με τη φιλοσοφία του μαθηματικού στρουκτουραλισμού για τον οποίο τα επιθυμητά «καθαρά δομιστικά» μαθηματικά θα

<sup>297</sup> Βλ. σχετ., Lawvere, F. (1964, 15 Δεκεμβρίου). An Elementary Theory of the Category of Sets. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 52, (6), 1506-1511.

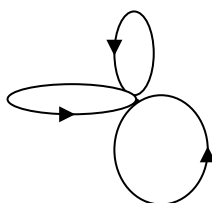
<sup>298</sup> Έτσι, εγείρονται ερωτήματα σχετικά με το «σταθερό σύμπαν ως υπόβαθρο της θεωρίας». Πώς γνωρίζει κανείς τη δομή αυτού του «αληθινού κόσμου»; Πόσο πλούσια είναι στα διάφορα επίπεδά της; Μέχρι πού εκτείνονται τα επίπεδα αυτά; Αφού το θεωρούμενο συνολο-θεωρητικό σύμπαν δεν μπορεί να είναι σύνολο, ως άλλης τάξεως ολότητα, δεν θα είναι με αόριστο τρόπο επεκτάσιμο, σε αντίθεση με την καθολικότητά του; Βλ., σελ. 271 στον 9<sup>ο</sup> τόμο του Borchert, ό.π.

<sup>299</sup> «...αν και η πραγμάτευση των Μαθηματικών που έδωσαν στα *Éléments* τους [οι Bourbaki] ήταν φανερά στρουκτουραλιστικά προσανατολισμένη, στην πραγματικότητα εξακολούθησαν να ορίζουν δομές ως σύνολα συγκεκριμένου είδους, αποτηγχάνοντας ουσιαστικά να τις κάνουν πραγματικά ανεξάρτητες της "εσωτερικής τους σύστασης"». Βλ., Bell, J. (1981). *Category Theory and the Foundations of Mathematics*. *The British Journal for the Philosophy of Science*. 32, (4), 349-358. σελ. 350.

έκαναν μόνο με την «αναλλοίωτη μορφή» και δεν θα απαιτούσαν καμιά συνολοθεωρητική Ύλη. Γι' αυτό, η ιδέα αντιμετώπισης των αντίστοιχων ιδιοτήτων των μαθηματικών δομών, μόνο με όρους απεικονίσεων που διατηρούν τη δομή μεταξύ τους ανεξάρτητα από οποιοδήποτε συνολοθεωρητικό υπόβαθρο (πράγμα που συνιστά τα κατηγορικά θεμέλια), πράγματι φάνηκε ως ένα ακόμη βήμα προς την στρουκτουραλιστική κατεύθυνση<sup>300</sup>.

### 7.3.2.6 Η Κατηγορική παράσταση δομών και τύπων δομών

Κατηγορίες δομών σαν τις ομάδες, τους τοπολογικούς χώρους κ.λπ. συλλαμβάνουν την έννοια του τύπου της δομής, αλλά όχι την έννοια της επιμέρους δομής. Επιμέρους δομές (αναγνωρισμένες έως ισομορφισμού) μπορούν να παρουσιάζονται ως κατηγορίες αλλά σ' αυτή την περίπτωση οι μορφισμοί δεν είναι πλέον απεικονίσεις που διατηρούν τη δομή. Π.χ. μια συγκεκριμένη ομάδα (σαν την άπειρη κυκλική) μπορεί να παρασταθεί ως μια κατηγορία με ακριβώς ένα αντικείμενο έτσι που όλοι οι μορφισμοί της, που πηγάζουν από το αντικείμενο στον εαυτό του, να είναι ισομορφισμοί. Η πράξη της ομάδας δίνεται ως σύνθεση των μορφισμών, η ύπαρξη του μοναδιαίου πηγάζει από τον ορισμό της κατηγορίας και του αντιστρόφου στοιχείου απ' το γεγονός πως όλοι οι μορφισμοί της δοθείσας κατηγορίας είναι αντιστρέψιμοι. Η κατασκευή αυτή απεικονίζεται ως εξής:



Το απλό αυτό παράδειγμα δείχνει ότι οι κατηγορικοί μορφισμοί μπορούν, μα δεν οφείλουν, να είναι απεικονίσεις που διατηρούν τις δομές. Αυτή η κατηγορική παρουσίαση της ομάδας δεν είναι στρουκτουραλιστικού χαρακτήρα. Η κλασική στρουκτουραλιστική παρουσίαση εμπεριέχει την ιδέα ότι παραδείγματα ομάδων αποτελούν «επιμέρους συστήματα» όπως οι αριθμοί, οι γεωμετρικές κινήσεις κ.λπ. Με την απεικόνιση των στοιχείων μιας ομάδας σαν βρόχους, και όχι σημεία, μπορεί κανείς να θεωρεί μορφισμούς από τη δοθείσα ομάδα-κατηγορία προς άλλες κατηγορίες, που παριστάνουν δακτυλίους ή σώματα αριθμών, γεωμετρικούς χώρους κ.λπ., οπότε και παρέχεται μια ακριβέστερη ιδέα της παράστασης κάποιας δομής σε κάθε επιμέρους περίπτωση, απ' ότι στα πλαίσια της στρουκτουραλιστικής ρητορικής. Στη στρουκτουραλιστική αντιμετώπιση, η έννοια της παραδειγματοποίησης παραμένει μετα-θεωρητική και αποφεύγει τον ακριβή μαθηματικό χειρισμό. Στην κατηγορική πραγμάτευση η έννοια αυτή γίνεται μέρος της δοθείσας μαθηματικής

<sup>300</sup> Αξιοσημείωτο είναι πως η θεωρία κατηγοριών ποτέ δεν εντάχθηκε στα *Στοιχεία* των Bourbaki. Είχαν υποσχεθεί, ήδη από το 1961, στην πρώτη έκδοση της *Commutative Algebra*, να εκδώσουν έναν τόμο αφιερωμένο στις αβελιανές κατηγορίες. Ωστόσο, αυτός ο τόμος δεν εμφανίστηκε ποτέ. Η υπόσχεση και το ανεκπλήρωτό της, δείχνουν την αμφιθυμία τους σχετικά με την αξία που μπορεί να είχε η γλώσσα της Θεωρίας Κατηγοριών στο πρόγραμμά τους. Μια τέτοια έκδοση ίσως αποδεικνυόταν, κατά κάποιο τρόπο, προβληματική σε συνδυασμό με την επιμονή των Bourbaki στον κεντρικό ρόλο των δομών. Η απόπειρα να παρουσιάζουν μαζί έννοιες σαν τις κατηγορίες και τις δομές με έναν σαφή τρόπο θα καταλήξει δύσκολη και ασαφής. Η αποδοχή των κατηγορικών ιδεών θα απαιτούσε, ενδεχομένως, να ξαναγραφτούν πολλά κεφάλαια της πραγματείας. Βλ. σχετ., Corry, L. ό.π., σσ. 332-333.

κατασκευής. Αντίθετα απ' το να λές το A παριστάνει το B μπορεί κανείς να θεωρεί συναρτητές της μορφής  $A \rightarrow B$  και να τους πραγματεύεται όπως τους εσωτερικούς μορφισμούς του A και του B. Ένα παραπέρα δε βήμα αυτής της κατηγορικής ανάλυσης συνδέεται με τη θεώρηση της πλήρους κατηγορίας των συναρτητών της δοθείσης μορφής. Μια τέτοια κατηγορία συναρτητών παρέχει μια ακριβή πληροφόρηση για το πώς το A μεταφράζεται στο B.

Ο παραπάνω τρόπος αντίληψης των πραγμάτων έχει πολύ λίγο να κάνει με τη στρουκτουραλιστική αφαίρεση. Η στρατηγική του στρουκτουραλισμού είναι να συλλάβει τι μοιράζονται από κοινού τα διάφορα «επιμέρους συστήματα», δηλαδή την κοινή δομή τους. Η αντίστοιχη κατηγορική στρατηγική μπορεί να περιγραφεί ως: κοιτάζτε πώς «επιμέρους συστήματα» ερμηνεύονται το ένα στο άλλο. Αλλιώςτικά από τη στρουκτουραλιστική στρατηγική, η κατηγορική δεν κάνει τα επιμέρους συστήματα λιγότερο σημαντικά. Δοθέντος του μορφισμού  $A \rightarrow B$  δεν υπάρχει, γενικά, λόγος να σκεπτόμαστε τα A και B «έως» κάποιας ισοδυναμίας και να τα εξαιρέσουμε χάριν της κοινής τους δομής.

Ας αναλογιστούμε τώρα την περίπτωση που μια κατηγορία παριστά έναν τύπο δομής περισσότερο, παρά μια επιμέρους δομή. Μια επιμέρους μαθηματική δομή δεν μπορεί να ταυτισθεί με την αντίστοιχη της αφηρημένη έννοια. Προκειμένου μια δοθείσα έννοια να γίνει μαθηματικό αντικείμενο απαιτείται, κατά τον Kant, μια εποπτική κατασκευή. Η δομική προσέγγιση επιτρέπει την κατασκευή μιας έννοιας που περιγράφει διαφορετικά «επιμέρους συστήματα» αποτυπωμένα σε ένα μαθηματικό αντικείμενο, έως ισομορφισμού. Αυτή όμως η στρουκτουραλιστική μέθοδος εννοιακής κατασκευής δεν δουλεύει για τύπους δομών. Η έννοια «άπειρη κυκλική ομάδα» μπορεί να υλοποιηθεί σε μια απλή δομή, αλλά όχι η έννοια «ομάδα» που δεν είναι όνομα μοναδικού έως ισομορφισμού μαθηματικού αντικείμενου. Ο τρόπος με τον οποίο όλες οι ισόμορφες κυκλικές ομάδες γίνονται ένα αντικείμενο με την έννοια της δομής και ο τρόπος με τον οποίο όλες οι ομάδες γίνονται ένα αντικείμενο με την έννοια της κατηγορίας είναι ουσιαστικά διαφορετικοί. Ο πρώτος εμπεριέχει δομική αφαίρεση, ο δεύτερος κατηγορική. Δηλαδή, κανείς ξαχνά πως οι ομάδες έχουν στοιχεία και θεωρεί πως απεικονίζονται, δηλαδή μετασχηματίζονται η μία στην άλλη με κατάλληλους μορφισμούς.

Μια κατηγορία στην οποία οι μορφισμοί μαζί με τους ταυτοτικούς συγκροτούν σύνολο με την τεχνική έννοια του όρου καλείται μικρή. Οι μικρές κατηγορίες μπορούν να λογισθούν ως δομές. Ο αντίστοιχος τύπος δομών ορίζεται άμεσα: παίρνει κανείς ένα σύνολο στοιχείων που καλούνται μορφισμοί, εισάγει κατάλληλες πρωταρχικές σχέσεις σ' αυτό το σύνολο και διατυπώνει τα απαραίτητα αξιώματα. Αυτή η ευθεία προσέγγιση, ωστόσο, δεν προχωρά στην περίπτωση μεγάλων κατηγοριών αντίστοιχων τύπων δομών σαν την κατηγορία των ομάδων ή την κατηγορία των μικρών κατηγοριών. Γιατί οι μορφισμοί αυτών των κατηγοριών συγκροτούν κλάσεις που δεν είναι σύνολα οπότε και δεν μπορούν να περιγραφούν ως δομημένα σύνολα. Αν και κάτι τέτοιο μπορεί να φανεί ήσσονος σημασίας τεχνική δυσκολία που μπορεί να ξεπερασθεί με κατάλληλη γενίκευση της συνήθους έννοιας της δομής, μας παρέχει ένα ακόμα επιχείρημα για το ότι η δομιστική προσέγγιση, γενικά, δεν δουλεύει στη θεωρία κατηγοριών.

Αντί να σκεπτόμαστε τις κατηγορίες ως δομές ή γενικευμένες δομές κάποιου τύπου μπορούμε να αντιστρέψουμε την τάξη των ιδεών και να σκεπτούμε τις δομές ως κατηγορίες ή κατηγορικές κατασκευές κάποιου τύπου: π.χ. να ταυτίσουμε τις δομές με μικρές κατηγορίες ή μια δομή με έναν συναρτητή από μια μικρή κατηγορία σε μια μεγάλη κατηγορία «υποβάθρου» σαν αυτή των συνόλων. Πάντως οι κατηγορίες δεν αναπαριστούν πάντα επιμέρους δομές ή τύπους δομών.

### 7.3.2.7 «Η Κατηγορία των Κατηγοριών»

Η ιδέα των κατηγορικών θεμελίων έχει να κάνει με το να θεωρήσουμε την κατηγορία, τον συναρτητή και κάποιες άλλες κατηγορικές έννοιες ως πρωταρχικές και τα υπόλοιπα μαθηματικά βασιζόμενα εκεί. Θεωρούμε μια κλάση πραγμάτων που καλούνται μορφισμοί και τρεις πρωταρχικές σχέσεις: αυτή που συνδέει κάθε μορφισμό με το πεδίο του, μια που τον συνδέει με το συνπεδίο του και μια που συνδέει με κάποια διατεταγμένα ζεύγη μορφισμών έναν τρίτο, τη σύνθεση των δύο. Χρειαζόμαστε αξιώματα για να βεβαιωθούμε ότι τα πεδία και συνπεδία των μορφισμών συμπεριφέρονται ως ταυτοτικοί μορφισμοί (δηλαδή είναι αντικείμενα) ότι δύο δοθέντες μορφισμοί είναι συνθέσιμοι αν το συνπεδίο του πρώτου ταυτίζεται με το πεδίο του δεύτερου και άλλα συναφή. Τέλος, θα υποθέσουμε ότι η σύνθεση των μορφισμών είναι προσεταιριστική.

Η αξιωματική αυτή θεωρία καλείται απ' τον Lawvere *στοιχειώδης θεωρία των αφηρημένων κατηγοριών*. Το αντίστοιχο άρθρο του ξεκινά ως εξής: «*Στη μαθηματική πρόοδο των τελευταίων δεκαετιών, μπορεί κανείς να δει, σαφώς, να εγείρεται η πεποίθηση πως οι ιδιότητες των μαθηματικών αντικειμένων μπορούν να διατυπωθούν καλύτερα με αναφορά στην αφηρημένη δομή των αντικειμένων αυτών, παρά με αναφορά στα στοιχεία εξ'ων συνετέθησαν. Το εύλογο ερώτημα, συνεπώς, είναι αν κανείς μπορεί να παράσχει ένα θεμέλιο για τα μαθηματικά που να εκφράζει σε βάθος την αντίληψη για το τι είναι αυτά, και αν υπάρχουν κλάσεις, ή σχέσεις μεταξύ κλάσεων, στις οποίες να μην παίζουν κάποιο ρόλο*»<sup>301</sup>.

Εδώ βλέπουμε τον Lawvere να υιοθετεί τον Μαθηματικό Στρουκτουραλισμό αλλά ταυτόχρονα να απορρίπτει τα συνολοθεωρητικά (και γενικότερα τα βασισμένα σε κλάσεις) θεμέλια των μαθηματικών. Μετά την εισαγωγή των αξιωμάτων της *στοιχειώδους θεωρίας*, και αφού έχουν δοθεί κάποιες σχετικές διευκρινήσεις συνεχίζει: «*Με τον όρο κατηγορία αντιλαμβανόμαστε (δαισθητικά) οποιαδήποτε δομή που αποτελεί ερμηνεία της στοιχειώδους θεωρίας των αφηρημένων κατηγοριών και με τον όρο συναρτητή ομοίως (δαισθητικά) μια τριπλέτα που αποτελείται από δύο κατηγορίες και έναν κανόνα  $T$  που συνδέει σε κάθε μορφισμό  $x$  της  $I^{\text{ns}}$  κατηγορίας, έναν μοναδικό  $xT$  της δεύτερης με τρόπο που...*»<sup>302</sup>, και ακολουθούν οι συνθήκες του να «*διατηρεί τη δομή*».

Όμως η *στοιχειώδης θεωρία* του Lawvere, όπως και κάθε άλλη θεωρία χτισμένη στο ύφος της αξιωματικής μεθόδου του Hilbert, απαιτεί κάποια πρωταρχική (μη-αξιωματική) έννοια συλλογής που δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως κατηγορία, κατά τον Mayberry<sup>303</sup>. Η στοιχειώδης έννοια της κατηγορίας δεν μπορεί να είναι ένα γνήσιο θεμέλιο. Αυτή η πρωταρχική έννοια συλλογής είναι διάσπαρτη στα θεμέλια των μαθηματικών μαζί με την αξιωματική μέθοδο του Hilbert. Προτείνεται λοιπόν μια διαφορετική έκδοση της αξιωματικής μεθόδου περισσότερο κατάλληλη για κατηγορικά θεμέλια. Η *στοιχειώδης θεωρία* είναι προπαρασκευαστική για μια άλλη θεωρία, που ο Lawvere αποκαλεί *βασική*, η οποία δεν είναι στρουκτουραλιστική.

Η *βασική θεωρία* ξεκινά με μια επανεισαγωγή της έννοιας του συναρτητή: «*Τώρα που είμαστε στην κατηγορία των κατηγοριών, τα πράγματα που συμβολίζονται με κεφαλαία θα καλούνται κατηγορίες και όχι αντικείμενα και θα μιλούμε για*

<sup>301</sup> Πρόκειται για το Lawvere, F. W. (1966). *The Category of Categories as a Foundation for Mathematics*. ό.π., σελ. 1.

<sup>302</sup> Βλ., Lawvere, F. W. (1966). *The Category of Categories as a Foundation for Mathematics*., ό. π., σελ. 4.

<sup>303</sup> Βλ. σχετ., Mayberry, J. P. (2000). *The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets*. Cambridge: Cambridge University Press. σσ. 9, 154, 196.

συναρτητές, όχι για μορφισμούς»<sup>304</sup>. Η ιδέα είναι η ακόλουθη: Δοθείσης της προκαταρκτικής έννοιας της κατηγορίας, δια της *στοιχειώδους θεωρίας*, λαμβάνουμε την κατηγορία των κατηγοριών  $\mathcal{C}$ . Κατόπιν παίρνουμε από τη  $\mathcal{C}$  ένα οποιοδήποτε αντικείμενο (κατηγορία)  $A$  και ορίζουμε την  $A$  ως κατηγορία με εσωτερικούς όρους της  $\mathcal{C}$ , προσθέτοντας ιδιότητες (στη  $\mathcal{C}$ ) όποτε χρειάζεται<sup>305</sup>.

### 7.3.2.8 Συναρτητική σημασιολογία και Sketch Theory

Προκειμένου να δούμε ότι η *βασική θεωρία* του Lawvere, όχι όπως η *στοιχειώδης*, δεν είναι βασισμένη σε δομιστικές αρχές, και να αποκτήσουμε μία ιδέα των μη-στρουκτουραλιστικών αρχών της, θα αναλογιστούμε δύο όμοιες προσεγγίσεις: τη συναρτητική σημασιολογία που παρήχθη από τον ίδιο<sup>306</sup> και τη Sketch Theory θεμελιωμένη από τον Ch. Ehresmann<sup>307</sup> στη δεκαετία του '60 και αργότερα ανεπτυγμένη από άλλους.

Η συναρτητική σημασιολογία αποπειράται να παραστήσει τις μαθηματικές θεωρίες ως κατηγορίες κάποιου συγκεκριμένου είδους. Έτσι, τα μοντέλα μιας θεωρίας είναι συναρτητές από τη θεωρία στην κατηγορία υποβάθρου των συνόλων ή κάποιου άλλου κατάλληλου τόπου<sup>308</sup>. Η βασική ιδέα της «ερμηνείας» ή «πραγματοποίησης» μιας δοθείσας θεωρίας σε ένα συνολο-θεωρητικό υπόβαθρο προφανώς προέρχεται από την κλασική θεωρία μοντέλων του Tarski. Η συναρτητική σημασιολογία του Lawvere μπορεί να θεωρηθεί ως κατηγορικο-θεωρητική έκδοση της ίδιας βασικής κατασκευής. Ωστόσο όπως θα δούμε αυτή η τεχνική αναβάθμιση συμπαρασύρει μια σημαντική αναθεώρηση του στρουκτουραλιστικού υποβάθρου της θεωρίας μοντέλων του Tarski.

Προκειμένου να προσδιορίζει μια θεωρητική δομή, μια αξιωματική θεωρία πρέπει να είναι *κατηγορική*, δηλαδή να έχει μοντέλα ισόμορφα μεταξύ τους. Η αλήθεια είναι πως δεν ικανοποιούν αυτή την απαίτηση όλες οι αξιωματικές θεωρίες

<sup>304</sup> Βλ., Lawvere, F. W. (1966). ό. π., σελ. 4.

<sup>305</sup> Μια συνοπτική παρουσίαση του εγχειρήματος δίνεται στο Rodin, A. (2011). *Categories Without Structures.*, ό. π., σσ. 19 - 21. Στα πλαίσια της *βασικής θεωρίας*, εξασφαλίζεται ένας τρόπος ορισμού των κατηγοριών «κατά βέλη»: δύο κατηγορίες ταυτίζονται αν και μόνο αν ταυτίζονται σε όλους τους μορφισμούς τους. Ταυτόχρονα, συνεπώς, δίνεται και ένας νέος ορισμός των συναρτητών ο οποίος επιτρέπει να θεωρήσουμε *συνιστώσες (components)* σε κάθε συναρτητή, της μορφής  $h : A \rightarrow B$ . Συγκεκριμένα, στη *στοιχειώδη θεωρία*, κάθε *συνιστώσα* ενός συναρτητή μπορούμε να τη σκεφτούμε ως μια απεικόνιση  $m$  που στέλνει έναν επιμέρους μορφισμό  $f$  της  $A$  σε έναν  $g$  της  $B$ .

<sup>306</sup> Βλ. σχετ., Lawvere, F. W. (1963, 15 Νοεμβρίου). *Functorial Semantics of Algebraic Theories. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.* 50, (5), 869-872.

<sup>307</sup> Γάλλος μαθηματικός (1905-1979) που εργάστηκε στη Διαφορική Τοπολογία και τη Θεωρία Κατηγοριών.

<sup>308</sup> Η Θεωρία Τόπων των Lawvere και Myles Tierney αποτελεί μια γενίκευση της Θεωρίας Συνόλων. Τόπους ονομάζουμε εμπλουτισμένες, σε βαθμό συγκρίσιμο με μοντέλα της ZF συνολοθεωρίας, οικογένειες αντικειμένων και μορφισμών που μπορούν να λειτουργήσουν ως σύμπαντα μαθηματικού διαλόγου. Στα πλαίσια της Θεωρίας Τόπων, παρουσιάζονται γενικεύσεις συνολοθεωρητικών ιδεών όπως το καρτεσιανό γινόμενο, οι κλάσεις συναρτήσεων και λογικές πράξεις που γενικά ικανοποιούν εντουισιονιστικούς κανόνες όπως, για παράδειγμα, την απόρριψη της αρχής του αποκλειόμενου τρίτου. Βλ. σχετ., σελ. 272 του 9<sup>ου</sup> τόμου του Borchert, D. M. (επιμ.) (2006). *Encyclopedia of Philosophy.* (vols. 1-10). Detroit: Thomson. Κάποιοι τόποι μπορούν να θεωρηθούν συστατικοί ενός κατάλληλου θεμελίου για όλα σχεδόν τα «συνήθη» μαθηματικά, ή κάποιο κομμάτι τους, αλλά όχι για το σύνολο των μαθηματικών. Και αυτό γιατί η Θεωρία Κατηγοριών, για παράδειγμα, δεν μπορεί να αναπτυχθεί πλήρως εντός της Θεωρίας Τόπων χωρίς κάποιες τροποποιήσεις, οι οποίες μάλιστα δεν είναι και τοποθεωρητικές. Βλ. σχετ., Marquis, J.-P. (1995). *Category Theory and the Foundations of Mathematics: Philosophical Excavations. Synthese.* 103, 421-447. σελ. 421.

που είναι χτισμένες με την κλασική μέθοδο, χωρίς να κρίνονται ακατάλληλες απ' αυτό και μόνο. Πάντως, στην κλασική θέαση, η *κατηγορικότητα* μιας αξιωματικής θεωρίας είναι κοινώς παραδεκτή ως επιστημονικό κέρδος ενώ η έλλειψή της ως πρόβλημα. Περιορίζοντας τη θέασή μας στον Στρουκτουραλισμό, μια τέτοια συμπεριφορά είναι κατανοητή: όταν ένα σύνολο αξιωμάτων αποτυγχάνει να προσδιορίσει ένα μοντέλο έως ισομορφισμού, αποτυχαίνει να ορίσει μια δομή.

Στην περίπτωση της συναρτητικής σημασιολογίας του Lawvere η στρουκτουραλιστική επιδίωξη για κατηγορικότητα δεν έχει κανένα νόημα. Σκοπός της κατασκευής είναι να παραχθεί μάλλον μια λειτουργική κατηγορία μοντέλων παρά ένα μοντέλο «έως ισομορφισμού». Στη συναρτητική θεώρηση μια θεωρία προσδιορίζει μια κατηγορία, όχι μια δομή. Γι' αυτό και δεν έχει κάποια σχέση με τον στρουκτουραλιστικό τρόπο σκέψης της αξιωματικής μεθόδου του Hilbert. Στη νέα θεώρηση: «*Η θεωρία εμφανίζεται, απ' εαυτής, ως ένα γενικό μοντέλο*»<sup>309</sup>. η παλιότερη στρουκτουραλιστικού χαρακτήρα διάκριση μεταξύ αφηρημένων «τυπικών» αξιωματικών θεωριών, από τη μια μεριά, και της σημασιολογίας τους, από την άλλη, δεν εφαρμόζεται. Αυτό που διακρίνει μια θεωρία, από τα άλλα μοντέλα της, είναι ο γενικός της χαρακτήρας μάλλον παρά ο τυπικός ή αφηρημένος.

Η θεώρηση στα πλαίσια της Sketch Theory είναι παρόμοια με της συναρτητικής σημασιολογίας του Lawvere: οι γενικές κατηγορίες έχουν σχεδιασθεί ως «γενικά σχήματα (shapes)» ή «γενικές φιγούρες» μάλλον, παρά ως αξιωματικές θεωρίες. Ένα sketch<sup>310</sup> δεν αναπαριστά μια δέσμη ισόμορφων συστημάτων μα γεννά μη-ισόμορφα συστήματα (τα μοντέλα του). Αυτά τα δημιουργημένα συστήματα μοιράζονται το σχήμα τους όχι με την ίδια σημασία με την οποία διαφορετικά συστήματα λέγεται ότι μοιράζονται την ίδια μαθηματική δομή. Στην πραγματικότητα μοιράζονται ένα σχήμα με μια πιο ευθεία έννοια: το δοθέν sketch είναι η κοινή τους πηγή. Το να «έχουν την ίδια πηγή» είναι προφανώς μια σχέση ισοδυναμίας αλλά αυτή η συγκεκριμένη σχέση ισοδυναμίας δεν στηρίζει τίποτε σχετικό με δομική αφαίρεση. Ένα sketch, κοινό σε κάποια συστήματα, είναι συγκεκριμένο (κάποιες φορές είναι πεπερασμένο και εύκολα απεικονίσιμο)· όχι όπως στην περίπτωση που τα συστήματα αυτά θα μετείχαν σε μια δομή, αν και τα προϊόντα ενός sketch μπορούν να περιγραφούν ως αφηρημένες δομές, με την παλιότερη σημασία, αφού συνήθως διακρίνονται «έως ισομορφισμού». Έτσι, η Sketch Theory γυρίζει τον Στρουκτουραλισμό ανάποδα. Αυτό δεν σημαίνει ότι ο Ehresmann είχε ψευδή αντίληψη της ανακάλυψής του όταν σκέφτηκε τη θεωρία Sketch ως μια γενική θεωρία της δομής. Μια γενική θεωρία της δομής δεν είναι απαραίτητο να είναι μια δομιστική θεωρία ούτε και να παρέχει στήριξη στον Στρουκτουραλισμό ως φιλοσοφική άποψη για τα μαθηματικά. Το γεωμετρικό σύμπαν του Ευκλείδη γεννιέται από δύο σχήματα γεννήτορες, την ευθεία γραμμή και τον κύκλο, χωρίς να σημαίνει ότι κάθε γεωμετρικό αντικείμενο κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη.

---

<sup>309</sup> Lawvere, F. (1963). *Functorial Semantics of Algebraic Theories*. Ph.D. thesis, Columbia University, New York, επαντύπωση στο *Reprints in Theory and Applications of Categories*, No 5, pp. 1-121, με νέο σχολιασμό του συγγραφέα, διαθέσιμο στην ηλεκτρονική διεύθυνση: [www.tac.mta./tac/reprints/articles/5/tr5.pdf](http://www.tac.mta./tac/reprints/articles/5/tr5.pdf). σελ. 19.

<sup>310</sup> Σε κάποιες προσεγγίσεις ένα sketch δεν είναι καν κατηγορία παρά ένα κατευθυνόμενο γράφημα με πρόσθετη δομή.

### 7.3.2.9 Κατηγορικά θεμέλια

Το πρώτο (και στρουκτουραλιστικό) επίπεδο του Lawvere, η *στοιχειώδης θεωρία*, εξυπηρετεί να εισάγει την έννοια της κατηγορίας πάνω στην οποία κατόπιν εργάζεται περαιτέρω η *βασική θεωρία*. Η έννοια της κατηγορίας, όμως, μπορεί να εισαχθεί και χωρίς την στρουκτουραλιστική *στοιχειώδη θεωρία*, όπως για να ξεκινήσει κανείς μια αξιωματική θεωρία συνόλων σαν την ZF χρειάζεται μια προ-θεωρητική έννοια συνόλου ή συλλογής. Τα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων κάνουν αυτή την προ-θεωρητική έννοια της συλλογής περισσότερο συγκεκριμένη και ακριβή ώστε να αποφευχθούν τα γνωστά παράδοξα, αλλά τα σύνολα δεν παράγονται *ex nihilo*.

Μπορεί να διατυπωθεί ο ισχυρισμός ότι σε αντίθεση με την έννοια της συλλογής, που μπορεί να εξηγηθεί με καθημερινά παραδείγματα, η έννοια της κατηγορίας απαιτεί ένα πολύ υψηλότερο επίπεδο μαθηματικής αφαίρεσης. Αυτή, όμως, μπορεί να είναι μια εσφαλμένη αντίληψη λόγω του γεγονότος ότι δημοφιλή παραδείγματα κατηγοριών εμπλέκουν τοπολογικούς χώρους, διανυσματικούς χώρους κ.λπ. τα οποία ένας αρχάριος ίσως να μη γνωρίζει. Όμως στο βαθμό που οι κατηγορίες θεωρούνται ότι μπορούν να παράσχουν θεμέλια για τα μαθηματικά πρέπει να εισαχθούν διαφορετικά. Ας θυμηθούμε ότι η έννοια του συνόλου επίσης πρωτο-ξεκίνησε σε μάλλον σύνθετα μαθηματικά περιβάλλοντα<sup>311</sup>. Εξάλλου, η παραπέρα εξέλιξη του προγράμματος ίσως μας οδηγήσει στο να αποδεχθούμε άλλες σαν πιο πρωταρχικές έννοιες από τις κλασικές του συναρτητή και της κατηγορίας.

Συνήθως η κατηγορία ορίζεται ως μια κλάση αντικειμένων εφοδιασμένη με μια κλάση κλάσεων απεικονίσεων (μετασχηματισμών) που αντιστοιχούν σε όλα τα διατεταγμένα ζεύγη αντικειμένων. Κατόπιν ακολουθούν παραδείγματα κατηγοριών όπως η κατηγορία των συνόλων, των ομάδων κ.λπ. Αυτή η προσέγγιση δεν είναι η ενδεδειγμένη για κατηγορικά μαθηματικά για δύο λόγους: πρώτον επειδή η πρωταρχική έννοια της κλάσης είναι και άχρηστη και ανεπιθύμητη εδώ και δεύτερον επειδή στα κατηγορικά μαθηματικά όλες οι κατηγορίες είναι κατηγορίες κατηγοριών μάλλον παρά κατηγορίες οτιδήποτε άλλου. Η ακόλουθη αναλογία με τα συνολοθεωρητικά μαθηματικά βοηθά να γίνει το σημείο αυτό πιο σαφές. Στο βαθμό που η έννοια του συνόλου δεν θεωρείται τέτοια ώστε να μας παράσχει ένα θεμέλιο για τα μαθηματικά, σκέφτεται κανείς σύνολα και κατόπιν παραδείγματα συνόλων αριθμών, σημείων κ.λπ. Αλλά στη θεμελιωτική αξιωματική θεωρία συνόλων, σαν τη ZF, δεν υπάρχουν άλλα σύνολα, παρά σύνολα συνόλων, και κάθε μαθηματικό αντικείμενο, σαν τον αριθμό ή το σημείο, θεωρείται σύνολο. Ομοίως, σε μια θεμελιωτική αξιωματική θεωρία κατηγοριών, δεν υπάρχουν άλλες κατηγορίες από κατηγορίες κατηγοριών (τα αντικείμενά τους είναι κατηγορίες, καθαυτά) και κάθε μαθηματικό αντικείμενο θεωρείται κατηγορία. Παραδόξως, στην προτεινόμενη αυτή τοποθέτηση, δεν υπάρχει χώρος για κάτι σαν την κατηγορία των κατηγοριών, δηλαδή την ολότητα των κατηγοριών. Στην πραγματικότητα, ούτε η *βασική θεωρία* του Lawvere απαιτεί κάτι τέτοιο.

Μέχρι τώρα αποφεύχθηκε η χρήση του όρου «μορφισμός» γιατί: πρώτον, αυτός ο όρος προτείνει να σκεφτόμαστε τους μετασχηματισμούς ως απεικονίσεις που διατηρούν τη δομή πράγμα άσχετο στο δεδομένο πλαίσιο. Δεύτερον, επειδή ο όρος «συναρτητής» χρησιμοποιείται κοινώς για να δηλώσει κανείς έναν μετασχηματισμό

<sup>311</sup> Η πρώτη δημοσίευση του Cantor που σχετιζόταν με τη Θεωρία Συνόλων το 1872 αφορούσε τριγωνομετρικά αναπτύγματα. Βλ., σχετ., Ferreirós, J. (2007). *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Basel: Birkhäuser. σσ. 157-161.



κατηγοριών και όλοι οι μετασχηματισμοί που πραγματευόμαστε ούτως ή άλλως κατηγοριών είναι.

Βλέπουμε ότι η έννοια της κατηγορίας μπορεί να εισαχθεί άτυπα σαν την έννοια της συλλογής και ότι η πρώτη έννοια δεν απαιτεί τη δεύτερη για την εισαγωγή της. Ωστόσο αυτό το προκαταρκτικό βήμα δεν συμπληρώνει τη διαδικασία χτισίματος κατηγορικών θεμελίων. Χρειαζόμαστε ακόμα τη *βασική θεωρία* του Lawvere ή κάτι παρόμοιο για να φτιάξουμε τις έννοιες του συναρτητή και της κατηγορίας πιο ακριβείς. Σ' αυτό το κρίσιμο σημείο δεν μπορούμε άλλο να προχωρήσουμε καθαρά διαισθητικά, αλλά χρειαζόμαστε κάποιους λογικούς όρους, για να διατυπώσουμε ακριβείς ορισμούς και να αποδείξουμε βασικούς ισχυρισμούς, που θα εμπεριέχουν μια νέα αντίληψη για το ρόλο της λογικής στα θεμέλια των μαθηματικών.

Στα κατηγορικά θεμέλια, η λογική θεωρείται ως ένας μηχανισμός συμπερασμού ισχυρά εξαρτημένος από το υποβόσκων μαθηματικό πλαίσιο και όχι ως ένα αυτοδύναμο σύστημα καθολικών συλλογιστικών νόμων. Αυτή η αλλαγή της παραδοσιακής αντίληψης της λογικής είναι ανάλογη με την αλλαγή της παραδοσιακής αντίληψης της γεωμετρίας που συνέβη τον 19<sup>ο</sup> αιώνα όταν οι άνθρωποι έπαψαν να σκέφτονται για τον γεωμετρικό χώρο ως ένα καθολικό περιβάλλον των γεωμετρικών αντικειμένων και έμαθαν να σκέφτονται για χώρους ως γεωμετρικά αντικείμενα και για γεωμετρικά αντικείμενα ως χώρους (με την έννοια της εσωτερικής γεωμετρίας ενός δοθέντος γεωμετρικού αντικειμένου). Στο πρώτο μισό του 20<sup>ου</sup> αιώνα οι άνθρωποι έμαθαν να σκέφτονται για τα συστήματα της λογικής ως αντικείμενα που ζουν σε μεγαλύτερα μετα-λογικά πλαίσια. Η Θεωρία Κατηγοριών έδειξε πώς μπορεί κανείς να θεωρήσει συλλογές αντικειμένων (κατάλληλων κατηγοριών) ως συστήματα λογικής (με την έννοια της εσωτερικής γλώσσας μιας δοθείσας κατηγορίας<sup>312</sup>). Αυτή η αντίστροφη κίνηση που επιτρέπει σε κάποιον να αποφύγει το άσχημο άπειρο των μετά-μετά-...-μετά-λογικών και των μετά-μετά-...-μετά-μαθηματικών, στα θεμέλια των μαθηματικών, έχει τεράστια φιλοσοφική σημασία.

Ολοκληρώνουμε αυτή την σύντομη συζήτηση των κατηγορικών θεμελίων με το ότι η επιτυχία κάθε επιμέρους θεμελιωτικής απόπειρας των μαθηματικών εξαρτάται καίρια από τη συνεισφορά του στην πρόοδο των μαθηματικών και της επιστήμης γενικότερα. Λέγοντας κάτι τέτοιο, δεν συγκαταριθμούμε την ανανέωση των θεμελίων ως μέρος αυτής της προόδου αλλά σκεφτόμαστε τα αποτελέσματα αυτής της ανανέωσης στα υπόλοιπα μαθηματικά και την επιστήμη. Τα συνολοθεωρητικά στρουκτουραλιστικά θεμέλια των μαθηματικών εκπλήρωσαν πολύ καλά αυτή την απαίτηση προτού καταλήξουν εμπόδιο για περαιτέρω προοδευτικές αναπτύξεις. Είναι πιθανώς πολύ νωρίς να κρίνει κανείς τα κατηγορικά θεμέλια απ' αυτή την άποψη, αλλά η πληθώρα κατηγορικών μεθόδων, στα σημερινά ερευνητικού επιπέδου μαθηματικά, προφανώς υπόσχονται στα κατηγορικά θεμέλια ένα λαμπρό μέλλον.

---

<sup>312</sup> Βλ. σχετ., Lambek, J. & Scott, P. (1994). *Introduction to Higher Order Categorical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

### 7.3.2.10 Συμπέρασμα: Μια κατηγορική άποψη στα μαθηματικά και για τα μαθηματικά

Το πρόγραμμα κατηγορικής θεμελίωσης απαιτεί μια νέα φιλοσοφική άποψη για τα μαθηματικά, που ο παραδοσιακός στρουκτουραλισμός δεν μπορεί, πιθανώς, να παράσχει. Στην κατηγορική ματιά, σε αντίθεση με την στρουκτουραλιστική, αυτό που έχει σημασία είναι πώς ένα μαθηματικό αντικείμενο (ή κατασκευή) μετατρέπεται σε άλλο, όχι τι παραμένει αναλλοίωτο υπ' αυτούς τους μετασχηματισμούς. Με άλλα λόγια, τα κατηγορικά μαθηματικά είναι μια θεωρία του αφηρημένου μετασχηματισμού όχι μια θεωρία της αφηρημένης μορφής.

Εκτός ενός τρόπου θέασης των μαθηματικών, καθαυτά, η κατηγορική άποψη για τα μαθηματικά μπορεί να προτείνει και μια νέα κατανόηση του ρόλου που μπορεί να παίξει η ιστορία των μαθηματικών στα ίδια. Συγκεκριμένα, προτείνεται μια απάντηση στο ακόλουθο ερώτημα: πώς μπορούμε να σκεφτούμε την αποτίμηση, από τους μαθηματικούς, κάποιων διαφορετικών κάθε φορά προτάσεων, ως διατυπώσεις του ίδιου θεωρήματος;

Κατ' αρχάς, παλιότερες και πρόσφατες τυποποιήσεις ενός κλασικού θεωρήματος, σαν το πυθαγόρειο π.χ., δεν μπορούν να ταυτοποιηθούν στα πλαίσια μιας γλωσσικής μετάφρασης και μόνο. Οι διαφορετικές εκδόσεις του θεωρήματος δεν μοιράζονται κάποιο αναλλοίωτο περιεχόμενο. Ούτε είναι απαραίτητο κάτι τέτοιο, προκειμένου να αποτιμηθούν αυτές οι τυποποιήσεις ως τυποποιήσεις του ίδιου θεωρήματος. Υπάρχουν πολλοί τρόποι μετάφρασης της γεωμετρίας του Ευκλείδη σε σύγχρονη ορολογία (και το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι μια επιμέρους συνιστώσα της μετάφρασης της Ευκλείδειου Γεωμετρίας στους σύγχρονους όρους)· αλλά δεν υπάρχει τρόπος να αποδώσεις την σύγχρονη γεωμετρία με ευκλείδειους όρους. Η ιστορία, εν γένει, και η διανοητική μας ιστορία, ειδικότερα, φαίνεται να έχουν προσανατολισμό· δεν υπάρχει συμμετρία μεταξύ παρελθόντος και μέλλοντος.

Έχοντας κατά νου την έννοια της *συνιστώσας* ενός συναρτητή, στη *βασική θεωρία*, θα μπορούσε να εφαρμοσθεί, *mutatis mutandis*, ένα κριτήριο ταυτότητας (και συνεπώς ταυτοποίησης) για το υπόστρωμα των διαφορετικών διατυπώσεων, ιστορικά, μιας θεωρίας ή ενός μαθηματικού αντικειμένου. Ταυτότητα του μαθηματικού περιεχομένου, που μεταφράζουμε στους σύγχρονους κάθε φορά όρους, θεωρούμε την εννοιολογική του ιστορία. Οι διαφορετικές εκδόσεις του πυθαγορείου θεωρήματος, που παρήχθησαν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, με διαφορετικά θεμέλια, μπορούν να περιγραφούν ως διαφορετικά χρονικά στάδια της ίδιας έννοιας. Αυτή η εμμένουσα οντότητα δεν ανάγεται στο σύνολο των χρονικών της σταδίων· μια τέτοια αναγωγή αφήνει απ' έξω τις μεταφράσεις μεταξύ αυτών των σταδίων, πράγμα που για την κατηγορική θέαση είναι το πιο σημαντικό. Μια μαθηματική έννοια δεν είναι το σύνολο των χρονικών της σταδίων, αλλά μια κατηγορία μεταφράσεων μεταξύ αυτών των σταδίων. Ο ίδιος τρόπος θέασης θα μπορούσε να εφαρμοσθεί και σε εναλλακτικές θεμελιωτικές απόπειρες για τα μαθηματικά, όπως και στις θεωρίες και τις έννοιες που θα προέκυπταν από τα θεμέλια αυτά.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Αριστοτέλης. (έκδοση <sup>4</sup>1992). *Πρώτη Φιλοσοφία (Τα Μετά τα Φυσικά)*. (Κ. Δ. Γεωργούλης, ερμην.). Αθήνα: Εκδόσεις Παπαδήμα.
- Βέικος, Θ. (<sup>4</sup>1995). *Οι Προσωκρατικοί*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Γεωργούλης, Κ. Δ. (2000). *Αριστοτέλης ο Σταγυρίτης*. Θεσσαλονίκη: Ιστορική και Λαογραφική Εταιρεία Χαλκιδικής.
- Γεωργούλης, Κ. Δ. (<sup>2</sup>1994). *Ιστορία της Ελληνικής Φιλοσοφίας*, Αθήνα: Εκδόσεις Παπαδήμας.
- Δημητρακόπουλος, Μ. (2003). *Στοιχείωση Ευρωπαϊκής Φιλοσοφίας*. Αθήνα.
- Θεοδωρακόπουλος, Ι. (2007). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία: Φιλοσοφία της Θρησκείας, Μεταφυσική, Φιλοσοφία της Ιστορίας*. (τόμ. δ'). Αθήνα: Βιβλιοπωλείον της Εστίας.
- Κανελλόπουλος, Π. Από τον Δάντη ως τον Ιωάννη Καντακουζηνό. *Ιστορία του Ευρωπαϊκού Πνεύματος*. 2.
- Μητακίδης, Γ. (1995). *Θεωρία Συνόλων*. Πάτρα: Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών.
- Πελεγρίνης, Θ. (2004). *Λεξικό της Φιλοσοφίας*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
- Πλάτων. *Λάχης – Μένων – Παρμενίδης*. (Β. Πατάκης & Ηλ. Λάγιος, μετάφρ.). Αθήνα: Δαίδαλος – Ι. Ζαχαρόπουλος.
- Πλάτων. (έκδοση 2008). *Μένων*. (Ι. Πετράκης, μεταφρ.). Αθήνα: Πόλις.
- Πλάτων. (έκδοση 1993). *Παρμενίδης (ἢ περί ἰδεῶν)*. (Φιλολογική Ομάδα Κάκτου, μετάφρ.). Αθήνα: Κάκτος.
- Πλάτων. (έκδοση <sup>17</sup>2009). *Πολιτεία*. (Ν. Μ. Σκουτερόπουλος, μεταφρ.). Αθήνα: Πόλις.
- Πλάτων. *Πολιτεία (ἢ περί δικαίου πολιτικός)*. (Κ. Δ. Γεωργούλης μετ.). γ' έκδοση. Αθήνα: Ι. Σίδερης.
- Πλάτων. (έκδοση <sup>5</sup>2009). *Πρωταγόρας*. (Ηλ. Σ. Σπυρόπουλος, μετάφρ.). Θεσσαλονίκη: Ζήτρος.
- Πλάτων. (έκδοση 2008). *Σοφιστής (ἢ περί τοῦ ὄντος, λογικός)*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτρος.
- Πλάτων. (έκδοση <sup>23</sup>2009). *Συμπόσιον*. (Ι. Συκουτρής, μετάφρ.). Αθήνα: Ιωάννης Δ. Κολλάρος & Σια. Α.Ε.
- Πλάτων. (έκδοση 2007). *Φαίδων (Περί Ψυχής)*. (Θ. Γ. Μαυρόπουλος, μετάφρ.). Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτρος.
- Πλάτων. (έκδοση 1993). *Φίληβος (ἢ περί ἡδονῆς)*. (Φιλολογική Ομάδα Κάκτου, μετάφρ.). Αθήνα: Εκδόσεις Κάκτος.
- Alexandri Aphrodisiensis. (έκδοση 1891). *In Aristotelis Metaphysica Commentaria*. Berolini: Georgii Reimeri.
- Allen, R. E. (1960). Participation and Predication in Plato's Middle Dialogues. *The Philosophical Review*, 69 (2), 147-164.

- Ammonius. (έκδοση 1897). *In Aristotelis librum de interpretatione commentarius*. (A. Busse ed.). Berlin: Reimer.
- Aristotle. (έκδοση 1997). *Metaphysics*. (W. D. Ross, μεταφρ.). (Vols. I-II) Oxford: Oxford University Press.
- Aristotle. (έκδοση 1955). *On Sophistical Refutations, On Coming-to-Be and Passing-Away, On the Cosmos*. (E. S. Forster & D. J. Furley, μεταφρ.). London & Cambridge, Massachusetts: William Heinemann Ltd & Harvard University Press.
- Aristotle. (έκδοση 1962). *The Categories, On Interpretation, Prior Analytics*. (H. P. Cook & H. Tredennick, μεταφρ.). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Awodey, S. (1996). Structure in Mathematics and Logic: A Categorical Perspective. *Philosophia Mathematica*. 4, (3), 209-237.
- Barnes, J. (επιμ.) (1991). *The Complete Works of Aristotle* (τ. 1-2). Princeton: Princeton University Press.
- Beardsley, M. C. (1989). *Ιστορία των Αισθητικών Θεωριών*. (Δ. Κούρτοβικ & Π. Χριστοδουλίδης, μεταφρ.). Αθήνα: Εκδόσεις Νεφέλη.
- Bell, J. (2006). Abstract and Variable Sets in Category Theory. Στο G. Sica (επιμ.), *What is Category Theory?* (σ. 9-16). Monza, Italy: Polimetrica International Scientific Publisher.
- Bell, J. (1981). Category Theory and the Foundations of Mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science*. 32, (4), 349-358.
- Berkeley, G. (έκδοση 2009). *Philosophical Writings*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Bigelow, J., & Pargetter, R. (2004). *Science and Necessity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Blanshard, B. (1964). *The Nature of Thought* (vols. 1-2). London: George Allen & Unwin Ltd.
- Boolos, G. (1971). The Iterative Conception of Set. *The Journal of Philosophy*, 68 (8), Philosophy of Logic and Mathematics, 215-231.
- Borchert, D. M. (επιμ.) (<sup>2</sup>2006). *Encyclopedia of Philosophy*. (vols. 1-10). Detroit: Thomson.
- Borges, J. L. (1982). *Οι μεταμορφώσεις της χελώνας*. (Γ. Δ. Χουρμουζιάδης, μεταφρ.). Αθήνα: Ύψιλον.
- Bosanquet, B. (<sup>2</sup>1891). *Essays and Addresses*. London: Swan Sonnenschein & Co.
- Bosanquet, B. (<sup>2</sup>1911). *Logic, or the Morphology of Knowledge* (τ. 1-2). Oxford: Clarendon Press.
- Bosanquet, B. (1912). *The Principle of Individuality and Value*. London: Macmillan and Co., Ltd.
- Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *The American Monthly*. 57, (4), 221-232.
- Bradley, F. H. (<sup>2</sup>1950). *Principles of Logic* (τ. 1-2). Oxford: Oxford University Press.

- Bunnin, N. & Yu, J. (2004). *The Blackwell Dictionary of Western Philosophy*. Malden: Blackwell Publishing.
- Caird, J. (1920). *An Introduction to the Philosophy of Religion*. Glasgow: Maclehose, Jackson & Co.
- Caygill, H. (2000). *A Kant Dictionary*. Cornwall: Blackwell Publishers.
- Châtelet, F. (επιμ.) (<sup>2</sup>1989). *Η Φιλοσοφία*, (τόμ. Α'). (Κ. Παπαγιώργης, μεταφρ.). Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1979).
- Châtelet, F. (επιμ.) (<sup>2</sup>1990). *Η Φιλοσοφία*. (τόμ. Γ') (Κ. Παπαγιώργης, μεταφρ.). Αθήνα: Εκδόσεις Γνώση. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1979).
- Chihara, C. (1968). Our Ontological Commitment to Universals. *Noûs*, 2, (1), 25-46.
- Corry, L. (1992). Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure. *Synthese*, 92, 315-348
- Craig, E. (επιμ.) (2005). *The Shorter Routledge Encyclopedia of Philosophy*. London and New York: Routledge.
- Dauben, J. (1990). *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Dedekind, R. (1963). *Essays on the Theory of Numbers*. New York: Dover Publications Inc.
- Diogenes Laertius. (έκδοση 1925). *Lives of Eminent Philosophers*. (R. Hicks, μεταφρ.). (vol. 2) London: William Heinemann.
- Diskin, Z. & Wolter, U. (2008). A diagrammatic logic for object-oriented visual modeling. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science (ENTCS)*, 203, (6), 19-41.
- Drossos, C. (2006). Sets, Categories and Structuralism. Στο G. Sica (επιμ.), *What is Category Theory?* (σ. 95-126). Monza, Italy: Polimetrica.
- Eco, U. (<sup>21</sup>1993). *Το όνομα του ρόδου*. (Ε. Καλλιφατίδη, μεταφρ.). Αθήνα: Γνώση. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1980).
- Ellerman, P. D. (1988). Category Theory and Concrete Universals. *Erkenntnis*, 28, 409-429.
- Ewald, W. (ed.) (2007). *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (Vol. I-II). Oxford: Clarendon Press.
- Faust, J. (1998). Idealism Meets Realism: The Problem of Convergence in Blanshard's The Nature of Thought. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, XXXIV, (4), 923-947.
- Feferman, S. (1977). Categorical Foundations and Foundations of Category Theory. Στο R. Butts (Επιμ.), *Logic, Foundations of Mathematics and Computability* (σ. 149-169). Dordrecht: D. Reidel.
- Ferreirós, J. (<sup>2</sup>2007). *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Basel: Birkhäuser.
- Fine, G. (2004). *Plato On Knowledge and Forms: Selected Essays*. Oxford: Clarendon Press.

- Fine, G. (2004). *On Ideas: Aristotle's Criticism of Plato's Theory of Forms*. Oxford: Clarendon Press.
- Frege, G. (έκδοση 1990). *Τα Θεμέλια της Αριθμητικής*. (Γ. Ρουσόπουλος, μεταφρ.). Αθήνα: Νεφέλη. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε 1884).
- Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine Logisch Mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: Verlag von Wilhelm Koenner.
- Frege, G. (έκδοση <sup>2</sup>1993). *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the Concept of Number*. (J. L. Austin, μεταφρ.). New York: Harper & Brothers. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1884).
- Frege, G. (1971). *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic*, (E.-H. W. Kluge, μετάφρ.). New Haven and London: Yale University Press.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
- Gabbay, D. M. & Woods, J. (επιμ.) (2004). *Handbook of the History of Logic. Greek, Indian and Arabic Logic*. 1. Amsterdam: North-Holland.
- Galen. (έκδοση 1830), *Claudii Galeni opera omnia*. C. G. Kühn (επιμ.), (τ. 1-20). T. 19. Lipsiae: Officina Libraria Car. Cnoblochii.
- Geach, T. P. (1956 Ιανουάριος). The Third Man Again. *The Philosophical Review*. 65, (1), 72-82.
- Goodman, N. & Quine, W. V. O. (1947). Steps Toward a Constructive Nominalism. *The Journal of Symbolic Logic*. 12, (4), 105-122.
- Green, T. H. (1888). *Works of Thomas Hill Green*. R. L. Nettleship (Επιμ.). (τ. 1-3). London: Longmans, Green, and Co.
- Guillelmus de Ockham. (ed. 1978). *Opera Philosophica*. (Vol. 2) G. Gál (ed.) St. Bonaventure, New York: The Franciscan Institute.
- Guthrie, W. K. C. (1978). *Οι Έλληνες Φιλόσοφοι: Από τον Θαλή ως τον Αριστοτέλη*. (Α. Η. Σακελλαρίου, μεταφρ.). Αθήνα: Δ. Ν. Παπαδήμα. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1950).
- Hale, B. (1996). Structuralism's Unpaid Epistemological Debts. *Philosophia Mathematica*. 4, (3), 124-147.
- Hellman, G. (1996). Structuralism Without Structures. *Philosophia Mathematica*. 4, (3), 100-123.
- Hegel, G. W. F. (έκδοση 2007). *Φαινομενολογία του Νου*. (Γ. Φαράκλας, μεταφρ.). Αθήνα: Βιβλιοπωλείον της Εστίας. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1807).
- Hegel, G. W. F. (έκδοση 1991). *The Encyclopaedia Logic*. (T. F. Geraets, W. A. Suchting and H. S. Harris, μεταφρ.). Indianapolis/Cambridge: Hackett Publishing Company, Inc.
- Hegel, G. W. F. (έκδοση 2007). *Hegel's Philosophy of Mind*. (W. Wallace & A. V. Miller, μεταφρ.). Oxford: Clarendon Press.
- Hegel, G. W. F. (έκδοση 2010). *The Science of Logic*. (G. di Giovanni, μεταφρ.). Cambridge: Cambridge University Press.

- Hilbert, D. (1967). On the Infinite. στο J. van Heijenoort (επιμ.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* (σ. 367-392). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Hilbert, D. (1902). *The Foundations of Geometry*. (E. J. Townsend, μετάφρ.). Chicago: The Open Court Publishing Company.
- Hilbert, D. (1927). The Foundations of Mathematics, στο J. van Heijennort (ed.). *From Frege to Gödel*. (1967). Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Inwood, B. (επιμ.) (2003). *The Cambridge Companion to the Stoics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Inwood, M. J. (1999). *A Hegel Dictionary*. The Blackwell Philosopher Dictionaries. Oxford-Massachusetts: Blackwell Publishers.
- Inwood, M. J. (2003). *Hegel*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Kavka, M. (2004). *Jewish Messianism and the History of Philosophy*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kenny, A. (επιμ.) (<sup>2</sup>2005). *Ιστορία της Δυτικής Φιλοσοφίας*. (Δ. Ρισσάκη, μεταφρ.). Αθήνα: Νεφέλη. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε 1994).
- Kerby, A. (1991). Gadamer's Concrete Universal. *Man and World*. 24, 49-61.
- Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, (v. 1-3) New York, Oxford: Oxford University Press.
- Kneale, W., & Kneale, M. (1971). *The Development of Logic*. Oxford: Clarendon Press.
- Kraut, R. (επιμ.) (1999). *The Cambridge Companion to Plato*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kurenkova, R., Plekhanov, Y. & Rogacheva, E. (2005). The Transcendental-Phenomenological Meaning of the Notion of «Experience» in E. Husserl and J. Dewey's Philosophy. *Analecta Husserliana*. LXXXIV, 33-41.
- Kvasz, L. (2008). *Patterns of Change: Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.
- Lagerlund, H. (επιμ.) (2011). *Encyclopedia of Medieval Philosophy: Philosophy Between 500 and 1500*. Dordrecht: Springer.
- Lambek, J. & Scott, P. J. (1994). *Introduction to Higher Order Categorical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Landry, E. & Marquis, J. (2005). Categories in Context: Historical, Foundational, and Philosophical. *Philosophia Mathematica*. 13, (III), 1-43.
- Lawvere, F. W. (1969). Adjointness in Foundations. *Dialectica*. 23, (3/4), 281-296.
- Lawvere, F. W. (1964, 15 Δεκεμβρίου). An Elementary Theory of the Category of Sets. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 52, (6), 1506-1511.
- Lawvere, F. W. (1963). *Functorial Semantics of Algebraic Theories*. Ph.D. thesis, Columbia University, New York, επανατύπωση στο Reprints in Theory and Applications of Categories, No 5, pp. 1-121, με νέο σχολιασμό του συγγραφέα, διαθέσιμο στην ηλεκτρονική διεύθυνση: [www.tac.mta./tac/reprints/articles/5/tr5.pdf](http://www.tac.mta./tac/reprints/articles/5/tr5.pdf).

- Lawvere, F. W. (1963, 15 Νοεμβρίου). Functorial Semantics of Algebraic Theories. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 50, (5), 869-872.
- Lawvere, F. W. (1966). The Category of Categories as a Foundation for Mathematics. *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*. La Jolla, New York: Springer-Verlag, 1-21.
- Lawvere, F. & Rosebrugh, R. (2003). *Sets for Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Magnan, F. & Gonzalo, E. R. (1994). Category Theory as a Conceptual Tool in the Study of Cognition. στο J. Macnamara & E. G. Reyes (επιμ.). *The Logical Foundations of Cognition* (σσ. 57-90). New York: Oxford University Press.
- Mander, W. J. (2000). Bosanquet and the Concrete Universal. *The Modern Schoolman*. 77, (4), 293-308.
- Marenbon, J. (2006). *From the Circle of Alcuin to the School of Auxerre: Logic, Theology and Philosophy in the Early Middle Ages*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Marquis, J.-P. (1995). Category Theory and the Foundations of Mathematics: Philosophical Excavations. *Synthese*. 103, 421-447.
- Mathias, A. R. D. (1992). The Ignorance of Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*. 14, (3), 4-13.
- Matsumura, H. (1989). *Commutative Ring Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mayberry, J. P. (2000). *The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets*. Cambridge: Cambridge University Press.
- McKeon, R. (1930). Augustine to Albert the Great. *Selections from Medieval Philosophers*. 1.
- Migne, J.-P. (1847). Boeth Tomus Posterior. *Patrologiae*. 64.
- Milne, A. (1962). *The Social Philosophy of English Idealism*. London: Allen & Unwin.
- Moschovakis, Y. (2005). *Notes on Set Theory*. New York: Springer-Verlag.
- Mourelatos, A. (2008). *The Route of Parmenides*. Las Vegas: Parmenides Publishing.
- Nettleship, R. L. (21901). *Philosophical Remains*. London: Macmillan and Co., Ltd.
- Novalis. (έκδοση 1981). *Schriften: Das Philosophische Werk I*. (vol. 2). Stuttgart: Verlag W. Kohlhammer.
- Passmore, J. (1968). *A Hundred Years of Philosophy*. Middlesex: Penguin Books.
- Plato, (έκδοση 1937). *The Republic*. (τ. 1-2). (P. Shorey, μεταφρ.). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Popper. (1978). *Three Worlds: The Tanner Lecture on Human Values*. [Φυλλάδιο]. University of Michigan.
- Prantl, C. (1870). *Geschichte der Logic im Abendlande* (τ. 1-4). Leipzig: Verlag von S. Hirzel.



- Quine, W. V. O. (1963). *From a Logical Point of View: 9 Logico-Philosophical Essays*. New York: Harper Torchbooks.
- Quine, W. V. O. (1981). *Mathematical Logic*. Cambridge, Massachusetts & London, England: Harvard University Press.
- Quine, W. V. O. (1969). *Set Theory and Its Logic*. Cambridge, Massachusetts & London England: The Belknap Press of Harvard University Press.
- Quine, W. V. O. (1966). *The Ways of Paradox and Other Essays*. New York: Random House.
- Quine, W. V. O. (1960). *Word and Object*. Massachusetts: The Massachusetts Institute of Technology.
- Rodin, A. (2011, Ιανουάριος). Categories Without Structures. *Philosophia Mathematica*. III, (00), 1-27.
- Rodin, A. (2010, Ιανουάριος). How Mathematical Concepts get their Bodies. *Topoi*. 29, 53-60.
- Royce, J. (1892). *The Spirit of Modern Philosophy*. Boston and New York: Houghton Mifflin Company.
- Russell, B. (1956). *An Essay on the Foundations of Geometry*. NY: Dover Publications, Inc.
- Russell, B. (1993). *Introduction to Mathematical Philosophy*. New York: Dover Publications, Inc.
- Sedley, D. (1985). The Stoic Theory of Universals. *Southern Journal of Philosophy*. XXIII, (Suppl.), 87-92.
- Sellars, W. (1955, Ιουλ.). Vlastos and "The Third Man". *The Philosophical Review*. 64, (3), 405-437.
- Seneca, L. A. (έκδοση 1925). *Ad Lucilium Epistulae Morales* (Vols. 1-3). (R. M. Gummere, μεταφρ.). London: William Heinemann.
- Sextus Empiricus. (έκδοση 1842). *Άπαντα*. Berolini: Ge. Reimeri.
- Sextus Empiricus. (έκδοση 2005). *Against the Logicians*. (R. Bett, μεταφρ.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Sextus Empiricus. (έκδοση 2007). *Outlines of Scepticism*. (J. Annas & J. Barnes επιμ.) Cambridge: Cambridge University Press.
- Shapiro, S. (2000). *Thinking About Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Sica, G. (επιμ.) (2006). *What is Category Theory*. Monza, Italy: Polimetrica, International Scientific Publisher.
- Simplicius. (έκδοση 1907). *In Aristotelis categorias commentarium*. (ed. K. Kalbfleisch) *Simplicii in Aristotelis categorias commentarium* [*Commentaria in Aristotelem Graeca*]. 8. Berlin: Reimer.
- Singer, P. (2006). *Χέγκελ*. (Μ. Χαραλάμπη, μεταφρ.). Αθήνα: Πολύτροπον. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1983)
- Smith, N. K. (1927). The Nature of Universals (I). *Mind*. 36, (142), 137-157.

- Smith, N. K. (1927). The Nature of Universals (II). *Mind*. 36, (143), 265-280
- Smith, N. K. (1927). The Nature of Universals (III). *Mind*. 36, (144), 393-422.
- Snell, B. (<sup>4</sup>1997). *Η ανακάλυψη του πνεύματος: Ελληνικές ρίζες της ευρωπαϊκής σκέψης*. (Δ. Ι. Ιακώβ, μεταφρ.). Αθήνα: Μ. Ι. Ε. Τ. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε το 1975).
- Spade, P. V. (επιμ.) (1994). *Five Texts on the Medieval Problem of Universals*. Indianapolis, Indiana: Hackett Publishing Company.
- Stern, R. (2007). Hegel, British Idealism, and the Curious Case of the Concrete Universal. *British Journal for the History of Philosophy*, 15 (1), 115-153.
- Stobaeus, J. *Anthologium*. (ed. C. Wachsmuth and O. Hense), *Ioannis Stobaei anthologium*, (5 vols). Berlin: Weidmann.
- Taylor, E. A. (2003). *Πλάτων: Ο άνθρωπος και το έργο του*. (Ι. Αρζόγλου, μετ.). Αθήνα: Μ.Ι.Ε.Τ.
- Vincelette, A. (2009). *Recent Catholic Philosophy: The Nineteenth Century*. Milwaukee, Wisconsin: Marquette University Press.
- Vlastos, G. (<sup>2</sup>2000). *Πλατωνικές Μελέτες*. (Ι. Αρζόγλου, μεταφρ.). Αθήνα: Μ.Ι.Ε.Τ. (το πρωτότυπο έργο εκδόθηκε 1973).
- Vlastos, G. (1991). *Socrates: Ironist and Moral Philosopher*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Windelband, W. & Heimsoeth, H. (<sup>2</sup>1986). *Εγχειρίδιο Ιστορίας της Φιλοσοφίας*. (τόμ. α΄). (μετ. Ν. Μ. Σκουτερόπουλος). Αθήνα: Μ.Ι.Ε.Τ.
- Žižek, S. (2008). *The Sublime Object of Ideology*. London: Verso.