ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ Π.Ι.Φ.Μ

Τελικές και Συν-ελεύθερες Συν-άλγεβρες σε Προσιτές Κατηγορίες

Διδακτορική Διατριβή

Απόστολος Ι. Ματζάρης

ΠΑΤΡΑ 2011

Στους γονείς μου και στη Δεσποινούλα

ευχαριστίες

Ένα μεγάλο ταξίδι κάπου εδώ τελειώνει, στη διάρκεια του συνέβησαν πολλά ευχάριστα αλλά και κάποια δυσάρεστα γεγονότα που με σημάδεψαν. Κάποιοι άνθρωποι που θα ήθελα να βρίσκονται μαζί μου τούτη τη στιγμη δυστυχώς έχουν "φύγει". Όλα αυτά τα χρόνια που πέρασαν θέλω να πιστεύω ότι με βοήθησαν να γίνω πρώτα απ'όλα καλύτερος άνθρωπος και στη συνέχεια καταρτισμένος επιστήμονας. Πυξίδα στο μακρύ αυτό ταξίδι είχα την αγάπη μου για τα μαθηματικά και κυρίως για την θεωρία κατηγοριών. Ο άνθρωπος που με πρωτοέφερε σε επαφή με το κομμάτι αυτό των μαθηματικών είναι ο καθηγητής κ. Κωνσταντίνος Δρόσος τον οποίο αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω πρώτο. Σε κάθε ταξίδι πάντα χρειάζεται ένας καλός οδηγός, εγώ είχα την τύχη να έχω οδηγό μου ένα σπάνιο άνθρωπο, τον Επίκουρο καθηγητή κ. Παναγή Καραζέρη ο οποίος με ενέπνευσε και μου στάθηκε σα δάσκαλος, σαν φίλος και σαν πατέρας. Χωρίς την σοφή καθοδήγηση και συμπαράσταση του δεν θα είχα φτάσει στο προορισμό μου. Τον ευχαριστώ μέσα από την καρδιά μου για όλα όσα έκανε και ειλικρινά θεωρώ τυχερούς όσους βρεθούν στην ίδια θέση με μένα και συνεργαστούν μαζί του. Ευχαριστώ επίσης τη σύζυγό του Λένα Κανακάρη και τις δυο τους κόρες Ζωή και Μάγια για τις ευχάριστες στιγμές που περάσαμε όλα αυτά τα χρόνια. Η δουλειά που κάναμε θέλω να πιστεύω ότι βάζει ένα λιθαράκι στο μαθηματικό οικοδόμημα. Σημαντικό ρόλο σ'όλη αυτή τη προσπάθεια είχε ο συνεργάτης και φίλος Jiri Velebil, καθηγητής στο Technical University of Prague. Η συνεργασία μαζί του βοήθησε καταλυτικά στην επίτευξη των ερευνητικών αποτελεσμάτων, τον ευχαριστώ για την συνεργασία μας καθώς και για τις ωραίες και εποικοδομητικές μέρες που πέρασα προσκεκλημένος του στην Πράγα.

Συνοδοιπόρο στο μακρύ αυτό ταξίδι είχα τον Γρηγόρη Προτσώνη, έναν άνθρωπο που με τίμησε με την φιλία του και μου στάθηκε σε δύσκολες στιγμές σαν αδερφός. Τώρα που και αυτός φτάνει στο τέλος του δικού του ταξιδιού του εύχομαι τα καλύτερα. Μέσω του Γρηγόρη θα ήθελα να ευχαριστήσω και τον αδερφό του Παναγιώτη Προτσώνη για την φιλία και συμπαραστασή του. Με τον Γρηγόρη περάσαμε πολλά μαζί τα οποία πάντα θα τα θυμάμαι με αγάπη. Οι ατέλειωτες ώρες στο γραφείο είναι ένα απ'αυτά, ένα γραφείο που το ομόρφυναν με τις παρουσίες τους οι συναδέλφισες υποψήφιες διδάκτορες Μαρία Καίσαρη και Φωτεινή Μεγάλου, τις οποίες ευχαριστώ για την άψογη συνεργασία και σχέση μας

και τις εύχομαι σύντομα να βρεθούν στην ίδια ευχάριστη θέση. Ιδιαίτερα θέλω να σταθώ στην Φωτεινή Μεγάλου, μια ξεχωριστή κοπέλα που με την πραγματική της αγάπη και το αληθινό ενδιαφέρον της για μένα με βοήθησε και συνεχίζει να με βοηθάει όσο κανείς.

Συμπαραστάτες σ'όλες αυτές τις ατελείωτες ώρες "διαβάσματος" είχαμε πολύ καλούς φίλους-συναδέλφους που με τον τρόπο τους κατάφεραν οι ώρες παραμονής μας στο γραφείο καθώς και οι υπόλοιπες ώρες, νυχτερινές κυρίως, να κυλούν διασκεδαστικά και γεμάτες ευχάριστα απρόοπτα: Ο Θοδωρής Κουλούκας και η Ελένη Χριστοδουλίδου πάντα είχαν μια καλή ιδέα για διασκέδαση, όταν βέβαια δεν είχαν δουλειά. Ο Σταύρος Αναστασίου και ο Νίκος Καλλίνικος πάντα πρόθυμοι για ένα τελευταίο ποτό. Ο Σωτήρης Κωνσταντίνου-Ρίζος, οι "δολοπλοκίες" του οποίου και οι αντιπαραθέσεις του με όλους μας, έδιναν καθημερινά μια ευχάριστη νότα. Οι Δημήτρης Νομικός και Τάσος Τόγκας, μπορεί να μην έρχονταν συχνά στην Πάτρα αλλά η έλευση τους, σε μεγάλες κυρίως στιγμές για την παρέα, συνοδευόταν πάντα από ξενύχτι μέχρι πρωίας. Ο Γιώργος Κανελλόπουλος, είχε την "τύχη" να είναι στο ίδιο γραφείο με την Ελένη, τον Θοδωρή και τον Σταύρο, προσπαθώντας να κρατησει τις ισορροπίες. Κλείνοντας αυτόν τον κύκλο των φίλων δεν μπορώ να μην αναφέρω τον Τάσο Παρασκευά την "ήρεμη δύναμη" της παρέας, πάντα λιγομίλητος άλλα τόσο εύστοχος στις παρατηρήσεις του, καθώς και τον Σωτήρη Ντελή, πάντα έτοιμο για φιλοσοφικές και όχι μόνο συζητήσεις.

Τους ευχαριστώ όλους και τους εύχομαι κάθε προσωπική και επαγγελματική επιτυχία.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ θέλω να πω και στους Ανδρέα Παπαδόπουλο, Νίκο Παπά, Φάνη Ρίζο και Νίκο Χρυσοχοΐδη που όλα αυτά τα χρόνια που ζω στην Πάτρα, τα οποία δεν είναι και λίγα, ήταν πάντα δίπλα μου, τους θεωρώ πραγματικά οικογένεια μου.

Οι γονείς μου Γιάννης και Δέσποινα, σ'αυτούς οφείλω τα πάντα. Στάθηκαν δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια ακούραστα χωρίς να λογαριάσουν τίποτα αφήνοντας με να ακολουθήσω το όνειρο μου. Οι λέξεις δεν μπορούν να περιγράψουν τα αισθήματα μου γι'αυτούς τους ανθρώπους, πέρα από την αγάπη που τους έχω θα τους ευγνωμονώ πάντα για όλα όσα έκαναν και συνεχίζουν να κάνουν για μένα. Ιδιαίτερα ευχαριστώ την αγαπημένη μου αδερφή Μάνια, η στήριξη της οποίας και η επιμονή της να συνεχίσω μέχρι το τέλος παρά τις δυσκολίες με βοήθησε αφάνταστα. Περισσότερο όμως την ευχαριστώ για την πανέμορφη ανηψιά που μου χάρισε.

Τώρα που αυτό το ταξίδι τελειώνει ετοιμάζομαι για ένα νέο, πολύ διαφορετικό από το προηγούμενο. Συνοδοιπόρο στο νέο αυτό ταξίδι έχω τον φίλο και συνάδελφο από το πανεπιστήμιο Σπύρο Δαφνή, τον οποίο ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη του και την άψογη συνεργασία μας.

Τέλος ευχαριστώ τον κ. Απόστολο Μπεληγιάννη, Αναπληρωτή καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, για τις εύστοχες παρατηρήσεις του. Επίσης τον μαθητή του και φίλο μου Μάκη Ψαρουδάκη στον οποίο εύχομαι κάθε επιτυχία στο δικό του ταξίδι.

Η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε με την οικονομική υποστήριξη του προγράμματος Βασικής Έρευνας "Κ. Καραθεοδωρή".

Απόστολος Ματζάρης

Πάτρα, Νοέμβριος 2011

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Γιατί συν-άλγεβρα; Με το άκουσμα του όρου *συν-άλγεβρα* οι περισσότεροι (μαθηματικοί και μη μαθηματικοί) αναγνωρίζουν τον όρο *άλγεβρα* και υποθέτουν ότι πρόκειται για κάτι που είναι "αντίθετο" - "δυϊκό" της άλγεβρας. Εν πολλοίς έχουν δίκιο, μόνο που η έννοια του αντίθετου δεν είναι άμεσα κατανοητή. Για να γίνει αυτό θα πρέπει οι δύο έννοιες να οριστούν στην ίδια "γλώσσα", που δεν είναι άλλη απο αυτή της Θεωρίας Κατηγοριών.

Ως γνωστόν, η άλγεβρα είναι το κομμάτι των μαθηματικών που μελετά σύνολα εφοδιασμένα με πράξεις (αλγεβρικές δομές) οι οποίες πληρούν κάποιες ισότητες. Παράδειγματα τέτοιων συνόλων είναι οι ομάδες, οι δακτύλιοι, οι διανυσματικοί χώροι κ.α. Η *καθολική άλγεβρα* είναι κομμάτι της άλγεβρας όπου οι αλγεβρικές δομές μελετώνται σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Στο πλαίσιο αυτό μπορείς κανείς να μελετήσει με ενιαίο τρόπο έννοιες όπως αυτές του ομομορφισμού, της υπο-άλγεβρας, της άλγεβρας πηλίκο κ.α.

Ένα επιπλέον βήμα γενίκευσης επιτυγχάνεται αν δούμε τις αλγεβρικές δομές υπό το πρίσμα (χρησιμοποιώντας "εργαλεία") της Θεωρίας Κατηγοριών. Όπως είπαμε παραπάνω, οι αλγεβρικές δομές αποτελούνται από ένα σύνολο (φορέα) εφοδιασμένο με κάποιες (n-μελείς) πράξεις που πληρούν κάποιες ισότητες. Για παράδειγμα, ένα μονοειδές $(G, *, e)$ αποτελείται από ένα σύνολο στοιχείων, G, μια διμελή εσωτερική πράξη (η οποία είναι προσεταιριστική) και ένα ουδετερο στοιχείο. Η διμελής εσωτερική πράξη είναι μια απεικόνιση της μορφής: $* : G \times G \longrightarrow G$. Το ουδέτερο στοιχείο είναι ένα στοιχείο του συνόλου φορέα έστω $e \in G$, όπου $*(e, a) = a = *(a, e)$, για κάθε $a \in G$. Αν θεωρήσουμε την κατηγορία των συνόλων Set, και τον ενδοσυναρτητή $F : \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$, με $F(X) = (X \times X) + 1$, $(X \in \mathsf{Set})$, την ξένη ένωση του καρτεσιανού συνόλου $X \times X$ με το μονοσύνολο $1 = \{*\}$ (που είναι το *τελικό αντικείμενο* της κατηγορίας Set), η δομή G παίρνει την εξής μορφή: Ο φορέας G της δομής είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας Set και η δομή περιγράφεται από ένα μορφισμό $d : F(G) \longrightarrow G$. Στο πλαίσιο αυτό, ο μορφισμός d δίνεται ως το ζεύγος συναρτήσεων $d = (*, e)$, όπου $e : 1 \longrightarrow G$ είναι η επιλογή του ουδέτερου στοιχείου. Τέλος, οι ισότητες που πρέπει να πληρούνται ώστε η δομή να είναι μονοειδές δίνονται από αντιμεταθετικά διαγράμματα όπως το παρακάτω, που εκφράζει την προσεταιριστικότητα της πράξης $*$:

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "\mathrm{id}_G \times *"] \arrow[d, "* \times \mathrm{id}_G"'] & G \times G \arrow[d, "*"] \\ G \times G \arrow[r, "*"'] & G \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Όπως βλέπουμε οι γνωστές μας αλγεβρικές δομές εκφράζονται ως ένα αντικείμενο X της κατηγορίας των συνόλων **Set** εφοδιασμένο μ' ένα μορφισμό της μορφής $d : F(X) \longrightarrow X$. Ανάλογα λοιπόν με το πόσο "πλούσια" είναι η δομή που θέλουμε να εκφράσουμε, απαιτούνται ορισμένες επιπλέον συνθήκες οι οποίες έχουν να κάνουν με την μορφή του συναρτητή, την αντιμετάθεση κάποιων διαγραμμάτων και τις ιδιότητες της κατηγορίας των συνόλων. Αυτή η προσέγγιση μας επιτρέπει, ερμηνεύοντας την παραπάνω έννοια δομής σε κατάλληλες κατηγορίες που έχουν τις απαραίτητες ιδιότητες, να μελετήσουμε με ενιαίο τρόπο δομές όπως του τοπολογικού μονοειδούς, της τοπολογικής ομάδας, της ομάδας Lie, της αφφινικής ομάδας κ.λ.π. Η αφφινική ομάδα είναι με αυτήν την έννοια μία δομή ομάδας ερμηνευμένη στην κατηγορία των αφφινικών σχημάτων (affine schemes). Η τελευταία όμως είναι η δυϊκή της κατηγορίας των αντιμεταθετικών δακτυλίων. Έτσι η δομή της αφφινικής ομάδας αντιστοιχεί σε ένα μορφισμό $G \longrightarrow (G \otimes G) \times G \times \mathbb{Z}$, όπου τώρα $G \otimes G$ είναι το συν-γινόμενο (co-product) στην κατηγορία των αντιμεταθετικών δακτυλίων και $\mathbb{Z}$ το αρχικό αντικείμενο (initial object) αυτής της κατηγορίας.

Αν έχουμε τώρα μια κατηγορία $\mathscr{C}$ και ένα ενδοσυναρτητή $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$, με τον όρο F- *συν-άλγεβρα* (co-algebra), ή απλά *συν-άλγεβρα*, ορίζουμε ένα ζευγάρι (C, e), όπου C ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{C}$ και ο μορφισμός $e : C \longrightarrow F(C)$. Παρατηρούμε ότι, ο λεγόμενος, δομικός μορφισμός της συν-άλγεβρας έχει αντίθετη φορά από αυτόν της άλγεβρας. Επίσης, όπως θα δούμε παρακάτω, ερμηνεύοντας τα χαρακτηριστικά των αλγεβρών και των συν-αλγεβρών, για κάποιους συγκεκριμένους ενδοσυναρτητές, αυτά είναι δυϊκά. Γι'αυτό λέμε ότι, κατά κάποιο τρόπο, η έννοια της συν-άλγεβρας είναι δυϊκή αυτής της άλγεβρας.

Οι συνάλγεβρες εισήχθηκαν πριν από περίπου τριάντα χρόνια, από τον K.Drbohlav, ([DK]), ως σύνολα A εφοδιασμένα με μια οικογένεια αποικονίσεων f_i από το A στο n_i-στό άθροισμα $n_i \cdot A$. Δεν έτυχαν μεγάλης προσοχής και ο βασικός λόγος ήταν η έλλειψη παραδειγμάτων ζωτικής σημασίας. Μόνο όταν επιτεύχθηκε η σωστή γενίκευση και ορίστηκαν με την βοήθεια της Θεωρίας Κατηγοριών, υπήρξαν θεωρίες ενδιαφέροντος (π.χ συστήματα μετάβασης(transition systems), αυτόματα (automata)) που ταίριαξαν σ'αυτό το πλαίσιο.

Τις τελευταίες δεκαετίες η επιστήμη των υπολογιστών γνώρισε τεράστια ανάπτυξη, ειδικότερα το κομάτι της σημασιολογίας των γλωσσών προγραμματισμού. Πυλώνας αυτής της ανάπτυξης ήταν η *θεωρία τύπων δεδομένων (data type theory)*. Στα πλαίσια της θεωρίας αυτής αναπτύχθηκαν αλγεβρικές τεχνικές προκειμένου να λυθούν ζητήματα σχετικά με δομές ενδιαφέροντος, τις λεγόμενες δομές δεδομένων (data structures). Στις τεχνικές αυτές η κατηγορική έννοια της άλγεβρας έχει κυρίαρχο ρόλο. Οι δομές δεδομένων αναπαρίστανται ως άλγεβρες, για κατάλληλους ενδοσυναρτητές και το ζητούμενο σε πληθώρα περιπτώσεων έχει να κάνει με την ύπαρξη ή μη της λεγόμενης *αρχικής άλγεβρας*, καθώς και με τον υπολογισμό αυτής.

Στην πορεία προέκυψε ότι ορισμένες δομές που εμπεριέχουν κάποια έννοια *κατάστασης (state)* η οποία μεταβάλλεται με διάφορους τρόπους, δεν μπορούν να αναπαρασταθούν ως άλγεβρες. Για να προσεγγίσουμε τις δομές αυτές χρησιμοποιούμε διαφορετικά "εργαλεία", *αυτόματα ή συστήματα μετάβασης*, που όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3 αποτελούν παραδείγματα συν-αλγεβρών. Αυτό είχε ως συνέπεια την ραγδαία ανάπτυξη των συν-αλγεβρών, ιδιαίτερα προς την κατεύθυνση αναζήτησης της *τελικής συν-άλγεβρας (final co-algebra)*, δυϊκή έννοια της αρχικής άλγεβρας (initial algebra). Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι, σε αντιδιαστολή με το διακριτό σύνολο των φυσικών αριθμών που ανακύπτει ως αρχική άλγεβρα, το συνεχές των πραγματικών αριθμών (που ως τύπος δεδομένων περιέχει στοιχεία που δεν περατώνονται σε πεπερασμένο χρόνο) υλοποιείται ως τελική συν-άλγεβρα ([F]).

Η σχέση μεταξύ άλγεβρας και συν-άλγεβρας στη βιβλιογραφία χαρακτηρίζεται ποικιλοτρόπως, από απλά δυϊκή σχέση ως σχέση "κατασκευής -παρατήρησης". Στο Κεφάλαιο 3 θα δούμε αναλύτικά παράδειγμα άλγεβρας και συν-άλγεβρας για τον ίδιο ενδοσυναρτητή, αιτιολογώντας τον χαρακτηρισμό "κατασκευής - παρατήρησης". Μια άλλη αιτιολογία αυτών των χαρακτηρισμών έχει να κάνει με τις κατηγορίες που προσδιορίζουν οι άλγεβρες και οι συν-άλγεβρες, αντίστοιχα. Αν θεωρήσουμε μια κατηγορία $\mathscr{C}$ και ένα ενδοσυναρτητή $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ πάνω σ'αυτήν, συμβολίζουμε με $\mathsf{Alg}(F)$ την κατηγορία με αντικείμενα άλγεβρες $(C, d : F(C) \longrightarrow C)$. Μορφισμός μεταξύ δύο αντικειμένων $(C, d), (C', d')$, είναι ένας μορφισμός $f : C \longrightarrow C'$ της $\mathscr{C}$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "F(f)"'] & C \arrow[d, "f"] \\ F(C') \arrow[r, "F(d')"'] & C' \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

αντιμεταθετικό. Αντίστοιχα, με $\mathsf{Coalg}(F)$ συμβολίζουμε την κατηγορία με αντικείμενα συν-άλγεβρες της μορφής $(C, e : C \longrightarrow F(C))$ και όπως και πριν, μορφισμοί μεταξύ συν-αλγεβρών είναι μορφισμοί της κατηγορίας $\mathscr{C}$ που καθιστούν το αντίστοιχο διάγραμμα του (1.2) αντιμεταθετικό. Στην ουσία είναι το ίδιο διάγραμμα με αντεστραμμένους τους δομικούς μορφισμούς. Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι δύο αυτές κατηγορίες είναι δυϊκές, δηλ. $\mathsf{Coalg}(F) = (\mathsf{Alg}(F^{op}))^{op}$. Πέρα από το τυπικό επίπεδο ο δυϊσμός προχωράει σε βαθύτερα γνωρίσματα των κατηγοριών αλγεβρών και συν-αλγεβρών, αντιστοίχως. Έτσι λοιπόν το θεώρημα του Birkhoff που χαρακτηρίζει κατηγορίες αλγεβρών, για ενδοσυναρτητές στην κατηγορία των συνόλων, ως κλάσεις δομών που είναι κλειστές ως προς γινόμενα, υποδομές και πηλίκα έχει το αντίστοιχό του στη θεωρία των συν-αλγεβρών, το οποίο μας δίνει το χαρακτηρισμό κατηγοριών συν-αλγεβρών ως κλάσεων δομών που είναι κλειστές ως προς συν-γινόμενα, πηλίκα και υπο-συν-άλγεβρες.

Ένα από τα πιο σοβαρά ζητήματα της θεωρητικής πληροφορικής είναι η εύρεση *σταθερών σημείων (fixed points)*. Θύμιζουμε ότι αν έχουμε μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow X$, ένα σημείο x_0 του συνόλου X λέγεται *σταθερό* αν $f(x_0) = x_0$. Για ένα ενδοσυναρτητή F σε μια κατηγορία $\mathscr{C}$, ένα αντικείμενο $C_0 \in \mathscr{C}$ είναι *σταθερό* αν υπάρχει ισομορφισμός $F(C_0) \cong C_0$. Μια άλγεβρα, για ένα ενδοσυναρτητή, καλείται *αρχική* αν υπάρχει μοναδικός μορφισμός αλγεβρών από αυτή προς οποιαδήποτε άλλη άλγεβρα, του ίδιου ενδοσυναρτητή. Δυϊκά μια συν-άλγεβρα, για ένα ενδοσυναρτητή, καλείται *τελική* αν απο οποιαδήποτε συν-άλγεβρα, του ίδιου ενδοσυναρτητή, υπάρχει μοναδικός μορφισμός συν-αλγεβρών προς αυτή. Με άλλα λόγια, η αρχική άλγεβρα είναι το *αρχικό αντικείμενο* της κατηγορίας των αλγεβρών $\mathsf{Alg}(F)$, ενώ η τελική συν-άλγεβρα το *τελικό αντικείμενο* της κατηγορίας των συν-αλγεβρών $\mathsf{Coalg}(F)$ (για ένα ενδοσυναρτητή F). Ο J.Lambek ([La]) απέδειξε ότι, αν μια άλγεβρα (αντιστοιχα, μια συν-άλγεβρα) είναι αρχική (αντίστοιχα τελική), τότε ο δομικός μορφισμός της είναι ισομορφισμός. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική και η τελική συν-άλγεβρα (αν υπάρχουν) είναι σταθερά σημεία. Επίσης ένα σταθερό σημείο για κάποιο ενδοσυναρτητή μπορεί να θεωρηθεί και ως άλγεβρα και ως συν- αλγεβρα. Αν δούμε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως κατηγορία και θεωρήσουμε ένα ενδοσυναρτητή πάνω σ'αυτό, η αρχική άλγεβρα (αν υπάρχει) είναι, όπως είπαμε, σταθερό σήμειο. Αν υπάρχουν και άλλα σταθερά σημεία, από την καθολική ιδιότητα της αρχικής άλγεβρας, ερμηνευμένη στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο, προκύπτει ότι η αρχική άλγεβρα είναι το *μικρότερο σταθερό σημείο*. Αντίστοιχα, η τελική συν-άλγεβρα είναι το *μέγιστο σταθερό σημείο*. Αναφορικά με οποιαδήποτε τώρα κατηγορία και ενδοσυναρτητή, θεωρούμε ότι η αρχική άλγεβρα γενικεύει την έννοια του *μικρότερου σταθερου σημείου*, ενώ αντίστοιχα η τελική συν-άλγεβρα την έννοια του *μέγιστου σταθερου σημείου.*

Η χρησιμότητα ύπαρξης αρχικών (αντιστοίχως, τελικών) συναλγεβρών, πέρα από το γεγονός ότι πολλές δομές ενδιαφέροντος μπορουν να ιδωθούν ως τέτοιες, έχει να κάνει και με την δημιουργία"νέων μορφισμών". Συγκεκριμένα, εκμεταλλευόμενοι τη μοναδικότητα ύπαρξης μορφισμού απο την αρχική άλγεβρα σε οποιαδήποτε άλλη (αντιστοίχως, την μοναδικότητας απο οποιαδήποτε άλλη συν-άλγεβρα προς την τελική), μπορούμε να παράξουμε μορφισμό αλγεβρών (αντιστοίχως, συν-αλγεβρών) έχοντας μόνο μια τυχαία άλγεβρα (αντιστοίχως, συν-άλγεβρα). Η μέθοδος αυτή βρίσκεται ουσιαστικά πίσω από τη γνωστή διαδικασία των ορισμών μέσω *επαγωγής (induction)*, αξιοποιώντας το γεγονός ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι αρχική άλγεβρα για τον ενδοσυναρτητή $F(X) = 1 + X$ επί της κατηγορίας των συνόλων. Δυϊκά, η μέθοδος της *συν-επαγωγής (co-induction))* μας επιτρέπει τον ορισμό απεικονίσεων και την απόδειξη ισοτήτων αξιοποιώντας την ύπαρξη και τη μοναδικότητα μορφισμών προς την τελική συν-άλγεβρα. Η μέθοδος αυτή αποτελεί βασικό όχημα στη θεωρητική πληροφορική για τον ορισμό και την απόδειξη ιδιοτήτων που διέπουν δομές δεδομένων όταν τα στοιχεία τους είναι άπειρα σε μέγεθος (π.χ της δομής των πραγματικών αριθμών). Στο Κεφάλαιο 3 θα δούμε αναλυτικό παράδειγμα.

Η παρούσα διατριβή ασχολείται με την ύπαρξη τελικών και συν-ελεύθερων συν-αλγεβρών σε συγκεκριμένα είδη κατηγοριών (πεπερασμένα προσιτές και τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμες). Η κατηγορία των συν-αλγεβρών για ένα ενδοσυναρτητή, υπό προϋποθέσεις, έχει (κάποια) συνόρια και όρια. Οι προϋποθέσεις αυτές έχουν να κάνουν με ιδιότητες που η κατηγορία και ο ενδοσυναρτητής πρέπει να έχουν.
Αν $\mathscr{C}$ είναι μια κατηγορία και $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ ένας ενδοσυναρτητής, εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει τα παρακάτω:

1. Η κατηγορία $\mathsf{Coalg}(F)$ έχει συνόρια υπό τον όρο ότι υπάρχουν στη $\mathscr{C}$.

2. Η κατηγορία $\mathsf{Coalg}(F)$ έχει όρια αν η $\mathscr{C}$ έχει και επίσης αυτά διατηρούνται από τον ενδοσυναρτητή F.

Κάποιες άλλες, πολύ πιο ουσιώδεις διαπιστώσεις σε σχέση με την κατηγορία $\mathsf{Coalg}(F)$ είναι:

- Αν $\mathscr{C}$ είναι προσιτή κατηγορία και F ένας πεπερασμένα προσδιορισμένος ενδοσυναρτητής στη $\mathscr{C}$, τότε η κατηγορία $\mathsf{Coalg}(F)$ είναι προσιτή ([MPa]).

- Αν $\mathscr{C}$ είναι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη κατηγορία (locally finitely presentable), συντομογραφικά τ.π.π, και F πεπερασμένα προσδιορισμένος ενδοσυναρτητής στη $\mathscr{C}$, τότε η κατηγορία $\mathsf{Coalg}(F)$ είναι τ.π.π ([W]).

- Αν $\mathscr{C}$ είναι κατηγορία προδραγμάτων (presheaves) επί μίας μικρής κατηγορίας και F ενδοσυναρτητής που διατηρεί ευρείες-εφελκύσεις (wide-pullbacks), τότε η κατηγορία $\mathsf{Coalg}(F)$ είναι κατηγορία προδραγμάτων ([W]).

Πολλές τεχνικές έχουν αναπτυχθεί για την εύρεση της τελικής συν-άλγεβρας, σε κατηγορίες που μας ενδιαφέρουν στα μαθηματικά και την πληροφορική. Θα αναφέρουμε σε κάποιες απο αυτές:

- Ίσως η πιο γνωστή τεχνική είναι αυτή που μας δίνει τον φορέα της τελικής συνάλγεβρας ως το όριο της ω^{op}-αλυσίδας:

$$1 \xleftarrow{!} F(1) \xleftarrow{F(!)} F^2(1) \leftarrow \dots$$

  δηλ. $F^\omega = \lim F^n(1)$, όπου 1 είναι το τελικό αντικείμενο και $! : F(1) \to 1$ είναι ο μοναδικός μορφισμός προς το τελικό αντικείμενο. Για να εφαρμοστεί αυτή πρέπει η κατηγορία μου να έχει, όρια ω^{op}-αλυσίδων τα οποία ο ενδοσυναρτητής F να διατηρεί, καθώς και τελικό αντικείμενο.
  Η τεχνική αυτή εφαρμόζεται, αν η κατηγορία $\mathscr{K}$ είναι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη και ο ενδοσυναρτητής F *συνεχής* (δηλ. διατηρεί όρια ω^{op}-αλυσίδων). Επίσης, αν $\mathscr{K} = \mathsf{Set}$ και ο ενδοσυναρτητής F είναι πεπερασμένα προσδιοριμένος (δηλ. διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια). Σ'αυτήν όμως την περίπτωση ο φορέας της τελικής συνάλγεβρας T λαμβάνεται σε "2ω-βήματα", δηλ.

$$T = \lim_{n<\omega} F^n(F^\omega(1))$$

- Ένας πιο γενικός τρόπος είναι αυτός που υπολογίζει την τελική συνάλγεβρα ως το συνόριο (colimit) όλων των συν-αλγεβρών στην κατηγορία $\mathsf{Coalg}(F)$. Ο τρόπος όμως αυτός έχει ένα ψεγάδι: το συνόριο όλων των συναλγεβρών μπορεί να μην υπάρχει (ο φορέας της τελικής συνάλγεβρας γενικά θα είναι μια κλάση). Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί αν υποθέσουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{Coalg}(F)$ έχει ένα σύνολο γεννητόρων (set of generators).

- Το άρθρο μας, [KMV], είναι μια συμβολή προς αυτή την κατεύθυνση όπως θα αναλύσουμε στο Κεφάλαιο 4. Εδώ θα πρέπει να τονίσουμε ότι, στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathscr{K}$ είναι τ.π.π και ο ενδοσυναρτητής F πεπερασμένα προσδιορισμένος, γνωρίζουμε ότι η τελική συνάλγεβρα υπάρχει πάντα λόγω του ότι ο επιλήσμων συναρτητής $U : \mathsf{Coalg}(F) \to \mathscr{K}$ έχει δεξιά προσαρτημένο (right adjoint) συναρτητή. Δεν γνωρίζουμε όμως πώς αυτή εκφράζεται, δηλ. δεν έχουμε μια γενική περιγραφή της.

Στο *Κεφάλαιο 2*, παραθέτουμε όλες τις βασικές γνώσεις από την Θεωρία Κατηγοριών που χρειάζονται προκειμένου ο αναγνώστης να κατανοήσει τα αποτελέσματα της παρούσας διατριβής.

Το *Κεφάλαιο 3* αποτελεί μια βασική εισαγωγή στις συν-άλγεβρες. Χρησιμοποιώντας απλά παραδείγματα δυναμικών συστημάτων, αναλύοντας την "συμπεριφορά" τους και αναπαριστώντας την μαθηματικά, βλέπουμε ότι δίνονται ως συν-άλγεβρες στην κατηγορία των συνόλων. Στη συνέχεια δίνουμε τον γενικό ορισμό της συν-άλγεβρας σε οποιαδήποτε κατηγορία, και αναλύουμε την σχέση της με την άλγεβρα. Ορίζουμε την κατηγορία των συν-αλγεβρών, αφού πρώτα ορίσουμε τι είναι μορφισμός συν-αλγεβρών. Αναφέρουμε την έννοια της τελικής συν-άλγεβρας, σχολιάζοντας την δυϊκότητα της με την αρχική άλγεβρα και το γεγονός ότι αποτελούν σταθερά σημεία. Κλείνοντας το κεφάλαιο παραθέτουμε δύο παραδείγματα προκειμένου να γίνει κατανοητή η σπουδαιότητα ύπαρξης της τελικής συν-άλγεβρας.

Στο *Κεφάλαιο 4* παρουσιάζουμε την βασική συνεισφορά της παρούσας διατριβής. Την κατασκευή της τελικής συνάλγεβρας για πεπερασμένα προσδιορισμένους (finitary) ενδοσυναρτητές πάνω σε πεπερασμένα προσιτές κατηγορίες (finitely accessible categories). Για το σκοπό αυτό εισάγουμε μια νέα τεχνική, με την οποία κατασκευάζουμε τον φορέα της τελικής συνάλγεβρας T ως συνόριο πεπερασμένων παρουσιάσιμων αντικειμένων (finitely presentable objects), παραμετρικοποιημένου απο μια ειδική κατηγορία την οποία ονομάζουμε *κατηγορία συμπλόκων (complex category)*. Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε δύο ενότητες:

Στην πρώτη ενότητα κατασκευάζουμε την τελική συνάλγεβρα για πεπερασμένα προσδιορισμένους ενδοσυναρτητές πάνω όμως σε τοπικά πεπερασμένες παρουσιάσιμες κατηγορίες (τ.π.π). Θυμίζουμε πως είναι γνωστό ότι η τελική συνάλγεβρα πάντα υπάρχει σ'αυτήν την περίπτωση. Επίσης, όπως προαναφέραμε, υπάρχουν τρόποι περιγραφής της σε επιμέρους περιπτώσεις. Εμείς συνεισφέρουμε εδώ μία ενιαία αναλυτική περιγραφή της. Επιπλέον εδώ εξοικειώνεται ο αναγνώστης με το βασικό εργαλείο της τεχνικής μας που είναι η *κατηγορία των συμπλεγμάτων*. Δείχνουμε πώς ένα *σύμπλεγμα* μπορεί να ανακύψει με φυσικό τρόπο χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της τ.π.π κατηγορίας όταν προσπαθούμε να μιμηθούμε την απόδειξη του θεωρήματος σταθερού σημείου των Knaster-Tarski.

Στην δεύτερη ενότητα αναπτύσουμε την μέθοδό μας όταν η κατηγορία είναι πεπερασμένα προσιτή και ο ενδοσυναρτητής πεπερασμένα προσδιοριμένος. Σ'αυτήν την περίπτωση βασιζόμαστε σε ιδέες που αναπτύχθηκαν από τον Tom Leinster για την μελέτη αυτο-όμοιων αντικειμένων (self-semilar objects) στην τοπολογία, [**?**]. Εδώ χρησιμοποιούμε τα εξής γνωστά αποτελέσματα από τη θεωρία των προσιτών κατηγοριών ([MPa]): Κάθε πεπερασμένα προσιτή κατηγορία $\mathscr{K}$ είναι ισοδύναμη με μια κατηγορία που απαρτίζεται απο επίπεδους συναρτητές (flat functors) και κάθε πεπερασμένα προσδιοριμένος ενδοσυναρτητής (πάνω από την $\mathscr{K}$) είναι ισόμορφος μ'ένα συναρτητή της μορφής $M \otimes -$, όπου M είναι ένα επίπεδο μόδιο (flat module). Με την βοήθεια αυτών καταλήγουμε σ'ένα ισοδύναμο ορισμό της έννοιας του συμπλέγματος καθώς και της κατηγορίας των συμπλεγμάτων. Αυτός μας διευκολύνει τεχνικά στο να διατυπώσουμε συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι η κατασκευή που προτείνουμε εξακολουθεί να δίνει την τελική συν-άλγεβρα στην περίπτωση αυτών των γενικότερων κατηγοριών. Ως συγκεκριμένη εφαρμογή αποδεικνύουμε ότι κάθε πεπερασμένα προσδιορισμένος ενδοσυναρτητής της κατηγορίας των γραμμικών διατάξεων επιδέχεται τελική συν-άλγεβρα. Επίσης στην ενότητα αυτή δείχνουμε πώς η γενική μας περιγραφή της τελικής συν-άλγεβρας μπορεί να εφαρμοστεί για κατάλληλο ενδοσυναρτητή της κατηγορίας των διατεταγμένων συνόλων με διακριτά άκρα δίνοντας το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ ως τελική συν-άλγεβρα.

Το *Κεφάλαιο 5* αποτελεί την άλλη πρωτότυπη συνεισφορά της παρούσας διατριβής. Τροποποιούμε κατάλληλα την έννοια του συμπλέγματος και του μορφισμού ανάμεσά τους. Η κατηγορία στην οποία καταλήγουμε, εφόσον είναι φιλτραρισμένη, παραμετρικοποιεί ένα συν-όριο που μας δίνει τη συν-ελεύθερη συν-άλγεβρα (cofree co-algebra)επί ενός αντικειμένου της υποκείμενης κατηγορίας. Η παραπάνω υπόθεση (δηλαδή, να είναι φιλτραρισμένη η κατηγορία των τροποποιημένων συμπλεγμάτων) πληρείται πάντα στην περίπτωση που η υποκείμενη κατηγορία είναι Scott-πλήρης (Scott-complete). Έτσι έχουμε ένα θεώρημα για την ύπαρξη και την κατασκευή της συν-ελεύθερης συν-άλγεβρας που πηγαίνει πέρα από την περίπτωση των τοπικώς πεπερασμένα παρουσιάσιμων κατηγοριών, για τις οποίες η *ύπαρξη* συν-ελεύθερων συν-αλγεβρών ήταν ήδη γνωστή.

Τα πρωτότυπα αποτελέσματα που βρίσκονται στα Κεφάλαια 4 και 5 της παρούσας διατριβής συμπεριλαμβάνονται στη δημοσιευμένη εργασία ([KMV]) και στην υποβληθείσα προς δημοσίευση ([KMV_2]).

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία από την Θεωρία Κατηγοριών

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε κάποια στοιχεία από την Θεωρία Κατηγοριών, τα οποία θα μας χρειαστούν προκειμένου να διατυπώσουμε τα αποτελέσματα των επόμενων κεφαλαίων. Συγκεκριμένα θα μας απασχολήσουν οι λεγόμενες *πεπερασμένα προσιτές και τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμες κατηγορίες (finitely accessible categories, locally finitely presentable categories)*, τις οποίες θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε με όσο το δυνατόν πιο φυσικό τρόπο. Στην προσπάθεια μας αυτή υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης της παρούσας διατριβής είναι γνώστης κάποιων βασικών εννοιών της Θεωρίας Κατηγοριών, όπως για παράδειγμα της έννοιας, του *συναρτητή*, του *φυσικού μετασχηματισμού* και της *προσάρτησης*.

Για περισσότερες πληροφορίες σε σχέση με τις κατηγορίες αυτές, ενδεικτικά αναφέρουμε τα βιβλία, [AR], [GU] και [MPa].

2.1 Τοπικά Παρουσιάσιμες και Προσιτές Κατηγορίες

Η έννοια της *τοπικά παρουσιάσιμης κατηγορίας* είναι προγενέστερη αυτής της *προσιτής κατηγορίας*. Εισήχθηκε από τους P. Gabriel και F. Ulmer [GU] το 1971. Οι *προσιτές κατηγορίες*, οι οποίες αποτελούν γενίκευση των τοπικών παρουσιάσιμων κατηγοριών, πρωτοεισήχθησαν από τον C. Lair [L] το 1981, αλλά μελετήθηκαν εκτενέστερα από τους M. Makkai και R. Paré ([MPa] 1989) στους οποίους αποδίδεται και ο όρος "προσιτή κατηγορία".

Για να εισάγουμε τις κατηγορίες αυτές θα αναφερθούμε στην ειδική περίπτωση των διατεταγμένων συνόλων, καθώς και κάποιων ιδιαίτερων δομικών χαρακτηριστικών που μπορεί να εμφανίζουν. Θυμίζουμε ότι ένα *μερικώς διατεταγμένο σύνολο (μ.δ.σ)* είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια (διμελή) σχέση διάταξης. Κάθε μ.δ.σ $(P, \leq)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια (μικρή) κατηγορία, όπου αντικείμενα της είναι στοιχεία του συνόλου P και μεταξύ δύο στοιχείων x, y υπάρχει μορφισμός της κατηγορίας, $x \longrightarrow y$, αν και μόνο αν $x \leq y$. Επίσης, κάθε μ.δ.σ μπορεί να ιδωθεί και ως αντικείμενο μιας κατηγορίας, την οποία συμβολίζουμε Pos. Οι μορφισμοί της κατηγορίας αυτής είναι συναρτήσεις μεταξύ μερικώς διατεταγμένων συνόλων που διατηρούν την διάταξη. Δηλαδή, ένας μορφισμός $f : (P, \leq) \longrightarrow (P', \leq')$ της κατηγορίας Pos είναι μια συνάρτηση, $f : P \longrightarrow P'$, τέτοια ώστε αν $x \leq y$ τότε $f(x) \leq' f(y)$.

Έχοντας λοιπόν ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο, θα περιγράψουμε κάποιες κατασκευές - ιδιότητες σ'αυτό και θα δούμε πως αυτές "ερμηνεύονται-γενικεύονται" σε μια κατηγορία. Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις τοπικά παρουσιάσιμες και προσιτές κατηγορίες, ως κατηγορίες μ'αυτές τις ιδιότητες.

Θα ξεκινήσουμε με τις γνωστές έννοιες του ελάχιστου άνω φράγματος (supremum), και του μέγιστου κάτω φράγματος (infimum) ενός υποσυνόλου ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου. Έστω S ένα υποσύνολο ενός μ.δ.σ P, το supremum του S, συνήθως το συμβολίζουμε με $\bigvee S$ ή $\sup S$, είναι ένα στοιχείο του P με τις ιδιότητες:

(i) Για κάθε $s \in S$ ισχύει $s \leq \bigvee S$.

(ii) Αν υπάρχει ένα άλλο στοιχείο $y \in P$ έτσι ώστε $s \leq y$, για κάθε $s \in S$, τότε ισχύει $\bigvee S \leq y$.

Θεωρώντας το μ.δ.σ P ως κατηγορία, αντικαθιστώντας τη σχέση διάταξης "$\leq$" με βέλη "$\longrightarrow$", ο ορισμός του supremum ενός υποσυνόλου S παίρνει την μορφή: Το υποσύνολο S είναι τώρα μια υποκατηγορία της P, το supremum είναι ένα αντικείμενο $T(= \bigvee S)$ της κατηγορίας και οι ιδιότητες $(i), (ii)$ γίνονται:

(i') Για κάθε αντικείμενο $s \in S$ υπάρχει μορφισμός $p_s : s \longrightarrow T$

(ii') Αν υπάρχει ένα άλλο αντικειμένο T' τέτοιο ώστε, για κάθε $s \in S$ να υπάρχει μορφισμός $q_s : s \longrightarrow T'$ τότε υπάρχει (μοναδικός) μορφισμός $e : T \longrightarrow T'$ με την ιδιότητα: $e \cdot p_s = q_s$.

Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε το εξής: το μ.δ.σ ως κατηγορία έχει την ιδιαιτερότητα ότι μεταξύ δύο αντικειμένων του είτε υπάρχει ένας μορφισμός (αν τα στοιχεία αυτά συγκρίνονται), ή δεν υπάρχει (αν τα στοιχεία δεν συγκρίνονται). Οπότε στην περίπτωση που υπάρχουν μορφισμοί μεταξύ κάποιων αντικειμένων "s_i", π.χ $s_1 \longrightarrow s_2$, $(s_1 \leq s_2)$, στον υπολογισμό του supremum θα έχουμε διαγράμματα της μορφής

$$\begin{tikzcd} s_1 \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "p_{s_1}"'] & & s_2 \arrow[dl, "p_{s_2}"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

τα οποία είναι κατ'ανάγκη αντιμεταθετικά, δηλ.

$$p_{s_2} \cdot t = p_{s_1}$$

αφού μεταξύ των s_1, s_2 υπάρχει μόνο ένας μορφισμός. Το αντικείμενο T μαζί με τις παραπάνω ιδιότητες είναι αυτό που θα ονομάζουμε *συνόριο* σε μια κατηγορία. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να ερμηνεύσουμε την έννοια αυτή σε οποιαδήποτε κατηγορία.

Ο *συναρτητής* μεταξύ κατηγοριών θα είναι το "όχημα" που θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να γενικεύσουμε την έννοια του συνορίου σε οποιαδήποτε κατηγορία $\mathscr{K}$.
Το υποσύνολο S είναι υπόκατηγορία της P, υπάρχει επομένως ο "τετριμένος" συναρτητής $J : S \longrightarrow P$, με $J(s) = s$ για κάθε $s \in S$ και $J(f) = f$ όπου f μορφισμός της S. Με την βοήθεια του συναρτητή αυτού αναδιατυπώνουμε την έννοια του συνορίου που αναφέραμε προηγουμένως. Συγκεκριμένα, οι ιδιότητες $(i'), (ii')$ γίνονται:

(i'') Για κάθε αντικείμενο της μορφής $J(s) \in P$ υπάρχει μορφισμός $p_s : J(s) \longrightarrow T$. Αν μεταξύ δύο αντικειμένων της S υπάρχει κάποιος μορφισμός, έστω $t : s \longrightarrow s'$, τότε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} J(s) \arrow[rr, "J(t)"] \arrow[dr, "p_s"'] & & J(s') \arrow[dl, "p_{s'}"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό.

(ii'') Αν υπάρχει ένα άλλο αντικειμένο T' τέτοιο ώστε, για κάθε $J(s) \in P$ να υπάρχει μορφισμός $q_s : J(s) \longrightarrow T'$ τότε υπάρχει (μοναδικός) μορφισμός $e : T \longrightarrow T'$ με την ιδιότητα: $e \cdot p_s = q_s$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε έναν οποιονδήποτε συναρτητή $F : \mathbb{I} \longrightarrow \mathscr{K}$ μεταξύ των κατηγοριών, $\mathbb{I}$ που είναι ένα μ.δ.σ και μιας αυθαίρετης κατηγορίας $\mathscr{K}$. Σ'αυτήν την πιο γενική περίπτωση η κατηγορία $\mathbb{I}$ δεν είναι υποκατηγορία της $\mathscr{K}$ και ο συναρτητής F δεν είναι ο τετριμμένος. Μεταφέροντας τις ιδιότητες (i''), (ii'') στο πλαίσιο αυτό, ζητάμε

το συνόριο των αντικειμένων της κατηγορίας $\mathscr{K}$ που είναι εικόνες αντικειμένων του μ.δ.σ $\mathbb{I}$. Για παράδειγμα,
• Αν η κατηγορία $\mathbb{I}$ έχει μόνο δύο αντικείμενα χώρις να υπάρχει μορφισμός μεταξύ τους, δηλ.

$$\mathbb{I} = \{\ i_1 \qquad i_2\ \}$$

ζητάμε το συνόριο των αντικειμένων

$$K_1(= F(i_1)) \qquad K_2(= F(i_2))$$

στην κατηγορία $\mathscr{K}$.
• Αν η κατηγορία $\mathbb{I}$ έχει τρία αντικείμενα με μορφισμούς μεταξύ τους:

$$\mathbb{I} = \{\ i_1 \xleftarrow{f} i_2 \xrightarrow{h} i_3\ \}$$

τότε ζητάμε το συνόριο του *διαγράμματος*

$$K_1(= F(i_1)) \xleftarrow{F(f)} K_2(= F(i_2)) \xrightarrow{F(h)} K_3(= F(i_3))$$

στην $\mathscr{K}$.

Σε κάθε περίπτωση το *συνόριο* (αν υπάρχει) θα είναι ένα αντικείμενο, έστω T, της κατηγορίας $\mathscr{K}$, μαζί με μια οικογένεια μορφισμών (*συνιστώσες του συν-ορίου*)

$$(p_i : F(i) \longrightarrow T)_{i \in \mathbb{I}}$$

η οποία να καθιστά το επαγόμενο *διάγραμμα* [1] , στην $\mathscr{K}$, αντιμεταθετικό (T *συν-κώνος* του *διαγράμματος*). Αν υπάρχει άλλο αντικείμενο T' με αντίστοιχη οικογένεια μορφισμών $(q_i : F(i) \longrightarrow T')_{i \in \mathbb{I}}$ που να κάνει το ίδιο (δηλ. T' ένας άλλος συν-κώνος), θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $e : T \longrightarrow T'$ τέτοιος ώστε

$$q_i = e \cdot p_i$$

για όλα τα $i \in \mathbb{I}$. Δηλαδή, οποιοσδήποτε συν-κώνος T' "παραγοντοποιείται" μοναδικά μέσω του συν-κώνου T. Η ύπαρξη της μοναδικής αυτής παραγοντοποίησης ονομάζεται

[1] Με απλά λόγια, *διάγραμμα σε μια κατηγορία* είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα όπου, οι κορυφές του γραφήματος είναι αντικείμενα της κατηγορίας και οι ακμές μορφισμοί της κατηγορίας. Ένα τέτοιο διάγραμμα θα λεγεται *αντιμεταθετικό* αν οποτεδήποτε υπάρχουν δύο διαφορετικά μονοπάτια από μία κορυφή σε μία άλλη, που προκύπτουν συνθέτοντας μορφισμούς της κατηγορίας, οι μορφισμοί που επάγονται θα ισούνται.

στην Θεωρία Κατηγοριών *καθολική ιδιότητα* του συν-ορίου. Για συντομία το συνόριο θα το συμβολίζουμε, $T = \operatorname{colim} F_i$. Είναι μοναδικά προσδιορισμένο μέχρις ισομορφισμού.

Συνοψίζοντας, θα ονομάζουμε ($\mathbb{I}-$)*διάγραμμα* μιας κατηγορίας $\mathscr{K}$ ένα συναρτητή $F : \mathbb{I} \longrightarrow \mathscr{K}$, και συν-όριο του διαγράμματος που επάγει ο συναρτητής αυτός στην κατηγορία $\mathscr{K}$ ένα αντικείμενο της κατηγορίας το οποίο είναι συν-κώνος και επιπλέον πληρεί την καθολική ιδιότητα του συν-ορίου. Το συνόριο που θα προκύπτει στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι είναι το συνόριο του *διαγράμματος F παραμετρικοποιημένο από την* δείκτρια *κατηγορία* $\mathbb{I}$.

Παρατήρηση 2.1 *Ο γενικός ορισμός αφήνει περιθώριο για την ύπαρξη παράλληλων μορφισμών μεταξύ των αντικειμένων της δείκτριας κατηγορίας.*

Για παράδειγμα, αν η δείκτρια κατηγορία είναι η εξής:

$$\mathbb{I} = \{\ i_1 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} i_2\ \}$$

και διάγραμμα $F : \mathbb{I} \longrightarrow \mathscr{K}$, το συνόριο (αν υπάρχει)

$$\begin{tikzcd}
F(i_1) \arrow[rr, shift left, "F(f)"] \arrow[rr, shift right, "F(g)"'] \arrow[dr, "p_{i_1}"'] & & F(i_2) \arrow[dl, "p_{i_2}"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

θα είναι ένας συν-κώνος T της κατηγορίας, δηλ. θα ισχύει η ισότητα

$$p_{i_2} \cdot F(f) = p_{i_1} = p_{i_2} \cdot F(g)$$

και αν T' ένας άλλος συν-κώνος θα υπάρχει μοναδικός μορφισμός $e : T \longrightarrow T'$ έτσι ώστε

$$\begin{tikzcd}
F(i_1) \arrow[rr, shift left, "F(f)"] \arrow[rr, shift right, "F(g)"'] \arrow[dr, "p_{i_1}"'] \arrow[ddr, bend right, "q_{i_1}"'] & & F(i_2) \arrow[dl, "p_{i_2}"] \arrow[ddl, bend left, "q_{i_2}"] \\
& T \arrow[d, dotted, "e"] & \\
& T' &
\end{tikzcd}$$

$$e \cdot p_{i_1} = q_{i_1} \text{ και } e \cdot p_{i_2} = q_{i_2}$$

Από τα παραπάνω, βλέπουμε πώς η έννοια του supremum ενός υποσυνόλου ενός μ.δ.σ γενικεύτηκε σε τυχαία κατηγορία και έδωσε την κατηγορική έννοια του *συνορίου.* Αν θέλουμε μια γενική διατύπωση της παραπάνω έννοιας αυτή δίνεται ως συνδυασμός των δύο ακόλουθων ορισμών:

Ορισμός 2.2 *Έστω ένα διάγραμμα της κατηγορίας $\mathscr{K}$, $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{K}$, ένας* συν-κώνος *για τον συναρτητή αυτό αποτελείται από:*

1. *Ενα αντικείμενο T της κατηγορίας K.*
2. *Μια οικογένεια μορφισμών $p_D : F(D) \longrightarrow T$, έτσι ώστε για οποιονδήποτε μορφισμό $f_D : D \longrightarrow D'$ στην $\mathscr{D}$, $p_{D'} \cdot F(f_D) = p_D$, για κάθε αντικείμενο $D \in \mathscr{D}$.*

Ορισμός 2.3 *Δοθέντος ενός διαγράμματος $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{K}$,* συνόριο *για τον συναρτητή αυτό είναι ένας συν-κώνος $(T, (p_D)_{D\in\mathscr{D}})$ στην $\mathscr{K}$ έτσι ώστε, για κάθε άλλο συν-κώνο $(T', (q_D)_{D\in\mathscr{D}})$ να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $e : T \longrightarrow T'$ με την ιδότητα για κάθε $D \in \mathscr{D}$ να ισχύει, $e \cdot p_D = q_D$.*

Δυϊκά σκεπτόμενοι, ερμηνεύοντας την έννοια του μεγίστου κάτω φράγματος (infimum) ενός υποσυνόλου S ενός poset P, θεωρώντας το P ως κατηγορία προκύπτει η κατηγορική έννοια του *ορίου*, την οποία γενικεύουμε σε οποιαδήποτε κατηγορία, όπως και πριν μέσω του συναρτητή.

Λέμε ότι ένα διατεταγμένο σύνολο $(P, \leq)$ είναι *άνω ημιδικτυωτό* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του έχει supremum. Ερμηνεύοντας την ιδιότητα αυτή σε τυχαία κατηγορία προκύπτει η έννοια της *πεπερασμένα συν-πλήρους* κατηγορίας.

Ορισμός 2.4 *Η κατηγορία $\mathscr{K}$ θα λέγεται* (πεπερασμένα) συν-πλήρης *αν για κάθε συναρτητή*

$$F : \mathbb{I} \longrightarrow \mathscr{K}$$

όπου $\mathbb{I}$ (πεπερασμένη) κατηγορία, υπάρχει συνόριο.

Αντίστοιχα από τον ορισμό του *κάτω ημιδικτυωτού*, δηλ. αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο έχει infimum, προκύπτει ανάλογα η έννοια της *(πεπερασμένα) πλήρους* κατηγορίας.

Στον παραπάνω Ορισμό χρησιμοποιήσαμε τον όρο "πεπερασμένη κατηγορία". Με αφορμή αυτή την αναφορά θα αναφερθούμε σε κάποια ζητήματα πληθικότητας που ανακύπτουν. Αυτά έχουν να κάνουν με το "μέγεθος" των "συλλογών" των κατηγοριών με τις οποίες εργαζόμαστε, συγκεκριμένα μας ενδιαφερεί αν είναι *σύνολα ή κλάσεις.* Οι ακόλουθοι δύο Ορισμοί ταξινομούν κατά κάποιο τρόπο τις κατηγορίες ως προς το μέγεθος.

Ορισμός 2.5 (Πεπερασμένη κατηγορία)
Μια κατηγορία θα καλείται πεπερασμένη αν αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο αντικειμένων και ένα πεπερασμένο σύνολο μορφισμών.

Ορισμός 2.6 (Μικρή - Τοπικά μικρή κατηγορία)
Μικρή κατηγορία *ονομάζεται η κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα και οι μορφισμοί απαρτίζουν σύνολα (και όχι κλάσεις), διαφορετικά η κατηγορία καλείται* μεγάλη.
Τοπικά Μικρή κατηγορία *ονομάζεται η κατηγορία όπου για κάθε δύο αντικείμενα A, B, η συλλογή όλων των μορφισμών μεταξύ των αντικειμένων αυτών, δηλ. το* hom-*σύνολο* $\hom(A, B)$, *είναι σύνολο.* [2]

Ονομάζουμε ενα διατεταγμένο σύνολο P *πλήρες δικτυωτό* αν κάθε υποσύνολο του έχει supremum. Όμως αποδεικνύεται ότι αν ένα διατεταγμένο σύνολο έχει supremum για κάθε υποσύνολό του τότε έχει και infimum για κάθε υποσύνολο του. Δυϊκά, αν σε ένα διατεταγμένο σύνολο κάθε υποσύνολο του έχει infimum, τότε κάθε υποσύνολο του έχει και supremum. Σε μια κατηγορία κάτι αντίστοιχο δεν αληθεύει γενικά, δηλ. αν μια κατηγορία είναι πλήρης δεν έπεται οτι είναι και συν-πλήρης και αντίστροφα.

Ενα διατεταγμένο σύνολο P λέγεται *κατευθυνόμενο* αν,

(i) Είναι μη κενό.

(ii) Για κάθε δύο στοιχεία $x, y \in P$ υπάρχει $z \in P$ με $x \leq z$ και $y \leq z$.

Με άλλα λόγια, για κάθε δύο στοιχεία του P υπάρχει άνω φράγμα. Είναι προφανές ότι αν σε ένα σύνολο, για κάθε δύο στοιχεία του υπάρχει το supremum τους, τότε είναι κατευθυνόμενο.

Χρησιμοποιώντας ως δείκτρια κατηγορία, στον ορισμό του συνορίου, ένα κατευθυνόμενο μ.δ.σ προκύπτει ένα ιδιαίτερο είδος συνορίου το λεγόμενο *κατευθυνόμενο συνόριο.*

Ορισμός 2.7 (Κατευθυνόμενο συνόριο)
Έστω κατηγορία $\mathscr{K}$ και συναρτητής

$$D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathscr{K}$$

όπου το $\mathbb{I}$ είναι κατευθυνόμενο μ.δ.σ (το οποίο το βλέπουμε ως κατηγορία). Στην περίπτωση αυτή ο συναρτητής D θα ονομάζεται κατευθυνόμενο διάγραμμα *και το συνόριο (αν υπάρχει) θα λέγεται* κατευθυνόμενο συνόριο.

[2] Οι κατηγορίες στις οποίες θα αναφερόμαστε θα είναι πάντα τοπικά μικρές.

Η σημασία των κατευθυνόμενων συνορίων γίνεται αντιληπτή σε κατηγορίες όπου δεν έχουμε συνόρια (γενικά), αλλά λόγω της φύσης των αντικειμένων και των μορφισμών προκύπτει με φυσικό τρόπο η ύπαρξη κατευθυνόμενων συνορίων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η κατηγορία των γραμμικών διατάξεων Lin. Αντικείμενα της κατηγορίας αυτής είναι γραμμικά διατεταγμένα σύνολα και μορφισμοί συναρτήσεις που διατηρούν την διάταξη. Πρώτα θα αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας αντιπαράδειγμα, ότι η κατηγορία Lin δεν έχει συνόρια. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τα αίτια αυτής της αποτυχίας και θα δούμε πώς ανακύπτουν τα κατευθυνόμενα συνόρια.

Με το ακόλουθο παράδειγμα θα αποδείξουμε ότι η κατηγορία Lin δεν έχει, ένα συγκεκριμένο είδος συν-ορίων, τα *συν-γινόμενα* [3].

Παράδειγμα 2.8 *Έστω ότι η δείκτρια κατηγορία έχει δύο διακρτιτά αντικείμενα* $\mathbb{I} = \{i, j\}$, *το αντίστοιχο διάγραμμα στην κατηγορία* Lin, $D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{Lin}$, *θα αποτελείται από δύο γραμμικώς διατεταγμένα σύνολα* $D(i), D(j)$. *Θα δείξουμε ότι κανένας συν-κώνος του διαγράμματος δεν μπορεί να πληρεί την καθολική ιδιότητα του συν-ορίου.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το διάγραμμα έχει συν-κώνο $L \in \mathsf{Lin}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει άλλος συν-κώνος, Q, και δεν υπάρχει μορφισμός από το συν-κώνο L στον συν-κώνο Q.
Έστω p, q οι μορφισμοί των $D(i), D(j)$ προς το L και f, g οι αντίστοιχοι μορφισμοί προς το Q, οπότε έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
D(i) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & L & D(j) \arrow[l, "q"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

Έστω x ένα στοιχείο του $D(i)$ και y ένα στοιχείο του $D(j)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q(y) <_L p(x)$.

[3]Συν-γινόμενο δύο αντικειμένων A, B μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$ είναι η δυϊκή έννοια του γινομένου, όπου έχουν αντιστραφεί τα βέλη. Συγκεκριμένα, είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας, συνήθως το συμβολίζουμε με $A \amalg B$, εφοδιασμένο με δύο μορφισμούς: $A \xrightarrow{\mathrm{in}_A} A \amalg B \xleftarrow{\mathrm{in}_B} B$ έτσι ώστε, αν υπάρχει άλλο αντικείμενο της κατηγορίας εφοδιασμένο με δύο μορφισμούς από τα αντικείμενα A, B, π.χ $A \xrightarrow{f} Q \xleftarrow{g} B$, να υπάρχει μοναδικός μορφισμός $e : A \amalg B \longrightarrow Q$ που να καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{in}_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \amalg B \arrow[d, dotted, "e"] & Bg \arrow[l, "\mathrm{in}_B"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Q &
\end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό.

Θεωρούμε τον συν-κώνος Q με δύο αντικείμενα $\{\alpha, \beta\}$, όπου $\alpha <_Q \beta$. Ο μορφισμός f απεικονίζει όλα τα στοιχεία του $D(i)$ στο στοιχείο α ενώ ο μορφισμός g απεικονίζει τα στοιχεία του $D(j)$ στο β. Αν ο συν-κώνος L πληρούσε την καθολική ιδιότητα του συν-ορίου θα έπρεπε να υπήρχε (μοναδικός) μορφισμός, $e : L \longrightarrow Q$, ο οποίος να καθιστούσε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & L \arrow[d, dotted, "e"] & D(j) \arrow[l, "q"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό και επιπλέον να διατηρούσε την διάταξη των στοιχείων του L. Όμως για τα δύο στοιχεία που επιλέξαμε αυτό δεν ισχύει. Ο μορφισμός f απεικονίζει το στοιχείο $x \in D(i)$ στο στοιχείο $\alpha \in Q$ και ο μορφισμός g το στοιχείο $y \in D(j)$ στο στοιχείο $\beta \in Q$, άρα για να ισχύει η αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος θα πρέπει ο μορφισμός e να απεικονίζει το στοιχείο $p(x)$ στο α και το στοιχείο $q(y)$ στο β. Αυτό όμως σημαίνει ότι ο e δεν διατηρεί την διάταξη. ■

Έχοντας ένα τυχαίο διάγραμμα $D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathsf{Lin}$ το συνόριο, αν υπάρχει, θα είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια γραμμική διάταξη. Γνωρίζουμε πως υπολογίζεται το συνόριο ενός οποιουδήποτε διαγράμματος στην κατηγορία των συνόλων: Είναι το πηλίκο της διαζευγμένης ένωσης των κορυφών του διαγράμματος προς μια σχέση ισοδυναμίας. Δηλαδή, το συνόριο του διαγράμματος D στην κατηγορία Set (ή αν θέλουμε να είμαστε τυπικοί, συνθέτοντας το διάγραμμα D με τον *επιλήσμονα συναρτητή (forgetfull functor)* [4] $\mathbb{I} \xrightarrow{D} \mathsf{Lin} \xrightarrow{U} \mathsf{Set}$) θα είναι το σύνολο πηλίκο $\coprod_{i \in \mathbb{I}} D(i)/\sim$. Η σχέση ισοδυναμίας ορίζεται ως εξής: Εστω $x, x' \in \coprod_{i \in \mathbb{I}} D(i)$ με $x \in D(i)$ και $x' \in D(i')$, τότε $x \sim x'$ ανν υπάρχει ζιγκ-ζαγκ στη δείκτρια κατηγορία

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] i = i_1 \arrow[dr, "a_1"'] & & i_3 \arrow[dl, "a_3"] & \cdots & i_{2l-1} \arrow[dr, "a_{2l-1}"'] & & i_{2l+1} = i' \arrow[dl, "a_{2l+1}"] \\ & i_2 & & & & i_{2l} & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

[4] Ο *επιλήσμων συναρτητής*, συνήθως τον συμβολίζουμε με U, ορίζεται έτσι ώστε να "ξεχνάει κάτι". Για παράδειγμα ο επιλήσμων συναρτητής από την κατηγορία των ομάδων Grp στην κατηγορία των συνόλων Set ξεχνάει την δομή της ομάδος και απεικονίζει μια ομάδα στο σύνολο φορέα της. Επίσης ο επιλήσμων συναρτητής από την κατηγορία Lin στην κατηγορία Set ξεχνάει την γραμμική διάταξη. Επίσημος ορισμός για τον επιλήσμονα συναρτητή δεν υπάρχει, θα μπορούσε να οριστεί ως ένας πιστός συναρτητής προς την Set.

και στοιχεία $y_{2k-1} \in D(i_{2k-1})$, $k = 1, \ldots, l$ τέτοια ώστε

$$x = y_1,\ D(a_{2k_1})(y_{2k-1}) = D(a_{2k+1})(y_{2k+1}),\ y_{2k+1} = x'$$ [5]

Το ερώτημα λοιπόν είναι υπο ποιές προϋποθέσεις μπορούμε να εφοδιάσουμε το σύνολο πηλίκο $\coprod_{i \in \mathbb{I}} D(i)/\sim$ με μια γραμμική διάταξη έτσι ώστε να ανήκει στην κατηγορία Lin.

῞Οπως είδαμε με το προηγούμενο Παράδειγμα, αν η δείκτρια κατηγορία είναι διακριτή δεν έπεται ότι υπάρχει το συν-όριο στην Lin. Σύμφωνα μ'αυτά που είπαμε παραπάνω για το πως υπολογίζεται το συν-όριο στα σύνολα, δύο οποιαδήποτε στοιχεία του συνόλου πηλίκου θα ανήκουν σε γραμμικώς διατεταγμένα σύνολα τα οποία θα προέρχονται από αντικείμενα στην δείκτρια κατηγορία τα οποία θα είναι γενικά είτε διακριτά, είτε θα συνδέονται με ένα ζιγκ-ζάγκ της μορφής (2.1). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα στοιχεία αυτά να μην μπορούν να ειδωθούν ως στοιχεία ενός γραμμικώς διατεταγμένου συνόλου και συνεπώς να διαταχθούν. Το πρόβλημα αυτό απαλείφεται αν η δείκτρια κατηγορία είναι κατευθυνόμενη (directed). Τότε τα αντικείμενα στην δείκτρια κατηγορία θα συνδέονται με ζιγκ-ζαγκ μήκους 1: [6]

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr, "a"'] & & i' \arrow[dl, "a'"] \\
& i_1 &
\end{tikzcd}$$

Οπότε αντί για τα στοιχεία x, x', που ανήκουν σε διαφορετικά $D(i)$, θα έχουμε τα ισοδύναμα στοιχεία $x \sim D(a)(x), x' \sim D(a')(x')$ που θα ανήκουν στο ίδιο γραμμικώς διατεταγμένο σύνολο $D(i_1)$, κατά συνέπεια θα συγκρίνονται. Επομένως αν $D(a)(x) < D(a')(x')$ ή $D(a')(x') < D(a)(x)$ θα έχουμε $[x] < [x']$ ή $[x'] < [x]$ αντίστοιχα, ενώ αν $D(a)(x) = D(a')(x')$, από τον ορισμό της σχέσης ισοδυναμίας προκύπτει ότι $x \sim x'$, δηλαδή $[x] = [x']$.

Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι το "απότελεσμα της σύγκρισης" των στοιχείων x, x' είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του στοιχείου i_1 της δείκτριας κατηγορίας. Δηλ. αν υπήρχε κάποιο άλλο στοιχείο $i_2 \in \mathbb{I}$ και μορφισμοί $\beta : i \longrightarrow i_2,\ \beta' : i' \longrightarrow i_2$ προς αυτό η διάταξη των x, x' στο $D(i_2)$ δεν μπορεί να ήταν διαφορετική. Πράγματι, επειδή η δείκτρια κατηγορία είναι κατευθυνόμενη θα υπάρχει αντικείμενο $i_3 \in \mathbb{I}$ έτσι ώστε το

[5] Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την κατασκευή ορίων-συνορίων στα σύνολα μπορείτε να βρείτε στις σημειώσεις [KP].

[6] Από τις ιδιότητες της κατευθυνόμενης κατηγορίας προκύπτει εύκολα ότι οποιουδήποτε μήκος ζιγκ-ζαγκ της μορφής (2.1) μπορεί να "συμπληρωθεί" κατάλληλα ώστε να προκύψει ζιγκ-ζαγκ μήκους 1.

διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dr, "a"'] \arrow[drrr, "\beta"] & & i' \arrow[dl, "a'"'] \arrow[dr, "\beta'"] & \\
& i_1 \arrow[dr, dotted, "\gamma"'] & & i_2 \arrow[dl, dotted, "\gamma'"] \\
& & i_3 &
\end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό. Επόμενως, στο αντίστοιχο διάγραμμα στην κατηγορία Lin, η διάταξη των x, x' στο $D(i_3)$ θα πρέπει να "συμφωνεί" με αυτή στο $D(i_1)$ και $D(i_2)$, άρα δεν μπορεί η διάταξη των στοιχείων στο $D(i_2)$ να είναι διαφορετική.
Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι κάθε κατευθυνόμενο διάγραμμα στην κατηγορία Lin έχει συνόριο.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στην έννοια του *πεπερασμένου* ή *συμπαγούς* στοιχείου, ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου και θα δούμε πώς αυτή ερμηνεύεται-επεκτείνεται σε μια κατηγορία. Ενα στοιχείο a ενός μ.δ.σ P θα ονομάζεται *πεπερασμένο* αν, οποτεδήποτε έχουμε ένα κατευθυνόμενο υποσύνολο $D \subseteq P$ έτσι ώστε $a \leq \bigvee D$ υπάρχει κάποιο στοιχείο d του D τέτοιο ώστε $a \leq d$.

Η "γενίκευση" του πεπερασμένου στοιχείου σε μια κατηγορία μας δίνει την έννοια του *πεπερασμένα παρουσιάσιμου αντικειμένου (finitely presentable object).*

Ορισμός 2.9 (Πεπερασμένα Παρουσιάσιμο Αντικείμενο) *Ενα αντικείμενο K μιας κατηγορίας $\mathscr{K}$ θα καλείται* πεπερασμένα παρουσιάσιμο *αν και μόνο αν για κάθε κατευθυνόμενο συνόριο $T = \operatorname{colim} D_i$ (όπου συναρτητής $D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathscr{K}$ με $\mathbb{I}$ κατευθυνόμενο μ.δ.σ),* [7] *οποτεδήποτε υπάρχει μορφισμός $f : K \longrightarrow T$ υπάρχει συνιστώσα του συν-ορίου $c_i : D_i \longrightarrow T$ έτσι ώστε:*

(i) ο μορφισμός f να παραγοντοποιείται μέσω της συνιστώσας c_i, δηλ. υπάρχει μορφισμός $g_i : K \longrightarrow D_i$ ο οποίος να καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& D_i \arrow[d, "c_i"] \\
K \arrow[ur, dotted, "g_i"] \arrow[r, "f"'] & T
\end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό, δηλ. $f = c_i \cdot g_i$.

[7] Συχνά, για λόγους ευκολίας, τα στοιχεία του διαγράμματος D τα συμβολίζουμε με D_i αντί για $D(i)$.

(ii) Αν υπάρχει και δεύτερη παραγοντοποίηση του f,δηλ.

$$\begin{tikzcd}
 & D_i \arrow[dr, dotted, "e_i"] \arrow[drr, bend left, "c_i"] & & \\
K \arrow[ur, "g_i"] \arrow[dr, "g_j"'] & & D_k \arrow[r, "c_k"] & T \\
 & D_j \arrow[ur, dotted, "e_j"] \arrow[urr, bend right, "c_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

τότε υπάρχει ένα τρίτο αντικείμενο του συνορίου, D_k, μαζί με μορφισμούς e_i, e_j προς το αντικείμενο αυτό, έτσι ώστε το άνω διάγραμμα να γίνεται αντιμεταθετικό.

Χρησιμοποιώντας τον hom-συναρτητή προκύπτει ο εξής ισοδύναμος ορισμός:

Ορισμός 2.10 *Ενα αντικείμενο $K \in \mathscr{K}$ είναι* πεπερασμένα παρουσιάσιμο *αν ο* hom-*συναρτητής* [8]

$$\hom(K, -) : \mathscr{K} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

διατηρεί κατευθυνόμενα συν-όρια. Δηλ. για κάθε κατευθυνόμενο διάγραμμα $D : \mathbb{I} \longrightarrow \mathscr{K}$, έχουμε ότι ο κανονικός μορφισμός:

$$\operatorname*{colim}_i(\hom_{\mathscr{K}}(K, D_i)) \xrightarrow{\cong} \hom_{\mathscr{K}}(K, \operatorname*{colim}_i D_i)$$ [9]

να είναι ισομορφισμός.

Παραδείγματα 2.11 *Μερικά παραδείγματα πεπερασμένων παρουσιάσιμων αντικειμένων είναι τα ακόλουθα:*

1. *Στην κατηγορία των συνόλων* Set *ένα αντικείμενο K, δηλ. ένα σύνολο, είναι πεπερασμένα παρουσιάσιμο αν και μόνο αν είναι* πεπερασμένο.

[8]Τους hom-συναρτητές τους αποκαλούμε και *αναπαραστάσιμους* συναρτητές.

[9]Έχοντας κατά νου τον τρόπο υπολογισμού των κατευθυνόμενων συνορίων στα σύνολα που σκιαγραφήσαμε παραπάνω, αναλύουμε τον ισομορφισμό αυτό. θα διαπιστώσουμε ότι πρόκειται για τον κανονικό μορφισμό που επάγεται από το συνόριο $\operatorname*{colim}_i(\hom_{\mathscr{K}}(K, D_i))$ στο σύνολο $\hom_{\mathscr{K}}(K, \operatorname*{colim}_i D_i)$ (από τη στιγμή που το σύνολο αυτό αποτελεί συν-κώνο για τα στοιχεία του συνορίου), δηλ. $\operatorname*{colim}_i(\hom_{\mathscr{K}}(K, D_i)) \longrightarrow \hom_{\mathscr{K}}(K, \operatorname*{colim}_i D_i)$, που απεικονίζει το στοιχείο $[K \xrightarrow{x} D_i]$ του συνορίου στον μορφισμό που προκύπτει συνθέτοντας με την $i-$συνιστώσα του συνορίου $\operatorname*{colim}_i D_i$, $K \xrightarrow{x} D_i \xrightarrow{\mathrm{in}_i} \operatorname*{colim}_i D_i$. Ο οποίος κανονικός μορφισμός στην περίπτωση αυτή είναι ισομορφισμός.

2. *Τα πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα στην κατηγορία* Pos *είναι εκείνα τα poset* $(P, \leq)$ *όπου ο φορέας τους* P *είναι πεπερασμένο σύνολο.*

3. *Στην κατηγορία των ομάδων* Grp, *μια ομάδα* G *είναι πεπερασμένα παρουσιάσιμη ανν "γεννιέται" από πεπερασμένους το πλήθος γεννήτορες, οι οποίοι σχετίζονται μέσω ενός πεπερασμένου πλήθους σχέσεων.*

4. *Ένας τοπολογικός χώρος της κατηγορία* Top *των τοπολογικών χώρων, είναι πεπερασμένα παρουσιάσιμος αν και μόνο αν είναι πεπερασμένος και διακριτικός.*

Υπάρχει μια διασύνδεση μεταξύ της έννοιας της κατευθυνόμενης κατηγορίας και της *φιλτραρισμένης κατηγορίας*, η οποία μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε την έννοια του κατευθυνόμενου συνορίου με αυτή του *φιλτραρισμένου συνορίου.* Με τον όρο φιλτραρισμένο συνόριο, σε μια κατηγορία $\mathscr{K}$, εννοούμε το συνόριο για ένα συναρτητή $D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{K}$ όπου η δείκτρια κατηγορία $\mathscr{D}$ είναι *φιλτραρισμένη.*

Ορισμός 2.12 *Η κατηγορία* $\mathscr{D}$ *είναι* φιλτραρισμένη (filtered) *αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *είναι μη-κενή.*

(ii) *για κάθε δύο αντικείμενα* D_1 , D_2 *υπάρχει αντικείμενο* D_3 *της* $\mathscr{C}$ *και μορφισμοί* $f_1 : D_1 \longrightarrow D_3$, $f_2 : D_2 \longrightarrow D_3$.

(iii) *για κάθε ζεύγος μορφισμών* $f, g : D_1 \rightrightarrows D_2$ *υπάρχει μορφισμός* $e : D_2 \longrightarrow D_3$ *στην* $\mathscr{D}$, *τέτοιος ώστε:* $e \cdot f = e \cdot g$.

Η διασύνδεση των δύο αυτών εννοιών μπορεί να κωδικοποιηθεί στην εξής πρόταση:*Κάθε φιλτραρισμένη κατηγορία έχει τελική υποκατηγορία που είναι κατευθυνόμενη.* Η ιδέα της τελικής υποκατηγορίας μιας κατηγορίας, είναι οτι μπορώ να περιορίζω οποιοδήποτε διάγραμμα της κατηγορίας σε διάγραμμα στην υποκατηγορία, χωρίς να μεταβάλλεται το συνόριο του διαγράμματος (αν υπάρχει). Έτσι λοιπόν το συνόριο στην κατηγορία είναι ισόμορφο με το συνόριο του διαγράμματος που περιορίζεται στην τελική υποκατηγορία. Οπότε συμπεραίνουμε ότι *μια κατηγορία επιδέχεται συνόριο για κάθε φιλτραρισμένο διάγραμμα αν και μόνο αν επιδέχεται για κάθε κατευθυνόμενο.* Επομένως ο ορισμός του πεπερασμένα παρουσιάσιμου αντικειμένου, αντικαθιστώντας την έννοια του κατευθυνόμενου συνορίου με αυτή του φιλτραρισμένου συνορίου, παραμένει αναλλοίωτος.

Σημείωση 2.13 *Η κατηγορία* $\mathscr{D}$ *θα λέγεται* συν-φιλτραρισμένη *αν η δϋική της κατηγορία* $\mathscr{D}^{op}$ *είναι φιλτραρισμένη.*

Είμαστε πλέον σε θέση, χρησιμοποιώντας τις έννοιες που αναφέραμε παραπάνω, να δώσουμε τον ορισμό της πεπερασμένα προσιτής και τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμης κατηγορίας.

Ορισμός 2.14 (Τοπικά Πεπερασμένα Παρουσιάσιμη Κατηγορία)
Η κατηγορία $\mathscr{K}$ θα είναι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη (locally finitely presentable) αν,

1. *είναι συν-πλήρης,*
2. *έχει ένα σύνολο από πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα, $\mathscr{A}$, με την ιδιότητα ότι κάθε αντικείμενο της κατηγορίας $K \in \mathscr{K}$, να είναι φιλτραρισμένο συνόριο αντικειμένων της $\mathscr{A}$ δηλ. $K = \operatorname*{colim}_{\text{filt.}} K_i$ όπου $K_i \in \mathscr{A}$.*

Η έννοια της τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμης κατηγορίας αποτελεί γενίκευση της έννοιας του *αλγεβρικού δικτυωτού*. Θυμίζουμε οτι ένα μ.δ.σ είναι αλγεβρικό δικτυωτό αν: (i) είναι πλήρες δικτυωτό και (ii) κάθε στοιχείο του είναι ίσο με το supremum των πεπερασμένων στοιχείων του που είναι μικρότερα ή ίσα από αυτό.

Βλέποντας την πρώτη συνθήκη του Ορισμού (2.14) συμπεραίνουμε οτι είναι πολύ περιοριστική. Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα κατηγοριών που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, όπου η κατηγορία δεν είναι συν-πλήρης. Αν όμως "ελαφρύνουμε" την συνθήκη αυτή, ζητώντας η κατηγορία να μην έχει όλα τα (πεπερασμένα) συνόρια αλλά μόνο ένα συγκεκριμένο είδος (φιλτραρισμένα συνόρια), καταλήγουμε σε ένα πιο γενικό είδος κατηγοριών.

Ορισμός 2.15 (Πεπερασμένα Προσιτή Κατηγορία)
Πεπερασμένα προσιτή κατηγορία (finitely accessible category) θα λέγεται μια κατηγορία $\mathscr{K}$ η οποία

1. *έχει φιλτραρισμένα συνόρια,*
2. *έχει ένα σύνολο, $\mathscr{A}$, από πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα με την ιδιότητα ότι κάθε αντικείμενο της κατηγορίας είναι φιλτραρισμένο συνόριο αντικειμένων της $\mathscr{A}$.*

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποια παραδείγματα τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμων και πεπερασμένα προσιτών κατηγοριών. Επίσης θα αναφερθούμε σε κάποια σημαντικά αποτελέσματα που τις διέπουν.

Ο τίτλος της παραγράφου 2.1 είναι "Τοπικά παρουσιάσιμες και Προσιτές κατηγορίες", αλλά όπως είπαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου θα μας απασχολήσουν οι "πεπερασμένα προσιτές" και "τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμες" κατηγορίες. Δηλαδή προσιτές και τοπικά παρουσιάσιμες κατηγορίες ενός συγκεκριμένου *κανονικού πληθάριθμου*. [10]

Ο ρόλος του κανονικού πληθάριθμου γίνεται αντιληπτός από τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 2.16 *Εστω λ κανονικός πληθάριθμος.*

- λ-κατευθυνόμενο poset *είναι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο όπου κάθε υποσύνολο του πληθικότητας $< \lambda$ έχει άνω φράγμα.*

- λ-φιλτραρισμένη κατηγορία *καλείται μια κατηγορία $\mathscr{D}$ όπου:*

  1. *η $\mathscr{D}$ είναι μη-κενή,*
  2. *για κάθε συλλογή αντικειμένων D_i , $i \in I$ της $\mathscr{D}$ πλήθους μικρότερου του λ, υπάρχει αντικείμενο D και μορφισμοί $f_i : D_i \longrightarrow D$, $i \in I$ στην $\mathscr{D}$,*
  3. *για κάθε συλλογή μορφισμών πλήθους $< \lambda$ μεταξύ δύο αντικειμένων της $\mathscr{D}$, $f_i : D_1 \longrightarrow D_2$, $i \in I$ στην D, υπάρχει μορφισμός $e : D_2 \longrightarrow D$ τέτοιος ώστε $e \cdot f_i = e \cdot f_j$, $\forall i, j \in I$.*

  Ισοδύναμα, κάθε διάγραμμα $I \longrightarrow \mathscr{D}$ με $\mathrm{card}(I) < \lambda$ έχει κώνο.

- λ-φιλτραρισμένο συνόριο *σε μια κατηγορία $\mathscr{K}$ είναι το συνόριο για ένα συναρτητή $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{K}$, όπου η δείκτρια κατηγορία $\mathscr{D}$ είναι λ-φιλτραρισμένη.*

- *Ένα αντικείμενο K μιας κατηγορίας καλείται* λ-παρουσιάσιμο *αν ο* hom*-συναρτητής* $\hom(K, -)$ *διατηρεί λ-φιλτραρισμένα συνόρια.*

Χρησιμοποιώντας το (2.16) θα ορίσουμε τις λεγόμενες λ-*προσιτές* και *τοπικά λ-παρουσιάσιμες* κατηγορίες.

Ορισμός 2.17 (Τοπικά λ-Παρουσιάσιμη Κατηγορία)
Η κατηγορία $\mathscr{K}$ καλείται τοπικά λ-παρουσιάσιμη *αν, είναι συν-πλήρης και έχει ένα σύνολο $\mathscr{A}$ από λ-παρουσιάσιμα αντικείμενα τέτοια ώστε κάθε αντικείμενο της $\mathscr{K}$ να είναι λ-φιλτραρισμένο συνόριο αντικειμένων του $\mathscr{A}$.*

[10] *Κανονικός πληθάριθμος (regular cardinal)* λ, είναι ένας άπειρος πληθάριθμος ο οποίος δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μικρότερου πλήθους από μικρότερους πληθάριθμους. Με άλλα λόγια ο λ δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα: $\lambda = \sum_{i<\alpha} \lambda_i$, όπου $\lambda_\iota < \lambda$ και $\alpha < \lambda$.

Ορισμός 2.18 (λ-Προσιτή Κατηγορία)
Η κατηγορία $\mathscr{K}$ θα είναι λ-προσιτή αν έχει, λ- φιλτραρισμένα συνόρια και ένα σύνολο $\mathscr{A}$ από λ-παρουσιάσιμα αντικείμενα τέτοια ώστε κάθε αντικείμενο της $\mathscr{K}$ να είναι λ-φιλτραρισμένο συνόριο αντικειμένων του $\mathscr{A}$.

Στην περίπτωση που ο κανονικός πληθάριθμος λ ισούται με $\aleph_0$ μιλάμε για *πεπερασμένα προσιτές* και *τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμες* κατηγορίες.

Σημείωση 2.19 *Το σύνολο $\mathscr{A}$ που χρησιμοποιήσαμε στους παραπάνω Ορισμούς συνήθως επιλέγουμε να είναι η κατηγορία $\mathscr{K}_{fp}$. Από κάθε κλάση ισομορφίας αντικειμένων της $\mathscr{K}$ επιλέγουμε ένα αντιπρόσωπο, οι αντιπρόσωποι αυτοί απαρτίζουν τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathscr{K}_{fp}$. Με τον τρόπο αυτό αυτό εξασφαλίζουμε ότι η $\mathscr{K}_{fp}$ είναι μικρή κατηγορία.*

Παραδείγματα 2.20 (Τοπικά Πεπερασμένα Παρουσιάσιμων Κατηγοριών)

1. *Η κατηγορία των συνόλων* Set, *τα πεπερασμένα παρουσίασιμα αντικείμενα της οποίας είναι τα πεπερασμένα σύνολα.*
2. *Κάθε poset θεωρούμενο ως κατηγορία είναι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη αν και μονο αν είναι αλγεβρικό δικτυωτό.*
3. *Η κατηγορία* Pos, *τα πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα της οποίας είναι τα πεπερασμένα poset, δηλ.εκείνα που το υποκείμενο σύνολο τους είναι πεπερασμένο.*
4. *Η κατηγορία των ομάδων* Grp, *με πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα τις πεπερασμένα παρουσιάσιμες ομάδες.*
5. *Αν $\mathscr{C}$ είναι μια μικρή κατηγορία, η κατηγορία των συναρτητών* $\mathsf{Fun}(\mathscr{C},\mathsf{Set})$ [11] *είναι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη. Τα πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα είναι συναρτητές της μορφής $T = \operatorname*{colim}_{i<n} \hom(C_i, -) : \mathscr{C} \longrightarrow \mathsf{Set}$ πεπερασμένα συνόρια από αναπαραστάσιμους συναρτητές (representable functors).*

Παραδείγματα 2.21 (Πεπερασμένα Προσιτών Κατηγοριών)

1. *Κάθε τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη κατηγορία.*

[11] Συμβολίζουμε με $\mathsf{Fun}(\mathscr{C},\mathscr{D})$ ή $[\mathscr{C},\mathscr{D}]$, όπου $\mathscr{C},\mathscr{D}$ κατηγορίες, την κατηγορία με:
Αντικειμένα συναρτητές $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ και
μορφισμούς μεταξύ δύο αντικειμένων $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, φυσικούς μετασχηματισμούς $\eta : F \overset{\bullet}{\longrightarrow} G$

2. *Η κατηγορία* Inj, *αντικείμενα της οποίας είναι σύνολα και μορφισμοί* $1-1$ *συναρτήσεις. Τα πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα είναι τα πεπερασμένα σύνολα.*

3. *Η κατηγορία* Field *των σωμάτων και των ομομορφισμών μεταξύ τους. Τα πεπερασμένα παρουσίασιμα σώματα είναι εκείνα που γεννιούνται από πεπεραμένα το πολύ στοιχεία. Επειδή αποδεικνύεται ότι κάθε πεπερασμένα γενόμενο σώμα* $F[x_1,\dots,x_n]$ *είναι ισόμορφο με ένα από τα σώματα:* $\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_n]$, $\mathbb{Z}_p[x_1,\dots,x_n]$, *αύτα είναι εν τέλει τα πεπερασμένα παρουσίασιμα αντικείμενα της κατηγορίας.*

4. *Η κατηγορία* Lin *των γραμμικά διατεταγμένων συνόλων και μονότονων απεικονίσεων αναμεσά τους, με πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα τα πεπερασμένα γραμμικώς διατεταγμένα σύνολα.*

5. *Η κατηγορία* $\mathsf{Pos}_{0,1}$ *(βλέπε Ορισμό 4.24).*

6. *Αν* $\mathscr{C}$ *είναι μια μικρή κατηγορία, η κατηγορία των συναρτητών* $\mathsf{Flat}(\mathscr{C},\mathsf{Set})$ [12] *είναι πεπερασμένα προσιτή, στην οποία τα πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα είναι* hom-*συναρτητές* $\hom(C,-):\mathscr{C}\longrightarrow\mathsf{Set}$, *όπου* C *αντικείμενο της κατηγορίας* $\mathscr{C}$.

΄Οπως φαίνεται από τα παραπάνω παραδείγματα πολλές ενδιαφέρουσες κατηγορίες προκύπτει ότι είναι πεπερασμένα προσιτές ή τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμες. Στο βιβλίο [AR] οι J. Adámek και J. Rosický μελέτησαν τις κατηγορίες αυτές και κατέγραψαν πληθώρα αποτελεσμάτων. Μια συστηματική έκθεση κάποιων αποτελεσμάτων είναι η ακόλουθη:

Πόρισμα 2.22 *(1.28 [AR])*
Κάθε τοπικά παρουσιάσιμη κατηγορία είναι πλήρης.

Θεώρημα 2.23 *(1.46 [AR])*
Εστω λ *κανονικός πληθάριθμος και* $\mathscr{K}$ *τοπικά* λ*-παρουσιάσιμη κατηγορία. Για κάθε κατηγορία* $\mathscr{K}$ *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *η* $\mathscr{K}$ *είναι τοπικά* λ*-παρουσιάσιμη.*

(ii) *η* $\mathscr{K}$ *είναι ισοδύναμη με μια κατηγορία συναρτητών από μια μικρή κατηγορία στα σύνολα, οι οποίοι έχουν την ιδιότητα να διατηρούν* λ*-μικρά συνόρια. Δηλ,*

$$\mathscr{K}\cong\lambda-\mathsf{Lex}(\mathscr{A},\mathsf{Set})$$

όπου $\mathscr{A}$ *μικρή κατηγορία.*

[12] Η κατηγορία αυτή είναι κατηγορία συναρτητών, η οποία έχει για αντικείμενα *επίπεδους συναρτητές* (βλ. Ενότητα 2.2).

Σημείωση 2.24 *Στην περίπτωση που $\lambda = \aleph_0$ γράφουμε*

$$\mathscr{K} \cong \mathsf{Lex}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$$

όπου τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathsf{Lex}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$, *δηλ. συναρτητές της μορφής* $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$, *διατηρούν* πεπερασμένα όρια.

Ορισμός 2.25 *Ενας συναρτητής $F : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{L}$ θα ονομάζεται λ-προσιτός (λ-accessible), όπου λ κανονικός πληθάριθμος, αν $\mathscr{K}$ και $\mathscr{L}$ είναι λ-προσιτές κατηγορίες και ο συναρτητής F διατηρεί λ-φιλτραρισμένα συνόρια.*

Σημείωση 2.26 *Αν $\lambda = \aleph_0$ ο συναρτητής F διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια και ονομάζεται* "πεπερασμένα προσδιορισμένος" (finitary).

Θεώρημα 2.27 *(2.26 [AR])*
Κάθε λ-προσιτή κατηγορία $\mathscr{K}$, όπου λ κανονικός πληθάριθμος, είναι ισοδύναμη με μια κατηγορία συναρτητών της μορφής λ-$\mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$, *όπου $\mathscr{A}$ μικρή κατηγορία. Αντικείμενα της κατηγορίας αυτής είναι* λ-επίπεδοι συναρτητές $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$ *(βλέπε Παράγραφο 2.2).*

Σημείωση 2.28 *Αν $\lambda = \aleph_0$ τότε* $\mathscr{K} \cong \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$ *όπου τα στοιχεία της κατηγορίας* $\mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$ *είναι* επίπεδοι *συναρτητές* $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$.

Πρόταση 2.29 *Κάθε λ-προσιτός ενδοσυναρτητής $\Phi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ σε μια λ-παρουσιάσιμη κατηγορία $\mathscr{K}$ μπορεί να ιδωθεί ως λ-προσιτός ενδοσυναρτητής της μορφής*

$$\Phi : \lambda - \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set}) \longrightarrow \lambda - \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$$

Σημείωση 2.30 *Στην περίπτωση που $\lambda = \aleph_0$, ο ενδοσυναρτητής είναι της μορφής* $\Phi : \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set}) \longrightarrow \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$ *και είναι πεπερασμένα προσδιορισμένος.*

Σημείωση 2.31 *Η κατηγορία $\mathscr{A}$ που χρησιμοποιούμε παραπάνω συνήθως επιλέγουμε να είναι η δϋική κατηγορία των πεπερασμένα παρουσιάσιμων αντικειμένων $(\mathscr{K}_{fp})^{op}$.*

Στο Παράδειγμα 2.21 (5), καθώς και στο Θεώρημα 2.27 είδαμε ότι η κατηγορία $\mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$ είναι πεπερασμένα προσιτή, και ότι κάθε πεπερασμένα προσιτή κατηγορία $\mathscr{K}$ είναι ισοδύναμη με μια κατηγορία αυτής της μορφής. Πάνω στο αποτέλεσμα αυτό θα στηριχτούμε προκειμένου να αναπτύξουμε τα ερευνητικά αποτελέσματα της παρούσας διατριβής. Είναι λοιπόν απαραίτητο, κλείνοντας το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο, να πούμε δυο λόγια για τα αντικείμενα της κατηγορίας αυτής, τους *επίπεδους συναρτητές*.

2.2 Επίπεδοι συναρτητές - Kan Επεκτάσεις

Στην βιβλιογραφία *επίπεδος συναρτητής* από μια μικρή κατηγορία στην κατηγορία των συνόλων, καλείται ο συναρτητής εκείνος όπου, η αριστερή Kan επέκταση του κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda διατηρεί πεπερασμένα όρια ή ισοδύναμα η *κατηγορία των στοιχείων* του είναι συν-φιλτραρισμένη.

Ο δεύτερος τρόπος θέασης των επίπεδων συναρτητών απαιτεί λιγότερες γνώσεις θεωρίας κατηγοριών, συνεπώς θα ξεκινήσουμε μ'αυτόν. Έστω $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$ συναρτητής από μια κατηγορία στην κατηγορία των συνόλων, με $\mathsf{elts}(F)$ συμβολίζουμε την *κατηγορία των στοιχείων του* F που ορίζεται ως εξής:

1. Αντικείμενα, είναι ζευγάρια της μορφής (A, a), όπου A αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{A}$ και a στοιχείο του συνόλου $F(A)$.
2. Μορφισμός μεταξύ δύο αντικειμένων $f : (A, a) \longrightarrow (B, b)$ είναι ένας μορφισμός $f : A \longrightarrow B$ της κατηγορίας $\mathscr{A}$ με την ιδιότητα $Ff(a) = b$.

Η κατηγορία αυτή, προκειμένου ο F να είναι επίπεδος, θέλουμε να είναι συν-φιλτραρισμένη, δηλ. εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.12 δυϊκά πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

(i) Η κατηγορία $\mathsf{elts}(F)$ να είναι μη-κενή, δηλ. να υπάρχει αντικείμενο $A \in \mathscr{A}$ και στοιχείο $a \in F(A)$ έτσι ώστε $(A, a) \in \mathsf{elts}(F)$.

(ii) Για κάθε δύο αντικείμενα $(A, a \in F(A))$, $(B, b \in F(B))$ να υπάρχει τρίτο αντικείμενο $(C, c \in F(C)$ της $\mathsf{elts}(F)$ μαζί με μορφισμούς f, g, έτσι ώστε

$$\begin{tikzcd}
 & (A,a) \\
(C,c) \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & (B,b)
\end{tikzcd}$$

(iii) Για κάθε ζεύγος μορφισμών

$$(A, a) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} (B, b)$$

στην $\mathsf{elts}(F)$, να υπάρχει κώνος, δηλ. ένα αντικείμενο $(E, e \in F(E))$ και μορφισμός $h : E \longrightarrow A$

$$(E, e) \xrightarrow{h} (A, a) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} (B, b)$$

έτσι ώστε:

$$f \cdot h = g \cdot h \quad \text{και} \quad F(f \cdot h)(e) = b = F(g \cdot h)(e)$$

Για να περιγράψουμε τους επίπεδους συναρτητές με τον άλλο τρόπο είναι απαραίτητο να αναφερθούμε στις λεγόμενες *Kan επεκτάσεις*.

Kan επεκτάσεις

Η ιδέα της Kan επέκτασης για ένα συναρτητή $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ έχει να κάνει με το πρόβλημα της επέκτασης του πεδίου του συναρτητή F, μέσω ενός δοθέντος *συναρτητή εμφύτευσης* [13] $k : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{L}$, δηλαδή κατά πόσο υπάρχει συναρτητής $\hat{F} : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{D}$ έτσι ώστε:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathscr{L} \arrow[dl, "\hat{F}"] \\ & \mathscr{D} & \end{tikzcd} \qquad (\hat{F} \cdot k \cong F)$$

Μπορούμε να ορίσουμε τις Kan επεκτάσεις με δύο τρόπους. Ο ένας χρησιμοποιεί προσαρτήσεις ενώ ο άλλος (συν)όρια κάποιου είδους.

Έχοντας ένα συναρτητή $k : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{L}$ και μια κατηγορία $\mathscr{D}$ επάγεται, μεταξύ των κατηγοριών $\mathsf{Fun}(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ και $\mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, συναρτητής $k^* : \mathsf{Fun}(\mathscr{L}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ που στέλνει ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathsf{Fun}(\mathscr{L}, \mathscr{D})$ δηλ. ένα συναρτητή $G : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{D}$, στον συναρτητή που προκύπτει συνθέτοντας με τον k δηλ. στον $G \cdot k : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D} \in \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$.

Ορισμός 2.32 *Αν ο συναρτητής* $k^* : \mathsf{Fun}(\mathscr{L}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ *έχει αριστερά προσαρτημένο συναρτητή, τον συμβολίζουμε*

$$\mathrm{Lan}_k - : \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathsf{Fun}(\mathscr{L}, \mathscr{D})$$

[13] Ένας συναρτητής $T : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ θα λέγεται συναρτητής εμφύτευσης αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- είναι *πλήρης*, δηλ. αν για κάθε ζεύγος C, C' αντικειμένων της $\mathscr{C}$ και για κάθε βέλος της μορφής $g : T(C) \longrightarrow T(C')$ της $\mathscr{D}$, υπάρχει μορφισμός $f : C \longrightarrow C' \in \mathscr{C}$ τέτοιος ώστε $g = T(f)$.
- είναι *πιστός*, δηλ. αν για κάθε ζεύγος αντικειμένων C, C' και για κάθε ζεύγος μορφισμών $f, g : C \longrightarrow C'$, της $\mathscr{C}$, η ισότητα $T(f) = T(g)$ δίνει ότι $f = g$.

η τιμή αυτού του αριστερά προσαρτημένου συναρτητή πάνω σ'ένα συναρτητή $F \in \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ *καλείται* αριστερή Kan επέκταση, *κατά μήκος του συναρτητή* k, *και την συμβολίζουμε* $\mathrm{Lan}_k F$.

Αντίστοιχα, αν ο k^* *έχει δεξιά προσαρτημένο θα τον συμβολίζουμε*

$$\mathrm{Ran}_k - : \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \longrightarrow \mathsf{Fun}(\mathscr{L}, \mathscr{D})$$

και η τιμή αυτού πάνω σ'ένα συναρτητή $F \in \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ *ονομάζεται* δεξιά Kan επέκταση *κατά μήκος του* k *και συμβολίζεται* $\mathrm{Ran}_k F$.

Επομένως για ένα συναρτητή $F \in \mathsf{Fun}(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ η αριστερή Kan επέκταση, *κατά μήκος* του συναρτητή k, είναι ένας συναρτής $\mathrm{Lan}_k F : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{D}$ εφοδιασμένος με ένα φυσικό μετασχηματισμό $\eta_F : F \Rightarrow \mathrm{Lan}_k F \cdot k$ (μονάδα της προσάρτησης) με την ιδιότητα για οποιοδήποτε άλλο φυσικό μετασχηματισμό $\eta'_F : F \Rightarrow G \cdot k$, όπου G συναρτητής από την $\mathscr{L}$ στη $\mathscr{D}$, υπάρχει *μοναδικός* φυσικός μετασχηματισμός $\theta : \mathrm{Lan}_k F \Rightarrow G$ τέτοιος ώστε $\eta'_F = \theta \cdot \eta_F$.

Στην περίπτωση που ο συναρτητής k είναι *πλήρης και πιστός* ο φυσικός μετασχηματισμός η_F γίνεται ισομορφισμός, δηλάδή έχουμε ότι

$$F \cong \mathrm{Lan}_k F \cdot k \tag{2.2}$$

Αντίστοιχα ορίζεται και η δεξιά Kan επέκταση για τον συναρτητή F.

Ο δεύτερος τρόπος ορίζει τις Kan επεκτάσεις *σημειακά (pointwise)*. Έστω ότι η κατηγορία $\mathscr{D}$ έχει (συν)όρια κάποιου είδους, τότε η αριστερή (δεξιά) Kan επέκταση μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τα (συν)όρια αυτά.

Έστω $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, $k : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{L}$ δύο συναρτητές, η αριστερή Kan επέκταση του συναρτητή F κατά μήκος του k είναι ένας συναρτητής

$$\mathrm{Lan}_k F : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{D}$$

όπου η "κατά σημείο τιμή του" σε κάποιο αντικείμενο L της κατηγορίας $\mathscr{L}$ δίνεται ως το συνόριο:

$$\mathrm{Lan}_k F(L) = \mathrm{colim}(k \downarrow L \xrightarrow{\pi} \mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D})$$

Ενώ η δεξιά Kan επέκταση $\mathrm{Ran}_k F : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{D}$ σε κάποιο αντικείμενο $L \in \mathscr{L}$ δίνεται ως το όριο:

$$\mathrm{Ran}_k F(L) = \lim(L \downarrow k \xrightarrow{\pi} \mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D})$$

όπου $k \downarrow L$, $L \downarrow k$ οι αντίστοιχες *κόμμα κατηγορίες*. [14]

Συχνά προκειμένου να περιγράψουμε τις Kan επεκτάσεις κατά σημείο χρησιμοποιούμε ένα ειδικό τύπο (συν)ορίου, το οποίο ονομάζεται *(co)end (συν-πέρας)*, για συναρτητές της μορφής $M : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ *(δι-συναρτητές, bifunctors)* όπου $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ κατηγορίες.

Ορισμός 2.33 (Πέρας (end))
Έστω συναρτητής $M : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$. Ένα πέρας για τον συναρτητή M στην $\mathscr{D}$ είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{D}$, το οποίο συμβολίζουμε

$$\int_{C \in \mathscr{C}} M(C, C)$$

μαζί με ένα δι-φυσικό μετασχηματισμό $< \lambda_C : \int_{C \in \mathscr{C}} M(C,C) \longrightarrow M(C,C) | C \in \mathscr{C} >$ με την εξής καθολική ιδιότητα: Αν $< \vartheta_C : T \longrightarrow M(C,C) | C \in \mathscr{C} >$ οποιοσδήποτε άλλος δι-φυσικός μετασχηματισμός, όπου $T \in \mathscr{D}$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $f : T \longrightarrow \int_{C \in \mathscr{C}} M(C,C)$ έτσι ώστε $\vartheta_C = \lambda_C \cdot f$.

Ο ορισμός του *συν-πέρατος* είναι δϋικός αυτού του *πέρατος*.

Ορισμός 2.34 (Συν-πέρας (coend))
Έστω συναρτητής $M : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$. Συν-πέρας για τον συναρτητή M στην $\mathscr{D}$ είναι ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{D}$, το οποίο συμβολίζουμε

$$\int^{C \in \mathscr{C}} M(C, C)$$

μαζί με ένα δι-φυσικό μετασχηματισμό $\mu_C : M(C,C) \longrightarrow \int^{C \in \mathscr{C}} M(C,C)$ τέτοιος ώστε, αν $\eta_C : M(C,C) \longrightarrow K$ ένας άλλος δι-φυσικός μετασχηματισμός για κάποιο $K \in \mathscr{D}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός $g : \int^{C \in \mathscr{C}} M(C,C) \longrightarrow K$ έτσι ώστε $g \cdot \mu_C = \eta_C$.

[14] Έστω ο συναρτητής $k : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{L}$ και L αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{L}$. Η *κόμμα κατηγορία* $k \downarrow L$ έχει αντικείμενα μορφισμούς της κατηγορίας $\mathscr{L}$ της μορφής $a : k(C) \longrightarrow L$, όπου C αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{C}$. Μορφισμός, μεταξύ δύο αντικειμένων $a : k(C) \longrightarrow L$ και $b : k(C') \longrightarrow L$, είναι ένας μορφισμός της κατηγορίας $\mathscr{C}$, $f : C \longrightarrow C'$ που καθιστά αντιμεταθετικό το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} k(C) \arrow[rr, "k(f)"] \arrow[dr, "a"'] & & k(C') \arrow[dl, "b"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

δηλ. $b \cdot k(f) = a$. Αντίστοιχα ορίζεται και η κόμμα κατηγορία $L \downarrow k$.

Χρησιμοποιώντας τώρα τους Ορισμούς (2.33),(2.34) οι Kan επεκτάσεις παίρνουν την μορφή:
Η αριστερή Kan επέκταση είναι

$$\mathrm{Lan}_k F(L) = \int^{C \in \mathscr{C}} \mathscr{L}(k(C), L) \otimes F(C)$$ [15]

για τον δι-συναρτητή

$$\mathscr{L}(k(-), L) \otimes F(-) : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

που στέλνει κάθε ζεύγος αντικειμένων (C, C') στη *συν-δύναμη* [16] της μορφής

$$\coprod_{k(C) \longrightarrow L} F(C')$$

το οποίο αποτελείται από τόσες κόπιες του $F(C')$ όσοι και οι μορφισμοί από το $k(C)$ στο L.
Με την προϋπόθεση λοιπόν ότι η κατηγορία $\mathscr{D}$ έχει τέτοιου είδους συν-όρια η αριστερή Kan επέκταση υπάρχει.

Αντίστοιχα η δεξιά Kan επέκταση γίνεται

$$\mathrm{Ran}_k F(L) = \int_{C \in \mathscr{C}} F(C)^{\mathscr{L}(L, k(C))}$$

όπου

$$F(-)^{\mathscr{L}(L, k(-))} : \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

ο δι-συναρτητής που στέλνει το (C, C') στο γινόμενο της μορφής

$$\prod_{L \longrightarrow k(C')} F(C)$$

που αποτελείται από τόσες κόπιες του $F(C)$ όσοι και οι μορφισμοί από το L στο $k(C')$.
Η δεξιά Kan επέκταση υπάρχει εφόσον η κατηγορία $\mathscr{D}$ έχει γινόμενα τέτοιου είδους. [17]

[15] Για συντομία την συμβολίζουμε $F \otimes L$

[16] Τα συν-γινόμενα της μορφής $\coprod_X C$ όπου X σύνολο, δηλαδή τα συν-γινόμενα όπου όλες οι συνιστώσες τους ισούνται και είναι στο πλήθος όσα και τα στοιχεία του συνόλου X, τα ονομάζουμε *συν-δυνάμεις (Copowers)*

[17] Τα γινόμενα της μορφής $\prod_X C$ οι παράγοντες των οποίων ισούνται και είναι στο πλήθος όσα και τα στοιχεία ενός συνόλου X ονομάζονται *δυνάμεις (powers)*.

Επιστρέφοντας τώρα στην επιπεδότητα των συναρτητών της μορφής $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$, έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 2.35 *Έστω $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$ συναρτητής από μια μικρή κατηγορία $\mathscr{A}$ στην κατηγορία των συνόλων Set, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) ο F είναι επίπεδος,

(ii) η αριστερή Kan επέκταση $\mathrm{Lan}_y F$ του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda $y : \mathscr{A} \longrightarrow [\mathscr{A}^{op}, \mathsf{Set}]$ διατηρεί πεπερασμένα όρια.

Η απόδειξη της Πρότασης, η οποία μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο [Bo].

Ένας λοιπόν συναρτητής της μορφής $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$ είναι επίπεδος αν, παίρνοντας την αριστερή Kan επέκταση του κατά μήκος της *εμφύτευσης Yoneda* [18]

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "F"'] & & {[\mathscr{A}^{op}, \mathsf{Set}]} \arrow[dl, "\mathrm{Lan}_y F"] \\ & \mathsf{Set} & \end{tikzcd}$$

αυτή διατηρεί πεπερασμένα όρια.
Συγκεκριμένα, αν $\lim\limits_{i \in \mathbb{I}} X_i$ το όριο των αντικειμένων $X_i : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathsf{Set}$ στην κατηγορία $[\mathscr{A}^{op}, \mathsf{Set}]$, με $X_{(-)} : \mathbb{I} \longrightarrow [\mathscr{A}^{op}, \mathsf{Set}]$, θέλουμε να ισχύει:

$$\mathrm{Lan}_y F(\lim_{i \in \mathbb{I}} X_i) = \lim_{i \in \mathbb{I}} (\mathrm{Lan}_y F(X_i))$$

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η κατηγορία Set είναι συνπλήρης (και πλήρης), οπότε η αριστερή Kan επέκταση ορίζεται.

Συνέπεια της παραπάνω Πρότασης είναι ότι η επιπεδότητα του F εξασφαλίζει την διατήρηση των ορίων της κατηγορίας $\mathscr{A}$ (αν υπάρχουν) από τον F.

[18] Η εμφύτευση Yoneda για μια κατηγορία $\mathscr{A}$ είναι ένας πλήρης και πιστός συναρτητής $y : \mathscr{A} \longrightarrow [\mathscr{A}^{op}, \mathsf{Set}]$ από την κατηγορία $\mathscr{A}$ στην κατηγορία των συναρτητών $[\mathscr{A}^{op}, \mathsf{Set}]$ (ή δυϊκά $y : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow [\mathscr{A}, \mathsf{Set}]$). Απεικονίζει κάθε αντικείμενο $A \in \mathscr{A}$ στον hom-συναρτητή $\mathscr{A}(-, A) : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathsf{Set}$ (στην δυϊκή περίπτωση στον hom-συναρτητή $\mathscr{A}(A, -) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$), και αν $f : A \longrightarrow A'$ μορφισμός τότε $y(f) : \mathscr{A}(-, A) \longrightarrow \mathscr{A}(-, A')$ ($y(f) : \mathscr{A}(A', -) \longrightarrow \mathscr{A}(A, -)$ στην δυϊκή περίπτωση).
Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο συναρτητής αυτός διατηρεί όρια που ενδεχομένως υπάρχουν στην κατηγορία $\mathscr{A}$.

Πράγματι, από το γεγονός ότι η εμφύτευση Yoneda είναι πλήρης και πιστός συναρτητής, χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό (2.2), έχουμε

$$\mathrm{Lan}_y F \cdot y \cong F$$

Επομένως αν $\lim\limits_i A_i$ είναι ένα όριο στην κατηγορία $\mathscr{A}$ τότε:

$$\begin{aligned} F(\lim_i A_i) &\cong \mathrm{Lan}_y F(y(\lim_i A_i)) \\ &\cong \mathrm{Lan}_y F(\lim_i y(A_i)) \quad (\text{ο } y \text{ διατηρεί όρια}) \\ &\cong \lim_i (\mathrm{Lan}_y F \cdot y)(A_i) \quad (\text{η αριστερή Kan επέκταση διατηρεί όρια}) \\ &\cong \lim_i F(A_i) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Κεφάλαιο 3

Συνάλγεβρες-Τελική Συνάλγεβρα

Σ'αυτό το κεφάλαιο σκοπός μας είναι να εξηγήσουμε με απλά λόγια, τι είναι συνάλγεβρα (coalgebra) καθώς και μερικές συυναφείς έννοιες.
Το κεφάλαιο αυτό δεν αποτελεί μια γενική εισαγωγή στη θεωρία των συναλγεβρών, κάτι τέτοιο μπορεί να βρεθεί, μεταξύ άλλων, στα άρθρα: "A Tutorial on (Co)Algebras and (Co)Induction" των Jacobs και Rutten, "Universal coalgebra: a theory of systems" του Rutten.

3.1 Συνάλγεβρες

Στην προσπάθεια μας να γίνει κατανοητή η έννοια της συνάλγεβρας θα αναφερθούμε σε δύο παραδείγματα από την πληροφορική, όπως αυτά αναφέρονται στο άρθρο [JR]. Υπάρχουν ενδιαφέροντα συστήματα εκεί, τα οποία ονομάζονται *δυναμικά συστήματα(dynamical systems)* και έχουν να κάνουν με δομές, οι οποίες εμπεριέχουν μια έννοια *κατάστασης(state)* του συστήματος, η οποία μπορεί να μεταβάλλεται με διάφορους τρόπους.
Για να εξετάσουμε τέτοια συστήματα κάνουμε χρήση κάποιων δομών οι οποίες ονομάζονται *αυτόματα (automata)* ή *συστήματα μετάβασης (transition systems)*. Αυτές, όπως θα δούμε, είναι παραδείγματα συναλγεβρών.

Παράδειγμα 3.1 *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μηχανή καταστάσεων σ'ένα μαύρο κουτί (black-box machine) και ένα εξωτερικό παρατηρητή. Η μηχανή είναι συνδεδεμένη μ'ένα κουμπί και μία λυχνία. Πιέζοντας το κουμπί η μηχανή πηγαίνει από μια κατάσταση σε μια άλλη, η λυχνία ανάβει μόνο στην περίπτωση όπου η μηχανή έχει φτάσει σε μια τελική κατάσταση. Σ'αυτή την περίπτωση όσες φορές και αν πιέσουμε το κουμπί δεν ανταποκρίνεται. Ο παρατηρητής δεν μπορεί να δει τις μεταβολές των καταστάσεων της* *μηχανής το μόνο που παρατηρεί είναι η συμπεριφορά της που έχει να κάνει με το αν η λυχνία είναι αναμμένη ή όχι.*

Σ'αυτήν λοιπόν την κατάσταση ο παρατηρητής αυτό που κάνει είναι να μετρά πόσες φορές πρέπει να πατήσει το κουμπί προκειμένου να ανάψει η λυχνία. Αυτές μπορεί να είναι, μηδέν (αν η λυχνία είναι ήδη αναμμένη), $n \in \mathbb{N}$, ή άπειρες (αν η μηχανή συνεχίζει να λειτουργεί και η λυχνία δεν ανάβει).
Χρησιμοποιώντας μαθηματικούς όρους μπορούμε να περιγράψουμε τη λειτουργία της συγκεκριμένης μηχανής. Συμβολίζουμε με X το σύνολο όλων των καταστάσεων και με μια συνάρτηση $b : X \to \{*\} \cup X$ τη λειτουργία του κουμπιού, όπου με $*$ συμβολίζουμε μια κατάσταση η οποία δεν ανήκει στο σύνολο X.
Τότε για μια συγκεκριμένη κατάσταση $s \in X$ η συνάρτηση b μπορεί να μας δώσει δύο πιθανά αποτελέσματα: Είτε $b(s) = *$, το οποίο σημαίνει ότι η μηχανή έχει σταματήσει να λειτουργεί και η λυχνία είναι αναμμένη ή $b(s) \in X$, όπου σ'αυτή την περίπτωση η μηχανή έχει προχωρήσει σε μια επόμενη κατάσταση.
Όπως έχουμε αναφέρει το μόνο που μπορεί να κάνει ο παρατηρητής είναι να παρακολουθεί τη συμπεριφορά της μηχανής, η οποία έχει να κάνει με το πόσες φορές πρέπει να πατήσει το κουμπί προκειμένου να ανάψει η λυχνία. Τη συμπεριφορά αυτή μπορούμε επίσης να τη συμβολίσουμε με μια συνάρτηση, $\mathrm{beh} : X \to \overline{\mathbb{N}}$, όπου $\overline{\mathbb{N}}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών μ'ενα επιπλέον στοιχείο το ∞.

Παράδειγμα 3.2 *Θεωρούμε τώρα μια διαφορετική μηχανή, η οποία περιλαμβάνει δύο κουμπιά τα οποία ονομάζουμε* Τιμή (Value) *και* Επόμενο (Next). *Πιέζοντας ο παρατηρητής το κουμπί-Τιμή λαμβάνει μια οπτική ένδειξη σε μια οθόνη η οποία είναι μια τιμή απο μία βάση δεδομένων A. Η τιμή αυτή δεν επηρεάζει την κατάσταση της μηχανής, δηλαδή όσες φορές και αν πιέσουμε το συγκεκριμένο κουμπί λαμβάνουμε την ίδια ένδειξη. Πιέζοντας τώρα το κουμπί-Επόμενο η μηχανή πηγαίνει σε μια επόμενη κατάσταση, την τιμή της οποίας την λαμβάνουμε πιέζοντας πάλι το κουμπί-Τιμή.*

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, η μηχανή μπορεί να περιγραφεί ως μια συνάρτηση $< \mathrm{value}, \mathrm{next} >: X \to A \times X$, για ένα σύνολο καταστάσεων X και η συμπεριφορά, που παρακολουθεί ο παρατηρητής είναι η ακόλουθη:
Διαβάζουμε την τιμή πιέζοντας το αντίστοιχο κουμπί αφού προηγουμένως έχουμε πιέσει το κουμπί-Επόμενο $n \in \mathbb{N}$-φορές.
Το απότελεσμα που λαμβάνουμε είναι μια άπειρη ακολουθία $(a_0, a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$ στοιχείων της βάσης δεδομένων A, όπου τα στοιχεία a_i αντιστοιχούν στην τιμή της κατάστασης της μηχανής αφού έχουμε πιέσει το κουμπί-Επόμενο i-φορές.
(Θυμίζουμε, $A^{\mathbb{N}}$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το $\mathbb{N}$ στο A).

Το παράδειγμα αυτό μπορεί να ιδωθεί και ως ένα *ντετερμινιστικό σύστημα μετάβασης με τιμές (deterministic labelled transition system).*
Ένα τέτοιο σύστημα είναι μια τριάδα $(S, L, \rightarrow_S)$ αποτελούμενη από, ένα σύνολο καταστάσεων S, ένα σύνολο τιμών L και μια τριμελή σχέση $\rightarrow_S \subseteq S \times L \times S$. Για $p, q \in S$ και $a \in L$, η τριάδα $(p, a, q) \in \rightarrow_S$ γράφεται ως $p \xrightarrow{a}_S q$.
Στο παράδειγμα μας, για δύο καταστάσεις $s, s' \in X$ και μια τιμή $a \in A$

$$s \xrightarrow{a}_S s', \text{ ανν, } \mathrm{value}(s) = a \text{ και } \mathrm{next}(s) = s'$$

Αυτό σημαίνει ότι στην κατάσταση s παίρνουμε την τιμή a και το σύστημα μετακινείται στην κατάσταση s'.
Η ακολουθία των παρατηρήσεων που λαμβάνουμε ξεκινώντας από την κατάσταση s, επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία, είναι $\mathrm{Tr}(s) = (a, a_1, \ldots)$, όπου $s \xrightarrow{a}_S s_1 \xrightarrow{a_1}_S s_2 \ldots$.
(Το ότι το σύστημα μας είναι ντετερμινιστικό σημαίνει ότι για κάθε κατάσταση $s \in X$ επιτρέπουμε μόνο μία επόμενη κατάσταση $s' \in X$).

Στη συνέχεια θεωρώντας ένα τέτοιο σύστημα $(S, A, \rightarrow_S)$ ορίζουμε, για κάθε σύνολο X, το σύνολο

$$B(X) = \mathscr{P}(A \times X) = \{V \subseteq A \times X\}$$

καθώς και τη συνάρτηση

$$\alpha_X : X \rightarrow B(X)$$

Καλούμε το ζευγάρι (X, α_X) *B-σύστημα (B-system).*

Κάθε σύστημα μετάβασης με τιμές $(S, A, \rightarrow_S)$, μπορεί να αναπαρασταθεί ως B-σύστημα ορίζοντας

$$\alpha_S : S \rightarrow B(S)\ ,\ s \mapsto \{(a, s') \mid s \xrightarrow{a}_S s'\}$$

Αντίστροφα, κάθε B-σύστημα (S, α_S) αντιστοιχεί σ'ένα σύστημα μετάβασης $(S, A, \rightarrow_S)$, ορίζοντας

$$s \xrightarrow{a}_S s' \Leftrightarrow (a, s') \in \alpha_S(s)$$

Σημείωση 3.3 *Στο* Παράδειγμα 3.2 *το σύστημα μετάβασης είναι ντεντερμινιστικό, οπότε για κάθε κατάσταση $s \in S$ το σύνολο $\alpha_S(s)$ είναι μονοσύνολο. Σε αντίθετη περίπτωση το σύστημα μετάβασης καλείται μη-ντεντερμινιστικό.*

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο συστήματα μετάβασης με το ίδιο όμως σύνολο τιμών A, $(S, A, \rightarrow_S)$ και $(T, A, \rightarrow_T)$. Εστω (S, α_S), (T, α_T) οι αντίστοιχες αναπαραστάσεις τους ως B-συστήματα. Τότε B-ομομορφισμός

$$f : (S, \alpha_S) \rightarrow (T, \alpha_T)$$

είναι μια συνάρτηση $f : S \to T$ που ικανοποιεί την ισότητα

$$B(f) \cdot \alpha_S = \alpha_T \cdot f \tag{3.1}$$

όπου $B(f)$ είναι η συνάρτηση

$$B(f) = \mathscr{P}(A \times f) : \mathscr{P}(A \times S) \to \mathscr{P}(A \times T)$$

η οποία ορίζεται ως εξής:

$$B(f)(V) = \mathscr{P}(A \times f)(V) = \{(a, f(s)) \mid (a, s) \in V\}$$

για κάθε $V \subseteq A \times S$.
Χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η ισότητα $B(f) \cdot \alpha_S = \alpha_T \cdot f$ είναι ισοδύναμη με τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

1. για κάθε $s' \in S$, αν $s \xrightarrow{a}_S s'$ τότε $f(s) \xrightarrow{a}_T f(s')$.
2. για κάθε $t \in T$, αν $f(s) \xrightarrow{a}_T t$ τότε υπάρχει $s' \in S$ με $s \xrightarrow{a}_S s'$ και $f(s') = t$.

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι

$$B(\mathrm{id}_S) = \mathrm{id}_{B(S)} \text{ και } B(f \cdot g) = B(f) \cdot B(g),$$

από τα οποία συμπεραίνουμε ότι ο B είναι ένας ενδοσυναρτητής στην κατηγορία των συνόλων, Set.

Συνοψίζοντας καταλήγουμε στο ότι ένα B-*σύστημα*, (X, α_X), αποτελείται από ένα σύνολο X και ένα μορφισμό $\alpha_X : X \to B(X)$, όπου B είναι ένας ενδοσυναρτητής στην κατηγορία Set. Οποτεδήποτε έχουμε δύο τέτοια συστήματα, ένας μορφισμός μεταξύ αυτών πρέπει να ικανοποιεί μια ισότητα της μορφής (3.1).
Η διατύπωση αυτή είναι μια ειδική περίπτωση αυτού που καλούμε συνάλγεβρα.

Γενικεύοντας μπορούμε να θεωρήσουμε, αντί του συγκεκριμένου ενδοσυναρτητή B, ένα οποιοδήποτε ενδοσυναρτητή στη Set ή ακόμα περισσότερο αντί του B και της κατηγορίας Set μπορούμε να θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε κατηγορία $\mathscr{C}$ και ένα ενδοσυναρτητή σ'αυτήν.
Αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο, γενικό, ορισμό της *συνάλγεβρας*.

Ορισμός 3.4 *Έστω $\mathscr{C}$ μια οποιαδήποτε κατηγορία και $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ ένας ενδοσυναρτητής.*

1. Συνάλγεβρα για τον F (τύπου F) *είναι ένας μορφισμός της μορφής* $e : X \to F(X)$.

2. Ομομορφισμός συναλγεβρών *από* $e : X \to F(X)$ *στο* $e' : X' \to F(X')$ *είναι ένας μορφισμός* $h : X \to X'$ *ο οποίος καθιστά το ακόλουθο τετράγωνο*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "h"'] & F(X) \arrow[d, "F(h)"] \\ X' \arrow[r, "e'"'] & F(X') \end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό.

Σημείωση 3.5 *Χρησιμοποιώντας κατηγορικούς όρους στα* Παραδείγματα 3.1, 3.2 *οι αντίστοιχοι ενδοσυναρτητές που προκύπτουν είναι:*

$$F = 1 + (-) : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set} \text{ και } F' = A \times (-) : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$$

Εδώ θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η δυϊκή έννοια της συνάλγεβρας είναι αυτή της *άλγεβρας*. Δηλαδή για ένα ενδοσυναρτητή F πάνω σε μια κατηγορία $\mathscr{C}$ *άλγεβρα* είναι ένας μορφισμός της μορφής $e : F(C) \to C$. Ενώ ομομορφισμός αλγεβρών, $e : F(C) \to C$, $e' : F(C') \to C'$ είναι ένας μορφισμός $h : C \to C'$ τέτοιος ώστε το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "F(h)"'] & C \arrow[d, "h"] \\ F(C') \arrow[r, "e'"'] & C' \end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθεται.

Η διαφορά μεταξύ άλγεβρας και συνάλγεβρας, είναι η διαφορά μεταξύ "κατασκευής" και "παρατήρησης".
Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τον ενδοσυναρτητή $F : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ του Παραδείγματος 3.2, δηλ. $F = A \times (-)$, για ένα συγκεκριμένο σύνολο A.
Μια συνάλγεβρα γι'αυτόν τον ενδοσυναρτητή, για ένα σύνολο X, είναι ένας μορφισμός $e : X \to A \times X$ ο οποίος αποτελείται από δύο συναρτήσεις, τις οποίες καλούμε, $\mathrm{value} : X \to A$ και $\mathrm{next} : X \to X$.
Ξεκινώντας μ'ένα στοιχείο $x \in X$ η συνάρτηση $value$ παράγει ένα στοιχείο του συνόλου A, ενώ η συνάρτηση $next$ μας δίνει ένα στοιχείο του συνόλου X. Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδιδακασία για το νέο αυτό στοιχείο του συνόλου X, και ούτω καθεξής, παίρνουμε

μια ακολουθία στοιχείων $(a_1, a_2, \ldots)$ του A η οποία είναι αυτό που "παρατηρούμε" σε σχέση με το στοιχείο x.

Στη συνέχεια θεωρούμε μια άλγεβρα για τον ίδιο ενδοσυναρτητή F, έστω $\alpha : A \times X \to X$ αυτή. Για κάθε στοιχείο $(a, x) \in A \times X$, όπου $a \in A$ και $x \in X$, η άλγεβρα "κατασκευάζει" ένα στοιχείο του X, δηλ. $\alpha(a, x) = x' \in X$.

Η διαφορά των δύο αυτών δομών είναι ότι στην περίπτωση των συναλγεβρών δεν έχουμε τρόπο να ορίσουμε στοιχεία του συνόλου X, το μόνο που έχουμε είναι "δράσεις" πάνω απο το X οι οποίες ενδέχεται να μας δώσουν κάποιες πληροφορίες για τα στοιχεία του X.

3.2 Η Κατηγορία των Συναλγεβρών - Τελική Συνάλγεβρα

Στην ενότητα 3.1 δώσαμε τον ορισμό της συνάλγεβρας και αναφέραμε τί είναι μορφισμός μεταξύ δύο συναλγεβρών, για τον ίδιο ενδοσυναρτητή. Η συλλογή όλων των συναλγεβρών, για ένα ενδοσυναρτητή, ορίζουν *κατηγορία.*

Ορισμός 3.6 *Δοθέντος μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$ και ενός ενδοσυναρτητή $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, ορίζουμε την κατηγορία* $\mathsf{Coalg}(F)$, *ως:*

- *αντικείμενα, F-συνάλγεβρες (C, e) , $e : C \to F(C)$.*
- *μορφισμούς, F-ομομορφισμούς $f : (C, e) \to (C', e')$, $f : C \to C'$ με την ιδιότητα, το διάγραμμα*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{e} & F(C) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ C' & \xrightarrow[e']{} & F(C') \end{array}$$

  να αντιμετατίθεται.
- *για κάθε αντικείμενο (C, e), ο ταυτοτικός μορφισμός $\mathrm{id} : C \to C$ είναι ομομορφισμός συναλγεβρών.*

Τελική Συνάλγεβρα

Η ύπαρξη τελικού αντικειμένου (τελική συνάλγεβρα) στην κατηγορία $\mathsf{Coalg}(F)$ παίζει σημαντικό ρόλο κυρίως για δύο λόγους:

1. Πολλές σημαντικές κατασκευές μπορούν να ιδωθούν ως τελικές συνάλγεβρες για κάποιους ενδοσυναρτητές.

2. Αν γνωρίζουμε ότι η τελική συνάλγεβρα υπάρχει, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της τελικότητας μπορούμε να ορίσουμε καινούργιες συναρτήσεις σ'αυτήν. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως *συν-επαγωγή (coinduction).*

Ορισμός 3.7 *Εστω κατηγορία* $\mathscr{C}$ *και* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ *ενδοσυναρτητής, η συνάλγεβρα* $\tau : T \to F(T), T \in \mathscr{C}$ *θα είναι τελική (final coalgebra) αν για οποιαδήποτε άλλη συνάλγεβρα* $e : C \to F(C)$ *υπάρχει μοναδικός μορφισμός* $e^\dagger : C \to T$*, έτσι ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e^\dagger"'] & F(C) \arrow[d, "F(e^\dagger)"] \\ T \arrow[r, "\tau"'] & F(T) \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.
δηλ. (T, τ) *είναι το τελικό αντικείμενο της κατηγορίας* $\mathsf{Coalg}(F)$.

Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα, σε σχέση με την ύπαρξη της τελικής συνάλγεβρας, οφείλεται στον Lambek και λέει ότι, αν (T, τ) είναι τελική συνάλγεβρα τότε ο μορφισμός $\tau : T \to F(T)$ είναι ισομορφισμός. (Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για την αρχική άλγεβρα στην περίπτωση των αλγεβρών).
Με άλλα λόγια, η τελική συνάλγεβρα (T, τ) είναι ένα σταθερό σημείο (fixed point) για τον ενδοσυναρτητή F. Είναι σαφές ότι ένα σταθερό σημείο μπορεί να θεωρηθεί και ως άλγεβρα και ως συνάλγεβρα.

Οπως αναφέραμε στην αρχή, η ύπαρξη της τελικής συνάλγεβρας - η οποία είναι ένα είδος ορίου στην κατηγορία των συναλγεβρών - βασίζεται στις ιδιότητες που η κατηγορία και ο ενδοσυναρτητής πρέπει έχουν.
Αρα το ζητούμενο είναι να βρούμε κατάλληλες συνθήκες οι οποίες θα εξασφαλίζουν την ύπαρξη και τον υπολογισμό της τελικής συνάλγεβρας. Υπάρχει πάντα η τετριμμένη αλλά "βαριά" συνθήκη η οποία υποθέτη ότι η κατηγορία έχει τελικό αντικείμενο και ότι ο ενδοσυναρτητής το διατηρεί. Αλλά μια τέτοια συνθήκη στερείται παραδειγμάτων ενδιαφέροντος.

Τα επόμενα δύο παραδείγματα καταδεικνύουν την σπουδαιότητα της ύπαρξης τελικής συνάλγεβρας.

Παράδειγμα 3.8 (Συνέχεια του Παραδείγματος 3.1)
Δείξαμε ότι ο ενδοσυναρτητής $F : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ *που αντιστοιχεί στο* Παράδειγμα 3.1 *είναι*

$$F(X) = 1 + X \ , \ X \in \mathsf{Set}$$

Επίσης η συμπεριφορά του συστήματος που παρατηρούμε δίνεται ως την συνάρτηση

$$\text{beh} : X \to \overline{\mathbb{N}}$$

Θα δείξουμε ότι:
– $\overline{\mathbb{N}}$ *είναι ο φορέας της τελικής συνάλγεβρας και η συνάρτηση* beh *ο μοναδικός μορφισμός από οποιαδήποτε άλλη συνάλγεβρα* $(X, e : X \to F(X))$ *στην τελική.*
– *Χρησιμοποιώντας την τελικότητα θα ορίσουμε, με συν-επαγωγή, την πράξη της πρόσθεσης πάνω στο επεκτεταμένο σύνολο των φυσικών αριθμών, δηλ.* $\oplus : \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{N}}$.

Μια *δομή συνάλγεβρας* πάνω στο σύνολο $\overline{\mathbb{N}}$

$$\tau : \overline{\mathbb{N}} \to F(\overline{\mathbb{N}}) = 1 + \overline{\mathbb{N}}$$

ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\tau(0) = * \\ &\tau(n+1) = n \\ &\tau(\infty) = \infty \end{aligned} \tag{3.2}$$

Η συνάρτηση συμπεριφοράς, $\text{beh} : X \to \overline{\mathbb{N}}$, περιγράφει τις καταστάσεις:

$\text{beh}(x) = 0$, αν η λυχνία είναι ήδη αναμμένη.
$\text{beh}(x) = n$, αν πρέπει να πιέσουμε το κουμπί n-φορές εως ότου ανάψει η λυχνία.
$\text{beh}(x) = \infty$, αν συνεχίζουμε να πιέζουμε το κουμπί άπειρες φορές.

Υποθέτοντας ότι $e : X \to 1 + X$ είναι μια οποιαδήποτε συνάλγεβρα, η beh ορίζεται ως εξής:
$\text{beh}(x) = 0$, αν $e(x) = *$.
$\text{beh}(x) = n$, αν υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in X$ τέτοια ώστε $e(x) = x_1, e(x_1) = x_2, \ldots, e(x_{n-2}) = n - 1, e(x_{n-1}) = *$.
$\text{beh}(x) = \infty$, αν υπάρχουν άπειρα στοιχεία $x_1, x_2, \ldots \in X$ με $e(x) = x_1, e(x_1) = x_2, \ldots$.

Τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\text{beh}"] \arrow[d, "e"'] & \overline{\mathbb{N}} \arrow[d, "\tau"] \\ 1 + X \arrow[r, "\text{id}+\text{beh}"'] & 1 + \overline{\mathbb{N}} \end{tikzcd}$$

αντιμετατίθεται:
Αν $\mathrm{beh}(x) = 0$,

$$\begin{aligned}\tau(\mathrm{beh}(x)) &= \tau(0) = *\\ (\mathrm{id} + \mathrm{beh})(e(x)) &= (\mathrm{id} + \mathrm{beh})(*) = *\end{aligned}$$

Αν $\mathrm{beh}(x) = n$,

$$\begin{aligned}\tau(\mathrm{beh}(x)) &= \tau(n) = \tau((n-1)+1) = n-1\\ (\mathrm{id} + \mathrm{beh})(e(x)) &= \mathrm{beh}(e(x)) = \mathrm{beh}(x_1) = n-1\end{aligned}$$

Αν $\mathrm{beh}(x) = \infty$,

$$\begin{aligned}\tau(\mathrm{beh}(x)) &= \tau(\infty) = \infty\\ (\mathrm{id} + \mathrm{beh})(e(x)) &= \mathrm{beh}(e(x)) = \mathrm{beh}(x_1) = \infty\end{aligned}$$

Τέλος πρέπει να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση beh είναι ο *μοναδικός* μορφισμός ο οποίος καθιστά το παραπάνω διάγραμμα αντιμεταθετικό.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένας δεύτερος μορφισμός $h : X \to \overline{\mathbb{N}}$ με

$$\tau \cdot h = (\mathrm{id} + h) \cdot e \tag{3.3}$$

Για κάθε $x \in X$:

Αν $e(x) = *$, από την (3.3) προκύπτει:

$$\tau(h(x)) = (\mathrm{id} + h)(e(x)) = (\mathrm{id} + h)(*) = *$$

δηλ.

$$h(x) = 0$$

Αν $e(x) = x_1 \in X$ τότε (από την (3.3))

$$\tau(h(x)) = (\mathrm{id} + h)(e(x)) = (\mathrm{id} + h)(x_1) = h(x_1)$$

Εδώ υπάρχουν δύο ενδεχόμενα,
(1) $e(x_1) = *$, οπότε

$$\tau(h(x_1)) = *$$

δηλ.,

$$h(x_1) = 0$$

(2) $e(x_1) = x_2$, οπότε

$$\tau(h(x_1)) = (\mathrm{id} + h)(e(x_1)) = (\mathrm{id} + h)(x_2) = h(x_2)$$

και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το στοιχείο x_2.
Συνεπώς, αν προκύψουν $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}$ στοιχεία με

$$e(x) = x_1, \ldots, e(x_{n-2}) = x_{n-1}, e(x_{n-1}) = *$$

τότε

$$\begin{array}{ll}
\tau(h(x_{n-1})) = * & \delta\eta\lambda.\ \ h(x_{n-1}) = 0 \\
\tau(h(x_{n-2})) = h(x_{n-1}) = 0 & \delta\eta\lambda.\ \ h(x_{n-2}) = 1 \\
\vdots & \vdots \\
\tau(h(x_1)) = h(x_2) = n-2 & \delta\eta\lambda.\ \ h(x_{n-1}) = n-1 \\
\tau(h(x)) = h(x_1) = n-1 & \delta\eta\lambda.\ \ h(x) = n
\end{array}$$

Τέλος, αν $h(x) = \infty$

$$(\mathrm{id} + h)(e(x)) = \tau(\infty) = \infty$$

δηλ., $e(x) = x_1$ με $h(x_1) = \infty$ και ούτω καθ'εξής.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν άπειρα στοιχεία $x_1, x_2, \ldots \in X$ με $e(x) = x_1, e(x_1) = x_2, \ldots$.

Απο τα παραπάνω έπεται το ζητούμενο,

$$\mathrm{beh} = h$$

Γνωρίζοντας τώρα ότι η τελική συνάλγεβρα τ υπάρχει, θα ορίσουμε την πράξη της πρόσθεσης στο επεκτεταμένο σύνολο των φυσικών αριθμών, $\oplus : \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{N}}$.
Εστω $f : \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} \to 1 + \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}}$, μια δομή συνάλγεβρας η οποία ορίζεται για κάθε $(n, m) \in \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$f(n,m) = \begin{cases} * & if\ \tau(n) = \tau(m) = * & \delta\eta\lambda.\ n = m = 0 \\ (n-1, m) & if\ \tau(n) = n-1 & \delta\eta\lambda.\ n \neq 0 \\ (n, m-1) & if\ \tau(n) = *, \tau(m) = m-1 & \delta\eta\lambda.\ n = 0, m \neq 0 \end{cases}$$

Εφόσον $\tau : \overline{\mathbb{N}} \to 1 + \overline{\mathbb{N}}$ είναι η τελική συνάλγεβρα, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός συναλγεβρών, $\oplus : \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{N}}$, ο οποίος καθιστά το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} \arrow[r, "\oplus"] \arrow[d, "f"'] & \overline{\mathbb{N}} \arrow[d, "\tau"] \\
1 + X \arrow[r, "\mathrm{id}+\oplus"'] & 1 + \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}}
\end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό.

Δοθέντων δύο στοιχείων $n, m \in \overline{\mathbb{N}}$, η ισότητα

$$\tau(n \oplus m) = (\mathrm{id} + \oplus)(f(n, m))$$

ισχύει.
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
• Αν $n = m = 0$

$$\tau(n \oplus m) = (\mathrm{id} + \oplus)(*) = *$$

δηλ.

$$\mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

• Αν $n = 0$, $m \neq 0$

$$\begin{aligned}
\tau(n \oplus m) &= (\mathrm{id} + \oplus)(n, m-1) = n \oplus (m-1) \\
\tau(n \oplus (m-1)) &= (\mathrm{id} + \oplus)(n, m-2) = n \oplus (m-2) \\
&\vdots \\
\tau(n \oplus (m-(m-1))) &= (\mathrm{id} + \oplus)(n, (m-m)) = n \oplus (m-m) = 0
\end{aligned}$$

άρα,

$$\begin{aligned}
0 \oplus (m-(m-1)) &= 1 \\
&\vdots \\
0 \oplus (m-1) &= m-1 \\
\mathbf{0} \oplus \mathbf{m} &= \mathbf{m}
\end{aligned}$$

(το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει, αν $n \neq 0$ και $m = 0$).

• Αν $n, m \neq 0$ με $n < m$ (ή $n > m$)

$$\begin{aligned}
\tau(n \oplus m) &= (\mathrm{id} + \oplus)(n-1, m) = (n-1) \oplus m \\
\tau((n-1) \oplus m) &= (\mathrm{id} + \oplus)(n-2, m) = (n-2) \oplus m \\
&\vdots \\
\tau((n-(n-1)) \oplus m) &= (\mathrm{id} + \oplus)(n-n, m) = 0 \oplus m = m
\end{aligned}$$

δηλ.

$$\begin{aligned}
(n-(n-1)) \oplus m &= m+1 \\
&\vdots \\
\mathbf{n} \oplus \mathbf{m} &= \mathbf{n} + \mathbf{m}
\end{aligned}$$

• Παρόμοια προκύπτει και ότι

$$\infty \oplus \mathbf{m} = \infty = \mathbf{m} \oplus \infty$$

$\square$

Παράδειγμα 3.9 (Συνέχεια του Παραδείγματος 3.2)
Στο Παράδειγμα 3.2 *ο ενδοσυναρτητής* $F : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ *είναι ο*

$$F(X) = A \times X \ , \ X \in \mathsf{Set}$$

όπου A *ένα σταθερό σύνολο.*
Η συμπεριφορά του συστήματος δίνεται από την συνάρτηση

$$\mathrm{beh} : X \to A^{\mathbb{N}},$$

όπου $A^{\mathbb{N}}$ *είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το* $\mathbb{N}$ *στο* A.
Οπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, θα δείξουμε ότι $A^{\mathbb{N}}$ *είναι ο φορέας της τελικής συνάλγεβρας και θα ορίσουμε, με συν-επαγωγή, τη σταθερή συνάρτηση*

$$\mathrm{const}^a : 1 \to A^{\mathbb{N}},$$

για κάποιο $a \in A$.

Ένα στοιχείο $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$, δηλ. μια συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N} \to A$, αναπαρίσταται σαν μια άπειρη ακολουθία $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ στοιχείων του A.
Ορίζουμε την συνάλγεβρα

$$\tau := < \mathrm{head}, \mathrm{tail} >: A^{\mathbb{N}} \to A \times A^{\mathbb{N}},$$

η οποία στέλνει ένα στοιχείο $\alpha = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ στο ζευγάρι

$$\tau(\alpha) = (\mathrm{head}(\alpha), \mathrm{tail}(\alpha)) = (a_0, (a_1, a_2, \ldots))$$

Αν θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε συνάλγεβρα

$$e := < \mathrm{value}, \mathrm{next} >: X \to A \times X \ , \ x \mapsto (\mathrm{value}(x), \mathrm{next}(x))$$

τότε, για κάθε $x \in X$, η συνάρτηση $\mathrm{beh}(x) : \mathbb{N} \to A$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\mathrm{beh}(x)(0) &= \mathrm{value}(x) \\
\mathrm{beh}(x)(1) &= \mathrm{value}(\mathrm{next}(x)) \\
\mathrm{beh}(x)(2) &= \mathrm{value}(\mathrm{next}^{(2)}(x)) \\
&\vdots \\
\mathrm{beh}(x)(n) &= \mathrm{value}(\mathrm{next}^{(n)}(x)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

όπου $\mathrm{next}^{(n)}(x) := \mathrm{next}(\mathrm{next}(\ldots(\mathrm{next}(x))\ldots)$.

Η συνάρτηση αυτή είναι ομομορφισμός συναλγεβρών

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\mathrm{beh}"] \arrow[d, "e"'] & A^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\tau"] \\
A \times X \arrow[r, "\mathrm{id}\times\mathrm{beh}"'] & A \times A^{\mathbb{N}}
\end{tikzcd}$$

διότι για κάθε $x \in X$:

$$\tau(\mathrm{beh}(x)) = (\mathrm{value}(x), (\mathrm{value}(\mathrm{next}(x)), \mathrm{value}(\mathrm{next}^{(2)}(x)), \ldots))$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id} \times \mathrm{beh})(e(x)) &= (\mathrm{id} \times \mathrm{beh})(\mathrm{value}(x), \mathrm{next}(x)) = (\mathrm{value}(x), \mathrm{beh}(\mathrm{next}(x))) \\
&= (\mathrm{value}(x), (\mathrm{value}(\mathrm{next}(x)), \mathrm{value}(\mathrm{next}^{(2)}(x)), \ldots))
\end{aligned}$$

Μοναδικότητα της beh:
Έστω $t : X \to A^{\mathbb{N}}$ ένας άλλος μορφισμός με

$$\tau(t(x)) = (\mathrm{id} \times t)(e(x)) \tag{3.4}$$

για κάθε $x \in X$.
Όμως $t(x)$ είναι συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο A, οπότε η ισότητα (3.4) δίνει:

$$< \mathrm{head}, \mathrm{tail} > (t(x)(0), t(x)(1), \ldots) = (\mathrm{value}(x), t(\mathrm{next}(x)))$$

άρα,

$$t(x)(0) = \mathrm{value}(x)$$

και

$$(t(x)(1), t(x)(2), \ldots) = t(\mathrm{next}(x))$$

Επίσης το στοιχείο $\mathrm{next}(x)$ ανήκει στο σύνολο X, άρα εφαρμόζοντας ξανά την ισότητα (3.4) προκύπτει:

$$< \mathrm{head}, \mathrm{tail} > (t(\mathrm{next}(x))) = (\mathrm{id} \times t)(< \mathrm{value}, \mathrm{next} >)(\mathrm{next}(x))$$

δηλ.

$$(t(x)(1), (t(x)(2), t(x)(3), \ldots)) = (\mathrm{value}(\mathrm{next}(x)), t(\mathrm{next}^{(2)}(x)))$$

άρα,

$$t(x)(1) = \mathrm{value}(\mathrm{next}(x))$$

και

$$(t(x)(2), t(x)(3), \ldots) = t(\mathrm{next}^{(2)}(x))$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} t(x)(0) &= \mathrm{value}(x) \\ t(x)(1) &= \mathrm{value}(\mathrm{next}(x)) \\ &\vdots \\ t(x)(n) &= \mathrm{value}(\mathrm{next}^{(n)}(x)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο, δηλ.

$$\mathrm{beh} = t$$

Υπό την προϋπόθεση ότι $\tau :=< \mathrm{head}, \mathrm{tail} >: A^{\mathbb{N}} \to A \times A^{\mathbb{N}}$ είναι η τελική συνάλγεβρα για τον ενδοσυναρτητή $F(X) = A \times X$, θα ορίσουμε με συν-επαγωγή την σταθερή συνάρτηση

$$\mathrm{const}^a : 1 \to A^{\mathbb{N}}$$

για κάποιο στοιχείο $a \in A$.
Πρώτα ορίζουμε την συνάλγεβρα

$$c : 1 \to A \times 1 \, , \, * \mapsto (a, *)$$

Από την τελικότητα της τ προκύπτει το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\mathrm{const}^a"] \arrow[d, "c"'] & A^{\mathbb{N}} \arrow[d, "\tau"] \\ A \times 1 \arrow[r, "\mathrm{id} \times \mathrm{const}^a"'] & A \times A^{\mathbb{N}} \end{tikzcd}$$

επομένως,

$$< \mathrm{head}, \mathrm{tail} > (\mathrm{const}^a(*)) = (\mathrm{id} \times \mathrm{const}^a)(c(*)) = (\mathrm{id} \times \mathrm{const}^a)(a, *) = (a, \mathrm{const}^a(*))$$

όπου

$$\mathrm{const}^a(*) : \mathbb{N} \to A$$

άρα

$$< \mathrm{head}, \mathrm{tail} > (\mathrm{const}^a(*)) = (\mathrm{const}^a(*)(0), (\mathrm{const}^a(*)(1), \mathrm{const}^a(*)(2), \ldots))$$

Οι παραπάνω δύο ισότητες μας δίνουν ότι:

$$\mathrm{const}^a(*)(0) = a \quad \text{και} \quad \mathrm{const}^a(*) = (\mathrm{const}^a(*)(1), \mathrm{const}^a(*)(2), \ldots)$$

Αν εφαρμόσουμε ξανά την αντιμεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος για το

$$\mathrm{const}^a(*) = (\mathrm{const}^a(*)(1), \mathrm{const}^a(*)(2), \ldots)$$

παρατηρούμε ότι,

$$\mathrm{const}^a(*)(1) = a \quad \text{και} \quad \mathrm{const}^a(*) = (\mathrm{const}^a(*)(2), \mathrm{const}^a(*)(3), \ldots)$$

Επομένως συμπεραίνουμε

$$\begin{gathered} \mathrm{const}^a(*)(0) = a \\ \mathrm{const}^a(*)(1) = a \\ \vdots \\ \mathrm{const}^a(*)(n) = a \\ \vdots \end{gathered}$$

δηλ.,

$$\mathrm{const}^a(*) = (a, a, \ldots)$$

□

Κεφάλαιο 4

Κατασκευή της Τελικής Συνάλγεβρας

4.1 Τελική Συνάλγεβρα σε Τοπικά Πεπερασμένες Παρουσιάσιμες Κατηγορίες

Θεωρώντας μία οποιαδήποτε τ.π.π κατηγορία $\mathscr{K}$ και ένα πεπερασμένα προσδιοριμένο ενδοσυναρτητή $\Phi : \mathscr{K} \to \mathscr{K}$, ορίζουμε την κατηγορία των συναλγεβρών γι'αυτόν τον ενδοσυναρτητή

$$\mathsf{Coalg}(\Phi)$$

Από τις ιδιότητες της τ.π.π κατηγορίας και του πεπερασμένα προσδιοριμένου συναρτητή προκύπτει ότι για κάθε συνάλγεβρα $(K, e : K \to \Phi(K))$, $K \in \mathscr{K}$

- ο φορέας της K, γράφεται ως φιλτραρισμένο συνόριο πεπερασμένων παρουσιάσιμων αντικειμένων
$$K = \operatorname*{colim}_{\text{filt.}} a_i$$
όπου, $a_i \in \mathscr{K}_{f.p}$
- ο Φ διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια, άρα
$$\Phi(K) = \Phi(\operatorname*{colim}_{\text{filt.}} a_i) \cong \operatorname*{colim}_{\text{filt.}} \Phi(a_i)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε μια συνιστώσα του συνορίου $K = \operatorname*{colim}_{\text{filt.}} a_i$:

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[dr, "\mathrm{in}_{a_0}"] & & \\ & K \arrow[r, "e"] & \Phi(K) \end{tikzcd}$$

Το a_0 είναι πεπερασμένα παρουσιάσιμο και το συνόριο $\Phi(K) = \operatorname*{colim}_{\text{filt.}} \Phi(a_i)$ φιλτραρισμένο, οπότε υπάρχει μια παραγοντοποίηση του μορφισμού $e \cdot \mathrm{in}_{a_0}$ μέσω μιας συνιστώσας του συνορίου:

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, dotted, "m_1"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{a_0}"'] & \Phi(a_1) \arrow[d, "\Phi(\mathrm{in}_{a_1})"] \\ K \arrow[r, "e"] & \Phi(K) \end{tikzcd}$$

Κάνοντας το ίδιο για την συνιστώσα in_{a_1} έχουμε:

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, dotted, "m_1"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_{a_0}"'] & & \Phi(a_1) \arrow[dr, "\Phi(\mathrm{in}_{a_1})"] & \\ & K \arrow[rr, "e"] & & \Phi(K) \\ a_1 \arrow[ur, "\mathrm{in}_{a_1}"] \arrow[r, dotted, "m_2"'] & & \Phi(a_2) \arrow[ur, "\Phi(\mathrm{in}_{a_2})"'] & \end{tikzcd}$$

Αν συνεχίσουμε με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει μια ακολουθία της μορφής

$$a_0 \xrightarrow{m_1} \Phi(a_1), \qquad a_1 \xrightarrow{m_2} \Phi(a_2), \qquad a_2 \xrightarrow{m_3} \Phi(a_3), \qquad \cdots$$

από μορφισμούς της $\mathscr{K}$, όπου όλα τα αντικείμενα a_0, a_1, a_2, … είναι πεπερασμένα παρουσιάσιμα.

Μία τέτοια ακολουθία την καλούμε *σύμπλεγμα (complex)*.

Σημείωση 4.1 *Στην επόμενη ενότητα θα δώσουμε ένα ισοδύναμο ορισμό του συμπλέγματος και θα δείξουμε ότι συμπίπτει με αυτόν που δίνουμε εδώ.*

Ορισμός 4.2 *(Κατηγορία Συμπλεγμάτων)*
Ορίζουμε την κατηγορία

$$\mathsf{Complex}(\Phi)$$

με αντικείμενα συμπλέγματα, τα οποία για συντομία τα συμβολίζουμε $(a_\bullet, m_\bullet)$, και μορφισμούς - μεταξύ δύο συμπλεγμάτων $(a_\bullet, m_\bullet)$, $(a'_\bullet, m'_\bullet)$- ακολουθίες από μορφισμούς της $\mathscr{K}$ οι οποίοι καθιστούν αντιμεταθετικά τα τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "f_0"'] & \Phi(a_1) \arrow[d, "\Phi(f_1)"] & a_1 \arrow[r, "m_2"] \arrow[d, "f_1"'] & \Phi(a_2) \arrow[d, "\Phi(f_2)"] & a_2 \arrow[r, "m_3"] \arrow[d, "f_2"'] & \Phi(a_3) \arrow[d, "\Phi(f_3)"] & \cdots \\ a'_0 \arrow[r, "m'_1"'] & \Phi(a'_1) & a'_1 \arrow[r, "m'_2"'] & \Phi(a'_2) & a'_2 \arrow[r, "m'_3"'] & \Phi(a'_3) & \end{tikzcd}$$

Πρόταση 4.3 *Αν η $\mathscr{K}$ είναι τ.π.π κατηγορία, η κατηγορία των συμπλεγμάτων* $\mathsf{Complex}(\Phi)$ *είναι φιλτραρισμένη.*

Απόδειξη: Προφανώς η $\mathsf{Complex}(\Phi)$ είναι μη-κενή. Θα δείξουμε ότι οι ακόλουθες δύο συνθήκες ισχύουν:

1. Για κάθε ζευγάρι αντικειμένων $(a_\bullet, m_\bullet)$, $(a'_\bullet, m'_\bullet)$ της $\mathsf{Complex}(\Phi)$ υπάρχει συν-κώνος

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] (a_\bullet, m_\bullet) \arrow[dr, "(f_\bullet)"] & \\ & (b_\bullet, n_\bullet) \\ (a'_\bullet, m'_\bullet) \arrow[ur, "(f'_\bullet)"'] & \end{tikzcd}$$

   στην $\mathsf{Complex}(\Phi)$.

2. Για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών

$$\begin{tikzcd} (a_\bullet, m_\bullet) \arrow[r, shift left, "(u_\bullet)"] \arrow[r, shift right, "(v_\bullet)"'] & (a'_\bullet, m'_\bullet) \end{tikzcd}$$

   στην $\mathsf{Complex}(\Phi)$ υπάρχει συν-κώνος

$$\begin{tikzcd} (a_\bullet, m_\bullet) \arrow[r, shift left, "(u_\bullet)"] \arrow[r, shift right, "(v_\bullet)"'] & (a'_\bullet, m'_\bullet) \arrow[r, "(f_\bullet)"] & (b_\bullet, n_\bullet) \end{tikzcd}$$

   στην $\mathsf{Complex}(\Phi)$.

Έστω,

$$m_1 : a_0 \longrightarrow \Phi(a_1), \quad m_2 : a_1 \longrightarrow \Phi(a_2), \quad \ldots, \quad m_i : a_i \longrightarrow \Phi(a_{i+1}), \quad \ldots$$

και

$$m'_1 : a'_0 \longrightarrow \Phi(a'_1), \quad m'_2 : a'_1 \longrightarrow \Phi(a'_2), \quad \ldots, \quad m'_i : a'_i \longrightarrow \Phi(a'_{i+1}), \quad \ldots$$

δύο συμπλέγματα $(a_\bullet, m_\bullet)$, $(a'_\bullet, m'_\bullet)$ αντίστοιχα.

1: Εφόσον για κάθε δύο αντικείμενα a_i, a'_i υπάρχει το συν-γινόμενο στην $\mathscr{K}$, αν θέσουμε $b_i = a_i + a'_i$ για όλα τα $i \geq 0$ προκύπτει ο επιθυμητός συν-κώνος, $(b_\bullet, n_\bullet)$, ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
a_i \arrow[rr, "m_{i+1}"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \Phi(a_{i+1}) \arrow[dr, "\Phi(f_{i+1})"] & \\
& a_i + a'_i \arrow[rr, dotted, "n_{i+1}"] & & \Phi(a_{i+1} + a'_{i+1}) \\
a'_i \arrow[rr, "m'_{i+1}"'] \arrow[ur, "g_i"] & & \Phi(a'_{i+1}) \arrow[ur, "\Phi(g_{i+1})"'] &
\end{tikzcd}$$

Ο μορφισμός n_{i+1} προκύπτει από την καθολική ιδιότητα του συν-γινομένου $b_i = a_i + a'_i$ και ικανοποιεί τις ισότητες:

$$n_{i+1} \cdot f_i = \Phi(f_{i+1}) \cdot m_{i+1} \quad \text{και} \quad n_{i+1} \cdot g_i = \Phi(g_{i+1}) \cdot m'_{i+1}$$

2: Σ'αυτή την περίπτωση το αρχικό διάγραμμα, για κάθε $i \geq 0$, είναι της μορφής:

$$\begin{tikzcd}
a_i \arrow[r, "m_{i+1}"] \arrow[d, shift right, "v_i"'] \arrow[d, shift left, "u_i"] & \Phi(a_{i+1}) \arrow[d, shift right, "\Phi(u_{i+1})"'] \arrow[d, shift left, "\Phi(v_{i+1})"] \\
a'_i \arrow[r, "m'_{i+1}"'] & \Phi(a'_{i+1})
\end{tikzcd}$$

όπου,

$$m'_{i+1} \cdot u_i = \Phi(u_{i+1}) \cdot m_{i+1} \quad \text{και} \quad m'_{i+1} \cdot v_i = \Phi(v_{i+1}) \cdot m_{i+1}$$

Όμως κάθε ζευγάρι μορφισμών u_i, v_i έχει συν-εξισωτή στην $\mathscr{K}$, έστω (b_i, f_i) αυτός. Ο ζητούμενος συν-κώνος $(b_\bullet, n_\bullet)$ προκύπτει ως εξής:
Το παραπάνω διάγραμμα γίνεται,

$$\begin{tikzcd}
a_i \arrow[r, "m_{i+1}"] \arrow[d, shift right, "v_i"'] \arrow[d, shift left, "u_i"] & \Phi(a_{i+1}) \arrow[d, shift right, "\Phi(u_{i+1})"'] \arrow[d, shift left, "\Phi(v_{i+1})"] \\
a'_i \arrow[r, "m'_{i+1}"'] \arrow[d, "f_i"'] & \Phi(a'_{i+1}) \arrow[d, "\Phi(f_{i+1})"] \\
b_i \arrow[r, dotted, "n_{i+1}"'] & \Phi(b_{i+1})
\end{tikzcd}$$

όπου οι μορφισμοί n_{i+1} προκύπτουν από την καθολική ιδιότητα του συν-εξισωτή (b_i, f_i) και καθιστούν το "κάτω τετράγωνο" αντιμεταθετικό. ∎

Σημείωση 4.4 *Όταν η κατηγορία $\mathscr{K}$ είναι πεπερασμένα προσιτή αλλά όχι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη μπορούμε να ορίσουμε, με τον ίδιο τρόπο, την έννοια του συμπλέγματος. Σ'αυτή την περίπτωση όμως η κατηγορία των συμπλεγμάτων που προκύπτει δεν γνωρίζουμε, γενικά, αν είναι φιλτραρισμένη.*

Θεώρημα 4.5 *Κάθε πεπερασμένα προσδιοριμένος ενδοσυναρτητής σε μια τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη (τ.π.π) κατηγορία δέχεται τελική συνάλγεβρα.*

Απόδειξη: Εστω $\mathscr{K}$ τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη κατηγορία και $\Phi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ πεπερασμένα προσδιοριμένος ενδοσυναρτητής.

Βήμα 1: Ορισμός της συνάλγεβρας (T, τ).
Θεωρούμε $T \in \mathscr{K}$ να είναι το συνόριο του διαγράμματος

$$\mathsf{Complex}(\Phi) \xrightarrow{\partial_0} \mathscr{K}_{fp} \xrightarrow{\text{inj}} \mathscr{K}$$

δηλ.,

$$T = \operatorname*{colim}_{\text{filt.}} \partial_0(a_i^\bullet)$$

όπου, κάθε $a_i^\bullet$ είναι στοιχείο της κατηγορίας $\mathsf{Complex}(\Phi)$ και $\partial_0(a_i^\bullet) = a_i^0$ είναι το "πεδίο" (δηλ. το πρώτο στοιχείο) του αντίστοιχου συμπλέγματος.
Αν $a_i^\bullet = \{m_1 : a_0 \longrightarrow \Phi(a_1), \quad m_2 : a_1 \longrightarrow \Phi(a_2), \quad \ldots, \}$ τότε $\partial_0(a_i^\bullet) = a_0$.

θυμίζουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{Complex}(\Phi)$ είναι φιλτραρισμένη και ο ενδοσυναρτητής Φ είναι πεπερασμένα προσδιοριμένος, άρα

$$\Phi(T) = \operatorname*{colim}_{\text{filt.}} \Phi(\partial_0(a_i^\bullet))$$

Προκειμένου να δείξουμε ότι ο T ορίζει δομή συνάλγεβρας $\tau : T \longrightarrow \Phi(T)$, θα αποδείξουμε ότι ο $\Phi(T)$ ορίζει συν-κώνο.
Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\partial_0(a_i^\bullet) = a_i^0 \arrow[rr, "m_i^1"] \arrow[dd, "\partial_0(h_\bullet)=h_0"'] \arrow[dr, "\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)}"] & & \Phi(a_i^1) = \Phi(\partial_0(a_i^{\bullet+1})) \arrow[dd, "\Phi(h_1)"'] \arrow[dr, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^{\bullet+1})})"] & \\
& T \arrow[rr, dotted, "\tau"] & & \Phi(T) \\
\partial_0(a_j^\bullet) = a_j^0 \arrow[rr, "m_j^1"'] \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^\bullet)}"'] & & \Phi(a_j^1) = \Phi(\partial_0(a_j^{\bullet+1})) \arrow[ur, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^{\bullet+1})})"'] &
\end{tikzcd}$$

όπου, $h_\bullet : a_i^\bullet \longrightarrow a_j^\bullet$ είναι ένα διάγραμμα στην κατηγορία $\mathsf{Complex}(\Phi)$, δηλ.

$$\begin{tikzcd} a_i^0 \arrow[r, "m_i^1"] \arrow[d, "h_0"'] & \Phi(a_i^1) \arrow[d, "\Phi(h_1)"] & , & a_i^1 \arrow[r, "m_i^2"] \arrow[d, "h_1"'] & \Phi(a_i^2) \arrow[d, "\Phi(h_2)"] & , & \cdots \\ a_j^0 \arrow[r, "m_j^1"'] & \Phi(a_j^1) & , & a_j^1 \arrow[r, "m_j^2"'] & \Phi(a_j^2) & , & \cdots \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

τέτοιο ώστε

$$\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^\bullet)} \cdot h_0 = \mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)}$$

Αν παραλείψουμε το πρώτο τετράγωνο τότε προκύπτει ένα νέο διάγραμμα στην $\mathsf{Complex}(\Phi)$. Συμβολίζουμε τα καινούργια συμπλέγματα με $a_i^{\bullet+1}$ και $a_j^{\bullet+1}$ όπου, $\partial_0(a_i^{\bullet+1}) = a_i^1$ και $\partial_0(a_j^{\bullet+1}) = a_j^1$.

Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε για τον T, τα νέα συμπλέγματα που προκύπτουν συμμετέχουν επίσης στο συνόριο που ορίζει τον T. Επίσης ο ενδοσυναρτητής Φ διατηρεί φιλτραρισμένα συνόρια, με τα δύο αυτά δεδομένα έχουμε το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \Phi(\partial_0(a_i^{\bullet+1})) = \Phi(a_i^1) \arrow[dd, "\Phi(h_1)"'] \arrow[dr, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^{\bullet+1})})"] & \\ & \Phi(T) \\ \Phi(\partial_0(a_j^{\bullet+1})) = \Phi(a_j^1) \arrow[ur, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^{\bullet+1})})"'] & \end{tikzcd}$$

Αρα,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^{\bullet+1})}) \cdot m_i^1 &= \Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^{\bullet+1})}) \cdot \Phi(h_1) \cdot m_i^1 \\ &= \Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^{\bullet+1})}) \cdot m_j^1 \cdot h_0 \end{aligned}$$

το οποίο καθιστά τον $\Phi(T)$ συν-κώνο.
Τέλος, από την καθολική ιδιότητα του συν-ορίου T προκύπτει ο ζητούμενος μορφισμός $\tau : T \longrightarrow \Phi(T)$, με την ιδιότητα

$$\tau \cdot \mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)} = \mathrm{in}_{\partial_0(a_i^{\bullet+1})} \cdot m_i^1$$

για όλα τα i.

Βήμα 2: ο τ είναι σταθερό σημείο (fixed point).
Έστω $h : a \longrightarrow \Phi(T)$ ένα γενικευμένο στοιχείο (generalized element) του φιλτραρισμένου συνορίου $\Phi(T)$. Εφόσον το a είναι πεπερασμένα παρουσιάσιμο έχει μια παραγοντοποίηση μέσω ενός στοιχείου του συνορίου:

$$\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, dotted, "n"] \arrow[d, "h"'] & \Phi(\partial_0(a_i^\bullet)) = \Phi(a_i^0) \arrow[dl, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)})"] \\
T \arrow[r, "\tau"] & \Phi(T) &
\end{tikzcd}$$

δηλ.,

$$\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)}) \cdot n = h$$

Χρησιμοποιώντας τον μορφισμό n που προκύπτει, κατασκευάζουμε ένα νέο σύμπλεγμα $a^\bullet$:

$$a \xrightarrow{n} \Phi(a_i^0), \qquad a_i^0 \xrightarrow{m_i^1} \Phi(a_i^1), \qquad a_i^1 \xrightarrow{m_i^2} \Phi(a_i^2), \qquad \cdots$$

με $\partial_0(a^\bullet) = a$.
Το σύμπλεγμα αυτό, σύμφωνα πάλι με τον ορισμό του T, συμμετέχει στο συνόριο δηλ., υπάρχει μορφισμός $\mathrm{in}_{\partial_0(a^\bullet)} : \partial_0(a^\bullet) \longrightarrow T$ τέτοιος ώστε

$$\begin{tikzcd}
\partial_0(a^\bullet) = a \arrow[r, dotted, "n"] \arrow[d, dotted, "\mathrm{in}_{\partial_0(a^\bullet)}"'] \arrow[dr, "h"] & \Phi(\partial_0(a_i^\bullet)) = \Phi(a_i^0) \arrow[d, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)})"] \\
T \arrow[r, "\tau"] & \Phi(T)
\end{tikzcd}$$

$$\tau \cdot \mathrm{in}_{\partial_0(a^\bullet)} = \Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)}) \cdot n = h$$

το οποίο αποδεικνύει ότι ο τ είναι “επί”.

Για να δείξουμε ότι ο τ είναι “ενριπτικός (1-1)” υποθέτουμε ότι ένα γενικευμένο στοιχείο a του T δέχεται δύο παραγοντοποιήσεις $f : a \longrightarrow \partial_0(a_i^\bullet)$ και $g : a \longrightarrow \partial_0(a_j^\bullet)$

$$\begin{tikzcd}
& \partial_0(a_i^\bullet) = a_i^0 \arrow[rr, "m_i^1"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)}"] & & \Phi(a_i^1) = \Phi(\partial_0(a_i^{\bullet+1})) \arrow[d, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^{\bullet+1})})"] \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \arrow[r, "\tau"] & \Phi(T) \\
& \partial_0(a_j^\bullet) = a_j^0 \arrow[rr, "m_j^1"'] \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^\bullet)}"] & & \Phi(a_j^1) = \Phi(\partial_0(a_j^{\bullet+1})) \arrow[u, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^{\bullet+1})})"']
\end{tikzcd}$$

τέτοιες ώστε

$$\tau \cdot \mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)} \cdot f = \tau \cdot \mathrm{in}_{\partial_0(a_j^\bullet)} \cdot g \tag{4.2}$$

Τότε υπάρχει ένα τρίτο στοιχείο του φιλτραρισμένου συνορίου $\Phi(T)$

$$\begin{tikzcd}
 & \partial_0(a_i^\bullet) = a_i^0 \arrow[rr, "m_i^1"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)}"] & & \Phi(a_i^1) = \Phi(\partial_0(a_i^{\bullet+1})) \arrow[dr, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^{\bullet+1})})"] \arrow[drr, bend left, "\Phi(h_\bullet)"] & & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & T \arrow[rr, "\tau"] & & \Phi(T) & \Phi(a_r^0) = \Phi(\partial_0(a_r^\bullet)) \arrow[l, dotted, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_r^\bullet)})"] \\
 & \partial_0(a_j^\bullet) = a_j^0 \arrow[rr, "m_j^1"'] \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^\bullet)}"'] & & \Phi(a_j^1) = \Phi(\partial_0(a_j^{\bullet+1})) \arrow[ur, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^{\bullet+1})})"] \arrow[urr, bend right, "\Phi(h'_\bullet)"'] & &
\end{tikzcd}$$

με την ιδιότητα,

$$\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_r^\bullet)}) \cdot \Phi(h_\bullet) = \Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^{\bullet+1})}) \quad \text{και} \quad \Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_r^\bullet)}) \cdot \Phi(h'_\bullet) = \Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^{\bullet+1})}) \tag{4.3}$$

Αν ερμηνεύσουμε τις τελευταίες ισότητες χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα συμπλέγματα καταλήγουμε στα ακόλουθα αντιμεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
a_i^1 \arrow[r, "m_i^2"] \arrow[d, "h_1"'] & \Phi(a_i^2) \arrow[d, "\Phi(h_2)"] & , & a_i^2 \arrow[r, "m_i^3"] \arrow[d, "h_2"'] & \Phi(a_i^3) \arrow[d, "\Phi(h_3)"] & , & \cdots \\
a_r^0 \arrow[r, "n_r^1"] & \Phi(a_r^1) & , & a_r^1 \arrow[r, "n_r^2"] & \Phi(a_r^2) & , & \cdots \\
a_j^1 \arrow[r, "m_j^2"'] \arrow[u, "h'_1"] & \Phi(a_j^1) \arrow[u, "\Phi(h'_2)"'] & , & a_j^2 \arrow[r, "m_j^3"'] \arrow[u, "h'_2"] & \Phi(a_j^3) \arrow[u, "\Phi(h'_3)"'] & , & \cdots
\end{tikzcd}$$

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα ορίσουμε ένα σύμπλεγμα $\bar{c}^\bullet$

$$\begin{tikzcd}
 & \partial_0(a_i^\bullet) = a_i^0 \arrow[dr, "f'"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)}"] & & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \partial_0(\bar{c}^\bullet) = c \arrow[r, "\mathrm{in}_{\partial_0(\bar{c}^\bullet)}"] & T \\
 & \partial_0(a_j^\bullet) = a_j^0 \arrow[ur, "g'"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^\bullet)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε,

$$f' \cdot f = g' \cdot g$$

και

$$\mathrm{in}_{\partial_0(\bar{c}^\bullet)} \cdot f' = \mathrm{in}_{\partial_0(a_i^\bullet)} \quad , \quad \mathrm{in}_{\partial_0(\bar{c}^\bullet)} \cdot g' = \mathrm{in}_{\partial_0(a_j^\bullet)}$$

Το ζητούμενο αυτό σύμπλεγμα θα είναι:

$$c \xrightarrow{n} \Phi(a_r^0), \qquad a_r^0 \xrightarrow{n_r^1} \Phi(a_r^1), \qquad a_r^1 \xrightarrow{n_r^2} \Phi(a_r^2), \qquad \cdots$$

όπου, στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & a_i^0 \arrow[rr, "m_i^1"] \arrow[dr, "f'"] & & \Phi(a_i^1) \arrow[dr, "\Phi(h_1)"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & c \arrow[rr, dotted, "n"] & & \Phi(a_r^0) \\
 & a_j^0 \arrow[rr, "m_j^1"'] \arrow[ur, "g'"'] & & \Phi(a_j^1) \arrow[ur, "\Phi(h_1')"'] &
\end{tikzcd}$$

το πεπερασμένα παρουσιάσιμο αντικείμενο c είναι η εξώθηση (pushout) των (f, g) και ο μορφισμός n προκύπτει από την καθολική της ιδιότητα, λόγω της ισότητας:

$$\Phi(h_1) \cdot m_i^1 \cdot f = \Phi(h_1') \cdot m_j^1 \cdot g$$

η οποία ικανοποιείται λόγω των ισοτήτων (4.2) και (4.3).

Βήμα 3: Τελικότητα της Συνάλγεβρας (T, τ).
Στο τελευταίο αυτό βήμα θα αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε συνάλγεβρα (K, e) υπάρχει μοναδικός μορφισμός $e^\dagger : (K, e) \longrightarrow (T, \tau)$.

Υπαρξη: Εστω (K, e) τυχαία συνάλγεβρα. Ο φορέας της γράφεται ως το φιλτραρισμένο συνόριο $K = \operatorname*{colim}_{\text{filt.}} K_i$ όπου $K_i \in \mathscr{K}_{f.p.}$. Θα ορίσουμε τον μορφισμό $e^\dagger : K \longrightarrow T$ για κάθε συνιστώσα K_i του συνορίου. Για να γίνει αυτό θα χρειαστεί να δείξουμε ότι κάθε K_i ορίζει σύμπλεγμα $K_i^\bullet$ με $\partial_0(K_i^\bullet) = K_i$. Ο $e^\dagger$ θα προκύψει από την καθολική ιδιότητα του συνορίου, έχοντας δείξει ότι ο T είναι συν-κώνος για το διάγραμμα $\mathscr{K}_{fp} \downarrow K \longrightarrow \mathscr{K}$ το συνόριο του οποίου είναι το K.

Θεωρώντας ένα τυχαίο διάγραμμα πάνω από το K, για παράδειγμα

$$\begin{tikzcd}
K_i \arrow[dr, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dd, "h"'] & \\
& K \\
K_j \arrow[ur, "\mathrm{in}_j"'] &
\end{tikzcd}$$

θέλουμε να το δούμε στην μορφή

$$\begin{tikzcd}
\partial_0(K_i^\bullet) \arrow[dr, "\mathrm{in}_{\partial_0(K_i^\bullet)}"] \arrow[dd, "\partial_0(h)"'] & \\
& K \\
\partial_0(K_j^\bullet) \arrow[ur, "\mathrm{in}_{\partial_0(K_j^\bullet)}"'] &
\end{tikzcd}$$

όπου ο h είναι μορφισμός συμπλεγματων τα οποία προκυπτουν ως εξής:

Από την συνάλγεβρα e και το τυχαίο διάγραμμα που υποθέσαμε, έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
K_i \arrow[rr, "m_i^1"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dd, "h"'] & & \Phi(K_i^1) \arrow[dr, "\Phi(\mathrm{in}_{i+1})"] \arrow[drr, bend left, "\Phi(h_1)"] & & \\
& K \arrow[rr, "e"] & & \Phi(K) & \Phi(K_{r_0}) \arrow[l, dotted, "\Phi(\mathrm{in}_{r_0})"] \\
K_j \arrow[rr, "m_j^1"'] \arrow[ur, "\mathrm{in}_j"'] & & \Phi(K_j^1) \arrow[ur, "\Phi(\mathrm{in}_{j+1})"'] \arrow[urr, bend right, "\Phi(s_1)"'] & &
\end{tikzcd}$$

όπου K_{r_0}, πεπερασμένα παρουσιάσιμο αντικείμενο με

$$\Phi(\mathrm{in}_{r_0}) \cdot \Phi(h_1) = \Phi(\mathrm{in}_{i+1}) \quad \text{και} \quad \Phi(\mathrm{in}_{r_0}) \cdot \Phi(s_1) = \Phi(\mathrm{in}_{j+1})$$

Η ύπαρξη του K_{r_0} οφείλεται στο γεγονός ότι το K_i παραγοντοποιείται, όπως φαίνεται στο διάγραμμα, μέσω δύο συνιστωσών του φιλτραρισμένου συνορίου $\Phi(K)$.

Επομένως προκύπτει το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
K_i \arrow[r, "m_i^1"] \arrow[d, "h"'] & \Phi(K_i^1) \arrow[d, "\Phi(h_1)"] \\
K_j \arrow[r, "\Phi(s_1)\cdot m_j^1"'] & \Phi(K_{r_0})
\end{tikzcd}$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για τον μορφισμό h_1, προκύπτουν τα διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
K_i \arrow[r, "m_i^1"] \arrow[d, "h"'] & \Phi(K_i^1) \arrow[d, "\Phi(h_1)"] & , & K_i^1 \arrow[r, "m_i^2"] \arrow[d, "h_1"'] & \Phi(K_i^2) \arrow[d, "\Phi(h_2)"] & , & \cdots \\
K_j \arrow[r, "\Phi(s_1)\cdot m_j^1"'] & \Phi(K_{r_0}) & , & K_{r_0} \arrow[r, "\Phi(s_2)\cdot m_{r_0}"'] & \Phi(K_{r_1}) & , & \cdots
\end{tikzcd}$$

όπου, $m_{r_0} : K_{r_0} \longrightarrow \Phi(K_{r_0}^1)$ είναι η παραγοντοποίηση του K_{r_0} μέσω του $\Phi(K)$.

Απο τα παραπάνω επιλέγουμε, K_i να είναι το "πεδίο" του συμπλέγματος

$$m_i^1 : K_i \longrightarrow K_i^1 \quad , \quad m_i^2 : K_i^1 \longrightarrow K_i^2 \quad , \quad \ldots$$

K_j το "πεδίο" του

$$\Phi(s_1)\cdot m_j^1 : K_j \longrightarrow K_{r_0} \quad , \quad \Phi(s_2)\cdot m_{r_0} : K_{r_0} \longrightarrow K_{r_1} \quad , \quad \ldots$$

και $h, h_1, h_2, \ldots$ είναι οι μεταξύ τους μορφισμοί.

Μέχρι εδώ έχουμε δείξει ότι οι συνιστώσες κάθε διαγράμματος πάνω από το K ορίζουν συμπλέγματα, οπότε από τον ορισμό του T κάθε K_i είναι εφοδιασμένο μ'ενα μορφισμό, $\mathrm{in}_{\partial_0(K_i^\bullet)}$, προς το T.
Αρα, ο $e^\dagger$ προκύπτει από την καθολική ιδιότητα του συνορίου K και ορίζει μορφισμό συναλγεβρών:

$$\begin{tikzcd}
\partial_0(K_i^\bullet) = K_i \arrow[rr, "m_i^1"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_i"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{in}_{\partial_0(K_i^\bullet)}"'] & & \Phi(K_i^1) = \Phi(\partial_0(K_i^{\bullet+1})) \arrow[dr, "\Phi(\mathrm{in}_{i+1})"] \arrow[ddr, bend right, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(K_i^{\bullet+1})})"'] & \\
& K \arrow[rr, "e"] \arrow[d, dotted, "e\dagger"'] & & \Phi(K) \arrow[d, dotted, "\Phi(e\dagger)"] \\
& T \arrow[rr, "\tau"] & & \Phi(T)
\end{tikzcd}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\tau \cdot e^{\dagger} \cdot \mathrm{in}_i &= \tau \cdot \mathrm{in}_{\partial_0(K_i^{\bullet})} \\
&= \Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(K_i^{\bullet+1})}) \cdot m_i^1 \\
&= \Phi(e^{\dagger} \cdot \mathrm{in}_{i+1}) \cdot m_i^1 \\
&= \Phi(e^{\dagger}) \cdot \Phi(\mathrm{in}_{i+1}) \cdot m_i^1 \\
&= \Phi(e^{\dagger}) \cdot e \cdot \mathrm{in}_i
\end{aligned}$$

Μοναδικότητα: Έστω $\rho : (K, e) \longrightarrow (T, \tau)$ ένας άλλος μορφισμός συναλγεβρών:

$$\begin{tikzcd}
\partial_0(K_i^{\bullet}) = K_i \arrow[rr, "m_i^1"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dd, dotted, "h"'] & & \Phi(K_i^1) = \Phi(\partial_0(K_i^{\bullet+1})) \arrow[d, "\Phi(\mathrm{in}_{i+1})"] \\
& K \arrow[r, "e"] \arrow[d, "\rho"] & \Phi(K) \arrow[d, "\Phi(\rho)"] \\
\partial_0(a_i^{\bullet}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^{\bullet})}"] & T \arrow[r, "\tau"] & \Phi(T)
\end{tikzcd}$$

με

$$\tau \cdot \rho \cdot \mathrm{in}_i = \Phi(\rho) \cdot e \cdot \mathrm{in}_i \tag{4.4}$$

Κάθε πεπερασμένα παρουσιάσιμο αντικείμενο K_i, λόγω του μορφισμού ρ, έχει μια παραγοντοποίηση μέσω ενός στοιχείου του φιλτραρισμένου συνορίου T.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι για κάθε K_i ισχύει η ισότητα

$$e^{\dagger} \cdot \mathrm{in}_i = \rho \cdot \mathrm{in}_i$$

Ο μορφισμός τ έχουμε δείξει ότι είναι ισομορφισμός, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\tau \cdot e^{\dagger} \cdot \mathrm{in}_i = \tau \cdot \rho \cdot \mathrm{in}_i \quad \text{ή} \quad \Phi(e^{\dagger}) \cdot e \cdot \mathrm{in}_i = \Phi(\rho) \cdot e \cdot \mathrm{in}_i \tag{4.5}$$

Από την αντιμεταθετικότητα του προηγούμενου διαγράμματος καταλήγουμε:

$$\begin{tikzcd}
\partial_0(K_i^{\bullet}) = K_i \arrow[rrrr, "m_i^1"] \arrow[dr, "\mathrm{in}_i"] \arrow[dd, "h"'] & & & & \Phi(K_i^1) = \Phi(\partial_0(K_i^{\bullet+1})) \arrow[dl, "\Phi(\mathrm{in}_{i+1})"'] \arrow[dd, "\Phi(h_1)"] \\
& K \arrow[rr, "e"] \arrow[d, "\rho"] & & \Phi(K) \arrow[d, "\Phi(\rho)"] & \\
\partial_0(a_i^{\bullet}) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^{\bullet})}"] \arrow[drr, bend right, "n_1"'] & T \arrow[rr, "\tau"] & & \Phi(T) & \Phi(\partial_0(a_j^{\bullet})) \arrow[l, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_j^{\bullet})})"'] \arrow[dl, dotted, "\Phi(s)"] \\
& & \Phi(\partial_0(a_i^{\bullet+1})) \arrow[ur, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(a_i^{\bullet+1})})"] \arrow[r, dotted, "\Phi(t)"'] & \Phi(\partial_0(c^{\bullet})) \arrow[u, "\Phi(\mathrm{in}_{\partial_0(c^{\bullet})})"'] &
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα (4.4) έχουμε το σύμπλεγμα $\partial_0(c^\bullet)$ και τα αντιμεταθετικά διαγράμματα,

$$\begin{tikzcd}
K_i \arrow[r, "h"] & a_i^0 \arrow[r, "n_i^1"] & \Phi(a_i^1) \arrow[d, "\Phi(t)"] & , & a_i^1 \arrow[r, "n_i^2"] \arrow[d, "t"'] & \Phi(a_i^2) \arrow[d, "\Phi(t_1)"] & , & \cdots \\
 & & \Phi(c_0) & , & c_0 \arrow[r, "q_1"] & \Phi(c_1) & , & \cdots \\
K_i \arrow[r, "m_i^1"'] & \Phi(K_i^1) \arrow[r, "\Phi(h_1)"'] & \Phi(a_j^0) \arrow[u, "\Phi(s)"'] & , & a_j^0 \arrow[r, "n_j^1"'] \arrow[u, "s"] & \Phi(a_j^1) \arrow[u, "\Phi(s_1)"'] & , & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό για τον μορφισμό h_1, παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\begin{tikzcd}
K_i^1 \arrow[r, "h_1"] & a_j^0 \arrow[r, "n_j^1"] & \Phi(a_j^1) \arrow[d, "\Phi(t')"] & , & a_j^1 \arrow[r, "n_j^2"] \arrow[d, "t'"'] & \Phi(a_j^2) \arrow[d, "\Phi(t'_1)"] & , & \cdots \\
 & & \Phi(d_0) & , & d_0 \arrow[r, "\bar{q}_1"] & \Phi(d_1) & , & \cdots \\
K_i^1 \arrow[r, "m_i^2"'] & \Phi(K_i^2) \arrow[r, "\Phi(h_2)"'] & \Phi(a_k^0) \arrow[u, "\Phi(s')"'] & , & a_k^0 \arrow[r, "n_k^1"'] \arrow[u, "s'"] & \Phi(a_k^1) \arrow[u, "\Phi(s'_1)"'] & , & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.7}$$

και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Το κρίσιμο σημείο για την απόδειξη της (4.5) είναι να δείξουμε την ύπαρξη ενός ενδιάμεσου συμπλέγματος μεταξύ των δύο συμπλεγμάτων που προκύπτουν από τους μορφισμούς συναλγεβρών ρ και $e^\dagger$:

$$\begin{tikzcd}
K_i \arrow[r, "h"] \arrow[d] & a_i^0 \arrow[r, "n_i^1"] & \Phi(a_i^1) \arrow[d] & , & a_i^1 \arrow[r, "n_i^2"] \arrow[d] & \Phi(a_i^2) \arrow[d] & , & \cdots \\
\bullet \arrow[rr] & & \bullet & , & \bullet \arrow[r] & \bullet & , & \cdots \\
K_i \arrow[rr, "m_i^1"'] \arrow[u] & & \Phi(K_i^1) \arrow[u] & , & K_i^1 \arrow[r, "m_i^2"'] \arrow[u] & \Phi(K_i^2) \arrow[u] & , & \cdots
\end{tikzcd} \tag{4.8}$$

Ο λόγος είναι ότι η (4.5), προκειμένου να ικανοποιείται, επιβάλλει για κάθε συνιστώσα in_i τα αντίστοιχα συμπλέγματα να "ταυτίζονται" στο φιλτραρισμένο συνόριο $\Phi(T)$, δηλ.

ισοδύναμα να υπάρχει ενδιάμεσο σύμπλεγμα.

Για την κατασκευή του ενδιάμεσου συμπλέγματος θα χρησιμοποιήσουμε τα διαγράμματα της μορφής (4.6), (4.7).

Ξεκινώντας με το πρώτο διάγραμμα της (4.6), το πρώτο στοιχείο του ενδιάμεσου συμπλέγματος θα είναι:

$$
\begin{tikzcd}
K_i \arrow[r, "n_i^1 \cdot h"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \Phi(a_i^1) \arrow[d, "\Phi(t)"] \\
K_i \arrow[r, dotted] & \Phi(c_0) \\
K_i \arrow[r, "m_i^1"'] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & \Phi(K_i^1) \arrow[u, "\Phi(s \cdot h_1)"']
\end{tikzcd}
$$

Στη συνέχεια παίρνουμε το δεύτερο διάγραμμα της (4.6), το πρώτο διάγραμμα της (4.7) και τα συγκολλούμε κατά μήκος του μορφισμού n_j^1. Οπότε προκύπτει το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
a_i^1 \arrow[r, "n_i^2"] \arrow[d, "t"'] & \Phi(a_i^2) \arrow[d, "\Phi(t_1)"] & \\
c_0 \arrow[r, "q_1"] & \Phi(c_1) \arrow[dr, dotted, "\Phi(f)"] & \\
a_j^0 \arrow[r, "n_j^1"'] \arrow[u, "s"] & \Phi(a_j^1) \arrow[u, "\Phi(s_1)"'] \arrow[d, "\Phi(t')"] & \Phi(p) \\
 & \Phi(d_0) \arrow[ur, dotted, "\Phi(g)"'] & \\
K_i^1 \arrow[r, "m_i^2"'] \arrow[uu, "h_1"] & \Phi(K_i^2) \arrow[u, "\Phi(s' \cdot h_2)"'] &
\end{tikzcd}
$$

όπου p είναι η εξώθηση των μορφισμών (s_1, t'). Τότε το δεύτερο στοιχείο του ενδιάμεσου συμπλέγματος θα είναι:

$$
\begin{tikzcd}
a_i^1 \arrow[rr, "n_i^2"] \arrow[dr, "t"'] & & \Phi(a_i^2) \arrow[dr, "\Phi(f)\cdot\Phi(t_1)"] & \\
& c_0 \arrow[rr, dotted, "\Phi(f)\cdot q_1"] & & \Phi(p) \\
K_i^1 \arrow[rr, "m_i^2"] \arrow[ur, "s\cdot h_1"] & & \Phi(K_i^2) \arrow[ur, "\Phi(g)\cdot\Phi(s'\cdot h_2)"'] &
\end{tikzcd}
$$

Για το τρίτο στοιχείο του ενδιάμεσου συμπλέγματος θα συγκολλήσουμε:
(1) Το τρίτο διάγραμμα της (4.6) που είναι,

$$
\begin{tikzcd}
a_i^2 \arrow[r, "n_i^3"] \arrow[d, "t_1"'] & \Phi(a_i^3) \arrow[d, "\Phi(t_2)"] \\
c_1 \arrow[r, "q_2"] & \Phi(c_2) \\
a_j^1 \arrow[r, "n_j^2"'] \arrow[u, "s_1"] & \Phi(a_j^2) \arrow[u, "\Phi(s_2)"']
\end{tikzcd}
$$

(2) Το δεύτερο διάγραμμα της (4.7) και
(3) το αντίστοιχο πρώτο διάγραμμα της (4.7), που είναι

$$
\begin{tikzcd}
K_i^2 \arrow[r, "h_2"] & a_k^0 \arrow[r, "n_k^1"] & \Phi(a_k^1) \arrow[d, "\Phi(t'')"] \\
& & \Phi(\tilde{d}_0) \\
K_i^2 \arrow[r, "m_i^3"'] & \Phi(K_i^3) \arrow[r, "\Phi(h_3)"'] & \Phi(a_l^0) \arrow[u, "\Phi(s'')"']
\end{tikzcd}
$$

Τότε προκύπτει το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
a_i^2 \arrow[rr, "n_i^3"] \arrow[d, "t_1"'] & & \Phi(a_i^3) \arrow[d, "\Phi(t_2)"] & \\
c_1 \arrow[rr, "q_2"] \arrow[ddr, "f"] & & \Phi(c_2) \arrow[ddr] & \\
a_j^1 \arrow[rr, "n_j^2"'] \arrow[u, "s_1"] \arrow[dd, "t'"'] & & \Phi(a_j^2) \arrow[u, "\Phi(s_2)"] \arrow[dd, "\Phi(t_1')"] & \\
& p \arrow[rr, "x"] & & \Phi(\bar{p}) \arrow[d, "\Phi(\psi)"] \\
d_0 \arrow[rr, "\bar{q}_1"] \arrow[ur, "g"'] & & \Phi(d_1) \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & \Phi(p_1) \\
a_k^0 \arrow[u, "s'"] \arrow[rr, "n_k^1"'] & & \Phi(a_k^1) \arrow[u, "\Phi(s_1')"] \arrow[d, "\Phi(t'')"] & \Phi(p') \arrow[u] \\
& & \Phi(\tilde{d}_0) \arrow[ur] & \\
K_i^2 \arrow[uu, "h_2"] \arrow[rr, "m_i^3"'] & & \Phi(K_i^3) \arrow[u, "\Phi(s''\cdot h_3)"] &
\end{tikzcd}
$$

Στο οποίο κατασκευάζουμε την έξωθηση των μορφισμών (s_2, t_1') και από την καθολική ιδιότητα της εξώθησης p (του προηγούμενου βήματος) υπάρχει ο (μοναδικός) μορφισμός x. Επίσης, το p' είναι η εξώθηση των (s_1', t''). Τέλος, παίρνοντας και την εξώθηση των δύο διακεκομμένων βελών προκύπτει το αντικείμενο p_1, άρα το τρίτο στοιχείο του ενδιάμεσου συμπλέγματος θα είναι το

$$p \xrightarrow{\Phi(\psi)\cdot x} \Phi(p_1)$$

Για την πληρότητα της κατασκευής, θα δείξουμε με επαγωγή ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε κάθε όρο του ενδιάμεσου συμπλέγματος.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ο k-στος όρος, δηλ. έχουμε το διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd}
a_i^{k-1} \arrow[rr, "n_i^k"] \arrow[d] & & \Phi(a_i^k) \arrow[d] & \\
c_{k-1} \arrow[rr] \arrow[dddr, dotted] & & \Phi(c_k) \arrow[dddr, dotted] & \\
\bullet \arrow[u] & & \bullet \arrow[u] & \\
\vdots & & \vdots & \\
\vdots & p_{k-1} \arrow[rr, dotted] & \vdots & \Phi(p_k) \\
\bullet \arrow[d] & & \bullet \arrow[d] & \\
d_{k-1} \arrow[rr] \arrow[uur, dotted] & & \Phi(d_k) & \\
b_{k-1} \arrow[rr] \arrow[u] & & \Phi(b_k) \arrow[u] \arrow[d] & \\
 & & \Phi(\tilde{d}_0) \arrow[uuuur, dotted] & \\
K_i^{k-1} \arrow[rr, "m_i^k"'] \arrow[uu, "h_{k-1}"] & & \Phi(K_i^k) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

ο k-στος όρος του ενδιάμεσου συμπλέγματος είναι ο $p_{k-1} \longrightarrow \Phi(p_k)$, όπου p_{k-1}, p_k είναι εξωθήσεις.

Τότε ο $k+1$ όρος θα κατασκευαστεί ως εξής:

$$
\begin{tikzcd}
a_i^k \arrow[rr, "n_i^{k+1}"] \arrow[d] & & \Phi(a_i^{k+1}) \arrow[d] & \\
c_k \arrow[rr] \arrow[rdddd] & & \Phi(c_{k+1}) \arrow[rdddd] & \\
\bullet \arrow[u] & & \bullet \arrow[u] & \\
\vdots & & \vdots & \\
\vdots & p_k \arrow[rr, "x"] \arrow[rrrd, dotted] & \vdots & \Phi(p'_{k+1}) \arrow[ddd, "\Phi(f')"] \\
\bullet \arrow[d] & & \bullet \arrow[d] & \\
d_k \arrow[rr] & & \Phi(d_{k+1}) & \\
b_k \arrow[rr] \arrow[u] \arrow[d] & & \Phi(b_{k+1}) \arrow[u] \arrow[d] & \Phi(p_{k+1}) \\
\tilde{d}_0 \arrow[rr] \arrow[ruuuu] & & \Phi(\tilde{d}_1) \arrow[ruuuu, "\Phi(f)"] \arrow[rd, "\Phi(g)"] & \\
b'_0 \arrow[rr] \arrow[u] & & \Phi(b'_1) \arrow[u, "\Phi(t)"] \arrow[d, "\Phi(t')"] & \Phi(q) \arrow[uu, "\Phi(g')"] \\
& & \Phi(\bar{d}_0) \arrow[ru] & \\
K_i^k \arrow[rr, "m_i^{k+1}"'] \arrow[uu, "h_k"] & & \Phi(K_i^{k+1}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Από το επαγωγικό βήμα έχουμε την εξώθηση p_k.
Κατασκευάζουμε την εξώθηση p'_{k+1}, από την καθολική ιδιότητα της p_k υπάρχει μορφισμός x από το p_k στο $\Phi(p'_{k+1})$.

Θεωρώντας την εξώθηση q των μορφισμών (t, t') κατασκευάζουμε, χρησιμοποιώντας και την προηγούμενη, την εξώθηση p_{k+1} των (f, g).
Συνεπώς ο $k+1$ όρος θα είναι ο

$$p_k \xrightarrow{\Phi(f')\cdot x} \Phi(p_{k+1})$$

Με την ολοκλήρωση της κατασκευής του ενδιάμεσου συμπλέγματος ολοκληρώνεται η απόδειξη της ύπαρξης και κατασκευής της τελικής συνάλγεβρας, για πεπερασμένα προσδιοριμένους ενδοσυναρτητές σε τοπικά πεπερασμένες παρουσιάσιμες κατηγορίες.

■

4.2 Τελική Συνάλγεβρα σε Προσιτές Κατηγορίες

Προτού ξεκινήσουμε την κατασκευή της τελικής συνάλγεβρας θα αναφέρουμε κάποιες εισαγωγικές έννοιες πάνω στις οποίες θα βασιστούμε.

Πρόταση 4.6 *Για κάθε πεπερασμένα προσδιοριμένο ενδοσυναρτητή της μορφής* $\Phi : \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set}) \longrightarrow \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$, *μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα* επίπεδο μόδιο (flat module)

$$M_\Phi : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$$

τέτοιο ώστε,

$$\Phi \cong M_\Phi \otimes -$$

Απόδειξη: *Μόδιο* $M : \mathscr{A} \nrightarrow \mathscr{B}$ από μια μικρή κατηγορία $\mathscr{A}$ σε μια μικρή κατηγορία $\mathscr{B}$ είναι ένας συναρτητής της μορφής:

$$M : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{B} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον συναρτητή

$$M : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow [\mathscr{B}, \mathsf{Set}]$$

Εδώ θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα μόδιο της μορφής:

$$M : \mathscr{A} \nrightarrow \mathscr{A}$$

δηλ., ένα συναρτητή

$$M : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow [\mathscr{A}, \mathsf{Set}]$$

Τον κατασκευάζουμε παίρνοντας την σύνθεση

$$\mathscr{A}^{op} \overset{\eta}{\hookrightarrow} \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set}) \xrightarrow{\Phi} \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set}) \overset{\iota}{\hookrightarrow} [\mathscr{A}, \mathsf{Set}]$$

δηλ.

$$M = \iota \cdot \Phi \cdot \eta : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow [\mathscr{A}, \mathsf{Set}]$$

όπου, ι είναι ο εγκλεισμός των επίπεδων συναρτητών στην κατηγορία των προδραγμάτων και η ο περιορισμός της εμφύτευσης Yoneda.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε, όταν ο ενδοσυναρτητής Φ είναι πεπερασμένα προσδιοριμένος το μόδιο M περιορίζεται σ'ένα *επίπεδο-μόδιο (flat module)*:

$$M_\Phi := M : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$$

δηλ. για κάθε $a \in \mathscr{A}^{op}$ ο συναρτητής

$$M(a, -) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

είναι επίπεδος,

με την επιπλέον ιδιότητα

$$\Phi \cong M_\Phi \otimes -$$

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή κατασκευή της αριστερής Kan επέκτασης, κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda, του συναρτητή M:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A}^{op} \arrow[r, "y"] \arrow[rr, bend left, "\eta"] \arrow[d, "M"'] & {[\mathscr{A}, \mathsf{Set}]} \arrow[dl, dotted, "M\otimes-"] & \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set}) \arrow[l, hook', "\iota"'] \arrow[dl, "\Phi"] \\
{[\mathscr{A}, \mathsf{Set}]} & \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set}) \arrow[l, hook', "\iota"] &
\end{tikzcd}$$

(στο διάγραμμα προσθέσαμε τον εγκλεισμό ι, τον περιορισμό της εμφύτευσης Yoneda η και τον ενδοσυναρτητή Φ).

Τότε, για κάθε επίπεδο συναρτητή $X \in \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$ προκύπτει:

$$\begin{array}{rcl} M \otimes \iota(X) & = & M \otimes \iota(\operatorname*{colim}_{\text{filt.}} \eta(A_i)) \ , \text{ επειδή } X = \operatorname*{colim}_{\text{filt.}} \eta(A_i) \\ & \cong & M \otimes \operatorname*{colim}_{\text{filt.}} \iota \cdot \eta(A_i) \\ & \cong & \operatorname*{colim}_{\text{filt.}}(M \otimes \iota \cdot \eta(A_i)) \ , \text{ επειδή } M \otimes - \text{ είναι αριστερή Kan επέκταση} \\ & \cong & \operatorname*{colim}_{\text{filt.}}(M \otimes y(A_i)) \ , \text{ επειδή } y \cong \iota \cdot \eta \\ & \cong & \operatorname*{colim}_{\text{filt.}}(y(A_i) \star M) \\ & = & \operatorname*{colim}_{\text{filt.}}(y(A_i) \star \iota \cdot \Phi \cdot \eta) \\ & \cong & \operatorname*{colim}_{\text{filt.}}(\iota \cdot \Phi)(\eta(A_i)) \\ & \cong & \iota \cdot \Phi(\operatorname*{colim}_{\text{filt.}} \eta(A_i)) \ , \text{ επειδή ο } \Phi \text{ είναι πεπερασμένα προσδιορισμένος} \\ & \cong & \iota \cdot \Phi(X) \end{array} \tag{4.9}$$

Όμως,

$$\iota(X) = X \quad \text{and} \quad \iota \cdot \Phi(X) = \Phi(X)$$

άρα μπορούμε να ξαναγράψουμε τον προηγούμενο ισομορφισμό στη μορφή

$$M \otimes X \cong \Phi(X)$$

από την οποία έπεται ότι ο συναρτητής

$$M \otimes X : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

είναι επίπεδος, υπό τον όρο ότι $X \in \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$.

Χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό

$$(M \otimes -) \cdot y(-) \cong M$$

που προκύπτει από την αριστερή Kan επέκταση, έχουμε:

$$M(a) = M(a, -) \cong M \otimes y(a)$$

για κάθε $a \in \mathscr{A}^{op}$.
Από την (4.9), συμπεραίνουμε τελικά:

$$\begin{array}{rcl} M(a, -) & \cong & M \otimes y(a) \\ & \cong & M \otimes \iota(\eta(a)) \\ & \cong & \iota \cdot \Phi(\eta(a)) \\ & = & \Phi(\eta(a)) \end{array}$$

δηλ.,

$$M(a,-) \in \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$$

■

Σημείωση 4.7 *Ένας πρακτικός τρόπος για να δηλώνουμε τα στοιχεία $m \in M(a,b)$, ενός μόδιου $M : \mathscr{A} \nrightarrow \mathscr{B}$, είναι χρησιμοποιώντας "σπασμένα βέλη" (broken arrow)*

$$a \overset{m}{\nrightarrow} b$$

για τα οποία ισχύουν τα εξής:

1. *Δοθέντος ενός μορφισμού $f : a' \longrightarrow a$ στην $\mathscr{A}$, η σύνθεση*

   $$a' \xrightarrow{f} a \overset{m}{\nrightarrow} b$$

   δηλώνει το στοιχείο $M(f,b)(m) \in M(a',b)$.

   Μια τέτοια σύνθεση την συμβολίζουμε με $m@f$, και προκύπτει ότι ισχύουν οι ισότητες: $m@(f \cdot f') = (m@f)@f'$ και $m@1_a = m$.

2. *Δοθέντος ενός μορφισμού $g : b \longrightarrow b'$ στη $\mathscr{B}$, η σύνθεση*

   $$a \overset{m}{\nrightarrow} b \xrightarrow{g} b'$$

   δηλώνει το στοιχείο $M(a,g)(m) \in M(a,b')$.

3. *Η συναρτητικότητα του M δίνει μια σαφή ερμηνεία στα διαγράμματα της μορφής*

   $$a' \xrightarrow{f} a \overset{m}{\nrightarrow} b \xrightarrow{g} b'$$

4. *Η έννοια του αντιμεταθετικού διάγραμματος "επεκτείνεται". Για παράδειγμα, λέγοντας ότι το ακόλουθο τετράγωνο*

   $$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "m", "\shortmid" marking] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a' \arrow[r, "m'"', "\shortmid" marking] & b' \end{tikzcd}$$

   αντιμετατίθεται σημαίνει ότι η ισότητα $m'@f = g@m$ ισχύει.

Σημείωση 4.8 *Οποτεδήποτε έχουμε δύο μόδια της μορφής* $M : \mathscr{A} \relbar\joinrel\mapsto \mathscr{B}$ *και* $N : \mathscr{B} \relbar\joinrel\mapsto \mathscr{C}$ *μπορούμε να τα συνθέσουμε, γράφοντας την σύνθεση τους ως:*

$$N \otimes M : \mathscr{A} \relbar\joinrel\mapsto \mathscr{C}$$

η οποία ορίζεται κατά σημείο ως το συν-πέρας (coend)

$$\Big(N \otimes M\Big)(a, c) = \int^{b} N(b, c) \times M(a, b)$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία του $\Big(N \otimes M\Big)(a, c)$ *είναι κλάσεις ισοδυναμίας. Ενα τυπικό στοιχείο του* $\Big(N \otimes M\Big)(a, c)$ *είναι η κλάση ισοδυναμίας* $[(n, m)]$, *η οποία αναπαρίσταται από το ζευγάρι* $(n, m) \in N(b, c) \times M(a, b)$. *Αν αναλύσουμε πώς η σχέση ισοδυναμίας δημιουργείται, χρησιμοποιώντας "σπασμένα βέλη", προκύπτει η απαίτηση τα ζευγάρια*

$$(n, f@m) \quad \textit{και} \quad (n@f, m)$$

να είναι ισοδύναμα, όπου τα n, f *και* m *είναι:*

$$a \overset{m}{\relbar\joinrel\mapsto} b \xrightarrow{f} b' \overset{n}{\relbar\joinrel\mapsto} c$$

Είναι προφανές από την παραπάνω σύνθεση των μοδίων ότι μπορεί να έχουμε και διαγράμματα της μορφής

$$a_2 \overset{m_2}{\relbar\joinrel\mapsto} a_1 \overset{m_1}{\relbar\joinrel\mapsto} a_0$$

για τα στοιχεία $m_1 \in M(a_1, a_0)$, $m_2 \in M(a_2, a_1)$ *ενός μόδιου* $M : \mathscr{A} \relbar\joinrel\mapsto \mathscr{A}$. *Τέτοια διαγράμματα ορίζονται μόνο τυπικά:*δύο "σπασμένα βέλη" δεν συντίθενται.

Στην παραπάνω Πρόταση αναφέραμε ότι θέλουμε το μόδιο $M : \mathscr{A} \relbar\joinrel\mapsto \mathscr{A}$ να είναι επίπεδο, το οποίο σημαίνει ότι για κάθε a στην $\mathscr{A}$ ο συναρτητής $M(a, -) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$ να είναι επίπεδος.
Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι η κατηγορία των στοιχείων (category of elements)

$$\mathsf{elts}(M(a, -))$$

είναι *συν-φιλτραρισμένη (cofiltered)*.
Χρησιμοποιώντας "σπασμένα βέλη" μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τις συνθήκες εκείνες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε η κατηγορία των στοιχείων να είναι συν-φιλτραρισμένη:

(1) Η κατηγορία $\mathsf{elts}(M(a,-))$ να είναι μη-κενή, δηλ. για κάθε $b \in \mathscr{A}$ υπάρχει σπασμένο βέλος

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "m", "\shortmid" marking] & b \end{tikzcd}$$

(2) Για κάθε δύο αντικείμενα $(b_1, m_1 \in M(a,b_1))$, $(b_2, m_1 \in M(a,b_2))$ της $\mathsf{elts}(M(a,-))$ υπάρχει ένα τρίτο αντικείμενο $(b, m \in M(a,b))$ και δύο μορφισμοί f_1, f_2 τέτοιοι ώστε

$$\begin{tikzcd} & (b_1, m_1) \\ (b,m) \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & \\ & (b_2, m_2) \end{tikzcd}$$

δηλ., για κάθε δύο σπασμένα βέλη

$$\begin{tikzcd} & b_1 \\ a \arrow[ur, "m_1", "\shortmid" marking] \arrow[dr, "m_2"', "\shortmid" marking] & \\ & b_2 \end{tikzcd}$$

υπάρχει αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & b_1 \\ a \arrow[urr, "m_1", "\shortmid" marking] \arrow[drr, "m_2"', "\shortmid" marking] \arrow[r, dotted, "m", "\shortmid" marking] & b \arrow[ur, dotted, "f_1"'] \arrow[dr, dotted, "f_2"] & \\ & & b_2 \end{tikzcd}$$

(3) Για κάθε ζεύγος μορφισμών $\begin{tikzcd} (b_1, m_1) \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & (b_2, m_2) \end{tikzcd}$ στην $\mathsf{elts}(M(a,-))$, υπάρχει κώνος

$$\begin{tikzcd} (b,m) \arrow[r, "f"] & (b_1, m_1) \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & (b_2, m_2) \end{tikzcd}$$

δηλ., για κάθε αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & b_1 \arrow[d, shift right, "u"'] \arrow[d, shift left, "v"] \\ a \arrow[ur, "m_1", "\shortmid" marking] \arrow[r, "m_2"', "\shortmid" marking] & b_2 \end{tikzcd}$$

ορίζεται το αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d, dotted, "f"] \\ a \arrow[ur, dotted, "m"] \arrow[r, "m_1"] \arrow[dr, "m_2"'] & b_1 \arrow[d, shift right, "u"'] \arrow[d, shift left, "v"] \\ & b_2 \end{tikzcd}$$

Υπόθεση 4.9 *Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου το*

$$M : \mathscr{A} \nrightarrow \mathscr{A}$$

θα είναι επίπεδο μόδιο πάνω σε μια μικρή κατηγορία $\mathscr{A}$.

Σημείωση 4.10 *Ο Tom Leinster στην εργασία του, [Le], ονομάζει το ζευγάρι* $(\mathscr{A}, M)$ αυτο-όμοιο σύστημα (self-similarity system). *Αυτό έχει να κάνει με το ότι ο Leinster στη δουλειά του αυτή μελετά (τοπολογικούς) χώρους οι οποίοι είναι αυτο-όμοιοι (self-similar).*

4.2.A Η κατηγορία των Συμπλεγμάτων

Το βασικό μας εργαλείο για την κατασκευή της τελικής συνάλγεβρας, όπως έχουμε αναφέρει, είναι η κατηγορία των συμπλεγμάτων. Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε την κατηγορία αυτή, εδώ χρησιμοποιώντας την έννοια του μοδίου καταλήγουμε σ'ένα ισοδύναμο ορισμό της ίδιας κατηγορίας.

Ορισμός 4.11 *Δοθέντος ενός (επίπεδου) μοδίου* M, *η κατηγορία*

$$\mathsf{Complex}(M)$$

των M-συμπλεγμάτων και των μορφισμών μεταξύ αυτών *ορίζεται ως εξής:*

1. *Αντικείμενα, καλούμε τα* M-συμπλέγματα, *τα οποία είναι αριθμήσιμες αλυσίδες της μορφής*

   $$\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a_0$$

   όπου $m_i \in M(a_{i+1}, a_i)$.
   Ενα τέτοιο σύμπλεγμα θα το συμβολίζουμε με $(a_\bullet, m_\bullet)$ *για συντομία.*

2. Μορφισμοί από ένα σύμπλεγμα $(a_\bullet, m_\bullet)$ στο $(a'_\bullet, m'_\bullet)$ *θα είναι ακολουθίες μορφισμών* $f_n : a_n \longrightarrow a'_n$, *τις οποίες θα συμβολίζουμε με* $(f_\bullet)$, *τέτοιες ώστε όλα τα τετράγωνα του ακόλουθου διαγράμματος*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "m_3", "\shortmid" marking] & a_2 \arrow[r, "m_2", "\shortmid" marking] \arrow[d, "f_2"] & a_1 \arrow[r, "m_1", "\shortmid" marking] \arrow[d, "f_1"] & a_0 \arrow[d, "f_0"] \\ \cdots \arrow[r, "m'_3"', "\shortmid" marking] & a'_2 \arrow[r, "m'_2"', "\shortmid" marking] & a'_1 \arrow[r, "m'_1"', "\shortmid" marking] & a'_0 \end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθενται.

Για $n \geq 0$, *θα δηλώνουμε με*

$$\mathsf{Complex}_n(M)$$

την κατηγορία των n-κομμένων M-συμπλεγμάτων. *Τα αντικείμενα της κατηγορίας αυτής θα είναι αλυσίδες πεπερασμένου μήκους*

$$a_n \xrightarrow{m_n} a_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a_0$$

και οι μορφισμοί θα ορίζονται όπως στην $\mathsf{Complex}(M)$.

Μεταξύ των κατηγοριών $\mathsf{Complex}(M)$ *και* $\mathsf{Complex}_n(M)$ *ορίζεται ο προφανής συναρτητής*

$$\mathrm{pr}_n : \mathsf{Complex}(M) \longrightarrow \mathsf{Complex}_n(M), \quad n \geq 0$$

που στέλνει ένα M-*σύμπλεγμα στο σύμπλεγμα μήκους* n.
Παρατηρούμε επίσης ότι για $n = 0$ *ισχύει,* $\mathsf{Complex}_0(M) = \mathscr{A}$.

Ο ορισμός του συπλέγματος που μόλις δώσαμε είναι ισοδύναμος με τον ορισμό της Ενότητας 4.1, για μια πεπερασμένα παρουσιάσιμη (ή τ.π.π) κατηγορία $\mathscr{K}$ και ένα πεπερασμένα προσδιοριμένο ενδοσυναρτητή $\Phi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$.
Χρησιμοποιώντας τους ισομορφισμούς

$$\Phi \cong M \otimes - \quad \text{και} \quad \mathscr{K} \cong \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$$

κάθε M-σύμπλεγμα

$$\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a_0$$

παίρνει τη μορφή:

$$a_0 \xrightarrow{m_1} \Phi(a_1), \qquad a_1 \xrightarrow{m_2} \Phi(a_2), \qquad a_2 \xrightarrow{m_3} \Phi(a_3), \qquad \cdots$$

Πράγματι, παίρνοντας για παράδειγμα,

$$\Phi(a_1) \cong M \otimes y(a_1) \cong M(a_1, -)$$

τότε

$$\mathscr{K}(a_0, \Phi(a_1)) \cong \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})(y(a_0), M(a_1, -)) \cong M(a_1, a_0) \tag{4.10}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε τρία παραδείγματα πεπερασμένα προσδιοριμένων ενδοσυναρτητών στα οποία, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, δείχνουμε πως μπορούν να ιδωθούν ως επίπεδα μόδια.

Παράδειγμα 4.12 *Στο* Παράδειγμα 3.8 *έχουμε τον πεπερασμένα προσδιοριμένο ενδοσυναρτητή* $\Phi : \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$, *με* $\Phi(X) = 1 + X$.

Η κατηγορία Set είναι τ.π.π. Αν συμβολίσουμε με $E : \mathsf{Set}_{fp} \longrightarrow \mathsf{Set}$ τον πλήρη-πυκνό εγκλεισμό μιας μικρής κατηγορίας πεπερασμένων συνόλων, τότε η απεικόνιση

$$X \mapsto \mathsf{Set}(E-, X)$$

μας εξασφαλίζει την ισοδυναμία των κατηγοριών

$$\mathsf{Set} \simeq \mathsf{Flat}(\mathsf{Set}_{fp}^{op}, \mathsf{Set}) = \mathsf{Lex}(\mathsf{Set}_{fp}^{op}, \mathsf{Set})$$

Αν επιλέξουμε το σύνολο των πεπερασμένων διατακτικών, ως το αναπαραστάσιμο σύνολο των πεπερασμένα παρουσιάσιμων συνόλων τότε μπορούμε να περιγράψουμε κάθε σύνολο X χρησιμοποιώντας "γενικευμένα στοιχεία (generalized elements)" της μορφής $n \longrightarrow X$, όπου n πεπερασμένος διατακτικός. Περιγράφοντας μ'αυτό τον τρόπο τα σύνολα, λέμε ότι ένα σύνολο "μεταβάλλεται στο χρόνο" και εννούμε ότι το hom-σύνολο $\mathsf{Set}(n, X)$ είναι η "τιμή" του X σε "χρόνο" n.

Το αντίστοιχο επίπεδο μόδιο είναι το

$$M : \mathsf{Set}_{fp}^{op} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; \mathsf{Set}_{fp}^{op}$$

με τιμές

$$M(a, b) \cong \mathsf{Set}(b, \Phi(a)) \cong \mathsf{Set}(b, 1 + a) \cong \mathsf{Set}(b, a) + \mathsf{Set}(b, 1)$$

όπου a, b είναι πεπερασμένοι διατακτικοί.

Ενα M-σύμπλεγμα

$$\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a_0$$

έχει τη μορφή:

$$a_0 \xrightarrow{m_1} a_1 \xrightarrow{m_2} a_2 \xrightarrow{m_3} \cdots$$

ή

$$a_0 \xrightarrow{m_1} a_1 \xrightarrow{m_2} a_2 \xrightarrow{m_3} \ldots \longrightarrow 1$$

η πρώτη μορφή είναι μια άπειρη ακολουθία απο απεικονίσεις μεταξύ πεπερασμένων διατακτικών, ενώ η δεύτερη είναι πεπερασμένη ακολουθία που καταλήγει στο μονοσύνολο 1.

Παράδειγμα 4.13 *Στο* Παράδειγμα 3.9 *ο πεπερασμένα προσδιοριμένος ενδοσυναρτητής στην κατηγορία* Set *είναι ο* $\Phi(X) = X \times A$*, όπου* A *ένα συγκεκριμένο σύνολο.*

Το αντίστοιχο επίπεδο μόδιο είναι

$$M(a,b) \cong \mathsf{Set}(b, \Phi(a)) \cong \mathsf{Set}(b, a \times A) \cong \mathsf{Set}(b,a) \times \mathsf{Set}(b,A)$$

για a, b πεπερασμένους διατακτικούς.
Αρα, ένα M-σύμπλεγμα

$$\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a_0$$

θα έχει τη μορφή

$$a_0 \xrightarrow{m_1} a_1 \xrightarrow{m_2} a_2 \xrightarrow{m_3} \ldots$$

μαζί με μια ακολουθία στοιχείων x_i , $i \geq 0$ τα οποία εκφράζουν τις “τιμές” του συνόλου A σε “χρόνο” a_i. [1]

Παράδειγμα 4.14 *Θεωρούμε τώρα τον πεπερασμένα προσδιοριμένο ενδοσυναρτητή* $\Phi :$ $\mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Set}$*, με*

$$\Phi(X) = X \times X + A$$

για ένα συγκεκριμένο σύνολο A*.*

Το επίπεδο μόδιο M σ'αυτήν την περίπτωση έχει τιμές

$$M(a,b) = \mathsf{Set}(b, a \times a) + \mathsf{Set}(b, A)$$

όπου a, b πεπερασμένοι διατακτικοί.

Ενα M-σύμπλεγμα

$$\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a_0$$

[1] Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι τα συμπλέγματα αυτής της μορφής παίζουν σημαντικό ρόλο στην κατασκευή της συν-ελεύθερης συνάλγεβρας (cofree coalgebra).

μπορεί να αναπαρασταθεί σαν ένα “δυαδικό δέντρο (binary tree)” από απεικονίσεις, της μορφής:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \cdots \\
 & & a_2 \arrow[ur, "m_3^{000}"] \arrow[dr, "m_3^{001}"'] & \\
 & & & \cdots \\
 & a_1 \arrow[uur, "m_2^{00}"] \arrow[ddr, "m_2^{01}"'] & & \\
 & & & \cdots \\
 & & a_2 \arrow[ur, "m_3^{010}"] \arrow[dr, "m_3^{011}"'] & \\
 & & & \cdots \\
a_0 \arrow[uuuur, "m_1^{0}"] \arrow[ddddr, "m_1^{1}"'] & & & \\
 & & & \cdots \\
 & & a_2 \arrow[ur, "m_3^{100}"] \arrow[dr, "m_3^{101}"'] & \\
 & & & \cdots \\
 & a_1 \arrow[uur, "m_2^{10}"] \arrow[ddr, "m_2^{11}"'] & & \\
 & & & \cdots \\
 & & a_2 \arrow[ur, "m_3^{110}"] \arrow[dr, "m_3^{111}"'] & \\
 & & & \cdots
\end{tikzcd}
$$

όπου κάθε κλάδος είναι είτε άπειρος ή τερματίζει σ'ένα γενικευμένο στοιχείο του A.

4.2.B Κατασκευή της Τελικής Συνάλγεβρας σε Προσιτές Κατηγορίες

Στην προηγούμενη ενότητα εκθέσαμε το βασικό εργαλείο της μεθόδου μας για την κατασκευή της τελικής συνάλγεβρας. Την κατηγορία των συμπλεγμάτων

$$\mathsf{Complex}(M)$$

όπου M επίπεδο μόδιο.

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα δούμε πώς θα χρησιμοποιήσουμε την κατηγορία αυτή στην κατασκευή της τελικής συνάλγεβρας, καθώς και ποιές συνθήκες πρέπει να πληρεί.

Θεωρούμε μια πεπερασμένα προσιτή κατηγορία $\mathscr{K}$ και ένα πεπερασμένα προσδιοριμένο ενδοσυναρτητή $\Phi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$. Συμβολίζουμε με

$$\mathsf{Coalg}\Phi$$

την κατηγορία των συναλγεβρών για τον συγκεκριμένο ενδοσυναρτητή (βλέπε Ορισμό 3.6), η οποία θέλουμε να έχει τελικό αντικείμενο.

Από τις Προτάσεις 2.29 και 4.6 παίρνουμε τον ισοδύναμο ενδοσυναρτητή

$$\Phi \cong M \otimes - : \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set}) \longrightarrow \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$$

για ένα επίπεδο μόδιο M.

Τότε η τελική συνάλγεβρα (T, τ), αν υπάρχει, θα έχει φορέα ένα *επίπεδο* συναρτητή

$$T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

και δομή συνάλγεβρας

$$\tau : T \longrightarrow M \otimes T$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$, ορίζουμε τον συναρτητή T να είναι το συνόριο του διαγράμματος

$$\Big(\mathsf{Complex}(M)\Big)^{op} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0^{op}} \mathscr{A}^{op} \xrightarrow{Y} [\mathscr{A}, \mathsf{Set}]$$

όπου ο συναρτητής pr_0 απεικονίζει ένα σύμπλεγμα $\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a_0$ στην "κεφαλή του", a_0.

Δηλαδή, ο T είναι συνόριο αναπαραστάσιμων $\mathscr{A}(a_0^i, -)$ με a_0^i να είναι "κεφαλές" συμπλεγμάτων της $\mathsf{Complex}(M)$.

Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή αυτής της υποενότητας ο συναρτητής T, ο οποίος είναι συνόριο αναπαραστάσιμων, πρέπει να είναι επίπεδος. Πρέπει επομένως να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη του συνορίου στην $\mathscr{K}$, πράγμα που δεν προκύπτει άμεσα οταν η $\mathscr{K}$ δεν είναι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη (τ.π.π). Στην περίπτωση μας η κατηγορία $\mathscr{K}$ είναι πεπερασμένα προσιτή οπότε το συνόριο πρέπει να είναι *φιλτραρισμένο*, το οποίο είναι ισοδύναμο με την συνθήκη που αναφέρει ότι η κατηγορία που παραμετρικοποιεί το συνόριο, δηλ. η $\mathsf{Complex}(M)$, να είναι *συνφιλτραρισμένη*. Καλούμε την συνθήκη αυτή *Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας (Σ.Ι.Ε).*

Αναλύοντας την Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας καταλήγουμε στις ακόλουθες τρείς συνθήκες:

1. Η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ είναι μη-κενή.

2. Για κάθε ζευγάρι αντικειμένων $(a_\bullet, m_\bullet)$, $(a'_\bullet, m'_\bullet)$ της $\mathsf{Complex}(M)$ υπάρχει κώνος

$$\begin{tikzcd} & (a_\bullet, m_\bullet) \\ (b_\bullet, n_\bullet) \arrow[ur, "(f_\bullet)"] \arrow[dr, "(f'_\bullet)"'] & \\ & (a'_\bullet, m'_\bullet) \end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{Complex}(M)$.

3. Για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών της μορφής

$$(a_\bullet, m_\bullet) \underset{(v_\bullet)}{\overset{(u_\bullet)}{\rightrightarrows}} (a'_\bullet, m'_\bullet)$$

στην $\mathsf{Complex}(M)$ υπάρχει κώνος

$$(b_\bullet, n_\bullet) \xrightarrow{(f_\bullet)} (a_\bullet, m_\bullet) \underset{(v_\bullet)}{\overset{(u_\bullet)}{\rightrightarrows}} (a'_\bullet, m'_\bullet)$$

στην $\mathsf{Complex}(M)$.

Παρατηρόυμε εδώ ότι η Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας απαιτεί η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ να είναι μη-κενή, αυτό δεν αποτελεί περιορισμό όπως προκύπτει από το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 4.15 *Αν υπάρχει συνάλγεβρα για τον ενδοσυναρτητή $M\otimes-$ η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ είναι μη-κενή.*

Απόδειξη: Εστω $e : X \longrightarrow M \otimes X$ μια συνάλγεβρα για τον ενδοσυναρτητή $M \otimes -$. Ο συναρτητής X πρέπει να είναι επίπεδος, άρα υπάρχει ένα στοιχείο $x_0 \in Xa_0$. Θεωρούμε τώρα το στοιχείο $e_{a_0}(x_0) \in (M \otimes X)(a_0)$. Εφόσον

$$(M \otimes X)(a_0) = \int^a M(a, a_0) \times Xa$$

προκύπτουν τα στοιχεία a_1, $m_1 \in M(a_1, a_0)$ και $x_1 \in Xa_1$ τέτοια ώστε το στοιχείο $e_{a_0}(x_0)$ να αναπαρίσταται από το ζευγάρι (m_1, x_1). Είναι προφανές ότι συνεχίζοντας μ'αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύμπλεγμα. ∎

Ορισμός 4.16 *Ενα σύμπλεγμα $(a_\bullet, m_\bullet)$ μαζί με μια ακολουθία στοιχείων (x_n), η οποία κατασκευάζεται όπως στην απόδειξη του προηγούμενου Λήμματος, καλείται e-*επίλυση *(e-*resolution*) του $x_0 \in Xa_0$. Ο ορισμός αυτός οφείλεται στον Tom Leinster (βλ., [Le]).*

Σημείωση 4.17 *Η κατασκευή της e-επίλυσης υποδηλώνει ότι μια συνάλγεβρα $e : X \longrightarrow M \otimes X$ μπορεί να ιδωθεί ως ένα σύστημα αναδρομικών εξισώσεων (recursive equations) οι οποίες "μεταβάλλονται στο χρονο". Σε "χρόνο" a_0 το σύστημα των αναδρομικών εξισώσεων έχει την μορφή*

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv m_1 \otimes x_1 \\ x_1 &\equiv m_2 \otimes x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

όπου τα (x_n) και $(a_\bullet, m_\bullet)$ ορίζουν την e-επίλυση του $x_0 \in Xa_0$. Στην παραπάνω περιγραφή του συστήματος αναδρομικών εξισώσεων χρησιμοποιούμε το τανυστικό σύμβολο για να δηλώσουμε, π.χ, με $m_1 \otimes x_1$ την κλάση του στοιχείο $[(m_1, x_1)]$ του $\int^a M(a, a_0) \times Xa$.

Φυσικά, κάθε "χρονική εξέλιξη" $f : a_0 \longrightarrow a_0'$ μας παρέχει αντίστοιχα ένα νέο συμβατό σύστημα επαναληπτικών εξισώσεων, που ξεκινάει με το στοιχείο $x_0' = Xf(x_0) \in Xa_0'$.

Υπόθεση 4.18 *Απο δω και στο εξής υποθέτουμε ότι η κατηγορία* $\mathsf{Complex}(M)$ *είναι μη-κενή.*

Στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathscr{A}$ έχει πεπερασμένα όρια, αποδεικνύεται σχετικά εύκολα ότι η Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας ισχύει.

Πρόταση 4.19 *Εστω ότι η κατηγορία $\mathscr{A}$ έχει (μη-κενά) πεπερασμένα όρια, τότε η κατηγορία* $\mathsf{Complex}(M)$ *είναι συν-φιλτραρισμένη.*

Απόδειξη: Λόγω της Υπόθεσης 4.18 το κενό διάγραμμα στην $\mathsf{Complex}(M)$ έχει κώνο. Εστω τυχαίο διάγραμμα

$$D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathsf{Complex}(M)$$

με $\mathscr{D}$ πεπερασμένο. Ας υποθέσουμε ότι είναι της μορφής

$$\begin{tikzcd} D_d \arrow[d, "D\delta"] & = & \cdots \arrow[r, "m_3^d", "/"'] & a_2^d \arrow[r, "m_2^d", "/"'] \arrow[d, "\delta_2"] & a_1^d \arrow[r, "m_1^d", "/"'] \arrow[d, "\delta_1"] & a_0^d \arrow[d, "\delta_0"] \\ D_{d'} & & \cdots \arrow[r, "/", "m_3^{d'}"'] & a_2^{d'} \arrow[r, "/", "m_2^{d'}"'] & a_1^{d'} \arrow[r, "/", "m_1^{d'}"'] & a_0^{d'} \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \geq 0$, η n-οστή συντεταγμένη του διαγράμματος είναι ένα διάγραμμα της ίδιας μορφής στην $\mathscr{A}$. Ομως η κατηγορία $\mathscr{A}$ έχει πεπερασμένα όρια, οπότε δηλώνουμε, για κάθε $n \geq 0$, με

$$c_n^d : a_n \longrightarrow a_n^d$$

το όριο της n-οστής συντεταγμένης του διαγράμματος.

Για κάθε $n \geq 0$, ορίζουμε το στοιχείο $m_{n+1} \in M(a_{n+1}, a_n)$ ως εξής: Εφόσον ισχύει ο ισομορφισμός

$$M(a_{n+1}, a_n) \cong \lim_d M(a_{n+1}, a_n^d)$$

υπάρχει μοναδικό "σπασμένο βέλος" m_{n+1} τέτοιο ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
a_{n+1} \arrow[r, dotted, "m_{n+1}", "/" marking] \arrow[d, "c^d_{n+1}"'] & a_n \arrow[d, "c^d_n"] \\
a^d_{n+1} \arrow[r, "m^d_{n+1}"', "/" marking] & a^d_n
\end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθεται.

Το σύμπλεγμα $(a_\bullet, m_\bullet)$ που ορίζεται με τον παραπάνω τρόπο εύκολα επαληθεύεται ότι είναι το όριο του διαγράμματος $D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathsf{Complex}(M)$. ∎

Ερχόμαστε τώρα στο κύριο θεώρημα του κεφαλαίου αυτού, η απόδειξη του οποίου είναι μια τροποποίηση της απόδειξης του Θεωρήματος 5.11 του [Le]. Ο λόγος είναι ότι ο ορισμός που δώσαμε για τον φορέα της τελικής συνάλγεβρας (ως ένα συγκεκριμένο συνόριο) συμπίπτει με τον αντίστοιχο ορισμό του Tom Leinster (ενός συνόλου αποτελούμενου από τις κατά σημείο συνεκτικές συνιστώσες ενός συγκεκριμένου διαγράμματος). [2]

Θεώρημα 4.20 *Αν υποθέσουμε ότι η κατηγορία των συμπλεγμάτων,* $\mathsf{Complex}(M)$*, ικανοποιεί τη Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας, τότε ο ενδοσυναρτητής* $M \otimes -$ *δέχεται τελική συνάλγεβρα.*

Απόδειξη: Ορίζουμε τον συναρτητή $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$ να είναι το συνόριο του διαγράμματος

$$\Big(\mathsf{Complex}(M)\Big)^{op} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0^{op}} \mathscr{A}^{op} \xrightarrow{Y} [\mathscr{A}, \mathsf{Set}] \tag{4.11}$$

Από τη Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας ο T είναι επίπεδος συναρτητής, δηλ. φιλτραρισμένο συνόριο αναπαραστάσιμων.

Ένα στοιχείο x του $T(a)$ είναι μια κλάση ισοδυναμίας $[f : a_0^i \to a]$, για κάποιο i, όπου το a_0^i διατρέχει το σύνολο των "κεφαλών" των συμπλεγμάτων της $\mathsf{Complex}(M)$. Το στοιχείο αυτό μπορεί επίσης να αναπαρασταθεί ως μια κλάση ισοδυναμίας αποτελούμενη από συμπλέγματα της μορφής:

$$\begin{tikzcd}
{[\ \cdots} \arrow[r, "m_3", "/" marking] & a_2 \arrow[r, "m_2", "/" marking] & a_1 \arrow[r, "m", "/" marking] \arrow[rr, bend left, "m_1", "/" marking] & a_0 \arrow[r, "f"] & a\ ]
\end{tikzcd}$$

[2]Ο Tom Leinster αποδεικνύει την τελικότητα, σε σχέση με κατά συντεταγμένη (componentwise) επίπεδους συναρτητές, δείχνοντας ότι η δομή της τελικής συνάλγεβρας είναι φυσικός ισομορφισμός. Στο δικό μας πλαίσιο οι συναρτητές είναι γενικότερα επίπεδοι, επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5.11 του [Le].

Δύο τέτοιες κλάσεις ισούνται

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,] = [\,\cdots \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a\,]$$

αν υπάρχει ενδιάμεσο σύμπλεγμα το οποίο να καταλήγει στο a, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να αντιμετατίθεται.

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "m_3"] & a_2 \arrow[r, "m_2"] & a_1 \arrow[r, "m_1"] & a \\
\cdots \arrow[r, "n_3"] & b_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[r, "n_2"] \arrow[dr, "g_2"'] & b_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "n_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & a \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
 & \cdots \arrow[r, "m_3'"'] & a_2' \arrow[r, "m_2'"'] & a_1' \arrow[r, "m_1'"'] & a
\end{tikzcd}$$

Γενικά, δύο τέτοιες κλάσεις ισούνται αν υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ αποτελούμενο από μορφισμούς συμπλεγμάτων όπου η μηδενική συνιστώσα είναι ο ταυτότικός μορφισμός επί του a. Από τη στιγμή όμως που η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ είναι συν-φιλτραρισμένη, μπορούμε να μειώσουμε το μήκος του ζιγκ-ζαγκ σε μήκος 1.

♦ *Η δράση του T* στον μορφισμό $h : a \to a'$ δίνεται ως εξής:

$$T(h) : T(a) \longrightarrow T(a')$$

απεικονίζει την κλάση

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,]$$

στην κλάση

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a \xrightarrow{h} a'\,]$$

♦ *T είναι ο φορέας μιας $\Phi-$συνάλγεβρας $\tau : T \to M \otimes T$.*
Ορίζουμε την δομή συνάλγεβρας τ κατά σημείο. Για κάθε $a \in \mathscr{A}$

$$\tau_a : T(a) \longrightarrow (M \otimes T)(a) = \int^{a'} M(a', a) \times T(a')$$

είναι μια απεικόνιση που στέλνει την κλάση ισοδυναμίας

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,]$$

στο στοιχείο

$$[\, a_1 \xrightarrow{m_1} a \,, [\, \cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \,]]$$

του coend.

Ο τ_a είναι καλά ορισμένος: Έστω,

$$[\, \cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a \,] = [\, \cdots \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a \,]$$

δηλ. υπάρχει ενδιάμεσο σύμπλεγμα $(b_\bullet, n_\bullet)$ που καταλήγει στο a έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "m_3"] & a_2 \arrow[r, "m_2"] & a_1 \arrow[r, "m_1"] & a \\
\cdots \arrow[r, "n_3"] & b_2 \arrow[r, "n_2"] \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "g_2"'] & b_1 \arrow[r, "n_1"] \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & a \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
 & \cdots \arrow[r, "m_3'"'] & a_2' \arrow[r, "m_2'"'] & a_1' \arrow[r, "m_1'"'] & a
\end{tikzcd} \tag{4.12}$$

να αντιμετατίθεται.

Θα αποδείξουμε ότι,

$$\tau_a([\, \cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a \,]) = \tau_a([\, \cdots \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a \,])$$

δηλ.

$$[\, a_1 \xrightarrow{m_1} a \,, [\, \cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \,]] = [\, a_1' \xrightarrow{m_1'} a \,, [\, \cdots \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \,]] \tag{4.13}$$

Από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος (4.12) προκύπτει:

- Το κάτωθι διάγραμμα αντιμετατίθεται

$$\begin{tikzcd}
 & b_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "g_1"] & \\
a_1 \arrow[dr, "m_1"'] & & a_1' \arrow[dl, "m_1'"] \\
 & a &
\end{tikzcd}$$

- $Tf_1([\,\cdots \overset{n_3}{\nrightarrow} b_2 \overset{n_2}{\nrightarrow} b_1\,]) = [\,\cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1\,]$
- $Tg_1([\,\cdots \overset{n_3}{\nrightarrow} b_2 \overset{n_2}{\nrightarrow} b_1\,]) = [\,\cdots \overset{m'_3}{\nrightarrow} a'_2 \overset{m'_2}{\nrightarrow} a'_1\,]$

Οπότε χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2 του [Le], καταλήγουμε στην ισότητα (4.13).

♦ *Φυσικότητα του τ:*
Παίρνοντας ένα τυχαίο μορφισμό $h : a \longrightarrow b$ της $\mathscr{A}$ θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
T(a) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "T(h)"'] & \int^{a'} M(a',a) \times T(a') \arrow[d, "(M\otimes T)(h)"] \\
T(b) \arrow[r, "\tau_b"'] & \int^{a'} M(a',b) \times T(a')
\end{tikzcd}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την αντιμεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος επιλέγουμε ένα στοιχείο

$$[\,\cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a\,] \text{ του } T(a)$$

Ο "άνω δρόμος" στέλνει:
$[\,\cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a\,] \overset{\tau_a}{\longmapsto} [\,a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a\,, [\,\cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1\,]]$
$\overset{(M\otimes T)(h)}{\longmapsto} [\,a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a \xrightarrow{h} b\,, [\,\cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1\,]]$.

Ο "κάτω δρόμος" στέλνει:
$[\,\cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a\,] \overset{T(h)}{\longmapsto} [\,\cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a \xrightarrow{h} b\,]$
$\overset{\tau_b}{\longmapsto} [\,a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a \xrightarrow{h} b\,, [\,\cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1\,]]$.

Παρατηρούμε ότι οι δύο "δρόμοι" στέλνουν το τυχαίο στοιχείο που επιλέξαμε στο ίδιο στοιχείο, άρα το διάγραμμα αντιμετατίθεται.

♦ *(T,τ) είναι η τελική συνάλγεβρα:*
Εστω (X,e) μια τυχαία συνάλγεβρα. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός συναλγεβρών

$$e^{\dagger} : (X,e) \longrightarrow (T,\tau)$$

Υπαρξη του μορφισμού: Θα ορίσουμε τον μορφισμό $e^{\dagger}$ κατα σημείο.
Δοθέντος ενός $a \in \mathscr{A}$ και $x \in X(a)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε το resolution

$$(\cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a \text{) με } x \in X(a)\ ,\ x_1 \in X(a_1)\ ,\ x_2 \in X(a_2)\ ,\ \ldots \tag{4.14}$$

(βλ. Λήμμα 4.15 και Ορισμό 4.16).
Ορίζουμε

$$e^{\dagger}_a(x) := [\ \cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a\ ] \in T(a)$$

Σημείωση 4.21 *Ισχυριζόμαστε ότι ο ορισμός του $e^{\dagger}$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής του resolution.*

Απόδειξη: Αν το στοιχείο x έχει δύο resolutions

$$(\cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a \text{) με } x \in X(a)\ ,\ x_1 \in X(a_1)\ ,\ x_2 \in X(a_2)\ ,\ \ldots$$

και

$$(\cdots \overset{m'_3}{\nrightarrow} a'_2 \overset{m'_2}{\nrightarrow} a'_1 \overset{m'_1}{\nrightarrow} a \text{) με } x \in X(a)\ ,\ x'_1 \in X(a'_1)\ ,\ x'_2 \in X(a'_2)\ ,\ \ldots$$

χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.9 του [Le] προκύπτει το resolution

$$(\cdots \overset{n_3}{\nrightarrow} b_2 \overset{n_2}{\nrightarrow} b_1 \overset{n_1}{\nrightarrow} a \text{) με } x \in X(a)\ ,\ y_1 \in X(a_1)\ ,\ y_2 \in X(a_2)\ ,\ \ldots$$

έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "m_3", "/" marking] & a_2 \arrow[r, "m_2", "/" marking] & a_1 \arrow[r, "m_1", "/" marking] & a \\
\cdots \arrow[r, "n_3", "/" marking] & b_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "g_2"'] \arrow[r, "n_2", "/" marking] & b_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] \arrow[r, "n_1", "/" marking] & a \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
 & \cdots \arrow[r, "m'_3"', "/" marking] & a'_2 \arrow[r, "m'_2"', "/" marking] & a'_1 \arrow[r, "m'_1"', "/" marking] & a
\end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθεται.
Επομένως συμπεραίνουμε ότι

$$[\ \cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} a_2 \overset{m_2}{\nrightarrow} a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a\ ] = [\ \cdots \overset{m'_3}{\nrightarrow} a'_2 \overset{m'_2}{\nrightarrow} a'_1 \overset{m'_1}{\nrightarrow} a\ ]$$

■

Φυσικότητα του $e^\dagger$: Αν $h : a \longrightarrow a'$ είναι ένας μορφισμός της $\mathscr{A}$ και x ένα στοιχείο του $X(a)$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X(a) \arrow[r, "e_a^\dagger"] \arrow[d, "X(h)"'] & T(a) \arrow[d, "T(h)"] \\ X(a') \arrow[r, "e_{a'}^\dagger"'] & T(a') \end{tikzcd}$$

αντιμετατίθεται.
Επιλέγουμε ένα resolution (4.14) του x, τότε:

$$T(h)(e_a^\dagger(x)) = T(h)([\, \cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a \,]) = [\, \cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a \xrightarrow{h} a' \,]$$

$$e_{a'}^\dagger(X(h(x))) = [\, \cdots \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a' \,]$$

Όπου το σύμπλεγμα ($\cdots \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a'$) μαζί με τα στοιχεία $X(h(x)) = y \in X(a')$, $y_1 \in X(a_1')$, $y_2 \in X(a_2')$, αποτελούν resolution του στοιχείου $X(h(x)) \in X(a')$.

Επίσης παρατηρούμε ότι το σύμπλεγμα ($\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{h@m_1} a'$) με $X(h(x)) \in X(a'), x_1 \in X(a_1)$, $x_2 \in X(a_2)$, ... είναι επίσης resolution του $X(h(x))$.

Αρα, αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 5.9 ([Le]) προκύπτει:

$$[\, \cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a \xrightarrow{h} a' \,] = [\, \cdots \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a' \,]$$

$e^\dagger$ είναι μορφισμός συναλγεβρών: Αρκεί να δείξουμε ότι για $a \in A$ και $x \in X(a)$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X(a) \arrow[r, "e_a"] \arrow[d, "e_a^\dagger"'] & (M \otimes X)(a) \arrow[d, "M\otimes e_a^\dagger"] \\ T(a) \arrow[r, "\tau_a"'] & (M \otimes T)(a) \end{tikzcd}$$

αντιμετατίθεται, δηλ.

$$(M \otimes e_a^\dagger)(e_a(x)) = \tau_a(e_a^\dagger(x))$$

Επιλέγουμε ένα resolution (4.14) του x

$$(\cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a \ ) \text{ με } x \in X(a) \ , \ x_1 \in X(a_1) \ , \ x_2 \in X(a_2) \ , \ \ldots$$

και καταλήγουμε στο ζητούμενο,

$$\begin{array}{rcl} (M \otimes e_a^\dagger)(e_a(x)) & = & (M \otimes e_a^\dagger)([\ a_1 \xrightarrow{m_1} a \ , x_1 \in X(a_1)]) \\ & = & [\ a_1 \xrightarrow{m_1} a \ , [\ \cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \ ]] \\ & = & \tau_a([(\ \cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a \ ]) \\ & = & \tau_a(e_a^\dagger(x)) \end{array}$$

Μοναδικότητα του μορφισμού: Έστω $\rho : (X, e) \longrightarrow (T, \tau)$ ένας άλλος μορφισμός συναλγεβρών. Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα αρκεί για κάθε $a \in \mathscr{A}$ και $x \in X(a)$ να ισχύει:

$$e_a^\dagger(x) = \rho_a(x)$$

Υποθέτουμε ότι

$$\rho_a(x) = [\ \cdots \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a \ ]$$

Αν $(\ \cdots \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a \ )$ με $x \in X(a)$, $x_1 \in X(a_1)$, $x_2 \in X(a_2)$, $\ldots$ είναι ένα resolution του $x \in X(a)$, από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} X(a) \arrow[r, "e_a"] \arrow[d, "\rho_a"'] & (M \otimes X)(a) \arrow[d, "M \otimes \rho_a"] \\ T(a) \arrow[r, "\tau_a"'] & (M \otimes T)(a) \end{tikzcd}$$

έχουμε

$$(M \otimes \rho_a)(e_a(x)) = \tau_a(\rho_a(x))$$

όπου,

$$\begin{array}{rcl} (M \otimes \rho_a)(e_a(x)) & = & (M \otimes \rho_a)(\ a_1 \xrightarrow{m_1} a \ , x_1 \in X(a_1)) \\ & = & [\ a_1 \xrightarrow{m_1} a \ , \rho_{a_1}(x_1) \in T(a_1)] \end{array}$$

και

$$\begin{aligned}
\tau_a(\rho_a(x)) &= \tau_a([\,\cdots \xrightarrow{m'_3} a'_2 \xrightarrow{m'_2} a'_1 \xrightarrow{m'_1} a\,]) \\
&= [\,a'_1 \xrightarrow{m'_1} a\,, [\,\cdots \xrightarrow{m'_3} a'_2 \xrightarrow{m'_2} a'_1\,]]
\end{aligned}$$

Απο το Λήμμα 3.2 ([Le]) προκύπτει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & c_1 \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "g_1"] & \\
a_1 \arrow[dr, "m_1"'] & & a'_1 \arrow[dl, "m'_1"] \\
 & a &
\end{tikzcd}$$

μαζί μ'ένα στοιχείο $z_1 = [\,\cdots \xrightarrow{n_4} c_3 \xrightarrow{n_3} c_2 \xrightarrow{n_2} c_1\,] \in T(c_1)$, τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned}
& m_1 @ f_1 = m'_1 @ g_1 \\
& T(f_1)(z_1) = \rho_{a_1}(x_1) = [\,\cdots \xrightarrow{m^1_4} a^1_3 \xrightarrow{m^1_3} a^1_2 \xrightarrow{m^1_2} a_1\,] \\
& T(g_1)(z_1) = [\,\cdots \xrightarrow{m'_3} a'_2 \xrightarrow{m'_2} a'_1\,]
\end{aligned}$$

Από τις τελευταίες δύο ισότητες συμπεραίνουμε

$$[\,\cdots \xrightarrow{n_4} c_3 \xrightarrow{n_3} c_2 \xrightarrow{f_1 @ n_2} a_1\,] = [\,\cdots \xrightarrow{m^1_4} a^1_3 \xrightarrow{m^1_3} a^1_2 \xrightarrow{m^1_2} a_1\,] \tag{4.15}$$

και

$$[\,\cdots \xrightarrow{n_4} c_3 \xrightarrow{n_3} c_2 \xrightarrow{g_1 @ n_2} a'_1\,] = [\,\cdots \xrightarrow{m'_4} a'_3 \xrightarrow{m'_3} a'_2 \xrightarrow{m'_2} a'_1\,] \tag{4.16}$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα (4.15), παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα:

$$[\,\cdots \xrightarrow{n_4} c_3 \xrightarrow{n_3} c_2 \xrightarrow{f_1 @ n_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,] = [\,\cdots \xrightarrow{m^1_4} a^1_3 \xrightarrow{m^1_3} a^1_2 \xrightarrow{m^1_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,]$$

διότι υπάρχει πάντα ένα ενδιάμεσο σύμπλεγμα της μορφής

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "n_4"] & c_3 \arrow[r, "n_3"] & c_2 \arrow[r, "f_1 @ n_2"] & a_1 \arrow[r, "m_1"] & a \\
\cdots \arrow[r, "n_4"] & b_3 \arrow[r, "n_3"] \arrow[ur, "h_3"] \arrow[dr, "t_3"'] & b_2 \arrow[r, "n_2"] \arrow[ur, "h_2"] \arrow[dr, "t_2"'] & a_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & a \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \\
 & \cdots \arrow[r, "m^1_4"'] & a^1_3 \arrow[r, "m^1_3"'] & a^1_2 \arrow[r, "m^1_2"'] & a_1 \arrow[r, "m_1"'] & a
\end{tikzcd}$$

Χρησιμοποιώντας στην συνέχεια την ισότητα, $m_1@f_1 = m_1'@g_1$ έχουμε

$$[\,\cdots \xrightarrow{n_4} c_3 \xrightarrow{n_3} c_2 \xrightarrow{f_1@n_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,] = [\,\cdots \xrightarrow{n_4} c_3 \xrightarrow{n_3} c_2 \xrightarrow{n_2} c_1 \xrightarrow{m_1'@g_1} a\,]$$

Κάνοντας τα ίδια για την ισότητα (4.16), προκύπτει

$$[\,\cdots \xrightarrow{n_4} c_3 \xrightarrow{n_3} c_2 \xrightarrow{n_2} c_1 \xrightarrow{m_1'@g_1} a\,] = [\,\cdots \xrightarrow{m_4'} a_3' \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a\,]$$

Απο τις τελευταίες δύο ισότητες συμπεραίνουμε:

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_4'} a_3' \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a\,] = [\,\cdots \xrightarrow{m_4^1} a_3^1 \xrightarrow{m_3^1} a_2^1 \xrightarrow{m_2^1} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,]$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για το στοιχείο $x_1 \in X(a_1)$ προκύπτει:

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_4^1} a_3^1 \xrightarrow{m_3^1} a_2^1 \xrightarrow{m_2^1} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,] = [\,\cdots \xrightarrow{m_4^2} a_3^2 \xrightarrow{m_3^2} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,]$$

δηλ.

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_4'} a_3' \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a\,] = [\,\cdots \xrightarrow{m_4^2} a_3^2 \xrightarrow{m_3^2} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,]$$

Τελικά, αν συνεχίσουμε την ίδια διαδικασία προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_4'} a_3' \xrightarrow{m_3'} a_2' \xrightarrow{m_2'} a_1' \xrightarrow{m_1'} a\,] = [\,\cdots \xrightarrow{m_4} a_3 \xrightarrow{m_3} a_2 \xrightarrow{m_2} a_1 \xrightarrow{m_1} a\,]$$

δηλ,

$$\rho_a(x) = e_a^{\dagger}(x)$$

με το οποίο ολοκληρώνεται η απόδειξη.

■

Στην Ενότητα 4.1 κατασκευάσαμε την τελική συνάλγεβρα για πεπερασμένα προσδιορισμένους ενδοσυναρτητές σε μια τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη κατηγορία, χωρίς όμως να απαιτούμε η κατηγορία των συμπλεγμάτων να πληρεί οποιαδήποτε συνθήκη. Ο λόγος είναι ότι οι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμες κατηγορίες έχουν επιπλέον ιδιότητες από τις πεπερασμένα παρουσιάσιμες. Είναι λοιπόν εύλογο να αναρωτηθούμε κατά πόσο το κεντρικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου εφαρμόζεται όταν η κατηγορία είναι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη.

Πόρισμα 4.22 *Κάθε πεπερασμένα προσδιοριμένος ενδοσυναρτητής σε μια τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη (τ.π.π) κατηγορία δέχεται τελική συνάλγεβρα.*

Απόδειξη: Θυμίζουμε ότι μια πεπερασμένα παρουσιάσιμη κατηγορία $\mathscr{K} \cong \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$ είναι τ.π.π, αν η κατηγορία $\mathscr{A}$ έχει *όλα* τα πεπερασμένα όρια.
Προκειμένου να εφαρμόσουμε το θεώρημα μας πρέπει να δείξουμε ότι η κατηγορία των συμπλεγμάτων $\mathsf{Complex}(M)$ είναι συν-φιλτραρισμένη:
Η μη κενότητα της $\mathsf{Complex}(M)$ προκύπτει από το Λήμμα 4.15. Εφόσον η κατηγορία $\mathscr{K}$ είναι τ.π.π, δηλ. $\mathscr{K} \cong \mathsf{Lex}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$, γνωρίζουμε ότι έχει αρχικό αντικείμενο, το οποίο συμβολίζουμε $\perp$. Κατά συνέπεια υπάρχει μοναδικός μορφισμός $! : \perp \longrightarrow M \otimes \perp$ ο οποίος επίσης είναι συνάλγεβρα.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.19, προκύπτει ότι η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ έχει κώνους για κάθε μη-κενό πεπερασμένο διάγραμμα, δηλ. είναι συν-φιλτραρισμένη. ∎

Στο τέλος αυτής της ενότητας, θα "δοκιμάσουμε" την ορθότητα του θεωρήματος μας σε μια πεπερασμένα προσιτή κατηγορία, που δεν είναι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη, για την οποία γνωρίζουμε ότι δέχεται τελική συνάλγεβρα για ένα πεπερασμένα προσδιοριμένο ενδοσυναρτητή. Θα αποδείξουμε ότι η περιγραφή της τελικής συνάλγεβρας αντιστοιχεί στην περιγραφή που δίνουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.20.

Παράδειγμα 4.23 *Εχει αποδειχθεί από τον Peter Freyd [F] η ύπαρξη ενός πεπερασμένα προσδιοριμένου ενδοσυναρτητή Φ στην κατηγορία $\mathsf{Pos}_{0,1}$, η τελική συνάλγεβρα του οποίου έχει φορέα το μοναδιαίο διάστημα* $[0, 1]$.

Ορισμός 4.24 *Με $\mathsf{Pos}_{0,1}$ συμβολίζουμε την εξής κατηγορία:*

1. *Αντικείμενα, είναι μερικώς διατεταγμένα σύνολα (posets) τα οποία έχουν διακριτά άκρα, δηλαδή διαφορετικά μεταξύ τους μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.*

2. *Μορφισμοί, είναι μονότονες απεικονίσεις οι οποίες διατηρούν τα άκρα.*

Η κατηγορία $\mathsf{Pos}_{0,1}$ είναι μια *Scott πλήρης (Scott complete)* κατηγορία, με την έννοια που την έχει ορίσει ο Jiří Adámek [A_2]: είναι πεπερασμένα προσιτή και κάθε μικρό διάγραμμα στην $\mathsf{Pos}_{0,1}$ που έχει συν-κώνο, έχει συνόριο.

Παρόλαυτα, η $\mathsf{Pos}_{0,1}$ δεν είναι τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη, στερείται τελικού αντικειμένου. Τα πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα της είναι τα πεπερασμένα μερικώς διατεταγμένα σύνολα με διακριτά άκρα.

Ο συναρτητής $\Phi : \mathsf{Pos}_{0,1} \longrightarrow \mathsf{Pos}_{0,1}$ απεικονίζει το αντικείμενο X στο *"συνθλιμένο" συν-γινόμενο (smash coproduct)*

$$X \vee X$$

του X με τον εαυτό του, το οποίο ορίζεται ως εξής: τοποθετούμε το ένα αντίγραφο του X πάνω στο άλλο και τα συγκολλούμε ταυτίζοντας το άνω άκρο του ενός με το κάτω άκρο του άλλου. Με άλλα λόγια το $X \vee X$ είναι ένα υπό-poset του $X \times X$, με στοιχεία ζευγάρια της μορφής $(x, 0)$ ή $(1, y)$. Τα ζευγάρια $(x, 0)$ τα τοποθετούμε στην αριστερή κόπια του X ένω τα ζευγάρια της μορφής $(1, y)$ στην δεξιά.

Επιλέγοντας μια οποιαδήποτε συνάλγεβρα $e : X \longrightarrow X \vee X$ και ένα αντικείμενο $x \in X$, μπορούμε να παράξουμε, τουλάχιστον μία, άπειρη ακολουθία

$$x_1 x_2 x_3 \ldots$$

αποτελούμενη από 0 και 1 ως εξής: Δίνουμε την τιμή $x_1 = 0$ αν το στοιχείο $e(x)$ βρίσκεται στην αριστερή κόπια του X και την τιμή $x_1 = 1$ αν βρίσκεται στη δεξιά. Στην περίπτωση που το στοιχείο $e(x)$ είναι το σημείο συγκόλλησης επιλέγουμε αυθαίρετα την τιμή 0 ή 1. Στην συνέχεια, θεωρώντας το $e(x)$ στοιχείο του X εφαρμόζουμε ξανά το e, δηλ. $e(e(x))$, οπότε παράγουμε το στοιχείο x_2 το οποίο ομοίως έχει την τιμή 0 ή 1 ανάλογα σε ποιά κόπια του X βρίσκεται. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία παράγουμε όλη την ακολουθία.

Μ'αυτό τον τρόπο, θέτοντας $e^\dagger(x) := 0.x_1 x_2 x_3 \ldots$, ορίζεται η απεικόνιση $e^\dagger : X \longrightarrow [0, 1]$. Ο P. Freyd απέδειξε στο δικό του πλαίσιο ότι η συνάλγεβρα

$$t : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \vee [0, 1]$$

με $t(x) = (2x, 0)$ όταν $0 \leq x \leq 1/2$ και $t(x) = (1, 2x - 1)$ διαφορετικά, είναι η τελική συνάλγεβρα για τον ενδοσυναρτητή Φ.

Στην προσπάθεια μας να μεταφερθούμε από το πλαίσιο εργασίας του P. Freyd στο δικό μας, θα δείξουμε πρώτα ότι το επίπεδο μόδιο που αντιστοιχεί στον ενδοσυναρτητή Φ ικανοποιεί την Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας.

Υπενθυμίζουμε ότι το μόδιο M ορίζεται ως εξής:

$$M(a, b) = \mathsf{Pos}_{0,1}(b, a \vee a)$$

όπου τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα a, b είναι πεπερασμένα με διακριτά άκρα.

Ενα σύμπλεγμα $(a_\bullet, m_\bullet)$ είναι επομένως η αλυσίδα

$$m_1 : a_0 \longrightarrow a_1 \vee a_1, \quad m_2 : a_1 \longrightarrow a_2 \vee a_2, \quad \ldots, \quad m_i : a_i \longrightarrow a_{i+1} \vee a_{i+1}, \quad \ldots$$

απο μορφισμούς της $\mathsf{Pos}_{0,1}$.

Τότε,

1. η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ είναι μη-κενή.

   Για $a_i = 2$, για κάθε $i \geq 0$, ορίζεται το σύμπλεγμα στην $\mathsf{Pos}_{0,1}$ όπου $m_i : a_i \longrightarrow a_{i+1} \vee a_{i+1}$ είναι ο μοναδικός μορφισμός που απεικονίζει τα άκρα στα άκρα.

2. η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ έχει κώνο για διακριτά διαγράμματα με δύο στοιχεία.

   Δοθέντων δύο συμπλεγμάτων $(a_\bullet, m_\bullet)$ και $(a'_\bullet, m'_\bullet)$ έχουμε τις αλυσίδες

   $$m_1 : a_0 \longrightarrow a_1 \vee a_1, \quad m_2 : a_1 \longrightarrow a_2 \vee a_2, \quad \ldots, \quad m_i : a_i \longrightarrow a_{i+1} \vee a_{i+1}, \quad \ldots$$

   και

   $$m'_1 : a'_0 \longrightarrow a'_1 \vee a'_1, \quad m'_2 : a'_1 \longrightarrow a'_2 \vee a'_2, \quad \ldots, \quad m'_i : a'_i \longrightarrow a'_{i+1} \vee a'_{i+1}, \quad \ldots$$

   Όμως κάθε ζευγάρι a_i, a'_i έχει συν-κώνο στην $(\mathsf{Pos}_{0,1})_{fp}$, οπότε κάθε a_i, a'_i έχει συν-γινόμενο $a_i + a'_i$ στην $(\mathsf{Pos}_{0,1})_{fp}$, λόγω του ότι η κατηγορία $\mathsf{Pos}_{0,1}$ είναι Scott-πλήρης. Χρησιμοποιώντας την επιπεδότητα του M προκύπτει ο ζητούμενος κώνος $(b_\bullet, n_\bullet)$ ως εξής: Θέτουμε $b_i = a_i + a'_i$ για όλα τα $i \geq 0$ και ορίζουμε $n_i : b_i \longrightarrow b_{i+1} \vee b_{i+1}$ τον μορφισμό που προκύπτει από την ισοδυναμία

   $$\mathsf{Pos}_{0,1}(b_i, b_{i+1} \vee b_{i+1}) = \mathsf{Pos}_{0,1}(a_i + a'_i, b_{i+1} \vee b_{i+1}) \cong \mathsf{Pos}_{0,1}(a_i, b_{i+1}) \times \mathsf{Pos}_{0,1}(a'_i, b_{i+1})$$

   οι μορφισμοί $a_i \longrightarrow b_{i+1}$, $a'_i \longrightarrow b_{i+1}$ προκύπτουν από την καθολική ιδιότητα του συν-γινομένου.

3. η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ έχει κώνο για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών.

   Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ακόλουθο ισχυρισμό:

   Δεν υπάρχουν σειριακώς αντιμεταθετικά διαγράμματα της μορφής

   $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "d"'] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "r"] \\ Z \vee Z \arrow[r, shift left, "h \vee h"] \arrow[r, shift right, "l \vee l"'] & W \vee W \end{tikzcd} \tag{4.17}$$

   οποτεδήποτε οι απεικονίσεις u, d δεν μπορούν να συν-εξισωθούν.

Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι οι μορφισμοί $h \vee h$ και $l \vee l$ απεικονίζουν το "σημείο συγκόλλησης" $(1, 0)$ του $Z \vee Z$ στο αντίστοιχο "σημείο συγκόλλησης" του $W \vee W$.

Επίσης παρατηρούμε ότι ο μόνος λόγος για τον οποίο οι μορφισμοί u και d δεν γίνεται να συν-εξισωθούν είναι να υπάρχει κάποιο $x \in X$ το οποίο να απεικονίζεται στο 0 από τον d και στο 1 από τον u. Θα υποθέσουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου x και με την προϋπόθεση ότι το διάγραμμα αντιμετατίθεται θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω $x \in X$ με $u(x) = 1$ και $d(x) = 0$, τότε αναγκαστικά θα ισχύει, $ru(x) = 1$ και $rd(x) = 0$.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$H_h = \{z \in Z \vee Z \mid (h \vee h)(z) = 1\}$$

παρατηρούμε ότι είναι υποσύνολο του $\{z \in Z \vee Z \mid z \geq m\}$ όπου με m συμβολίζουμε το "σημείο συγκόλλησης" του $Z \vee Z$.

Ομοίως, το σύνολο

$$H_l = \{z \in Z \vee Z \mid (l \vee l)(z) = 0\}$$

είναι υποσύνολο του $\{z \in Z \vee Z \mid z \leq m\}$.

Ειδικότερα ισχύει, $H_h \cap H_l = \emptyset$.

Από την υπόθεση ότι το διάγραμμα (4.17) αντιμετατίθεται σειριακά προκύπτει ότι $s(x) \in H_h \cap H_l$, άτοπο.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο φορέας της τελικής συνάλγεβρας που προκύπτει από το Θεώρημα 4.20 συμπίπτει με το κλειστό μοναδιαίο διάστημα $[0, 1]$.
Χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των κατηγοριών

$$\mathsf{Pos}_{0,1} \simeq \mathsf{Flat}((\mathsf{Pos}_{0,1})^{op}_{fp}, \mathsf{Set})$$

προκύπτει ότι ο φορέας της τελικής συνάλγεβρας $I : (\mathsf{Pos}_{0,1})^{op}_{fp} \longrightarrow \mathsf{Set}$ για τον ενδοσυναρτητή $M \otimes -$ αντιστοιχεί στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο

$$I \star E$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mathsf{beh} : I \star E \longrightarrow [0, 1]$$

η οποία απεικονίζει την κλάση ισοδυναμίας

$$\Big[[(a_\bullet, m_\bullet)], x \in a_0\Big] \in I \star E$$

στο δϋαδικό ανάπτυγμα που κωδικοποιεί τη "συμπεριφορά" του $x \in a_0$, ως εξής:
Γνωρίζουμε ότι ένα σύμπλεγμα $(a_\bullet, m_\bullet)$ είναι μια αλυσίδα

$$m_1 : a_0 \longrightarrow a_1 \vee a_1, \quad m_2 : a_1 \longrightarrow a_2 \vee a_2, \quad \ldots, \quad m_i : a_i \longrightarrow a_{i+1} \vee a_{i+1}, \quad \ldots$$

από μορφισμούς της κατηγορίας $\mathsf{Pos}_{0,1}$.
Ο μορφισμός m_1 απεικονίζει το στοιχείο x στην αριστερή ή στην δεξιά κόπια του a_1, δίνοντας ένα δυαδικό ψηφίο $k_1 \in \{0, 1\}$ και ένα νέο στοιχείο $x_1 \in a_1$ (στην περίπτωση που το $m_1(x)$ είναι το "σημείο συγκόλλησης" των a_1, επιλέγουμε 0 ή 1 αυθαίρετα). Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για το νέο στοιχείο που προκύπτει κ.ο.κ, παίρνουμε την δυαδική αναπαράσταση $0.k_1k_2\ldots$ ενός στοιχείου του $[0, 1]$.

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση beh είναι καλά ορισμένη και αμφιμονοσήμαντη.

(1) Καλά ορισμένη: Εστω $\Big[[(a_\bullet, m_\bullet)], x \in a_0\Big] = \Big[[(a'_\bullet, m'_\bullet)], x' \in a'_0\Big]$, τότε υπάρχει στοιχείο $\Big[[(c_\bullet, q_\bullet)], y \in c_0\Big]$ του συνορίου και ένα ζιγκ-ζαγκ:

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d] & a_1 \vee a_1 \arrow[d] & a_1 \arrow[r, "m_2"] \arrow[d] & a_2 \vee a_2 \arrow[d] & \\
c_0 \arrow[r, "q_1"] & c_1 \vee c_1 & c_1 \arrow[r, "q_2"] & c_2 \vee c_2 & \cdots \\
a'_0 \arrow[r, "m'_1"] \arrow[u] & a'_1 \vee a'_1 \arrow[u] & a'_1 \arrow[r, "m'_2"] \arrow[u] & a'_2 \vee a'_2 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

τέτοιο ώστε όλα τα τετράγωνα να αντιμετατίθενται.

Παρατηρούμε όμως, προκειμένου τα παραπάνω τετράγωνα να είναι αντιμεταθετικά, οι μορφισμοί m_i, q_i, m'_i, $i = 1, 2, \ldots$ πρέπει να έχουν την ίδια "συμπεριφορά". Αυτό σημαίνει ότι αν για παράδειγμα, ο μορφισμός m_1 απεικονίζει το στοιχείο x στην αριστερή κόπια του $a_1 \vee a_1$ τότε και οι μορφισμοί q_1, m'_1 θα απεικονίζουν τα αντίστοιχα στοιχεία στην αριστερή κόπια των $c_1 \vee c_1$ και $a'_1 \vee a'_1$. Τότε προκύπτει η ίδια δϋαδική αναπαράσταση στο $[0, 1]$, δηλ. ισχύει η ισότητα

$$\mathsf{beh}([(a_\bullet, m_\bullet)], x \in a_0) = \mathsf{beh}([(a'_\bullet, m'_\bullet)], x' \in b_0)$$

(2) 1-1:
Το σημείο-κλειδί στην απόδειξη του ένα προς ένα είναι η ύπαρξη του μορφισμού $f : 5 \longrightarrow 5 \vee 5$, όπου 5 είναι το γραμμικός διατεταγμένο σύνολο με πέντε στοιχεία

ο οποίος έχει την ιδιότητα, για κάθε μορφισμό $m_i : a_i \longrightarrow a_{i+1} \vee a_{i+1}$ να υπάρχει ένα αντιμεταθετικό τετράγωνο της μορφής

$$\begin{tikzcd} a_i \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "h"'] & a_{i+1} \vee a_{i+1} \arrow[d, "h' \vee h'"] \\ 5 \arrow[r, "f"'] & 5 \vee 5 \end{tikzcd}$$

Πράγματι, υποθέτοντας ότι $\{0, t_1, t_2, t_3, 1\}$ είναι τα στοιχεία του συνόλου 5, συμβολίζουμε τα στοιχεία του $5 \vee 5$ με $\{0, t_1^L, t_2^L, t_3^L, c', t_1^R, t_2^R, t_3^R, 1\}$.

Ορίζουμε τις απεικονίσεις:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t = 0 \\ 1, & \text{αν } t = 1 \\ t_2^L, & \text{αν } t = t_1 \\ t_2^R, & \text{αν } t = t_3 \\ c', & \text{αν } t = t_2 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } m_i(x) = 0 \\ 1, & \text{αν } m_i(x) = 1 \\ t_1, & \text{αν } m_i(x) \in a_{i+1}^L \\ t_3, & \text{αν } m_i(x) \in a_{i+1}^R \\ t_2, & \text{αν } m_i(x) = c \end{cases} \quad h'(z) = \begin{cases} 0, & \text{αν } z = 0 \\ 1, & \text{αν } z = 1 \\ t_2, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου τα L, R δηλώνουν την αριστερή και την δεξιά κόπια και με c, c' συμβολίζουμε τα σημεία συγκόλησης των $a_{i+1} \vee a_{i+1}$ και $5 \vee 5$, αντίστοιχα. Απο τα παραπάνω η αντιμεταθετικότητα του τετραγώνου προκύπτει άμεσα.

Έχοντας τώρα ότι ισχύει η ισότητα $\mathsf{beh}([(a_\bullet, m_\bullet)], x \in a_0) = \mathsf{beh}([(b_\bullet, n_\bullet)], y \in b_0)$, δηλ. η δϋαδική αναπαράσταση είναι η ίδια για τα δύο στοιχεία, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε τα m_i και n_i να απεικονίζουν τα x_i, y_i στην ίδια κόπια την αριστερή ή την δεξιά, αντίστοιχα. (Έτσι αποφεύγουμε την περίπτωση κάποιο να στέλνει ένα στοιχείο στο σημείο συγκόλλησης). Χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετικότητα του παραπάνω τετραγώνου, προκύπτει η αντιμεταθετικότητα των ακόλουθων διαγραμμάτων:

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "h"'] & a_1 \vee a_1 \arrow[d, "h' \vee h'"] & a_1 \arrow[r, "m_2"] \arrow[d, "h"'] & a_2 \vee a_2 \arrow[d, "h' \vee h'"] & \\ 5 \arrow[r, "f"] & 5 \vee 5 & 5 \arrow[r, "f"] & 5 \vee 5 & \cdots \\ b_0 \arrow[r, "n_1"] \arrow[u, "h"] & b_1 \vee b_1 \arrow[u, "h' \vee h'"'] & b_1 \arrow[r, "n_2"] \arrow[u, "h"] & b_2 \vee b_2 \arrow[u, "h' \vee h'"'] & \end{tikzcd}$$

από την οποία συμπεραίνουμε την ύπαρξη ενός ζιγκ-ζαγκ μεταξύ των δύο συμπλεγμάτων, $(a_\bullet, m_\bullet)$,$(b_\bullet, n_\bullet)$. Το τελευταίο συμπέρασμα μας δίνει το ζητούμενο, δηλ. την ισότητα

$$[(a_\bullet, m_\bullet)] = [(b_\bullet, n_\bullet)]$$

(3) η απεικόνιση beh είναι *επί*: Για οποιαδήποτε δϋαδική αναπαράσταση $0.k_1k_2\ldots$ ενός στοιχείου του $[0,1]$ μπορούμε να βρούμε στοιχείο του συνορίου, χρησιμοποιώντας το γραμμικώς διατεταγμένο σύνολο με τρία στοιχεία, 3, και την ακολουθία

$$m_1 : 3 \longrightarrow 3 \vee 3, \quad m_2 : 3 \longrightarrow 3 \vee 3, \quad \ldots \quad m_i : 3 \longrightarrow 3 \vee 3, \quad \ldots$$

από μορφισμούς, όπου κάθε m_i απεικονίζει το μεσαίο στοιχείο του 3, στο μεσαίο στοιχείο της αριστερής κόπιας του $3 \vee 3$ αν $k_i = 0$, ή στο μεσαίο στοιχείο της δεξιάς κόπιας, αν $k_i = 1$.

□

Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας

Στο τελευταίο μέρος αυτού του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με την εύρεση μιας ασθενέστερης συνθήκης η οποία θα εξασφαλίζει την ύπαρξη της τελικής συνάλγεβρας, σε μια προσιτή κατηγορία. Ο λόγος μιας τέτοιας αναζήτησης είναι ότι η Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας, δηλ. η κατηγορία Complex(M) να είναι συν-φιλτραρισμένη, δεν είναι εύκολο να επαληθευτεί ιδιαίτερα αν η κατηγορία $\mathscr{A}$ δεν έχει πεπερασμένα όρια.

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε μια συνθήκη η οποία θα μπορεί να επιβεβαιωθεί ευκολότερα. Για να το επιτύχουμε αντικαθιστούμε την Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας με μία άλλη του ιδίου είδους, η οποία όπως θα δούμε "εφαρμόζεται μόνο στις κεφαλές των συμπλεγμάτων". Η αντικατάσταση αυτή έχει ως συνέπεια, προκειμένου να εξασφαλιστεί η ύπαρξη της τελικής συνάλγεβρας, το μόδιο M να επιβάλλεται να ικανοποιεί μια επιπλέον συνθήκη πεπερασμένου.

Για να είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε την ασθενέστερη συνθήκη πρέπει πρώτα να γενικεύσουμε την έννοια της *φιλτραρισμένης κατηγορίας* σε αυτήν του *φιλτραρισμένου συναρτητή*.

Ορισμός 4.25 *Ενας συναρτητής $F : \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y}$ καλείται* φιλτραρισμένος, *αν υπάρχει συν-κώνος για την σύνθεση $F \cdot D$, όπου $D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{X}$ οποισδήποτε συναρτητής με $\mathscr{D}$ πεπερασμένη κατηγορία.*

Ο συναρτητής F θα καλείται συν-φιλτραρισμένος *αν ο F^{op} είναι φιλτραρισμένος.*

Σημείωση 4.26 *Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό, μια κατηγορία $\mathscr{X}$ είναι φιλτραρισμένη αν και μόνο αν ο ταυτότικός συναρτητής $\mathrm{Id} : \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{X}$ είναι φιλτραρισμένος.*

Ορισμός 4.27 *Θα λέμε ότι ένα (επίπεδο) μόδιο* $M : \mathscr{A} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!+\, \mathscr{A}$ *ικανοποιεί την* Ασθενή Συνθήκη Επιλυσιμότητας *αν ο συναρτητής*

$$\mathrm{pr}_0 : \mathsf{Complex}(M) \longrightarrow \mathsf{Complex}_0(M)$$

είναι συν-φιλτραρισμένος.

Με απλά λόγια, η Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας απαρτίζεται από τις ακόλουθες τρείς συνθήκες:

1. Η κατηγορία $\mathscr{A}$ είναι μη-κενή.
2. Για κάθε δύο αντικείμενα $(a_\bullet, m_\bullet)$, $(a'_\bullet, m'_\bullet)$ της $\mathsf{Complex}(M)$ υπάρχει κώνος

$$\begin{tikzcd} & a_0 \\ b \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & \\ & a'_0 \end{tikzcd}$$

   στην $\mathscr{A}$.
3. Για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών της μορφής

$$(a_\bullet, m_\bullet) \underset{(v_\bullet)}{\overset{(u_\bullet)}{\rightrightarrows}} (a'_\bullet, m'_\bullet)$$

   στην $\mathsf{Complex}(M)$ υπάρχει κώνος

$$b \xrightarrow{f} a_0 \underset{v_0}{\overset{u_0}{\rightrightarrows}} a'_0$$

   στην $\mathscr{A}$.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν οι ακόλουθες παρατηρήσεις:

(i) Η Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας ισχύει, όταν η κατηγορία $\mathscr{A}$ είναι συν- φιλτραρισμένη.

(ii) Αν υποθέσουμε ότι η $\mathsf{Complex}(M)$ είναι μη-κενή, η προηγούμενη συνθήκη (1) ικανοποιείται.

(iii) Αν η Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας ικανοποιείται, τότε και η Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας ικανοποιείται επίσης.

Θυμίζουμε ότι στον Ορισμό 4.11 συμβολίζουμε με $\mathsf{Complex}_n(M)$ την κατηγορία τα αντικείμενα της οποίας είναι συμπλέγματα μήκους n. Επίσης με $\mathrm{pr}_n : \mathsf{Complex}(M) \longrightarrow \mathsf{Complex}_n(M), \quad n \geq 0$ συμβολίζουμε τον συναρτητή που απεικονίζει κάθε σύμπλεγμα στο σύμπλεγμα που αποτελείται από τους n πρώτους όρους του.
Χρησιμοποιώντας τις έννοιες αυτές μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την Ασθενή Συνθήκη Επιλυσιμότητας ως εξής:

Πρόταση 4.28 *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας ικανοποιείται.

(2) Ο συναρτητής $\mathrm{pr}_n : \mathsf{Complex}(M) \longrightarrow \mathsf{Complex}_n(M)$ *είναι συν-φιλτραρισμένος για όλα τα* $n \geq 0$.

Απόδειξη: Οτι το (2) συνεπάγεται το (1) είναι προφανές. Για να αποδείξουμε το αντίστροφο χρειάζεται να επαληθεύσουμε τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

(a) Κάθε κατηγορία της μορφής $\mathsf{Complex}_n(M)$ είναι μη-κενή. Αυτό προκύπτει άμεσα από την υπόθεση ότι η $\mathsf{Complex}(M)$ είναι μη-κενή.

(b) Κάθε ζευγάρι αντικειμένων $\mathrm{pr}_n(a_\bullet, m_\bullet)$, $\mathrm{pr}_n(a'_\bullet, m'_\bullet)$ στην $\mathsf{Complex}_n(M)$ έχει κώνο.

Λόγω του ότι η Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας εφαρμόζεται για κάθε n, έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & a_n \arrow[r, "m_n"] & a_{n-1} \arrow[r, "m_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "m_1"] & a_0 \\
b_n \arrow[ur, dotted, "f_n"] \arrow[dr, dotted, "f'_n"'] & & & & \\
 & a'_n \arrow[r, "m'_n"'] & a'_{n-1} \arrow[r, "m'_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r, "m'_1"'] & a'_0
\end{tikzcd}$$

Από την επιπεδότητα του συναρτητή $M(b_n, -)$, το ζευγάρι $m_n @ f_n \in M(b_n, a_{n-1})$, $m'_n @ f'_n \in M(b_n, a'_{n-1})$ έχει κώνο:

$$\begin{tikzcd}
 & a_n \arrow[r, "m_n"] & a_{n-1} \\
b_n \arrow[ur, dotted, "f_n"] \arrow[r, dotted, "u_n"] \arrow[dr, dotted, "f'_n"'] & b_{n-1} \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\
 & a'_n \arrow[r, "m'_n"'] & a'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας την επιπεδότητα του M καθώς το n τείνει στο μηδέν προκύπτει ο ζητούμενος κώνος $(b_\bullet, u_\bullet)^{(n)}$ στην $\mathsf{Complex}_n(M)$:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \mathrm{pr}_n(a_\bullet, m_\bullet) \\
(b_\bullet, u_\bullet)^{(n)} \arrow[ur, "(f_\bullet)"] \arrow[dr, "(f'_\bullet)"'] & \\
 & \mathrm{pr}_n(a'_\bullet, m'_\bullet)
\end{tikzcd}$$

(c) Κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών της μορφής

$$\mathrm{pr}_n(a_\bullet, m_\bullet) \underset{\mathrm{pr}_n(v_\bullet)}{\overset{\mathrm{pr}_n(u_\bullet)}{\rightrightarrows}} \mathrm{pr}_n(a'_\bullet, m'_\bullet)$$

στην $\mathsf{Complex}_n(M)$ έχει κώνο.

Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
b_n \arrow[r, dotted, "l_n", "/" marking] \arrow[d, dotted, "f_n"'] & b_{n-1} \arrow[r, dotted, "l_{n-1}", "/" marking] \arrow[d, dotted, "f_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r, dotted, "l_1", "/" marking] & b_0 \arrow[d, dotted, "f_0"'] \\
a_n \arrow[r, "m_n", "/" marking] \arrow[d, shift right, "u_n"'] \arrow[d, shift left, "v_n"] & a_{n-1} \arrow[r, "m_{n-1}", "/" marking] \arrow[d, shift right, "u_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "v_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "m_1", "/" marking] & a_0 \arrow[d, shift right, "u_0"'] \arrow[d, shift left, "v_0"] \\
a'_n \arrow[r, "m'_n"', "/" marking] & a'_{n-1} \arrow[r, "m'_{n-1}"', "/" marking] & \cdots \arrow[r, "m'_1"', "/" marking] & a_0
\end{tikzcd}$$

Ξεκινώντας ξανά από βήμα n χρησιμοποιούμε την Ασθενή Συνθήκη Επιλυσιμότητας, οπότε προκύπτει ο μορφισμός f_n, στη συνέχεια από την επιπεδότητα του $M(b_n, -)$ προκύπτουν τα l_n και f_{n-1}. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διασικασία μεχρί $n = 0$ παίρνουμε τον ζητούμενο κώνο

$$(b_\bullet, l_\bullet)^{(n)} \xrightarrow{(f_\bullet)^{(n)}} \mathrm{pr}_n(a_\bullet, m_\bullet) \underset{\mathrm{pr}_n(v_\bullet)}{\overset{\mathrm{pr}_n(u_\bullet)}{\rightrightarrows}} \mathrm{pr}_n(a'_\bullet, m'_\bullet)$$

στην $\mathsf{Complex}_n(M)$.

Με το οποίο ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Έχοντας διατυπώσει αναλυτικά την Ασθενή Συνθήκη Επιλυσιμότητας, μένει να δείξουμε ότι όντως είναι συνθήκη επιλυσιμότητας δηλ. ότι εξασφαλίζει την ύπαρξη της τελικής συνάλγεβρας. Αρκεί να αποδείξουμε ότι συνεπάγεται την Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας. Από την Πρόταση 4.28 γίνεται αμέσως αντιληπτή η αδυναμία της ασθενούς συνθήκης να διασφαλίσει απο μόνη της ότι η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ είναι συν-φιλτραρισμένη.

Σε κάθε βήμα n διασφαλίζει ότι η κατηγορία $\mathsf{Complex}_n(M)$ είναι συν-φιλτραρισμένη, αλλά δεν υπάρχει τρόπος αυτό να επεκταθεί στο άπειρο, δηλ. σε όλη την $\mathsf{Complex}(M)$.

Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε αποτελείται από τρία βήματα:

1. Θα ορίσουμε την έννοια του *συμπαγούς μόδιου* M.
2. Θα δείξουμε ότι αν μια πεπερασμένα προσιτή κατηγορία ικανοποιεί κάποιες συνθήκες το αντίστοιχο μόδιο είναι συμπαγές.
3. Υποθέτοντας ότι το μόδιο μας είναι συμπαγές, θα αποδείξουμε ότι η Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας συνεπάγεται την Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας.

Βήμα 1: Στο πρώτο βήμα θα χρησιμοποιήσουμε το "Λήμμα του König" για μερικώς διατεταγμένα σύνολα, που το διατυπώνουμε στο παρακάτω Θεώρημα.
Θυμίζουμε τα εξής:

- Ενα *μερικώς προ-διατεταγμένο σύνολο* $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ είναι ένα σύνολο X εφοδιασμένο με μια αυτοπαθητική, μεταβατική διμελή σχέση $\sqsubseteq$.
- Ενα υποσύνολο $B \subseteq X$ ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου καλείται *κάτω-κλειστό*, αν για κάθε $b \in B$ και $b' \sqsubseteq b$ έχουμε $b' \in B$. Η δϋική έννοια είναι το *άνω-κλειστό*.
- Κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\langle X, \sqsubseteq \rangle$ μπορεί να εφοδιαστεί με την *ελάχιστη τοπολογία (lower topology)* $\tau_{\sqsubseteq}$, ορίζοντας ως ανοικτά σύνολα να είναι τα κάτω-κλειστά σύνολα. Ενα σύνολο B είναι κλειστό στην τοπολογία $\tau_{\sqsubseteq}$ αν και μόνο αν είναι άνω-κλειστό.

Θεώρημα 4.29 *Θεωρούμε*

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{P}_{n+1} \xrightarrow{p_n^{n+1}} \mathscr{P}_n \xrightarrow{p_{n-1}^n} \cdots \xrightarrow{p_0^1} \mathscr{P}_0 \tag{4.18}$$

μια αλυσίδα απο μερικώς διατεταγμένα σύνολα και μονότονες απεικονίσεις μεταξύ τους που ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

(1) Κάθε $\mathscr{P}_n$ έχει ένα μη-κενό πεπερασμένο τελικό υποσύνολο.

(2) Η εικόνα κάθε άνω-κλειστού συνόλου μέσω της απεικόνισης $p_n^{n+1} : \mathscr{P}_{n+1} \longrightarrow \mathscr{P}_n$ είναι άνω-κλειστό.

Τότε το όριο της αλυσίδας $\lim \mathscr{P}_n$ *είναι μη-κενό, δηλ. υπάρχει ακολουθία* (x_n) *έτσι ώστε να ισχύει* $p_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$ *για κάθε* $n \geq 0$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.29. Οι υποθέσεις (1) και (2) του θεωρήματος εξασφαλίζουν ότι κάθε $\mathscr{P}_n$ είναι ένας μη-κενός συμπαγής χώρος με την ελάχιστη τοπολογία και κάθε p_n^{n+1} είναι κλειστή συνεχής απεικόνιση (δηλ., η εικόνα ενός κλειστού συνόλου είναι κλειστό σύνολο). Χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα του Arthur Stone [S] Θεώρημα 2, κάθε ω^{op}-αλυσίδα αποτελούμενη απο μη-κενούς συμπαγείς χώρους και κλειστές συνεχείς απεικονίσεις έχει μη-κενό όριο, προκύπτει ότι το όριο $\lim \mathscr{P}_n$ είναι μη-κενό.

■

Προκειμένου να εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα στο δικό μας πλαίσιο εργασίας, για κάθε διάγραμμα $D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathsf{Complex}(M)$ όπου $\mathscr{D}$ πεπερασμένη κατηγορία, με $\mathscr{P}_n^D$ θα συμβολίζουμε το ακόλουθο μερικώς διατεταγμένο σύνολο:

(1) Στοιχεία του $\mathscr{P}_n^D$ είναι κώνοι του διαγράμματος $\mathrm{pr}_n \cdot D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathsf{Complex}_n(M)$.

(2) Η σχέση $c \sqsubseteq_n c'$ ισχύει στο $\mathscr{P}_n^D$ αν και μόνο αν ο κώνος c παραγοντοποιείται μέσω του κώνου c'.

Για κάθε $n \geq 0$ θα συμβολίζουμε με

$$p_n^{n+1} : \mathscr{P}_{n+1}^D \longrightarrow \mathscr{P}_n^D$$

την προφανή απεικόνιση που περιορίζει το μήκος των συμπλεγμάτων, η οποία είναι μονότονη.

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι η Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας, Πρόταση 4.28, εγγυάται ότι κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\mathscr{P}_n^D$ είναι μη-κενό.
Το μόνο που μένει προκειμένου να είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε το θεώρημα είναι να υποθέσουμε ότι κάθε $\mathscr{P}_n^D$ έχει μη-κενό πεπερασμένο τελικό υποσύνολο. Σύμφωνα μ'αυτό δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.30 *Θα λέμε ότι το μόδιο* M *είναι* συμπαγές, *αν το μερικώς διατεταγμένο σύνολο* $\mathscr{P}_n^D$ *έχει μη-κενό πεπερασμένο τελικό υποσύνολο για κάθε* $n \geq 0$ *και κάθε πεπερασμένο μη-κενό διάγραμμα* $D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathsf{Complex}(M)$.

Δύο τετριμένα παραδείγματα συμπαγών μοδίων είναι τα εξής:

Παράδειγμα 4.31

(i) *Κάθε μόδιο M σε μια πεπερασμένα πλήρη κατηγορία $\mathscr{A}$ είναι συμπαγές: Πράγματι, σ'αυτήν την περίπτωση κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\mathscr{P}_n^D$ έχει τελικό σύνολο αποτελούμενο απο ένα στοιχείο.*

(ii) *Αν το μόδιο M είναι πεπερασμένο με την έννοια του [Le] δηλ., αν για κάθε συναρτητή $M(-,b) : \mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathsf{Set}$ η κατηγορία των στοιχείων του είναι πεπερασμένη, τότε είναι συμπαγές.*

Βήμα 2: Εστω $\mathscr{K}$ πεπερασμένα προσιτή κατηγορία.

1. Θα λέμε ότι ο συν-κώνος $c_d : D_d \longrightarrow X$ είναι *από κοινού επί (jointly epi)* αν για κάθε ζεύγος παράλληλων μορφισμών u, v η ισότητα $u \cdot c_d = v \cdot c_d$, για όλα τα d, συνεπάγεται ότι $u = v$.

2. Η κατηγορία $\mathscr{K}$ θα είναι *(πεπερασμένα από κοινού επί, ακραία μονομορφική)-κατηγορία* αν οι ακόλουθες δύο συνθήκες πληρούνται:

   (α) Κάθε συν-κώνος $c_d : D_d \longrightarrow X$ για ένα πεπερασμένο διάγραμμα μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως
   $$D_d \xrightarrow{e_d} Z \xrightarrow{j} X$$
   όπου ο μορφισμός e_d είναι από κοινού επί και ο j είναι ακραίος μονομορφισμός.

   (β) Για κάθε αντιμεταθετικό τετράγωνο
   $$\begin{tikzcd} D_d \arrow[r, "e_d"] \arrow[d, "f_d"'] & X \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "j"'] & B \end{tikzcd} \quad (\text{για όλα τα } d)$$
   όπου e_d είναι ένας από κοινού επί συν-κώνος και j είναι ακραίος μονομορφισμός, υπάρχει μοναδικός διαγώνιος μορφισμός $m : X \longrightarrow A$ ο οποίος να καθιστά τα παραγόμενα τριγωνικά διαγράμματα αντιμεταθετικά.

3. Θα λέμε ότι η κατηγορία $\mathscr{K}_{fp}$ είναι *finitely co-wellpowered*, αν κάθε πεπερασμένο διάγραμμα $D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{K}_{fp}$ δέχεται (μέχρι ισομορφισμού) μόνο ένα μη-κενό πεπερασμένο σύνολο από κοινού επί συν-κώνους.

Παράδειγμα 4.32 *Η κατηγορία των γραμμικά διατεταγμένων συνόλων* Lin *είναι παράδειγμα τέτοιας κατηγορίας.*

- *Οι από κοινού επί συν-κώνοι, $c_d : D_d \longrightarrow X$, είναι ακριβώς εκείνοι που το υποκείμενο σύνολο του γραμμικώς διατεταγμένου σύνολου X είναι η ένωση των εικόνων όλων των D_d.*

- *Μία μονότονη απεικόνιση $j : A \longrightarrow B$ είναι ακραία μονομορφική αν και μόνο αν είναι 1-1 και η γραμμική διάταξη του A επάγεται απο αυτή του B.*

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι η κατηγορία Lin *είναι (πεπερασμένα από κοινού επί, ακραία μονομορφική)-κατηγορία και η* Lin_{fp} *είναι πεπερασμένα co-wellpowered.*

Πρόταση 4.33 *Έστω η πεπερασμένα προσιτή κατηγορία $\mathscr{K}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

1. *$\mathscr{K}$ είναι (πεπερασμένα από κοινού επί, ακραία μονομορφική)-κατηγορία.*

2. *$\mathscr{K}_{fp}$ είναι finitely cowellpowered.*

Υποθέτουμε επίσης ότι ο πεπερασμένα προσδιοριμένος συναρτητής $\Phi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ διατηρεί ακραίους μονομορφισμούς. Τότε το επίπεδο μόδιο που αντιστοιχεί στον Φ είναι συμπαγές.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την περιγραφή των συμπλεγμάτων του Ορισμού 4.2.

Εστω $D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathsf{Complex}(M)$ ένα πεπερασμένο μη-κενό διάγραμμα. Επιλέγουμε τυχαίο $n \geq 0$ και περιγράφουμε την σύνθεση $\mathrm{pr}_n \cdot D$ με αντιμεταθετικά τετράγωνα της μορφής

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{pr}_n \cdot D_d & & a_0^d \xrightarrow{m_1^d} \Phi(a_1^d) & & a_1^d \xrightarrow{m_2^d} \Phi(a_2^d) & & & & a_{n-1}^d \xrightarrow{m_n^d} \Phi(a_n^d) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_n \cdot D\delta} & = & {\scriptstyle\delta_0}\Big\uparrow \qquad\quad \Big\uparrow{\scriptstyle\Phi(\delta_1)} & & {\scriptstyle\delta_1}\Big\uparrow \qquad\quad \Big\uparrow{\scriptstyle\Phi(\delta_2)} & \cdots & & & {\scriptstyle\delta_{n-1}}\Big\uparrow \qquad\quad \Big\uparrow{\scriptstyle\Phi(\delta_n)} \\
\mathrm{pr}_n \cdot D_{d'} & & a_0^{d'} \xrightarrow[m_0^{d'}]{} \Phi(a_1^{d'}) & & a_1^{d'} \xrightarrow[m_2^{d'}]{} \Phi(a_2^{d'}) & & & & a_{n-1}^{d'} \xrightarrow[m_n^{d'}]{} \Phi(a_n^{d'})
\end{array}$$

στην $\mathscr{K}$.
Θα κατασκευάσουμε το πεπερασμένο μη-κενό *αρχικό* (ο λόγος που θέλουμε το σύνολο των συν-κώνων να είναι αρχικό είναι διότι η κατηγορία $\mathscr{A}$ είναι η $\mathscr{K}_{fp}^{op}$) σύνολο απο συν-κώνους του διαγράμματος $\mathrm{pr}_n \cdot D$ ξεκινώντας από τον δείκτη $i = n - 1$ εώς 0, ως εξής:

Για κάθε από κοινού επί συν-κώνο $e_{i+1} : a^d_{i+1} \longrightarrow z_{i+1}$ επιλέγουμε όλους τους από κοινού επί συν-κώνους $e^d_i : a^d_i \longrightarrow z_i$ καθώς και όλους τους συνεκτικούς μορφισμούς $c_{i+1} : z_i \longrightarrow \Phi(z_{i+1})$ που καθιστούν το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
z_i \arrow[r, dotted, "c_{i+1}"] & \Phi(z_{i+1}) \\
a^d_i \arrow[u, dotted, "e^d_i"] \arrow[r, "m^d_{i+1}"'] & \Phi(a^d_{i+1}) \arrow[u, "\Phi(e^d_{i+1})"']
\end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό. Παρατηρούμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο ζευγάρι μορφισμών: η παραγοντοποίηση του συν-κώνου $\Phi(e^d_{i+1}) \cdot m^d_{i+1}$ μέσω ενός, από κοινού επί και ακραίου μονομορφισμού. Εφόσον κάθε συν-κώνος e^d_i είναι από κοινού επί το αντίστοιχο c_{i+1} καθορίζεται μοναδικά.

Ισχυριζόμαστε ότι η παραπάνω μη-κενή πεπερασμένη οικογένεια από συν-κώνους για το $\mathrm{pr}_n \cdot D$ είναι αρχική. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τυχαίο συν-κώνο

$$\begin{tikzcd}
w_0 \arrow[r, "f_1"] & \Phi(w_1) & w_1 \arrow[r, "f_2"] & \Phi(w_2) & \cdots & w_{n-1} \arrow[r, "f_n"] & \Phi(w_n) \\
a^d_0 \arrow[u, "g^d_0"] \arrow[r, "m^d_0"'] & \Phi(a^d_1) \arrow[u, "\Phi(g^d_1)"'] & a^d_1 \arrow[u, "g^d_1"] \arrow[r, "m^d_2"'] & \Phi(a^d_2) \arrow[u, "\Phi(g^d_2)"'] & & a^d_{n-1} \arrow[u, "g^d_{n-1}"] \arrow[r, "m^d_n"'] & \Phi(a^d_n) \arrow[u, "\Phi(g^d_n)"']
\end{tikzcd}$$

του διαγράμματος $\mathrm{pr}_n \cdot D$. Παραγοντοποιούμε τον συν-κώνο g^d_n μέσω ενός αππό κοινού επί $e^d_n : a^d_n \longrightarrow z_n$ ακολουθούμενο από ένα ακραίο μονομορφισμό $j_n : z_n \longrightarrow w_n$. Κάνοντας το ίδιο για τον συν-κώνο g^d_{n-1} και χρησιμοποιώντας την διαγώνια ιδιότητα προκύπτει ο επιθυμητός μορφισμός $c_n : z_{n-1} \longrightarrow \Phi(z_n)$

$$\begin{tikzcd}
w_{n-1} \arrow[r, "f_n"] & w_n \\
z_{n-1} \arrow[u, "j_{n-1}"] \arrow[r, dotted, "c_n"] & \Phi(z_n) \arrow[u, "\Phi(j_n)"'] \\
a^d_{n-1} \arrow[u, "e^d_{n-1}"] \arrow[r, "m^d_n"'] & \Phi(a^d_n) \arrow[u, "\Phi(e^d_n)"']
\end{tikzcd}$$

λαμβάνοντας υπ'όψιν και την υπόθεση ότι ο $\Phi(j_n)$ είναι ακραίος μονομορφισμός. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικάσία μέχρι και για $i = 0$, προκύπτει συν-κώνος της μορφής που επιλέξαμε ο οποίος παραγοντοποιείται μέσω του τυχαίου συν-κώνου. ■

Πόρισμα 4.34 *Κάθε ενδοσυναρτητής στην κατηγορία* Lin *πληρεί την Πρόταση 4.33.*

Βήμα 3: Θα αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.35 *Αν M συμπαγές μόδιο, η Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας συνεπάγεται την Ισχυρή.*

Απόδειξη: Από την Υπόθεση 4.18 γνωρίζουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ είναι μη-κενή. Για να δείξουμε το ζητούμενο αρκεί να κατασκευάσουμε κώνο για οποιοδήποτε διάγραμμα $D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathsf{Complex}(M)$, όπου $\mathscr{D}$ πεπερασμένη μη-κενή κατηγορία.

Εχοντας το τυχαίο διάγραμμα κατασκευάζουμε την αντίστοιχη αλυσίδα

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{P}^D_{n+1} \xrightarrow{p^{n+1}_n} \mathscr{P}^D_n \xrightarrow{p^n_{n-1}} \cdots \xrightarrow{p^1_0} \mathscr{P}^D_0 \tag{4.19}$$

από μερικώς διατεταγμένα σύνολα και μονοτονες απεικονίσεις. Θα επαληθεύσουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (1) και (2) του Θεωρήματος 4.29.

1. Κάθε $\mathscr{P}^D_n$ περιέχει μη-κενό πεπερασμένο τελικό υποσύνολο, εφόσον το μόδιο M υποθέσαμε ότι είναι συμπαγές.

2. Η εικόνα κάθε άνω-κλειστού συνόλου μέσω της μονότονης απεικόνισης p^{n+1}_n είναι άνω-κλειστό σύνολο.

   Εστω ότι το διάγραμμα $D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathsf{Complex}(M)$ είναι της μορφής

$$\begin{tikzcd} D_d \arrow[d, "D\delta"] \\ D_{d'} \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "m^d_3", "/" marking] & a^d_2 \arrow[r, "m^d_2", "/" marking] \arrow[d, "\delta_2"] & a^d_1 \arrow[r, "m^d_1", "/" marking] \arrow[d, "\delta_1"] & a^d_0 \arrow[d, "\delta_0"] \\ \cdots \arrow[r, "m^{d'}_3"', "/" marking] & a^{d'}_2 \arrow[r, "m^{d'}_2"', "/" marking] & a^{d'}_1 \arrow[r, "m^{d'}_1"', "/" marking] & a^{d'}_0 \end{tikzcd}$$

   Τότε το διάγραμμα $\mathrm{pr}_n \cdot D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathsf{Complex}_n(M)$ θα είναι

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pr}_n \cdot D_d \arrow[d, "\mathrm{pr}_n \cdot D\delta"] \\ \mathrm{pr}_n \cdot D_{d'} \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} a^d_n \arrow[r, "m^d_n", "/" marking] \arrow[d, "\delta_n"] & \cdots \arrow[r, "m^d_3", "/" marking] & a^d_2 \arrow[r, "m^d_2", "/" marking] \arrow[d, "\delta_2"] & a^d_1 \arrow[r, "m^d_1", "/" marking] \arrow[d, "\delta_1"] & a^d_0 \arrow[d, "\delta_0"] \\ a^{d'}_n \arrow[r, "m^{d'}_n"', "/" marking] & \cdots \arrow[r, "m^{d'}_3"', "/" marking] & a^{d'}_2 \arrow[r, "m^{d'}_2"', "/" marking] & a^{d'}_1 \arrow[r, "m^{d'}_1"', "/" marking] & a^{d'}_0 \end{tikzcd}$$

για κάθε $n \geq 0$.

Επιλέγουμε ένα άνω-κλειστό σύνολο $S \subseteq \mathscr{P}^D_{n+1}$. Κάθε $s \in S$ είναι κώνος για το παραπάνω διάγραμμα $\mathrm{pr}_{n+1} \cdot D$ και τον συμβολίζουμε:

$$
s = \begin{tikzcd}
s_{n+1} \arrow[r, "m^s_{n+1}", "/"{marking}] \arrow[d, "\sigma^d_{n+1}"] & \cdots \arrow[r, "m^s_3", "/"{marking}] & s_2 \arrow[r, "m^s_2", "/"{marking}] \arrow[d, "\sigma^d_2"] & s_1 \arrow[r, "m^s_1", "/"{marking}] \arrow[d, "\sigma^d_1"] & s_0 \arrow[d, "\sigma^d_0"] \\
a^d_{n+1} \arrow[r, "m^d_{n+1}"', "/"{marking}] & \cdots \arrow[r, "m^d_3"', "/"{marking}] & a^d_2 \arrow[r, "m^d_2"', "/"{marking}] & a^d_1 \arrow[r, "m^d_1"', "/"{marking}] & a^d_0
\end{tikzcd}
$$

Για τυχαίο s στο S θεωρούμε b στο $\mathscr{P}^D_n$ τέτοιο ώστε να ισχύει $p^{n+1}_n(s) \sqsubseteq_n b$. Τότε θα πρέπει να βρούμε t στο S με $s \sqsubseteq_{n+1} t$ έτσι ώστε $p^{n+1}_n(t) = b$.

Χρησιμοποιώντας αντίστοιχο συμβολισμό το b θα είναι της μορφής

$$
b = \begin{tikzcd}
b_n \arrow[r, "m^b_n", "/"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_n"] & \cdots \arrow[r, "m^b_3", "/"{marking}] & b_2 \arrow[r, "m^b_2", "/"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_2"] & b_1 \arrow[r, "m^b_1", "/"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_1"] & b_0 \arrow[d, "\beta^d_0"] \\
a^d_n \arrow[r, "m^d_n"', "/"{marking}] & \cdots \arrow[r, "m^d_3"', "/"{marking}] & a^d_2 \arrow[r, "m^d_2"', "/"{marking}] & a^d_1 \arrow[r, "m^d_1"', "/"{marking}] & a^d_0
\end{tikzcd}
$$

Η ανισότητα $p^{n+1}_n(s) \sqsubseteq_n b$ σημαίνει ότι υπάρχει διάγραμμα της μορφής

$$
\begin{tikzcd}
s_n \arrow[r, "m^s_n", "/"{marking}] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \arrow[r, "m^s_3", "/"{marking}] & s_2 \arrow[r, "m^s_2", "/"{marking}] \arrow[d, "g_2"] & s_1 \arrow[r, "m^s_1", "/"{marking}] \arrow[d, "g_1"] & s_0 \arrow[d, "g_0"] \\
b_n \arrow[r, "m^b_n", "/"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_n"] & \cdots \arrow[r, "m^b_3", "/"{marking}] & b_2 \arrow[r, "m^b_2", "/"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_2"] & b_1 \arrow[r, "m^b_1", "/"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_1"] & b_0 \arrow[d, "\beta^d_0"] \\
a^d_n \arrow[r, "m^d_n"', "/"{marking}] & \cdots \arrow[r, "m^d_3"', "/"{marking}] & a^d_2 \arrow[r, "m^d_2"', "/"{marking}] & a^d_1 \arrow[r, "m^d_1"', "/"{marking}] & a^d_0
\end{tikzcd}
$$

όπου οι ισότητες $\beta^d_i \cdot g_i = \sigma^d_i$ ισχύουν για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Αν θεωρήσουμε το διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
s_{n+1} \arrow[r, "m^s_{n+1}", "/"{marking}] \arrow[d, equal] & s_n \arrow[r, "m^s_n", "/"{marking}] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \arrow[r, "m^s_3", "/"{marking}] & s_2 \arrow[r, "m^s_2", "/"{marking}] \arrow[d, "g_2"] & s_1 \arrow[r, "m^s_1", "/"{marking}] \arrow[d, "g_1"] & s_0 \arrow[d, "g_0"] \\
s_{n+1} \arrow[r, "g_n \cdot m^s_{n+1}", "/"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_{n+1}"] & b_n \arrow[r, "m^b_n", "/"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_n"] & \cdots \arrow[r, "m^b_3", "/"{marking}] & b_2 \arrow[r, "m^b_2", "/"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_2"] & b_1 \arrow[r, "m^b_1", "/"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_1"] & b_0 \arrow[d, "\beta^d_0"] \\
a^d_{n+1} \arrow[r, "m^d_{n+1}"', "/"{marking}] & a^d_n \arrow[r, "m^d_n"', "/"{marking}] & \cdots \arrow[r, "m^d_3"', "/"{marking}] & a^d_2 \arrow[r, "m^d_2"', "/"{marking}] & a^d_1 \arrow[r, "m^d_1"', "/"{marking}] & a^d_0
\end{tikzcd}
$$

Τοτε ο ζητούμενος κώνος t θα είναι της μορφής:

$$\begin{tikzcd}
s_{n+1} \arrow[r, "g_n @ m^s_{n+1}", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_{n+1}"] & b_n \arrow[r, "m^b_n", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_n"] & \cdots \arrow[r, "m^b_3", "\shortmid"{marking}] & b_2 \arrow[r, "m^b_2", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_2"] & b_1 \arrow[r, "m^b_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[d, "\beta^d_1"] & b_0 \arrow[d, "\beta^d_0"] \\
a^d_{n+1} \arrow[r, "m^d_{n+1}"', "\shortmid"{marking}] & a^d_n \arrow[r, "m^d_n"', "\shortmid"{marking}] & \cdots \arrow[r, "m^d_3"', "\shortmid"{marking}] & a^d_2 \arrow[r, "m^d_2"', "\shortmid"{marking}] & a^d_1 \arrow[r, "m^d_1"', "\shortmid"{marking}] & a^d_0
\end{tikzcd}$$

Κατά συνέπεια η εικόνα κάθε άνω-κλειστού συνόλου μέσω της μονότονης απεικόνισης $p_n^{n+1} : \mathscr{P}^D_{n+1} \longrightarrow \mathscr{P}^D_n$ είναι άνω-κλειστό σύνολο.

■

Από τα παραπάνω "βήματα" προκύπτει το Πόρισμα,

Πόρισμα 4.36 *Για ένα πεπερασμένα προσδιοριμένο ενδοσυναρτητή Φ σε μια πεπερασμένα προσιτή κατηγορία $\mathscr{K}$, υποθέτοντας ότι η $\mathscr{K}$ ικανοποιεί την Πρόταση 4.33 και το αντίστοιχο μόδιο M είναι συμπαγές, ο ισοδύναμος ενδοσυναρτητής $M \otimes -$ δέχεται τελική συνάλγεβρα.*

Μέχρι εδώ έχουμε δείξει ότι αν το μόδιο μας $M : \mathscr{A} \nrightarrow \mathscr{A}$ είναι συμπαγές τότε η Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας είναι ισοδύναμη με την Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας και κάθε μία ξεχωριστά εξασφαλίζει την κατασκευή της τελικής συνάλγεβρας για τον ενδοσυναρτητή $M \otimes -$.
Μια εύλογη ερώτηση που ανακύπτει είναι, αν γνωρίζουμε ότι η τελική συνάλγεβρα υπάρχει, μπορούν οι συνθήκες επιλυσιμότητας να εξαχθούν απο αυτό;

Η απάντηση δεν είναι άμεση χρειάζεται να κάνουμε μία επιπλέον υπόθεση, ότι το μόδιο μας είναι *pointed*, δηλ. ότι το M είναι εφοδιασμένο μ'ενα μορφισμό μεταξύ μοδίων της μορφής $c : \mathscr{A} \longrightarrow M$.
Για κάθε $a \in \mathscr{A}$, το να είναι το μόδιο M pointed έχει ως συνέπεια κάθε αναπαραστάσιμος συναρτητής $\mathscr{A}(a, -)$ να έρχεται εφοδιασμένος με μια δομή συνάλγεβρας

$$c_a : \mathscr{A}(a, -) \longrightarrow M(a, -)$$

για τον ενδοσυναρτητή $M \otimes -$, εφόσον $\Big(M \otimes \mathscr{A}\Big)(a, -) \cong M(a, -)$.
Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η κατηγορία $\mathsf{Complex}(M)$ είναι μη-κενή, βλ. Λήμμα 4.15.

Επιπλέον, για κάθε $f : a \longrightarrow a'$, ο φυσικός μετασχηματισμός $\mathscr{A}(f,-) : \mathscr{A}(a',-) \longrightarrow \mathscr{A}(a,-)$ είναι μορφισμός μεταξύ συναλγεβρών, δηλ. το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}(a',-) \arrow[r, "c_{a'}"] \arrow[d, "\mathscr{A}(f,-)"'] & M(a',-) \arrow[d, "M(f,-)"] \\ \mathscr{A}(a,-) \arrow[r, "c_a"'] & M(a,-) \end{tikzcd} \tag{4.20}$$

αντιμετατίθεται.

Από τον ισομορφισμό $\Phi \cong M \otimes -$ προκύπτει, χωρίς μεγάλη δυσκολία, το να είναι το μόδιο M pointed ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει ο φυσικός μετασχηματισμός $\mathrm{Id} \longrightarrow \Phi$.

Λαμβάνοντας υπ'όψιν τα προηγούμενα αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.37 *Αν το μόδιο M είναι pointed και η τελική συνάλγεβρα για τον $M \otimes -$ υπάρχει, ο συναρτητής pr_0 είναι συν-φιλτραρισμένος. Δηλ. ισχύει η Ασθενής Συνθήκη Επιλυσιμότητας.*

Απόδειξη: Συμβολίζουμε με $j : J \longrightarrow M \otimes J$ την τελική συνάλγεβρα για τον ενδοσυναρτητή $M \otimes -$ και με $c_a^\dagger : \mathscr{A}(a,-) \longrightarrow J$ τον μοναδικό μορφισμό συναλγεβρών που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}(a,-) \arrow[r, "c_a"] \arrow[d, "c_a^\dagger"'] & M \otimes \mathscr{A}(a,-) \arrow[d, "M \circ c_a^\dagger"] \\ J \arrow[r, "j"'] & M \otimes J \end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό.

Τότε το παραπάνω διάγραμμα, μαζί με το διάγραμμα (4.20) καθιστούν το ακόλουθο τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}(a',-) \arrow[dr, "c_{a'}^\dagger"] \arrow[dd, "\mathscr{A}(f,-)"'] & \\ & J \\ \mathscr{A}(a,-) \arrow[ur, "c_a^\dagger"'] & \end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό.

δηλ., η συλλογή των μορφισμών

$$c^\dagger_{\mathrm{pr}_0^{op}(a_\bullet, m_\bullet)} : \mathscr{A}(a_0,-) \longrightarrow J$$

καθιστούν τον J συν-κώνο, για το διάγραμμα $Y \cdot \mathrm{pr}_0^{op}$.

Όμως ο T είναι το συνόριο του διαγράμματος

$$\Big(\mathsf{Complex}(M)\Big)^{op} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0^{op}} \mathscr{A}^{op} \xrightarrow{Y} [\mathscr{A}, \mathsf{Set}]$$

όπου τώρα ο $T : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$ δεν είναι επίπεδος συναρτητής απλά το συνόριο.
Οπότε, από την καθολική ιδιότητα του συνορίου T, υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός

$$\overline{\beta} : T \longrightarrow J$$

Ο φυσικός αυτός μετασχηματισμός $\overline{\beta}$ επάγει ένα συναρτητή $F : \mathsf{Complex}(M) \longrightarrow \mathsf{elts}(J)$, που απεικονίζει

$$(a_\bullet, m_\bullet) \mapsto x \in Ja_0$$

όπου το στοιχείο $x \in Ja_0$ αντιστοιχεί στο φυσικό μετασχηματισμό $c^{\dagger}_{\mathrm{pr}_0^{op}(a_\bullet, m_\bullet)} : \mathscr{A}(a_0, -) \longrightarrow J$, από το Λήμμα του Yoneda.

Τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Complex}(M) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_0"'] & & \mathsf{elts}(J) \arrow[dl, "\mathsf{proj}"] \\
& \mathscr{A} &
\end{tikzcd}$$

αντιμετατίθεται. Εφόσον ο J είναι επίπεδος συναρτητής, η κατηγορία $\mathsf{elts}(J)$ είναι συν-φιλτραρισμένη. Αρα ο συναρτητής, που δίνεται ως σύνθεση, $\mathrm{pr}_0 = \mathsf{proj} \cdot F$ είναι συν-φιλτραρισμένος. ■

Πόρισμα 4.38 *Αν ο ταυτοτικός συναρτητής της κατηγορίας* $\mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$ *έχει τελική συνάλγεβρα, η κατηγορία* $\mathscr{A}$ *είναι συν-φιλτραρισμένη.*

Το ακόλουθο Πόρισμα απαντά στην αρχική μας ερώτηση.

Πόρισμα 4.39 *Αν υποθέσουμε ότι* $M : \mathscr{A} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!+\;\; \mathscr{A}$ *είναι ένα pointed συμπαγές μόδιο, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το αυτο-όμοιο σύστημα* $(\mathscr{A}, M)$ *ικανοποιεί την Ασθενή Συνθήκη Επιλυσιμότητας.*

2. *Το αυτο-όμοιο σύστημα* $(\mathscr{A}, M)$ *ικανοποιεί την Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας.*

3. *Το συνόριο του διαγράμματος*

$$\Big(\mathsf{Complex}(M)\Big)^{op} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0^{op}} \mathscr{A}^{op} \xrightarrow{Y} [\mathscr{A}, \mathsf{Set}]$$

είναι ένας επίπεδος συναρτητής.

4. *Η τελική συνάλγεβρα για τον ενδοσυναρτητή $M \otimes -$ υπάρχει.*

Κεφάλαιο 5

Συνελεύθερες Συνάλγεβρες σε Προσιτές Κατηγορίες

Σ'αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη και την κατασκευή της συνελεύθερης συνάλγεβρας πάνω από μια προσιτή κατηγορία.
Συγκεκριμένα, αν $\Phi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ οποιοσδήποτε πεπερασμένα προσδιορισμένος ενδοσυναρτητής σε μια πεπερασμένα προσιτή κατηγορία $\mathscr{K}$ και K ένα αντικείμενο της κατηγορίας, ζητάμε να κατασκευάσουμε μια Φ-συνάλγεβρα $(\hat{K}, \kappa)$ εφοδιασμένη μ'ενα μορφισμό της μορφής $\varepsilon_K : \hat{K} \longrightarrow K$. Η συνάλγεβρα αυτή, την οποία καλούμε συνελεύθερη συνάλγεβρα, θέλουμε να έχει την ιδιότητα: αν (X, e) τυχαία Φ-συνάλγεβρα και μορφισμός $\delta : X \longrightarrow K$, να υπάρχει μοναδικός Φ-ομομορφισμός $e^\sharp : (X, e) \longrightarrow (\hat{K}, \kappa)$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, dotted, "e^\sharp"'] & \\ & K \\ \hat{K} \arrow[ur, "\varepsilon_K"'] & \end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθεται, δηλ. $\varepsilon_K \cdot e^\sharp = \delta$.

Με άλλα λόγια, ζητάμε συνθήκες κάτω από τις οποίες ο επιλήσμων συναρτητής U : $\mathsf{Coalg}(\Phi) \longrightarrow \mathscr{K}$ δέχεται δεξιά προσαρτημένο.

Στην προσπάθεια μας αυτή θα χρησιμοποιήσουμε μια τροποποίηση της τεχνικής που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για την εύρεση της τελικής συνάλγεβρας. Όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω, υπό προϋποθέσεις, οι δύο αυτές έννοιες συνδέονται.

Στο ακόλουθο θεώρημα θα αναδείξουμε την μια πλευρά αυτής της διασύνδεσης. Θα υποθέσουμε οτι η πεπερασμένα προσιτή κατηγορία έχει επιπλέον γινόμενα, επιλέγοντας ένα αντικείμενο της κατηγορίας θα δείξουμε ότι η συνελεύθερη συνάλγεβρα, για το αντικείμενο αυτό, δίνεται ως τελική συνάλγεβρα για κατάλληλο πεπερασμένα προσδιορισμένο ενδοσυναρτητή.

Θεώρημα 5.1 *Εστω $\mathscr{K}$ πεπερασμένα προσιτή κατηγορία και $\Phi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ πεπερασμένα προσδιορισμένος ενδοσυναρτητής. Τότε η συνελεύθερη συνάλγεβρα για ένα αντικείμενο K της $\mathscr{K}$ είναι η τελική συνάλγεβρα για τον πεπερασμένα προσδιορισμένο ενδοσυναρτητή*

$$\Phi'(-)/ = \Phi(-) \times K : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 4.6, υπάρχει επίπεδο μόδιο M' έτσι ώστε

$$\Phi' \cong M' \otimes -$$

δηλ. ο Φ' γράφεται (ισοδύναμα) ως συναρτητής της μορφής

$$M' \otimes - = M \otimes - \times K : \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set}) \longrightarrow \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})$$

όπου M το αντίστοιχο επίπεδο μόδιο του ενδοσυναρτητή Φ.

Αν a, b δύο (τυχαία) πεπερασμένα παρουσιάσιμα στοιχεία της $\mathscr{K}$, χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό 4.10, προκύπτει

$$\begin{array}{rcl} M'(a,b) & \cong & \mathscr{K}(b, \Phi(a) \times K) \\ & \cong & \mathscr{K}(b, \Phi(a)) \times \mathscr{K}(b, K) \\ & \cong & M(a,b) \times \mathscr{K}(b, K) \\ & \cong & M(a,b) \times \mathsf{Flat}(\mathscr{A}, \mathsf{Set})(y(b), K) \\ & \cong & M(a,b) \times K(b) \end{array}$$

Δηλαδή, κάθε στοιχείο του επίπεδου μοδίου M' είναι της μορφής:

$$(a \overset{m}{\nrightarrow} b, x \in K(b))$$

όπου $m \in M(a,b)$.

Ορίζουμε την κατηγορία των συμπλεγμάτων (βλ. Ορισμό 4.11) για το μόδιο M', την οποία συμβολίζουμε

$$\mathsf{Complex}^K(M')$$

Από την μορφή που έχουν τα στοιχεία του M', η κατηγορία $\mathsf{Complex}^K(M')$ έχει:

- Αντικείμενα, συμπλέγματα της μορφής

$$\cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, x_2) \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0) \tag{5.1}$$

  όπου, $a_i \in \mathscr{A}$ και $x_i \in K(a_i)$, $m_i \in M(a_{i+1}, a_i)$.

- Μορφισμούς, ακολουθιές μορφισμών $f_n : a_n \longrightarrow a'_n$ της $\mathscr{A}$, έτσι ώστε

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "m_3"] & (a_2, x_2) \arrow[r, "m_2"] \arrow[d, "f_2"] & (a_1, x_1) \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "f_1"] & (a_0, x_0) \arrow[d, "f_0"] \\
\cdots \arrow[r, "m'_3"'] & (a'_2, x'_2) \arrow[r, "m'_2"'] & (a'_1, x'_1) \arrow[r, "m'_1"'] & (a'_0, x'_0)
\end{tikzcd}$$

  τα αντίστοιχα τετράγωνα του διαγράμματος να αντιμετατίθενται. Λόγω της μορφής των συμπλεγμάτων η αντιμετάθεση αυτή επιβάλλει, για κάθε $i \geq 0$, να ισχύουν οι ισότητες

$$Kf_i(x_i) = x'_i$$

Υποθέτοντας οτι η κατηγορία $\mathsf{Complex}^K(M')$ είναι συν-φιλτραρισμένη (Συνθήκη Ισχυρής Επιλυσιμότητας), η τελική συνάλγεβρα για τον ενδοσυναρτητή $M' \otimes -$ υπάρχει. Αν την συμβολίσουμε με $(\hat{K}, \kappa)$ από την 5.2 ο φορέας της, $\hat{K}$, θα είναι

$$\hat{K} = \operatorname{colim}\Big(\mathsf{Complex}^K(M')^{op} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0^{op}} \mathscr{A}^{op} \xrightarrow{Y} [\mathscr{A}, \mathsf{Set}]\Big)$$

όπου, για κάθε $a \in \mathscr{A}$

$$\hat{K}(a) = [\ \cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, x_2) \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a\ ]$$

ισοδύναμα,

$$\hat{K}(a) = [\ \cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, x_2) \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{f \cdot m_1} (a, Kf(x_0))\ ]$$

Ο αντίστοιχος μορφισμός της τελικής συνάλγεβρας, για κάποιο $a \in \mathscr{A}$, θα είναι ο φυσικός μετασχηματισμός

$$\kappa_a : \hat{K}(a) \longrightarrow (M' \otimes \hat{K})(a) = \int^{a'} M'(a', a) \times \hat{K}(a')$$

που απεικονίζει στοιχεία της μορφής

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, x_2) \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a\,]$$

σε στοιχεία

$$[\, a_1 \xrightarrow{m_1} a_0 \xrightarrow{f} a\,, [\,\cdots \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{id} a_1\,]]$$

του coend.

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο θα ορίσουμε, ένα συναρτητή από την κατηγορία $\mathscr{K}$ στην κατηγορία των συναλγεβρών $\mathsf{Coalg}(\Phi')$ ($C : \mathscr{K} \longrightarrow \mathsf{Coalg}(\Phi')$), ένα φυσικό μετασχηματισμό $\varepsilon : UC \to id_{\mathscr{K}}$ και θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε συνάλγεβρα $(X, e) \in \mathsf{Coalg}(\Phi')$ εφοδιασμένη μ'ένα μορφισμό $\delta : U(X, e) \longrightarrow K$, υπάρχει *μοναδικός* ομομορφισμός συναλγεβρών $e^\sharp : (X, e) \longrightarrow C(K)$ που να καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} U(X,e) \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, dotted, "U(e^\sharp)"'] & \\ & K \\ U(C(K)) \arrow[ur, "\varepsilon_K"'] & \end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό.

Ορίζουμε τον συναρτητή $C : \mathscr{K} \longrightarrow \mathsf{Coalg}(\Phi')$ θέτοντας,

$$C(K) := (\hat{K}, \kappa)$$

Έστω τυχαία συνάλγεβρα (X, e):

$$\begin{tikzcd} & K \\ X \arrow[r, "e"] \Phi'(X) = \Phi(X) \times K \arrow[ur, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & \Phi(X) \end{tikzcd}$$

(r, p είναι οι δύο "προβολές" του γινομένου).

Οπότε ορίζουμε ο μορφισμός $\delta : X \longrightarrow K$ να είναι η σύνθεση

$$\delta := r \cdot e$$

Ο φυσικός μετασχηματισμός, αποτιμημένος στο αντικείμενο K, $\varepsilon_K : U(C(K)) \to K$ προκύπτει από τον δομικό μορφισμό της τελικής συνάλγεβρας

$$\begin{tikzcd} & & K \\ \hat{K} \arrow[r, "\kappa"] & \Phi'(\hat{K}) = \Phi(\hat{K}) \times K \arrow[ur, "r'"] \arrow[dr, "p'"'] & \\ & & \Phi(\hat{K}) \end{tikzcd}$$

ως σύνθεση

$$\varepsilon_K := r' \cdot \kappa$$

Εφόσον η συνάλγεβρα $(\hat{K}, \kappa)$ είναι τελική για τον ενδοσυναρτητή Φ', υπάρχει μοναδικός μορφισμός συναλγεβρών $e^\sharp : (X, e) \longrightarrow (\hat{K}, \kappa)$, τέτοιος ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e^\sharp"'] & \Phi'(X) = \Phi(X) \times K \arrow[d, "\Phi'(e^\sharp)=\Phi(e^\sharp)\times K"] \\ \hat{K} \arrow[r, "\kappa"'] & \Phi'(\hat{K}) = \Phi(\hat{K}) \times K \end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθεται.
δηλ.

$$(\Phi(e^\sharp) \times K) \cdot e = \kappa \cdot e^\sharp \qquad (1)$$

Παρατηρούμε όμως, από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & K \\ \Phi(X) \times K \arrow[ur, "r"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rrr, dotted, "\Phi(e^\sharp)\times K"] & & & \Phi(\hat{K}) \times K \arrow[u, "r'"] \arrow[d, "p'"'] \\ & \Phi(X) \arrow[rr, "\Phi(e^\sharp)"'] & & \Phi(\hat{K}) \end{tikzcd}$$

ότι ισχύουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned} p' \cdot (\Phi(e^\sharp) \times K) &= \Phi(e^\sharp) \cdot p \\ r' \cdot (\Phi(e^\sharp) \times K) &= r \end{aligned} \qquad (2)$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις ισότητες (1) και (2) καταλήγουμε

$$\delta = r \cdot e \overset{(2)}{=} r' \cdot (\Phi(e^\sharp) \times K) \cdot e \overset{(1)}{=} r' \cdot \kappa \cdot e^\sharp = \varepsilon_K \cdot e^\sharp$$

δηλ. το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
U(X,e) \arrow[dd, "U(e^\sharp)"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
 & K \\
U(\hat{K},\kappa) \arrow[ur, "\varepsilon_K"'] &
\end{tikzcd}$$

αντιμετατίθεται. ∎

Πόρισμα 5.2 *Αν Φ είναι ένας πεπερασμένα προσδιορισμένος ενδοσυναρτητής σε μια τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη κατηγορία $\mathscr{K}$, η συν-ελεύθερη συνάλγεβρα για κάθε αντικείμενο της κατηγορίας υπάρχει.*

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε την συν-ελεύθερη συνάλγεβρα στην περίπτωση που η κατηγορία $\mathscr{K}$ είναι απλά πεπερασμένα προσιτή και ο ενδοσυναρτητής $\Phi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ πεπερασμένα προσδιορισμένος. Τα συμπλέγματα που θα χρησιμοποιήσουμε στην κατασκευή θα είναι της μορφής 5.1, τα οποία ονομάζουμε *καθορισμένα (pointed).*

Για το λόγο αυτό δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.3 *Αν M είναι ένα (επίπεδο) μόδιο και $K \in \mathscr{K}$ ένα αντικείμενο της κατηγορίας, ορίζουμε την κατηγορία*

$$\mathsf{Complex}^K(M)$$

των M-καθορισμένων συμπλεγμάτων στο K *ως εξής:*

1. *Αντικείμενα, καλούμε τα* M-καθορισμένα συμπλέγματα στο K, *τα οποία είναι αριθμήσιμες αλυσίδες της μορφής*

$$\cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, x_2) \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0)$$

όπου τα a_i ανήκουν στην κατηγορία $\mathscr{A}$ και $x_i \in K(a_i)$, $m_i \in M(a_{i+1}, a_i)$.
Ισοδύναμα, κάθε στοιχείο x_i γράφεται ως $x_i : \mathscr{A}(a_i, -) \to K$.
Ένα σύμπλεγμα, για ένα συγκεκριμένο αντικείμενο K, θα το συμβολίζουμε με $(a_\bullet, m_\bullet)^K$ για συντομία και θα το καλούμαι K-καθορισμένο ή απλά καθορισμένο σύμπλεγμα.

2. Μορφισμοί από το $(a_\bullet, m_\bullet)^K$ στο $(a'_\bullet, m'_\bullet)^K$ *είναι ακολουθίες μορφισμών* $f_n : a_n \longrightarrow a'_n$, *τις οποίες συμβολίζουμε* $(f_\bullet)$, *τέτοιες ώστε όλα τα τετράγωνα στο ακόλουθο διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "m_3", "\shortmid" marking] & (a_2, x_2) \arrow[r, "m_2", "\shortmid" marking] \arrow[d, "f_2"] & (a_1, x_1) \arrow[r, "m_1", "\shortmid" marking] \arrow[d, "f_1"] & (a_0, x_0) \arrow[d, "f_0"] \\ \cdots \arrow[r, "m'_3"', "\shortmid" marking] & (a'_2, x'_2) \arrow[r, "m'_2"', "\shortmid" marking] & (a'_1, x'_1) \arrow[r, "m'_1"', "\shortmid" marking] & (a'_0, x'_0) \end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθενται και επίσης να ισχύει ότι

$$Kf_i(x_i) = x'_i$$

για κάθε $i \geq 0$.

Θεώρημα 5.4 *Έστω* $\mathscr{K}$ *πεπερασμένα προσιτή κατηγορία και* $K \in \mathscr{K}$, *τότε η συν-ελεύθερη συνάλγεβρα για τον ενδοσυναρτητή* $M \otimes -$ *στο* K *υπάρχει, υπό την προϋπόθεση οτι η κατηγορία* $\mathsf{Complex}^K(M)$ *είναι συν-φιλτραρισμένη.*

Απόδειξη: Θα κατασκευάσουμε την συν-ελεύθερη συνάλγεβρα σε διαφορετικά βήματα.

Βήμα 1: Ορισμός της συνάλγεβρας $(\hat{K}, \kappa)$. Ορίζουμε, ο συναρτητής $\hat{K} : \mathscr{A} \to \mathsf{Set}$ να είναι το συνόριο

$$\Big(\mathsf{Complex}^K(M)\Big)^{op} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0^{op}} \mathscr{A}^{op} \xrightarrow{Y} [\mathscr{A}, \mathsf{Set}] \tag{5.2}$$

Από την υπόθεση μας, ο συναρτητής $\hat{K} : \mathscr{A} \to \mathsf{Set}$ είναι *επίπεδος*, συγκεκριμένα είναι φιλτραρισμένο συνόριο αναπαραστάσιμων.

Στοιχείο του $\hat{K}(a)$ είναι ένα στοιχείο του συνορίου των αναπαραστάσιμων συναρτητών $\mathscr{A}(a_0^i, -)$ αποτιμημένο στο a, όπου το a_0^i "διατρέχει το σύνολο των κεφαλών" των συμπλεγμάτων της $\mathsf{Complex}^K(M)$. Κατά συνέπεια, κάθε στοιχείο είναι μια κλάση ισοδυναμίας της μορφής $[f : a_0^i \to a]$, για κάποιο i, όπου δύο τέτοιες κλάσεις ισούνται

$$[f : a_0^i \to a] = [g : a_0^j \to a]$$

αν υπάρχει ενδιάμεσο σύμπλεγμα και μορφισμοί συμπλεγμάτων

$$\begin{tikzcd} & \cdots \arrow[r, "\shortmid" marking] & (a_1^i, x_1^i) \arrow[r, "m_1^i", "\shortmid" marking] & (a_0^i, x_0^i) \\ \cdots \arrow[r, "\shortmid" marking] & (a_1^k, x_1^k) \arrow[r, "m_1^k", "\shortmid" marking] \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & (a_0^k, x_0^k) \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "g_0"'] & \\ & \cdots \arrow[r, "\shortmid" marking] & (a_1^j, x_1^j) \arrow[r, "m_1^j", "\shortmid" marking] & (a_0^j, x_0^j) \end{tikzcd}$$

έτσι ώστε το διάγραμμα,

$$\begin{tikzcd} & a_0^i \arrow[dr, "f"] & \\ a_0^k \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "g_0"'] & & a \\ & a_0^j \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθεται.

Για να τονίσουμε την εξάρτηση των στοιχείων του $\hat{K}(a)$ από τα συμπλέγματα, θα τα αναπαριστούμε ως κλάσεις ισοδυναμίας:

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, x_2) \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a\,]$$

οι οποίες ισοδύναμα γράφονται ως

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, x_2) \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{f@m_1} (a, Kf(x_0))\,]$$

Η ισοδυναμία αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι υπάρχει πάντα μορφισμός στην $\mathsf{Complex}^K(M)$ της μορφής

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "m_3"] & (a_2, x_2) \arrow[r, "m_2"] & (a_1, x_1) \arrow[r, "f@m_1"] & (a, Kf(x_0)) \\ \cdots \arrow[r, "m_3"] & (a_2, x_2) \arrow[r, "m_2"] \arrow[u, "id"] & (a_1, x_1) \arrow[r, "m_1"] \arrow[u, "id"] & (a_0, x_0) \arrow[u, "f"] \end{tikzcd}$$

Η δράση του συναρτητή $\hat{K}$ σ'ένα μορφισμό $h : a \to a'$ δίνεται ως εξής:

$$\hat{K}(h) : \hat{K}(a) \to \hat{K}(a')$$

στέλνει το στοιχείο

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, x_2) \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a\,] \in \hat{K}(a)$$

στο στοιχείο

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, x_2) \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0) \xrightarrow{h \circ f} a'\,] \in \hat{K}(a')$$

► *Ο συναρτητής $\hat{K}$ είναι φορέας μιας δομής $\Phi-$συνάλγεβρας $\kappa : \hat{K} \to M \otimes \hat{K}$.*
Θα ορίσουμε την δομή της συνάλγεβρας κ κατά σημείο. Για κάθε $a \in \mathscr{A}$, ορίζεται η απεικόνιση

$$\kappa_a : \hat{K}(a) \longrightarrow (M \otimes \hat{K})(a) = \int^{a'} M(a', a) \times \hat{K}(a')$$

η οποία στέλνει τη κλάση ισοδυναμίας

$$[\, \cdots \overset{m_3}{\nrightarrow} (a_2, x_2) \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, x_1) \overset{m_1}{\nrightarrow} (a_0, x_0) \xrightarrow{\;f\;} a \,]$$

στο στοιχείο

$$[\, a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a_0 \xrightarrow{\;f\;} a \,, [\, \cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, x_1) \xrightarrow{\;id\;} a_1 \,]]$$

του coend.

► *Η απεικόνιση κ_a είναι καλά ορισμένη:* Υποθέτουμε ότι δύο κλάσεις ισοδυναμίας ισούνται

$$[\, \cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, x_1) \overset{m_1}{\nrightarrow} (a_0, x_0) \xrightarrow{\;f\;} a \,] = [\, \cdots \overset{n_2}{\nrightarrow} (b_1, y_1) \overset{n_1}{\nrightarrow} (b_0, y_0) \xrightarrow{\;g\;} a \,]$$

τότε υπάρχει ενδιάμεσο σύμπλεγμα και μορφισμοί συμπλεγμάτων

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "m_2", "\shortmid" marking] & (a_1, x_1) \arrow[r, "m_1", "\shortmid" marking] & (a_0, x_0) \\
\cdots \arrow[r, "q_2", "\shortmid" marking] & (c_1, z_1) \arrow[r, "q_1", "\shortmid" marking] \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & (c_0, z_0) \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "g_0"'] & \\
 & \cdots \arrow[r, "n_2", "\shortmid" marking] & (b_1, y_1) \arrow[r, "n_1", "\shortmid" marking] & (b_0, y_0)
\end{tikzcd}$$

έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & a_0 \arrow[dr, "f"] & \\
c_0 \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "g_0"'] & & a \\
 & b_0 \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθεται.

Επομένως έχουμε τις ισότητες:

$$\kappa_a([\,\cdots \xrightarrow{m_2} (a_1,x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0,x_0) \xrightarrow{f} a\,]) = [\,a_1 \xrightarrow{m_1} a_0 \xrightarrow{f} a\,,[\,\cdots \xrightarrow{m_2} (a_1,x_1) \xrightarrow{id} a_1\,]]$$

$$\kappa_a([\,\cdots \xrightarrow{n_2} (b_1,y_1) \xrightarrow{n_1} (b_0,y_0) \xrightarrow{g} a\,]) = [\,b_1 \xrightarrow{n_1} b_0 \xrightarrow{g} a\,,[\,\cdots \xrightarrow{n_2} (b_1,y_1) \xrightarrow{id} b_1\,]]$$

Για να δείξουμε το ζητούμενο αρκεί τα δύο παραπάνω στοιχεία του coend να ισούνται, πράγμα που συμβαίνει λόγω των ισοτήτων:

$$\hat{K}f_1([\,\cdots \xrightarrow{q_2} (c_1,z_1)\,]) = [\,\cdots \xrightarrow{m_2} (a_1,x_1) \xrightarrow{id} a_1\,]$$
$$\hat{K}g_1([\,\cdots \xrightarrow{q_2} (c_1,z_1)\,]) = [\,\cdots \xrightarrow{n_2} (b_1,y_1) \xrightarrow{id} b_1\,]$$

και

$$f@m_1@f_1 = (f\cdot f_0)@q_1 = (g\cdot g_0)@q_1 = g@n_1@g_1$$

► *Φυσικότητα του κ:* Για τυχαίο μορφισμό $h : a \longrightarrow b$, προκύπτει το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\hat{K}(a) \arrow[r, "\kappa_a"] \arrow[d, "\hat{K}(h)"'] & \int^{a'} M(a',a)\times \hat{K}(a') \arrow[d, "\int^{a'} M(a',h)\times \hat{K}(a')"] \\
\hat{K}(b) \arrow[r, "\kappa_b"'] & \int^{a'} M(a',b)\times \hat{K}(a')
\end{tikzcd}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την αντιμεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος επιλέγουμε ένα στοιχείο

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_2} (a_1,x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0,x_0) \xrightarrow{f} a\,]$$

του $\hat{K}(a)$.
Παρατηρούμε οτι ο κ_a στέλνει το στοιχείο

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_2} (a_1,x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0,x_0) \xrightarrow{f} a\,]$$

στο στοιχείο

$$[\,a_1 \xrightarrow{m_1} a_0 \xrightarrow{f} a\,,[\,\cdots \xrightarrow{m_2} (a_1,x_1) \xrightarrow{id} a_1\,]]$$

το οποίο απεικονίζεται, μέσω του $\int^{a'} M(a',h) \times \hat{K}(a')$, στο στοιχείο

$$[\, a_1 \xrightarrow{m_1} a_0 \xrightarrow{h\cdot f} b \,, [\, \cdots \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{id} a_1 \,]]$$

Από την άλλη μεριά, ο $\hat{K}(h)$ στέλνει το

$$[\, \cdots \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a \,]$$

στο

$$[\, \cdots \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a \xrightarrow{h} b \,]$$

το οποίο, μέσω του κ_b, απεικονίζεται επίσης στο στοιχείο

$$[\, a_1 \xrightarrow{m_1} a_0 \xrightarrow{h\cdot f} b \,, [\, \cdots \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{id} a_1 \,]]$$

Επομένως, με την απόδειξη της φυσικότητας του κ ολοκληρώνεται ο ορισμός της συνάλγεβρας $\kappa : \hat{K} \longrightarrow M \otimes \hat{K}$.

Βήμα 2: Ορισμός του μορφισμού $\varepsilon^K : \hat{K} \longrightarrow K$. Όπως και πριν, θα ορίσουμε τον μορφισμό ε^K κατά σημείο. Για τυχαίο αντικείμενο a της $\mathscr{A}$, ορίζουμε τον

$$\varepsilon^K_a : \hat{K}(a) \longrightarrow K(a)$$

να απεικονίζει το στοιχείο

$$[\, \cdots \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a \,] \in \hat{K}(a)$$

στο στοιχείο

$$Kf(x_0) \in K(a)$$

► *ο ε^K_a είναι καλά ορισμένος:* Από την ισότητα

$$[\, \cdots \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a \,] = [\, \cdots \xrightarrow{n_2} (b_1, y_1) \xrightarrow{n_1} (b_0, y_0) \xrightarrow{g} a \,]$$

υπάρχει ενδιάμεσο σύμπλεγμα έτσι ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "m_2", "/" marking] & (a_1, x_1) \arrow[r, "m_1", "/" marking] & (a_0, x_0) \\
\cdots \arrow[r, "q_2", "/" marking] & (c_1, z_1) \arrow[r, "q_1", "/" marking] \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & (c_0, z_0) \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "g_0"'] & \\
 & \cdots \arrow[r, "n_2", "/" marking] & (b_1, y_1) \arrow[r, "n_1", "/" marking] & (b_0, y_0)
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}
 & a_0 \arrow[dr, "f"] & \\
c_0 \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "g_0"'] & & a \\
 & b_0 \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθενται.
Επομένως, ισχύει η ισότητα

$$Kf(x_0) = Kf(Kf_0(z_0)) = Kg(Kg_0(z_0)) = Kg(y_0)$$

η οποία μας δίνει το ζητούμενο.

▶ *Φυσικότητα του ε^K:* Έστω $h : a \longrightarrow b$ τυχαίος μορφισμός, θα δείξουμε την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\hat{K}(a) \arrow[r, "\varepsilon_a"] \arrow[d, "\hat{K}(h)"'] & K(a) \arrow[d, "K(h)"] \\
\hat{K}(b) \arrow[r, "\varepsilon_b"'] & K(b)
\end{tikzcd}$$

Αποδεικνύεται άμεσα ότι και οι δύο "δρόμοι" στέλνουν το στοιχείο

$$[\,\cdots \xrightarrow{m_2}\!\!\!\!\!\!\!\!\not\;\;\;\;\;\; (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1}\!\!\!\!\!\!\!\!\not\;\;\;\;\;\; (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a\,] \in \hat{K}(a)$$

στο ίδιο στοιχείο

$$K(h \cdot f)(x_0) \in K(b)$$

Βήμα 3: Στο τελευταίο βήμα θα αποδείξουμε, δοθέντος ενός μορφισμού

$$\delta : U(X,e) \longrightarrow K$$

την ύπαρξη *μοναδικού* μορφισμού συναλγεβρών

$$e^\sharp : (X,e) \longrightarrow (\hat{K},\kappa)$$

ο οποίος να καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} U(X,e) \arrow[d, "U(e^\sharp)"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\ U(\hat{K},\kappa) \arrow[r, "\varepsilon"'] & K \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

αντιμεταθετικό.

► *Ύπαρξη του $e^\sharp$:* Για τυχαία συνάλγεβρα $e : X \longrightarrow M \otimes X$, όπου X επίπεδος συναρτητής, ορίζουμε την απεικόνιση

$$e^\sharp_a : X(a) \longrightarrow \hat{K}(a)$$

για κάθε $a \in \mathscr{A}$, με τον ακόλουθο τρόπο.

Από την επιπεδότητα του συναρτητή X υπάρχει στοιχείο $x \in X(a)$. Αποτιμώντας την συνάλγεβρα e στο $a \in \mathscr{A}$ προκύπτει μορφισμός $e_a : X(a) \longrightarrow (M \otimes X)(a)$ που απεικονίζει το $x \in X(a)$ στο στοιχείο

$$e_a(x) = [\, a_1 \overset{m_1}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!/\;\;\;} a \,, x_1 \in X(a_1)]$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδα διαδικασία για το στοιχείο $x_1 \in X(a_1)$, έχουμε ότι

$$e_{a_1}(x_1) = [\, a_2 \overset{m_2}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!/\;\;\;} a_1 \,, x_2 \in X(a_2)]$$

Μ'αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε σύμπλεγμα

$$\cdots \overset{m_3}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!/\;\;\;} a_2 \overset{m_2}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!/\;\;\;} a_1 \overset{m_1}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!/\;\;\;} a$$

μαζί με μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $x_n \in X(a_n)$. Δηλαδή, κατασκευάζουμε ένα *e-resolution* του $x \in X(a)$ (βλ. Ορισμό 4.16) και το συμβολίζουμε

$$res(x)$$

Ο μορφισμός δ είναι ο φυσικός μετασχηματισμός

$$\delta : X \longrightarrow K$$

συνεπώς, για κάθε $x_i \in X(a_i)$, $i \geq 0$, προκύπτει ακολουθία στοιχείων

$$\delta_{a_1}(x_1) \in K(a_1)\ ,\ \delta_{a_2}(x_2) \in K(a_2)\ ,\ \delta_{a_3}(x_3) \in K(a_3)\ ,\ \ldots$$

η οποία, σύμφωνα με τα παραπάνω, ορίζει *resolution πάνω από το* K ($res^K(x)$).
Χρησιμοποιώντας το, θέτουμε

$$e_a^\sharp(x) := [res^K(x)] = [\ \cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, \delta_{a_2}(x_2)) \xrightarrow{m_2} (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \xrightarrow{m_1} (a, \delta_a(x)) \xrightarrow{id} a\ ] \tag{5.4}$$

Στη συνέχεια πρέπει να επαληθεύσουμε ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος απο την επιλογή του resolution. Η απόδειξη είναι μια άμεση εφαρμογή του Λήμματος 5.9 του [Le]. Για λόγους πληρότητας θα αναφέρουμε την απόδειξη προσαρμοσμένη στα δικά μας δεδομένα.
Υποθέτουμε την ύπαρξη δύο resolution του x:

$$\begin{aligned} res_1^K(x) &= \cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, x_2) \xrightarrow{m_2} (a_1, x_1) \xrightarrow{m_1} (a, x) \\ res_2^K(x) &= \cdots \xrightarrow{m_3'} (a_2', x_2') \xrightarrow{m_2'} (a_1', x_1') \xrightarrow{m_1'} (a, x) \end{aligned} \tag{5.5}$$

το οποίο σημαίνει ότι ισχύει η ισότητα

$$[\ a_1 \xrightarrow{m_1} a\ , x_1 \in X(a_1)] = [\ a_1' \xrightarrow{m_1'} a\ , x_1' \in X(a_1')]$$

άρα, από το [Le] Λήμμα 3.2, υπάρχει αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & b_1 \arrow[dl, dotted, "f_1"'] \arrow[dr, dotted, "f_1'"] & \\ a_1 \arrow[dr, "m_1"'] & & a_1' \arrow[dl, "m_1'"] \\ & a & \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

μαζί μ'ένα στοιχείο $y_1 \in X(b_1)$, τέτοιο ώστε $Xf_1(y_1) = x_1$ και $Xf_1'(y_1) = x_1'$.

Στο δικό μας πλαίσιο τα (5.5) και (5.6) παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{array}{l} \cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, \delta_{a_2}(x_2)) \xrightarrow{m_2} (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \xrightarrow{m_1} (a, \delta_a(x)) \\ \cdots \xrightarrow{m_3'} (a_2', \delta_{a_2'}(x_2')) \xrightarrow{m_2'} (a_1', \delta_{a_1'}(x_1')) \xrightarrow{m_1'} (a, \delta_a(x)) \end{array} \tag{5.7}$$

$$\begin{tikzcd} & (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \arrow[dl, dotted, "f_1"'] \arrow[dr, dotted, "f_1'"] & \\ (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \arrow[dr, "m_1"', "|" marking] & & (a_1', \delta_{a_1'}(x_1') \arrow[dl, "m_1'", "|" marking] \\ & (a, \delta_a(x)) & \end{tikzcd} \tag{5.8}$$

με την ιδιότητα, $Kf_1(\delta_{b_1}(y_1)) = \delta_{a_1}(x_1)$ και $Kf_1'(\delta_{b_1}(y_1)) = \delta_{a_1'}(x_1')$.
Το τελευταίο προκύπτει απο τη φυσικότητα του δ και από τις ισότητες $Xf_1(y_1) = x_1$ και $Xf_1'(y_1) = x_1'$.
Πράγματι, από την αντιμεταθετικότητα του

$$\begin{tikzcd} X(b_1) \arrow[r, "\delta_{b_1}"] \arrow[d, "Xf_1"'] & K(b_1) \arrow[d, "Kf_1"] \\ X(a_1) \arrow[r, "\delta_{a_1}"'] & K(a_1) \end{tikzcd}$$

για $y_1 \in X(b_1)$, έχουμε

$$Kf_1(\delta_{b_1}(y_1)) = \delta_{a_1}(Xf_1(y_1)) = \delta_{a_1}(x_1)$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας

$$\begin{array}{rcl} \left[res_1^K(x)\right] & = & [\, \cdots \xrightarrow{m_3} (a_2, \delta_{a_2}(x_2)) \xrightarrow{m_2} (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \xrightarrow{m_1} (a, \delta_a(x)) \xrightarrow{\mathrm{id}} a \,] \\ \left[res_2^K(x)\right] & = & [\, \cdots \xrightarrow{m_3'} (a_2', \delta_{a_2'}(x_2')) \xrightarrow{m_2'} (a_1', \delta_{a_1'}(x_1')) \xrightarrow{m_1'} (a, \delta_a(x)) \xrightarrow{\mathrm{id}} a \,] \end{array}$$

ισούνται.

Για το λόγο αυτό θα κατασκευάσουμε, με επαγωγή, ένα διάγραμμα της μορφής

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, two heads, "m_4"] & (a_3, \delta_{a_3}(x_3)) \arrow[r, two heads, "m_3"] & (a_2, \delta_{a_2}(x_2)) \arrow[r, two heads, "m_2"] & (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \arrow[dr, "m_1"] & \\
\cdots \arrow[r, two heads, "l_3"] & (b_2, \delta_{b_2}(y_2)) \arrow[r, two heads, "l_2"] \arrow[ur, "f_2"] \arrow[dr, "f_2'"'] & (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_1'"'] \arrow[rr, "m_1 @ f_1 = m_1' @ f_1'"] & & (a, \delta_a(x)) \\
\cdots \arrow[r, two heads, "m_4'"] & (a_3', \delta_{a_3'}(x_3')) \arrow[r, two heads, "m_3'"] & (a_2', \delta_{a_2'}(x_2')) \arrow[r, two heads, "m_2'"] & (a_1', \delta_{a_1'}(x_1')) \arrow[ur, "m_1'"'] &
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{Complex}^K(M)$.

Το πρώτο βήμα, για $k = 1$, ισχύει λόγω του διαγράμματος (5.8).
Για το επαγωγικό βήμα, $k = n$, υποθέτουμε οτι έχουμε κατασκευάσει τα b_n, f_n, f_n' και $\delta_{b_n}(y_n)$, οπότε προκύπτει το αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & (a_n, \delta_{a_n}(x_n)) \arrow[r, "m_n"] & \cdots \arrow[r, "m_2"] & (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \arrow[dr, "m_1"] & \\
(b_n, \delta_{b_n}(y_n)) \arrow[ur, "f_n"] \arrow[dr, "f_n'"'] \arrow[r, "l_n"] & \cdots \arrow[r, "l_2"] & (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_1'"'] \arrow[rr, "m_1 @ f_1 = m_1' @ f_1'"] & & (a, \delta_a(x)) \\
 & (a_n', \delta_{a_n'}(x_n')) \arrow[r, "m_n'"] & \cdots \arrow[r, "m_2'"] & (a_1', \delta_{a_1'}(x_1')) \arrow[ur, "m_1'"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.9}$$

Χρησιμοποιώντας την συνάλγεβρα $e : X \longrightarrow M \otimes X$ και το στοιχείο $y_n \in X(b_n)$ συμπεραίνουμε ότι

$$e_{b_n}(y_n) = [\, c \xrightarrow{q} b_n \ , z \in X(c)]$$

το οποίο μας δίνει ένα στοιχείο $\delta_c(z) \in K(c)$.

Έτσι το διάγραμμα (5.9) γίνεται,

$$\begin{tikzcd}
 & (a_{n+1}, \delta_{a_{n+1}}(x_{n+1})) \arrow[r, two heads, "m_{n+1}"] & (a_n, \delta_{a_n}(x_n)) \arrow[r, "m_n"] & \cdots \arrow[r, "m_2"] & (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \arrow[dr, "m_1"] & \\
(c, \delta_c(z)) \arrow[r, "q"] & (b_n, \delta_{b_n}(y_n)) \arrow[ur, "f_n"] \arrow[dr, "f_n'"'] \arrow[r, "l_n"] & \cdots \arrow[r, "l_2"] & (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_1'"'] \arrow[rr, "m_1 @ f_1 = m_1' @ f_1'"] & & (a, \delta_a(x)) \\
 & (a_{n+1}', \delta_{a_{n+1}'}(x_{n+1}')) \arrow[r, two heads, "m_{n+1}'"] & (a_n', \delta_{a_n'}(x_n')) \arrow[r, "m_n'"] & \cdots \arrow[r, "m_2'"] & (a_1', \delta_{a_1'}(x_1')) \arrow[ur, "m_1'"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.10}$$

Η φυσικότητα του μορφισμού e

$$\begin{tikzcd}
X(b_n) \arrow[r, "\varepsilon_{b_n}"] \arrow[d, "Xf_n"'] & (M \otimes X)(b_n) \arrow[d, "(M\otimes X)(f_n)"] \\
X(a_n) \arrow[r, "\varepsilon_{a_n}"'] & (M \otimes X)(a_n)
\end{tikzcd}$$

εξασφαλίζει την ισχύ των ισοτήτων:

$$\begin{aligned}
[\, a_{n+1} \overset{m_{n+1}}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!/\;\;\;} a_n \,, x_{n+1} \in X(a_{n+1})] &= e_{a_n}(x_n) = e_{a_n}(Xf_n(y_n)) = (M \otimes X)(f_n)(e_{b_n}(y_n)) \\
&= [\, c \overset{f_n@q}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!/\;\;\;} a_n \,, z \in X(c)]
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας ξανά το Λήμμα 3.2 του [Le], παίρνουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
c \arrow[dr, "f_n@q"', "/" marking] & & a_{n+1} \arrow[dl, "m_{n+1}", "/" marking] \\
 & a_n &
\end{tikzcd} \tag{5.11}$$

μαζί μ'ένα στοιχείο $w \in X(d)$ τέτοιο ώστε $Xg(w) = z$ και $Xh(w) = x_{n+1}$.

Όπως και πριν, το στοιχείο $\delta_d(w)$ ανήκει στο $K(d)$ και από την φυσικότητα του δ τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
X(d) \arrow[r, "\delta_d"] \arrow[d, "Xh"'] & K(d) \arrow[d, "Kh"] \\
X(a_{n+1}) \arrow[r, "\delta_{a_{n+1}}"'] & Ka_{n+1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X(d) \arrow[r, "\delta_d"] \arrow[d, "Xg"'] & K(d) \arrow[d, "Kg"] \\
X(c) \arrow[r, "\delta_c"'] & Kc
\end{tikzcd}$$

αντιμετατίθενται.

Επιπλέον, ισχύουν οι ισότητες

$$Kh(\delta_d(w)) = \delta_{a_{n+1}}(Xh(w)) = \delta_{a_{n+1}}(x_{n+1}) \,,\; Kg(\delta_d(w)) = \delta_c(Xg(w)) = \delta_c(z) \tag{5.12}$$

Οπότε από τις σχέσεις (5.11) και (5.12) προκύπτει άμεσα η αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος:

$$
\begin{tikzcd}
 & (a_{n+1}, \delta_{a_{n+1}}(x_{n+1})) \arrow[dr, "m_{n+1}", "/" marking] & \\
(d, \delta_d(w)) \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "g"] & & (a_n, \delta_{a_n}(x_n)) \\
(c, \delta_c(z)) \arrow[r, "q"', "/" marking] & (b_n, \delta_{b_n}(y_n)) \arrow[ur, "f_n"'] &
\end{tikzcd}
\tag{5.13}
$$

Εφαρμόζοντας την φυσικότητα του ε^K για τον μορφισμό $f'_n : b_n \longrightarrow a'_n$ και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, προκύπτει αντίστοιχα το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
 & (a'_{n+1}, \delta_{a'_{n+1}}(x'_{n+1})) \arrow[dr, "m'_{n+1}", "/" marking] & \\
(d', \delta'_d(w')) \arrow[ur, "h'"] \arrow[d, "g'"] & & (a'_n, \delta_{a'_n}(x'_n)) \\
(c, \delta_c(z)) \arrow[r, "q"', "/" marking] & (b_n, \delta_{b_n}(y_n)) \arrow[ur, "f'_n"'] &
\end{tikzcd}
\tag{5.14}
$$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, το διάγραμμα (5.10) γίνεται

$$
\begin{tikzcd}
 & (a_{n+1}, \delta_{a_{n+1}}(x_{n+1})) \arrow[r, "m_{n+1}", "/" marking] & (a_n, \delta_{a_n}(x_n)) \arrow[r, "m_n", "/" marking] & \cdots \\
(d, \delta_d(w)) \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "g"] & & & \\
(c, \delta_c(z)) \arrow[r, "q", "/" marking] & (b_n, \delta_{b_n}(y_n)) \arrow[r, "l_n", "/" marking] \arrow[uur, "f_n"] \arrow[ddr, "f'_n"] & \cdots & \\
(d', \delta_{d'}(w')) \arrow[u, "g'"] \arrow[dr, "h'"] & & & \\
 & (a'_{n+1}, \delta_{a'_{n+1}}(x'_{n+1})) \arrow[r, "m'_{n+1}", "/" marking] & (a'_n, \delta_{a'_n}(x'_n)) \arrow[r, "m'_n", "/" marking] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{5.15}
$$

Επίσης από τα διαγράμματα (5.11), (5.14), έπεται η ισότητα

$$Xg(w) = z = Xg'(w')$$

Από την τελευταία ισότητα και λόγω της επιπεδότητας του συναρτητή X υπάρχει, αντικείμενο b_{n+1} της κατηγορίας $\mathscr{A}$ εφοδιασμένο με δύο μορφισμούς $k : b_{n+1} \longrightarrow d$, $k' : b_{n+1} \longrightarrow d'$, και ένα στοιχείο $y_{n+1} \in X(b_{n+1})$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$Xk(y_{n+1}) = w \ , \ Xk'(y_{n+1}) = w' \ , \ g \cdot k = g' \cdot k'$$

Τα b_{n+1}, y_{n+1} προσδιορίζουν ένα στοιχείο $\delta_{b_{n+1}}(y_{n+1}) \in Kb_{n+1}$ και λόγω φυσικότητας του δ, από τα αντίστοιχα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
X(b_{n+1}) \arrow[r, "\delta_{b_{n+1}}"] \arrow[d, "X(k)"'] & K(b_{n+1}) \arrow[d, "K(k)"] \\
X(d) \arrow[r, "\delta_d"'] & K(d)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X(b_{n+1}) \arrow[r, "\delta_{b_{n+1}}"] \arrow[d, "X(k')"'] & K(b_{n+1}) \arrow[d, "K(k')"] \\
X(d') \arrow[r, "\delta_{d'}"'] & K(d')
\end{tikzcd}$$

προκύπτουν οι ισότητες:

$$K(k)(\delta_{b_{n+1}}(y_{n+1})) = \delta_d(Xk(y_{n+1})) = \delta_d(w) \ , \ K(k')(\delta_{b_{n+1}}(y_{n+1})) = \delta_{d'}(Xk'(y_{n+1})) = \delta_{d'}(w')$$

Επομένως έχουμε το εξής αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & & (a_{n+1}, \delta_{a_{n+1}}(x_{n+1})) \arrow[r, two heads, "m_{n+1}"] & (a_n, \delta_{a_n}(x_n)) \arrow[r, two heads, "m_n"] & \cdots \\
 & (d, \delta_d(w)) \arrow[ur, "h"] \arrow[d, "g"] & & & \\
(b_{n+1}, \delta_{b_{n+1}}(y_{n+1})) \arrow[uurr, bend left, "f_{n+1}"] \arrow[ur, "k"] \arrow[dr, "k'"'] \arrow[ddrr, bend right, "f'_{n+1}"'] \arrow[rr, bend left, "l_{n+1}"] & (c, \delta_c(z)) \arrow[r, "q"] & (b_n, \delta_{b_n}(y_n)) \arrow[r, "l_n"] \arrow[uur, "f_n"] \arrow[ddr, "f'_n"'] & \cdots & \\
 & (d', \delta_{d'}(w')) \arrow[u, "g'"'] \arrow[dr, "h'"] & & & \\
 & & (a'_{n+1}, \delta_{a'_{n+1}}(x'_{n+1})) \arrow[r, two heads, "m'_{n+1}"'] & (a'_n, \delta_{a'_n}(x'_n)) \arrow[r, two heads, "m'_n"'] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{5.16}$$

στο οποίο έχουμε θέσει $f_{n+1} := h \cdot k$, $f'_{n+1} := h' \cdot k'$, $l_{n+1} = q@(g \cdot k)$, με το οποίο ολοκληρώνεται η επαγωγή.

Μ'αυτό τον τρόπο δείχνουμε οτι ο μορφισμός $e^\sharp$ είναι καλά ορισμένος.

► *Φυσικότητα του $e^\sharp$:* Για να αποδείξουμε την φυσικότητα του $e^\sharp$ επιλέγουμε τυχαίο μορφισμό $h : a \longrightarrow b$ και θεωρούμε το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} X(a) \arrow[r, "e_a^\sharp"] \arrow[d, "X(h)"'] & \hat{K}(a) \arrow[d, "\hat{K}(h)"] \\ X(b) \arrow[r, "e_b^\sharp"'] & \hat{K}(b) \end{tikzcd}$$

το οποίο θέλουμε να είναι αντιμεταθετικό.

Επιλέγοντας τυχαίο στοιχείο $x \in X(a)$ παρατηρούμε,
Ο "επάνω δρόμος" απεικονίζει το x:

$$\begin{array}{rcl} x & \overset{e_a^\sharp}{\longmapsto} & [\,\cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \overset{m_1}{\nrightarrow} (a, \delta_a(x)) \overset{id}{\rightarrow} a\,] \\ & \overset{\hat{K}(h)}{\longmapsto} & [\,\cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \overset{m_1}{\nrightarrow} (a, \delta_a(x)) \overset{h}{\longrightarrow} b\,] \\ & = & [\,\cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \overset{h@m_1}{\nrightarrow} (b, Kh(\delta_a(x)))\,] \end{array}$$

ενώ ο "κάτω δρόμος":

$$\begin{array}{rcl} x & \overset{X(h)}{\longmapsto} & Xh(x) \\ & \overset{e_b^\sharp}{\longmapsto} & [\,\cdots \overset{n_2}{\nrightarrow} (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \overset{n_1}{\nrightarrow} (b, \delta_b(Xh(x))) \overset{\mathrm{id}}{\rightarrow} b\,] \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι από τη φυσικότητα του δ ισχύει:

$$\delta_b(Xh(x)) = Kh(\delta_a(x))$$

Επίσης, η αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} X(a) \arrow[r, "e_a"] \arrow[d, "X(h)"'] & (M \otimes X)(a) \arrow[d, "(M\otimes X)(h)"] \\ X(b) \arrow[r, "e_b"'] & (M \otimes X)(b) \end{tikzcd}$$

δίνει

$$e_b(Xh(x)) = [\, a_1 \overset{h@m_1}{\nrightarrow} b\,, x_1 \in X(a_1)]$$

Συνεπώς, προκύπτει η ισότητα

$$[\,\cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \overset{h@m_1}{\nrightarrow} (b, Kh(\delta_a(x)))\,] = [\,\cdots \overset{n_2}{\nrightarrow} (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \overset{n_1}{\nrightarrow} (b, \delta_b(Xh(x))) \xrightarrow{id} b\,]$$

με την οποία αποδεικνύεται η φυσικότητα του $e^\sharp$.

▶ *Ο $e^\sharp$ είναι μορφισμός συναλγεβρών:* Για να το αποδείξουμε πρέπει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e^\sharp"'] & (M \otimes X) \arrow[d, "M\otimes e^\sharp"] \\
\hat{K}(a) \arrow[r, "\kappa_a"'] & (M \otimes \hat{K})(a)
\end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθεται.

Πράγματι, για κάθε $a \in \mathscr{A}$, από την επιπεδότητα του X υπάρχει $x \in Xa$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}
(M \otimes e^\sharp)_a(e_a(x)) &= (M \otimes e^\sharp)_a([\, a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a\, , x_1 \in X(a_1)]) \\
&= [\, a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a\, , [\,\cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \xrightarrow{id} a_1\,]]
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\kappa_a(e^\sharp_a(x)) &= \kappa_a([res^K(x)]) \\
&= [\, a_1 \overset{m_1}{\nrightarrow} a\, , [\,\cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \xrightarrow{id} a_1\,]]
\end{aligned}$$

όπου επιλέγουμε το resolution του x να είναι το $res(x) = (\,\cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, x_1) \overset{m_1}{\nrightarrow} (a, x)\,)$.

▶ *Το διάγραμμα (5.3) αντιμετατίθεται:* Θα αποδείξουμε την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος κατά σημείο. Έστω a αντικείμενο της κατηγορίας $\mathscr{A}$ και στοιχείο $x \in X(a)$. Τότε το διάγραμμα, που έχει πλέον τη μορφή,

$$\begin{tikzcd}
X(a) \arrow[dr, "\delta_a"] \arrow[dd, "e^\sharp_a"'] & \\
& K(a) \\
\hat{K}(a) \arrow[ur, "\varepsilon_a"'] &
\end{tikzcd}$$

αντιμετατίθεται, εφόσον

$$\varepsilon_a(e^\sharp_a(x)) = \varepsilon_a([\,\cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, \delta_{a_1}(x_1)) \overset{m_1}{\nrightarrow} (a, \delta_a(x)) \xrightarrow{\mathrm{id}} a\,]) = K\mathrm{id}_a(\delta_a(x)) = \mathrm{id}_{K(a)}(\delta_a(x)) = \delta_a(x)$$

► *Ο $e^\sharp$ είναι ο μοναδικός μορφισμός που καθιστά το διάγραμμα (5.3) αντιμετατικό:* Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μορφισμός συναλγεβρών $\rho : (X, e) \longrightarrow (\hat{K}, \kappa)$ τέτοιος ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} U(X,e) \arrow[d, "U(\rho)"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\ & K \\ U(\hat{K},\kappa) \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd} \tag{5.17}$$

να αντιμετατίθεται. Θα δείξουμε ότι $\rho = e^\sharp$.

Όπως και προηγουμένως θα αποδείξουμε την ισότητα κατά σημείο. Για $x \in X(a)$ το $\rho_a(x)$ είναι ένα στοιχείο του $\hat{K}(a)$, οπότε υποθέτουμε ότι αναπαρίσταται ως

$$\rho_a(x) = [\,\ldots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, x_1) \overset{m_1}{\nrightarrow} (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a\,] \tag{5.18}$$

όπου $x_i \in K(a_i)$, $i \geq 0$. Ενώ το στοιχείο $e^\sharp_a(x)$ ορίζεται με την βοήθεια ενός resolution, της μορφής (5.4), ως

$$e^\sharp_a(x) = [\,\ldots \overset{n_3}{\nrightarrow} (b_2, \delta_{b_2}(y_2)) \overset{n_2}{\nrightarrow} (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \overset{n_1}{\nrightarrow} (a, \delta_a(x)) \xrightarrow{id} a\,] \tag{5.19}$$

Θα κατασκευάσουμε ένα ενδιάμεσο K-καθορισμένο σύμπλεγμα, μεταξύ των δύο που εμφανίζονται στις (5.18) και (5.19), μαζί με κατάλληλους μορφισμούς αποδεικνύοντας έτσι την ισότητα

$$e^\sharp_a(x) = \rho_a(x)$$

Από την αντιμεταθετικότητα του (5.17) έχουμε τις ισότητες:

$$Kf(x_0) = \varepsilon_a U\rho_a(x) = \delta_a(x)$$

οι οποίες μας επιτρέπουν να κατασκευάσουμε το ζητούμενο K-καθορισμένο σύμπλεγμα μαζί με τους αντίστοιχους μορφισμούς σε "βάθος" 0. Συγκεκριμένα,

$$\begin{tikzcd}
& (a_0,x_0) \arrow[dr, "f"] & \\
(a_0,x_0) \arrow[ur, "id"] \arrow[rr, dotted] \arrow[dr, "f"'] & & a \\
& (a,\delta_a(x)) \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd}$$

Προκειμένου να προχωρήσουμε την κατασκευή σε βάθος $k > 0$, θα χρησιμοποιήσουμε βοηθητικά το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 5.5 *Ας υποθέσουμε ότι στο αντιμεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
X(a) \arrow[r, "e_a"] \arrow[d, "\rho_a"'] & (M \otimes X)(a) \arrow[d, "M\otimes\rho_a"] \\
\hat{K}(a) \arrow[r, "\kappa_a"'] & (M \otimes \hat{K})(a)
\end{tikzcd} \tag{5.20}$$

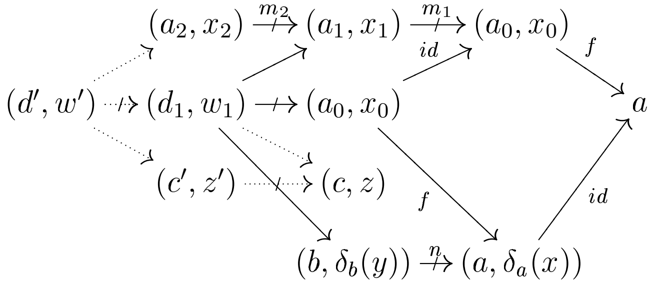
που προκύπτει από το γεγονός ότι ο ρ είναι μορφισμός συναλγεβρών, τα στοιχεία $\rho_a(x)$, $e_a(x)$ είναι της μορφής:

$$\rho_a(x) = [\ \dots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1,x_1) \overset{m_1}{\nrightarrow} (a_0,x_0) \xrightarrow{f} a\ ]$$

και

$$e_a(x) = [\ b \overset{n}{\nrightarrow} a\ , y \in X(b)]$$

Τότε υπάρχουν μορφισμοί "βάθους" 1 μεταξύ K-καθορισμένων συμπλεγμάτων, (συνεχή βέλη)



καθώς και μια επέκταση του διαγράμματος αποτελούμενη από ένα άλλο ζεύγος μορφισμών "βάθους" 1 (διακεκομμένα βέλη).

Σημείωση 5.6 *Το "διακεκομμένο" μέρος του διαγράμματος θα το χρησιμοποιήσουμε ως μέσο για να επεκτείνουμε τους μορφισμούς από "βάθος" 1 στο άπειρο.*

Απόδειξη: (του Λήμματος).
Η αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος (5.20) μας δίνει τις ισότητες:

$$\begin{aligned} M \otimes \rho_a)(e_a(x)) &= (M \otimes \rho_a)([\, b \overset{\eta}{\nrightarrow} a \,, y \in X(b)] \\ &= [\, b \overset{\eta}{\nrightarrow} a \,, \rho_b(y)] \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \kappa_a \rho_a(x) &= \kappa_a([\, \cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, x_1) \overset{m_1}{\nrightarrow} (a_0, x_0) \xrightarrow{f} a \,]) \\ &= \kappa_a([\, \cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, x_1) \overset{f@m_1}{\nrightarrow} (a, \delta_a(x)) \,]) \\ &= [\, a_1 \overset{f@m_1}{\nrightarrow} a \,, [\, \cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, x_1) \xrightarrow{id} a_1 \,]] \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 3.2 ([Le]), υπάρχει διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & c_1 \arrow[dl, dotted, "f_1"'] \arrow[dr, dotted, "g_1"] & \\ a_1 \arrow[dr, "f@m_1"', "/" marking] & & b \arrow[dl, "n", "/" marking] \\ & a & \end{tikzcd} \tag{5.21}$$

μαζί μ'ένα στοιχείο

$$[\, \cdots \overset{q_2}{\nrightarrow} (c_1, z_1) \xrightarrow{id} c_1 \,] \in \hat{K}(c_1)$$

έτσι ώστε οι ισότητες

$$[\, \cdots \overset{q_2}{\nrightarrow} (c_1, z_1) \xrightarrow{f_1} a_1 \,] = [\, \cdots \overset{m_2}{\nrightarrow} (a_1, x_1) \,] \tag{5.22}$$

και

$$[\, \cdots \overset{q_2}{\nrightarrow} (c_1, z_1) \xrightarrow{g_1} b_1 \,] = \rho_b(y) \in \hat{K}(b) \tag{5.23}$$

να ικανοποιούνται.

Το στοιχείο $\rho_b(y)$ του $\hat{K}(b)$, είναι ένα στοιχείο της μορφής

$$[\, \cdots \overset{n_4'}{\nrightarrow} (b'', y'') \overset{n_3'}{\nrightarrow} (b', y') \xrightarrow{g'} b \,] = [\, \cdots \overset{n_4'}{\nrightarrow} (b'', y'') \overset{g'@n_3'}{\nrightarrow} (b, Kg'(y')) \,]$$

χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετικότητα του (5.17) στο b, προκύπτει

$$Kg'(y') = \varepsilon_{b'} U \rho_{b'}(y') = \delta_{b'}(y')$$

Παράλληλα, η ισότητα (5.22) εξασφαλίζει την ύπαρξη ενδιάμεσου (K-καθορισμένου) συμπλέγματος, δηλ.

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "q_3", "\shortmid"{marking}] & (c_2, z_2) \arrow[r, "q_2", "\shortmid"{marking}] & (c_1, z_1) \arrow[dr, "f_1"] & \\
\cdots \arrow[r, "r_3", "\shortmid"{marking}] & (d_2, w_2) \arrow[ur, "l_2'"] \arrow[dr, "l_2"'] \arrow[r, "r_2", "\shortmid"{marking}] & (d_1, w_1) \arrow[ur, "l_1'"] \arrow[dr, "l_1"'] & & a_1 \\
 & \cdots \arrow[r, "m_3", "\shortmid"{marking}] & (a_2, x_2) \arrow[r, "m_2", "\shortmid"{marking}] & (a_1, x_1) \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.24}$$

Συνδυάζοντας την αντιμεταθετικότητα των διαγραμμάτων (5.24) και (5.21) προκύπτει η ισότητα

$$(f@m_1) \cdot l_1 \overset{5.24}{=} (f@m_1) \cdot f_1 \cdot l_1' \overset{5.21}{=} (n@g_1) \cdot l_1'$$

από την οποία το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "m_1", "\shortmid"{marking}] & a_0 \arrow[dr, "f"] & \\
d_1 \arrow[ur, "l_1"] \arrow[r, "m_1@l_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[dr, "g_1 \cdot l_1'"'] & a_0 \arrow[ur, "id"] \arrow[dr, "f"'] & & a \\
 & b \arrow[r, "\eta", "\shortmid"{marking}] & a \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

αντιμετατίθεται.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αντιμεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος ώστε να συμπεράνουμε την αντιμεταθετικότητα του μη-διακεκομμένου μέρους, του αρχικού διαγράμματος,

$$\begin{tikzcd}
 & (a_1, x_1) \arrow[r, "m_1", "\shortmid"{marking}] & (a_0, x_0) \arrow[dr, "f"] & \\
(d_1, w_1) \arrow[ur, "l_1"] \arrow[r, "m_1@l_1", "\shortmid"{marking}] \arrow[dr, "g_1 \cdot l_1'"'] & (a_0, x_0) \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f"'] & & a \\
 & (b, \delta_b(y)) \arrow[r, "\eta", "\shortmid"{marking}] & (a, \delta_a(x)) \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.25}$$

Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τις ισότητες:

$$Kl_1(w_1) = x_1$$

(συνέπεια της αντιμεταθετικότητας του “κάτω μέρους” του διαγράμματος (5.24)).
και

$$K(g_1 \cdot l'_1)(w_1) = Kg_1(z_1)$$

(από το “άνω μέρος” του διαγράμματος (5.24)).

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη της αντιμεταθετικότητας του διαγράμματος (5.25), μένει να δείξουμε ότι

$$Kg_1(z_1) = \delta_b(y)$$

Πράγματι, από την ισότητα (5.23) έχουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "q_3", "/" marking] & (c_2, z_2) \arrow[r, "q_2", "/" marking] & (c_1, z_1) \arrow[dr, "g_1"] & \\
\cdots \arrow[r, "s_3", "/" marking] & (\overline{d}_2, \overline{w}_2) \arrow[ur, "h_2"] \arrow[r, "s_2", "/" marking] \arrow[dr, "h'_2"] & (\overline{d}_1, \overline{w}_1) \arrow[ur, "h_1"] \arrow[dr, "h'_1"] & & b \\
 & \cdots \arrow[r, "n'_4"', "/" marking] & (b'', y'') \arrow[r, "g'@n'_3"', "/" marking] & (b, \delta_b(y)) \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$Kg_1(z_1) = Kg_1(Kh_1(\overline{w}_1)) = Kh'_1(\overline{w}_1) = \delta_b(y)$$

Η αντιμεταθετικότητα του αντίστοιχου διακεκομμένου μέρους, του αρχικού διαγράμματος, προκύπτει άμεσα απο το διάγραμμα (5.24). ■

Προκειμένου τώρα να κατασκευάσουμε το ενδιάμεσο σύμπλεγμα, μεταξύ των συμπλεγμάτων (5.18) και (5.19), το οποίο θα μας δώσει το ζητούμενο, δηλ. την ισότητα $e^\sharp_a(x) = \rho_a(x)$, εφαρμόζουμε το Λήμμα που μόλις απόδειξαμε στο αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X(a) \arrow[r, "e_a"] \arrow[d, "\rho_a"'] & (M \otimes X)(a) \arrow[d, "M\otimes\rho_a"] \\
\hat{K}(a) \arrow[r, "\kappa_a"'] & (M \otimes \hat{K})(a)
\end{tikzcd}$$

όπου το στοιχείο $e_a(x)$ αναπαρίσταται ως

$$e_a(x) = [\, b_1 \overset{n_1}{\nrightarrow} a \,, y_1 \in X(b_1)]$$

Οπότε προκύπτει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & (a_2, x_2) \arrow[r, "m_2", "\shortmid" marking] & (a_1, x_1) \arrow[r, "m_1", "\shortmid" marking] & (a_0, x_0) \arrow[dr, "f"] & \\
(d_2, w_2) \arrow[ur, dotted] \arrow[r, dotted, "\shortmid" marking] \arrow[dr, dotted] & (d_1, w_1) \arrow[ur] \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[dr, dotted] \arrow[ddr] & (a_0, x_0) \arrow[ur, "id"] \arrow[ddr, "f"'] & & a \\
 & (c_2, z_2) \arrow[r, dotted, "\shortmid" marking] & (c_1, z_1) & & \\
 & & (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \arrow[r, "n_1", "\shortmid" marking] & (a, \delta_a(x)) \arrow[uur, "id"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.26}$$

από το οποίο κατασκευάζουμε τον πρώτο όρο ενός resolution του x, μαζί με ένα ενδιάμεσο K-καθορισμένο σύμπλεγμα "βάθους" 1.

Εφαρμόζοντας το Λήμμα ακόμα μία φορά για το αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
X(b_1) \arrow[r, "e_{b_1}"] \arrow[d, "\rho_{b_1}"'] & (M \otimes X)(b_1) \arrow[d, "M \otimes \rho_{b_1}"] \\
\hat{K}(b_1) \arrow[r, "\kappa_{b_1}"'] & (M \otimes \hat{K})(b_1)
\end{tikzcd}$$

όπου

$$e_{b_1}(y_1) = [\, b_2 \overset{n_2}{\nrightarrow} b_1 \, , y_2 \in X(b_2)]$$

έπεται το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "q_3", "\shortmid" marking] & (c_2, z_2) \arrow[r, "q_2", "\shortmid" marking] & (c_1, z_1) \arrow[dr, "g_1"] & \\
\cdots \arrow[r, "\shortmid" marking] & (d_2^1, w_2^1) \arrow[ur] \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[dr] & (c_1, z_1) \arrow[ur, "id"] \arrow[dr, "g_1"'] & & b_1 \\
 & \cdots \arrow[r, "\shortmid" marking] & (b_2, \delta_{b_2}(y_2)) \arrow[r, "n_2"', "\shortmid" marking] & (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \arrow[ur, "id"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.27}$$

το οποίο μας δίνει τον δεύτερο όρο του resolution του x.

Εισάγοντας το διάγραμμα (5.27) στο (5.26) προκύπτει το διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "m_3", "\shortmid" marking] & (a_2, x_2) \arrow[r, "m_2", "\shortmid" marking] & (a_1, x_1) \arrow[r, "m_1", "\shortmid" marking] & (a_0, x_0) \arrow[ddr, "f"] & \\
 {} \arrow[r, "\shortmid" marking] & (d_2, w_2) \arrow[ur] \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[dr] & (d_1, w_1) \arrow[ur] \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[dr] \arrow[dddr] & (a_0, x_0) \arrow[ur, "id"] \arrow[dddr, "f"] & & \\
 & & (c_2, z_2) \arrow[r, "\shortmid" marking] & (c_1, z_1) \arrow[dr, "g_1"] & & a \\
 & (d_2^1, w_2^1) \arrow[ur] \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[dr] & (c_1, z_1) \arrow[ur, "id"] \arrow[dr, "g_1"] & & b_1 & \\
 & & (b_2, \delta_{b_2}(y_2)) \arrow[r, "n_2", "\shortmid" marking] & (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \arrow[ur, "id"] \arrow[r, "n_1", "\shortmid" marking] & (a, \delta_a(x)) \arrow[uur, "id"] &
\end{tikzcd}
\tag{5.28}
$$

χρησιμοποιώντας την επιπεδότητα του συναρτητή $K : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$ συμπληρώνουμε διαγράμματα της μορφής

$$
\begin{tikzcd}
(d_2, w_2) \arrow[dr] & \\
 & (c_2, z_2) \\
(d_2^1, w_2^1) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

σε αντιμεταθετικά τετράγωνα

$$
\begin{tikzcd}
 & (d_2, w_2) \arrow[dr] & \\
(d_2^2, w_2^2) \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & & (c_2, z_2) \\
 & (d_2^1, w_2^1) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

επομένως το (5.28) γίνεται,

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "m_3", "\shortmid" marking] & (a_2, x_2) \arrow[r, "m_2", "\shortmid" marking] & (a_1, x_1) \arrow[r, "m_1", "\shortmid" marking] & (a_0, x_0) \arrow[ddr, "f"] & \\
 {} \arrow[r, "\shortmid" marking] & (d_2, w_2) \arrow[ur] \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[dr] & (d_1, w_1) \arrow[ur] \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[dr] \arrow[dddr] & (a_0, x_0) \arrow[ur, "id"] \arrow[dddr, "f"] & & \\
 (d_2^2, w_2^2) \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, dotted] & & (c_2, z_2) \arrow[r, "\shortmid" marking] & (c_1, z_1) \arrow[dr, "g_1"] & & a \\
 & (d_2^1, w_2^1) \arrow[ur] \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[dr] & (c_1, z_1) \arrow[ur, "id"] \arrow[dr, "g_1"] & & b_1 & \\
 & & (b_2, \delta_{b_2}(y_2)) \arrow[r, "n_2", "\shortmid" marking] & (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \arrow[ur, "id"] \arrow[r, "n_1", "\shortmid" marking] & (a, \delta_a(x)) \arrow[uur, "id"] &
\end{tikzcd}
\tag{5.29}
$$

Αν το απλοποιήσουμε κρατώντας μόνο το τμήμα που μας ενδιαφέρει έχουμε το ζητούμενο ενδιάμεσο σύμπλεγμα σε "βάθος" 2:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "m_3", "\shortmid" marking] & (a_2, x_2) \arrow[r, "m_2", "\shortmid" marking] & (a_1, x_1) \arrow[r, "m_1", "\shortmid" marking] & (a_0, x_0) \arrow[dr, "f"] & \\
(d_2^2, w_2^2) \arrow[ur] \arrow[r, "\shortmid" marking] \arrow[dr] & (d_1, w_1) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & a \\
\cdots \arrow[r, "n_3", "\shortmid" marking] & (b_2, \delta_{b_2}(y_2)) \arrow[r, "n_2", "\shortmid" marking] & (b_1, \delta_{b_1}(y_1)) \arrow[r, "n_1", "\shortmid" marking] & (a, \delta_a(x)) \arrow[ur, "id"] &
\end{tikzcd}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε όλο το ενδιάμεσο σύμπλεγμα και μ'αυτό ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 5.4. ■

Από το παραπάνω Θεώρημα έπεται το πόρισμα

Πόρισμα 5.7 *Αν η κατηγορία* $\mathsf{Complex}^K(M)$ *είναι συν-φιλτραρισμένη, για κάθε αντικείμενο* K *στην* $\mathscr{K}$, *ο επιλήσμων συναρτητής* $U : \mathsf{Coalg}(\Phi) \longrightarrow \mathscr{K}$ *δέχεται δεξιά προσαρτημένο.*

Στη συνέχεια θα κλείσουμε τον κύκλο της διασύνδεσης μεταξύ της τελικής συνάλγεβρας και της συνελεύθερης συνάλγεβρας, που άνοιξε με το Θεώρημα 5.1. Θα παραθέσουμε την απόδειξη γνωστού θεωρήματος σύμφωνα με την οποία, υπό προϋποθέσεις, η ύπαρξη τελικής συνάλγεβρας προκύπτει από την συνελεύθερη συνάλγεβρα. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι η τελική συνάλγεβρα μπορεί να παρθεί ως συνελεύθερη συνάλγεβρα του τελικού αντικειμένου της υποκείμενης κατηγορίας.

Θεώρημα 5.8 *Θεωρούμε την πεπερασμένα προσιτή κατηγορία* $\mathscr{K}$, *η οποία υποθέτουμε ότι δέχεται τελικό αντικείμενο και* $\Phi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{K}$ *πεπερασμένα προσδιορισμένος ενδοσυναρτητής. Αν ο επιλήσμων συναρτητής* $U : \mathsf{Coalg}(\Phi) \longrightarrow \mathscr{K}$ *δέχεται δεξιά προσαρτημένο, η τελική συνάλγεβρα υπάρχει.*

Απόδειξη: Η ύπαρξη δεξιά προσάρτημένου, για τον συναρτητή U, εξασφαλίζει ότι για κάθε αντικείμενο $K \in \mathscr{K}$ υπάρχει η συνελεύθερη συνάλγεβρα. Από την υπόθεση ότι η κατηγορία $\mathscr{K}$ έχει τελικό αντικείμενο, $1 \in \mathscr{K}$, κατασκευάζουμε την συνελεύθερη συνάλγεβρα για το αντικείμενο αυτό, την οποία συμβολίζουμε με $(\hat{1}, \tau)$.

Επομένως για κάθε συνάλγεβρα (K, e) εφοδιασμένη με ένα μορφισμό $\delta : U(K, e) \longrightarrow 1$, υπάρχει *μοναδικός* μορφισμός συναλγεβρών $e^{\dagger} : (K, e) \longrightarrow (\hat{1}, \tau)$, έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
U(K,e) \arrow[d, "U(e^{\dagger})"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
 & 1 \\
U(\hat{1},\tau) \arrow[ur, "\varepsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

να αντιμετατίθεται.
Όμως το αντικείμενο 1 είναι τελικό για την κατηγορία $\mathscr{K}$. Άρα *για κάθε* συνάλγεβρα $(K, e) \in \mathsf{Coalg}(\Phi)$ υπάρχει *μοναδικός* μορφισμός $\delta : U(K, e) \longrightarrow 1$, συνεπώς και *μοναδικός* ομομορφισμός συναλγεβρών $e^{\dagger} : (K, e) \longrightarrow (\hat{1}, \tau)$. Με άλλα λόγια η συνάλγεβρα $(\hat{1}, \tau)$ είναι το τελικό αντικείμενο της κατηγορίας $\mathsf{Coalg}(\Phi)$. ■

Στο τελευταίο μέρος του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με την ύπαρξη της συν-ελεύθερης συνάλγεβρας για την περίπτωση που η υποκείμενη κατηγορία $\mathscr{K}$ δεν είναι απλά πεπερασμένα παρουσιάσιμη, αλλά Scott-πλήρης κατηγορία.

Πρόταση 5.9 *Έστω $\mathscr{K}$ μια Scott-πλήρης κατηγορία και Φ πεπερασμένα προσδιορισμένος ενδοσυναρτητής πάνω από την $\mathscr{K}$, τότε υπάρχει η συν-ελεύθερη συνάλγεβρα για τον Φ.*

Απόδειξη: Από το Πόρισμα 5.7 γίνεται σαφές ότι μας αρκεί η κατηγορία $\mathsf{Complex}^{K}(M)$ να είναι συνφιλτραρισμένη, για κάθε K στην $\mathscr{K}$.

Έστω

$$D : \mathscr{D} \longrightarrow \mathsf{Complex}^{K}(M)$$

πεπερασμένο διάγραμμα στην $\mathsf{Complex}^{K}(M)$, θα αποδείξουμε την ύπαρξη κώνου.

Για τυχαίο μορφισμό $d \longrightarrow d' \in \mathscr{D}$ έχουμε το αντίστοιχο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "m^{d}_{n+1}", "/"{marking}] & (a^{d}_{n}, x^{d}_{n}) \arrow[r, "m^{d}_{n}", "/"{marking}] \arrow[d] & (a^{d}_{n-1}, x^{d}_{n-1}) \arrow[r, "m^{d}_{n-1}", "/"{marking}] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "m^{d'}_{n+1}", "/"{marking}] & (a^{d'}_{n}, x^{d'}_{n}) \arrow[r, "m^{d'}_{n}", "/"{marking}] & (a^{d'}_{n-1}, x^{d'}_{n-1}) \arrow[r, "m^{d'}_{n-1}", "/"{marking}] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{5.30}$$

της $\mathsf{Complex}^K(M)$.
Παρατηρούμε ότι τα ζευγάρια (a_i^d, x_i^d) , $(a_i^{d'}, x_i^{d'})$, για $i \geq 0$, μπορούν να ιδωθούν ως στοιχεία της κατηγορίας των στοιχείων, για τον συναρτητή $K : \mathscr{A} \longrightarrow \mathsf{Set}$, $\mathsf{elts}(K)$.
Όμως ο συναρτητής K είναι επίπεδος που σημαίνει ότι για κάθε δύο (a_i^d, x_i^d) , $(a_i^{d'}, x_i^{d'})$ υπάρχει κώνος (cospan) (c_i, z_i).
Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, κάθε διάγραμμα

$$\mathscr{D} \xrightarrow{D} \mathsf{Complex}^K(M) \xrightarrow{pr_i} \mathscr{K}$$

στην $\mathsf{Complex}^K(M)$ της μορφής

$$\begin{tikzcd} & (a_i^d, x_i^d) \arrow[dd] \\ (c_i, z_i) \arrow[ur, "p_i^d"] \arrow[dr, "p_i^{d'}"'] & \\ & (a_i^{d'}, x_i^{d'}) \end{tikzcd}$$

να έχει κώνο στην κατηγορία $\mathscr{K}$.
Από την ιδιότητα της Scott-πλήρους κατηγορίας έπεται ότι το διάγραμμα έχει κώνο,

$$\begin{tikzcd} & a_i^d \arrow[dd] \\ l_i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & a_i^{d'} \end{tikzcd}$$

άρα υπάρχει παραγοντοποίηση $h_i : c_i \longrightarrow l_i$ που το καθιστά

$$\begin{tikzcd} & & a_i^d \arrow[dd] \\ c_i \arrow[urr, "p_i^d"] \arrow[r, dotted, "h_i"] \arrow[drr, "p_i^{d'}"'] & l_i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & a_i^{d'} \end{tikzcd}$$

αντιμεταθετικό.

Το τελευταίο διάγραμμα, στην κατηγορία $\mathsf{Complex}^K(M)$ παίρνει την μορφή

$$\begin{tikzcd}
& & (a_i^d, x_i^d) \arrow[dd] \\
(c_i, z_i) \arrow[r, dotted, "h_i"] \arrow[urr, "p_i^d"] \arrow[drr, "p_i^{d'}"'] & (l_i, Kh_i(z_i)) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & (a_i^{d'}, x_i^{d'})
\end{tikzcd}$$

Οπότε το αρχικό μας διάγραμμα (5.30) γίνεται

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "m_{n+1}^d", "|" marking] & (a_n^d, x_n^d) \arrow[r, "m_n^d", "|" marking] & (a_{n-1}^d, x_{n-1}^d) \arrow[r, "m_{n-1}^d", "|" marking] & \cdots \\
(l_n, Kh_n(z_n)) \arrow[ur] \arrow[dr] & (l_{n-1}, Kh_{n-1}(z_{n-1})) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
\cdots \arrow[r, "m_{n+1}^{d'}", "|" marking] & (a_n^{d'}, x_n^{d'}) \arrow[r, "m_n^{d'}", "|" marking] & (a_{n-1}^{d'}, x_{n-1}^{d'}) \arrow[r, "m_{n-1}^{d'}", "|" marking] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(για λόγους απλότητας παραλείπουμε τους κάθετους μορφισμούς).

Τέλος, από την επιπεδότητα του μόδιου M προκύπτουν τα αντιμεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
& a_n^d \arrow[rr, "m_n^d", "|" marking] & & a_{n-1}^d \\
l_n \arrow[ur] \arrow[rr, "|" marking] \arrow[dr] & & l_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& a_n^{d'} \arrow[rr, "m_n^d", "|" marking] & & a_{n-1}^{d'}
\end{tikzcd}$$

με τα οποία ολοκληρώνεται η κατασκευή του ζητούμενου κώνου

$$\begin{tikzcd}
& \cdots \arrow[r, "m_{n+1}^d", "|" marking] & (a_n^d, x_n^d) \arrow[r, "m_n^d", "|" marking] & (a_{n-1}^d, x_{n-1}^d) \arrow[r, "m_{n-1}^d", "|" marking] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "|" marking] & (l_n, Kh_n(z_n)) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, "|" marking] & (l_{n-1}, Kh_{n-1}(z_{n-1})) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, "|" marking] & \cdots & \\
& \cdots \arrow[r, "m_{n+1}^{d'}", "|" marking] & (a_n^{d'}, x_n^{d'}) \arrow[r, "m_n^{d'}", "|" marking] & (a_{n-1}^{d'}, x_{n-1}^{d'}) \arrow[r, "m_{n-1}^{d'}", "|" marking] & \cdots
\end{tikzcd}$$

στην $\mathsf{Complex}^K(M)$. ■

Βιβλιογραφία

[AAMV] P. Aczel, J. Adámek, S. Milius and J. Velebil, Infinite trees and completely iterative theories: A coalgebraic view, *Theoret. Comput. Sci.* 300 (2003), 1–45

[A_1] J. Adámek, On final coalgebras of continuous functors, *Theoret. Comput. Sci.* 294 (2003), 3–29

[A_2] J. Adámek, A categorical generalization of Scott domains, *Math. Structures Comput. Sci.* 7 (1997), 419–443

[ABLR] J. Adámek, F. Borceux, S. Lack and J. Rosický, A classification of accessible categories, *Jour. Pure Appl. Alg.* 175 (2002), 7–30

[AHS] J. Adámek, H. Herrlich and G. Strecker, Abstract and concrete categories, *John Wiley & Sons*, New York, 1990, available electronically as a TAC reprint No. 17 at `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/17/tr17abs.html`

[AMV] J. Adámek, S. Milius and J. Velebil, Iterative algebras at work, *Math. Structures Comput. Sci.* 16 (2006), 1085–1131

[AN] H. Andréka, I. Németi, Direct Limits and Filtered Colimits are Strongly Equivalent in all Categories, *Universal Algebra and Applications, Banach Center Publications* 9 (1982)

[ADJ] J. A. Goguen, S. W. Thatcher, E. G. Wagner and J. B. Wright, Initial algebra semantics and continuous algebras, *Journal ACM* 24 (1977), 68–95

[ARu] P. America and J. J. M. M. Rutten, Solving reflexive domain equations in a category of complete metric spaces, *J. Comput. System Sci.* 39 (1989), 343–375

[AR] J. Adámek and J. Rosický, *Locally presentable and accessible categories*, Cambridge University Press, 1994

[Bo] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra* (three volumes), Cambridge University Press, 1994

[D_1] Y. Diers, Catégories multialgébriques, *Arch. Math. (Basel)* 34 (1980), 193–209

[D_2] Y. Diers, Catégories localement multiprésentables, *Arch. Math. (Basel)* 34 (1980), 344–356

[DK] K. Drbohlav, On quasicovarieties, *Acta F. R. N. Univ. Comen. Math., Mimoriadne Cislo* (1971) 17-20.

[E] C. C. Elgot, Monadic computation and iterative algebraic theories, in: *Logic Colloquium '73* (eds: H. E. Rose and J. C. Shepherdson), North-Holland Publishers, Amsterdam, 1975

[EBT] C. C. Elgot, S. L. Bloom and R. Tindell, On the algebraic structure of rooted trees, *J. Comput. System Sci.* 16 (1978), 361–399

[En] R. Engelking, General topology, *Sigma Series in Pure Mathematics*, Berlin Heldermann, 1989

[F] P. Freyd, Real Coalgebra, posting to category theory mailing list, 22 Dec 1999, available electronically at *http://www.mta.ca/ cat-dist/catlist/1999/realcoalg*

[GU] P. Gabriel and F. Ulmer, Lokal präsentierbare Kategorien, *Lecture Notes in Mathematics 221*, Springer 1971

[KMV] P. Karazeris, A. Matzaris and J. Velebil, Final coalgebras in accessible categories, *Mathematical Structures in Computer Science*, 21 (2011), 1067–1108

[KMV_2] P. Karazeris, A. Matzaris and J. Velebil, Cofree coalgebras in accessible categories, *submitted to Jour. Pure Appl. Alg.*, October 2010

[KP] Παναγής Καραζέρης, Κατηγορίες για άμεση χρήση, *http://www.math.upatras.gr/∼pkarazer/*

[L] C. Lair, Catégories modelables et catégories esquissables, *Diagrammes* 6 (1981), L1–L20

[La] J. Lambek, A fixed point theorem for complete categories, *Math.Zeitschr.* 103 (1968), 151–161

[Le] T. Leinster, A general theory of self-similarity , *Adv. Math.* 226 (2011), 2935–3017

[McL] S. MacLane, Categories for the working mathematician, *Springer Verlag*, 1971

[MPa] M. Makkai and R. Paré, Accessible categories: The foundations of categorical model theory, *Contemporary Mathematics 104*, American Mathematical Society, 1989

[PP] D. Pavlović and V. Pratt, The continuum as a final coalgebra, *Theoret. Comput. Sci.* 280 (2002), 105–122

[Pa] R. Paré, Connected components and colimits, *Jour. Pure Appl. Alg.* 3 (1973), 21–42

[R] J. J. M. M. Rutten, Universal coalgebra: A theory of systems, *Theoret. Comput. Sci.* 249 (2000), 3–80

[S] A. H. Stone, Inverse limits of compact spaces. *General Topology Appl.* 10 (1979), no. 2, 203–211.

[W] J. Worrell, A Note on Coalgebras and Presheaves. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* 65 No. 1 (2002)