ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΚΛΑΣΕΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΟΡΙΩΝ ΑΠΟ ΑΡΙΣΤΕΡΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΚΑΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΠΡΟΤΣΩΝΗΣ

Πανεπιστημιο Πατρων
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΠΑΝΑΓΗΣ ΚΑΡΑΖΕΡΗΣ

Πατρα 2012

ευχαριστίες

Η διδακτορική αυτή διατριβή εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Επίκουρου Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, κ. Παναγή Καραζέρη, στον οποίο ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες για την ουσιαστική και όχι απλά τυπική καθοδήγηση του. Η συνεισφορά του τόσο κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών όσο και των προπτυχιακών υπήρξε πολύπλευρη και πολύτιμη.

Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής, για την δεκτικότητά τους, οποτεδήποτε τους χρειάστηκα. Τον τ. Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, κ. Κωνσταντίνο Δρόσο, με τον οποίο οι συζητήσεις μας πάντα μου έδιναν κίνητρο για βαθύτερη αναζήτηση στα Θεμέλια των Μαθηματικών, και τον Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, κ. Απόστολο Μπεληγιάννη οι παρατηρήσεις του οποίου, μου ήταν πάντοτε χρήσιμες.

Στην διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου, δέθηκα με κάποια άτομα, τα οποία ακολουθούσαν τον ίδιο δρόμο με εμένα και οι σπουδές μου είναι συνδεδεμένες άρρηκτα με αυτούς: τον Απόστολο Ματζάρη με τον οποίο μοιραζόμασταν το ίδιο γραφείο και τον ίδιο επιβλέποντα, τον Αναστάσιο Παρασκευά, τον Σωτήρη Κωνσταντίνου-Ρίζο, την Μαρία Καίσαρη, τον Σταύρο Αναστασίου, τον Θοδωρή Κουλούκα, την Ελένη Χριστοδουλίδη, τον Νίκο Καλλίνικο και τον Δημήτρη Νομικό. Τους ευχαριστώ όλους για τη φιλία τους.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Σωτήρη Ντελή, Επαμεινώνδα Κούλη, Βασίλη Αραβαντινό και Χρυσόστομο Ψαρουδάκη με τους οποίους είχα πάντα πολύ γόνιμες μαθηματικές συζητήσεις.

Σε προσωπικό επίπεδο, οφείλω πολλά στο αδερφό μου Παναγιώτη, τον πατέρα μου Γιώργο, την μητέρα μου Αθηνά και στην Χρυσαυγή Κωστοπούλου οι οποίοι με στήριζαν με τον τρόπο τους.

Τέλος θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ) το οποίο με στήριξε οικονομικά στην διάρκεια των διδακτορικών σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το τανυστικό γινόμενο (tensor product) μεταξύ δύο modules, η γεωμετρική πραγματοποίηση (geometric realization) ενός μονόπλοκου συνόλου (simplicial set), οι παράγωγοι συναρτητές (derived functors) της Ομολογιακής Άλγεβρας και πολλές άλλες κατασκευές στην άλγεβρα, στην τοπολογία και σε άλλες περιοχές των μαθηματικών, μπορούν να ειδωθούν υπό το πρίσμα της έννοιας της επέκτασης Kan. Στο [39] υπάρχει μία παράγραφος (Κεφ.X, Παρ. 7) με τίτλο: "Όλες οι έννοιες είναι επεκτάσεις Kan" και η παράγραφος αυτή ξεκινάει με την πρόταση: "Η έννοια (notion) των επεκτάσεων Kan συγκεντρώνει όλες τις θεμελιώδεις έννοιες (concepts) της θεωρίας κατηγοριών". Αυτό αιτιολογείται από το γεγονός ότι (όλες οι) βασικές έννοιες της Θεωρίας των Κατηγοριών όπως αυτές του συνορίου και του αριστερά προσαρτημένου ενός συναρτητή είναι ισοδύναμες με την ύπαρξη κάποιων αριστερών επεκτάσεων Kan (οι έννοιες του ορίου και του δεξιά προσαρτημένου ενός συναρτητή είναι ισοδύναμες με την ύπαρξη κάποιων δεξιών επεκτάσεων Kan). Όπως έχει αναφερθεί ([43]), το να απαριθμείς παραδείγματα επεκτάσεων Kan στην Θεωρία Κατηγοριών είναι παρόμοιο με το να απαριθμείς παραδείγματα ολοκληρωμάτων στην Ανάλυση.

Υπάρχουν δύο έννοιες επεκτάσεων Kan, οι αριστερές και οι δεξιές. Η γενική ιδέα έχει ως εξής:
Αν $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ ένας συναρτητής και $\mathcal{B}$ μία κατηγορία, τότε ορίζεται ο συναρτητής $- \circ G : [\mathcal{C}, \mathcal{B}] \to [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, όπου $[\mathcal{C}, \mathcal{B}]$ η (συναρτητική) κατηγορία που έχει ως αντικείμενα, συναρτητές από την κατηγορία $\mathcal{C}$ προς την κατηγορία $\mathcal{B}$, και μορφισμούς, τους φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ των συναρτητών: αντίστοιχη είναι η περιγραφή για την $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$. Ο συναρτητής $- \circ G$ έχει την προφανή δράση στα αντικείμενα, δηλαδή απεικονίζει τον συναρτητή $H : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ στο συναρτητή $H \circ G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, και αντίστοιχη είναι η δράση του $- \circ G$ στους μορφισμούς. Το πρόβλημα τώρα της επέκτασης Kan, είναι η εύρεση αριστερά και δεξιά προσαρτημένου συναρτητή για τον συναρτητή $- \circ G$. Για τον αριστερά προσαρτημένο, αυτό θα σήμαινε ότι υπάρχει ένας συναρτητής $Lan_G : [\mathcal{A}, \mathcal{B}] \to [\mathcal{C}, \mathcal{B}]$,[1]

[1] Ο συμβολισμός Lan, προέρχεται από την σύμπτυξη των λέξεων Left και Kan.

τέτοιος ώστε για κάθε συναρτητή $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και για κάθε συναρτητή $H : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός

$$\hom_{[\mathcal{C},\mathcal{B}]}(Lan_G F, H) \cong \hom_{[\mathcal{A},\mathcal{B}]}(F, H \circ G)$$

Για ένα συγκεκριμένο συναρτητή $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, ο συναρτητής $Lan_G F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ καλείται η αριστερή επέκταση Kan του F κατά μήκος του G. Αποδεικνύεται ότι αν η κατηγορία $\mathcal{B}$ έχει όλα τα συνόρια, τότε η αριστερή επέκταση Kan υπάρχει πάντα.

Προτού όμως αποκρυσταλλωθεί με αυτό τον τρόπο η έννοια της επέκτασης Kan (και να αναδυθεί σε μία θεμελιακή έννοια της Θεωρίας των Κατηγοριών), επεκτάσεις Kan εμφανίζονταν (χωρίς αυτή την ονομασία) ως συγκεκριμένα παραδείγματα σε διάφορους κλάδους των Θεωρητικών Μαθηματικών, κάποια εκ των οποίων αναφέρονται στην πρώτη επιτυχημένη ενοποίηση τέτοιων κατασκευών από τον Daniel Kan [25], υπό το πρίσμα της έννοιας της προσάρτησης.

Στην σύγχρονη ομοτοπική θεωρία τώρα, κεντρικό ρόλο κατέχει η κατηγορία $\mathbf{SSet} = [\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Set}]$ των μονόπλοκων συνόλων. Τα μονόπλοκα σύνολα εισήχθησαν ως ένα συνδυαστικό μοντέλο για την ομοτοπική θεωρία των τοπολογικών χώρων. Η επιτυχία αυτού του μοντέλου έχει να κάνει με το ότι η κατηγορία των μονόπλοκων συνόλων έχει την κατάλληλη αφηρημένη ομοτοπική δομή (κατηγορία μοντέλο) και επιπλέον είναι ισοδύναμη κατά Quillen[2] με την κατηγορία των τοπολογικών χώρων. Τα παραπάνω στηρίζονται στην προσάρτηση

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Top} \arrow[r, shift right, "S"'] & {[\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Set}]} \arrow[l, shift right, "|.|"'] \end{tikzcd}$$

όπου S είναι ο συναρτητής του ιδιάζοντος μονόπλοκου συνόλου (singular complex functor) και $|.|$ η γεωμετρική πραγματοποίηση (βλέπε Παράδειγμα 2.2.10). Οι δύο αυτοί συναρτητές ορίζονται αναφορικά με τον συναρτητή $\Delta : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Top}$ που αντιστοιχίζει τον διατακτικό $[n]$ στο τοπολογικό n-μονόπλοκο (n-simplex) $\Delta([n]) = \Delta_n = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$. Για την ακρίβεια η γεωμετρική πραγματοποίησης είναι η αριστερή επέκταση Kan του Δ κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda $y : \mathbf{\Delta} \to [\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Set}]$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & {[\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Set}]} \arrow[dl, shift left, "Lan_y\Delta = |\cdot|"] \\ & \mathbf{Top} \arrow[ur, shift left, "S"] & \end{tikzcd}$$

Καθοριστικός παράγοντας για την επιτυχημένη σύγκριση της ομοτοπικής δομής των τοπολογικών χώρων με αυτή της ομοτοπικής δομής των μονόπλοκων συνόλων, είναι το γεγονός ότι ο αριστερά προσαρτημένος (η γεωμετρική πραγματοποίηση) διατηρεί πεπερασμένα όρια.

[2] Η ισοδυναμία κατά Quillen είναι η ¨κατάλληλη' έννοια ισομορφισμού μεταξύ κατηγοριών μοντέλο.

Πιο γενικά τώρα, αν $\mathcal{C}$ είναι μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής προς μία συν-πλήρη κατηγορία $\mathcal{E}$, τότε η αριστερή επέκταση Kan του F (η οποία υπάρχει γιατί η $\mathcal{E}$ είναι συν-πλήρης) κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, έχει πάντα δεξιά προσαρτημένο, τον ιδιάζοντα (singular) συναρτητή $S : \mathcal{E} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, όπου $S(E)$ είναι ο hom-συναρτητής $\hom_{\mathcal{E}}(F(-), E)$.

Αυτή η γενικότερη θεώρηση επεκτάσεων Kan κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda μας επιτρέπει να συγκρίνουμε ομοτοπικές έννοιες για διάφορα συνδυαστικού χαρακτήρα μοντέλα (π.χ. αμφιμονόπλοκα (bisimplicial), κυβικά (cubical), σφαιρικά (globular) σύνολα), αφενός, και διάφορες πραγματοποιήσεις τους ως χώρων (spaces), ανώτερων κατηγοριών (higher categories), και μονόπλοκων κατηγοριών (simplicial categories), αφετέρου ([8], [47], [5]).

Ας δούμε λοιπόν γενικά το ερώτημα: Δοθείσας μίας μικρής κατηγορίας $\mathcal{C}$ και ενός συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ προς μία συν-πλήρη κατηγορία $\mathcal{E}$, πότε η αριστερή επέκταση Kan $Lan_j F$ του F κατά μήκος ενός συναρτητή $j : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, διατηρεί κάποια κλάση πεπερασμένων ορίων; Το ερώτημα αυτό ανάγεται στην διατήρηση των αντίστοιχων ορίων από την αριστερή επέκταση Kan $Lan_y F$ του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda ([34], §2).

Στην περίπτωση που $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ είναι η κατηγορία των συνόλων, τότε το ερώτημα έχει απαντηθεί πλήρως για τις τρεις βασικές κλάσεις πεπερασμένων ορίων: την κλάση όλων των πεπερασμένων ορίων, την κλάση όλων των πεπερασμένων συνεκτικών ορίων και την κλάση των πεπερασμένων γινομένων. Πιο συγκεκριμένα, για ένα συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ έχουμε στην διάθεσή μας την κατηγορία $\mathrm{elts}F$ των στοιχείων του F.[3] Η απαίτηση να είναι αυτή η κατηγορία συν-φιλτραρισμένη (δηλαδή κάθε πεπερασμένο διάγραμμα στην κατηγορία αυτή να έχει κώνο), ισοδυναμεί με την διατήρηση όλων των πεπερασμένων ορίων (= αριστερή ακρίβεια) από την αριστερή επέκταση Kan $Lan_y F$. Τέτοιοι συναρτητές καλούνται επίπεδοι. Η απαίτηση η κατηγορία $\mathrm{elts}F$ να είναι ψεύδο-συν-φιλτραρισμένη (δηλαδή κάθε πεπερασμένο συνεκτικό διάγραμμα στην κατηγορία αυτή να έχει κώνο), ισοδυναμεί με την διατήρηση όλων των πεπερασμένων συνεκτικών ορίων από την αριστερή επέκταση Kan $Lan_y F$. Τέτοιοι συναρτητές καλούνται επίπεδοι ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια. Τέλος, η απαίτηση η κατηγορία $\mathrm{elts}F$ να είναι συν-sifted, ισοδυναμεί με την διατήρηση όλων των πεπερασμένων γινομένων από την αριστερή επέκταση Kan $Lan_y F$. Τέτοιοι συναρτητές καλούνται sifted-επίπεδοι.

Να αναφέρουμε εδώ ότι μέσω αυτών των ισοδυναμιών, χαρακτηρίζεται η ελεύθερη πλήρωση μιας μικρής κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς φιλτραρισμένα συνόρια, ως η υποκατηγορία των προδραγμάτων της $\mathcal{C}$[4] που έχει ως αντικείμενα τους επίπεδους συναρτητές· και η ελεύθερη πλήρωση μιας μικρής κατηγορίας $\mathcal{C}$ ως προς sifted συνόρια, ως η υποκατηγορία των

[3] Η κατηγορία των στοιχείων του F έχει αντικείμενα ζευγάρια της μορφής $(C \in \mathcal{C}, x \in FC)$ (βλέπε Ορισμός 2.1.3)

[4] Ένα προδράγμα της $\mathcal{C}$, είναι ένας ανταλλοίωτος συναρτητής $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$, από την $\mathcal{C}$ προς την κατηγορία των συνόλων

προδραγμάτων της $\mathcal{C}$ που έχει ως αντικείμενα τους sifted επίπεδους συναρτητές. Επιπλέον, κάθε πεπερασμένα προσιτή κατηγορία είναι ισοδύναμη με μία κατηγορία της μορφής $\mathbf{Flat}(\mathcal{A},\mathbf{Set})$ που έχει ως αντικείμενα επίπεδους συναρτητές από μία μικρή κατηγορία $\mathcal{A}$ προς στην κατηγορία των συνόλων.

Τι γίνεται όμως στις περιπτώσεις που έχουμε ένα συναρτητή $F:\mathcal{C}\to\mathcal{B}$ από μία μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$ προς μία τυχαία συν-πλήρη κατηγορία $\mathcal{B}$; Σε αυτή την περίπτωση η "απώλεια" της κατηγορίας των στοιχείων του συναρτητή, οδήγησε στην εξής γενίκευση της έννοιας του επίπεδου συναρτητή:
Ένας συναρτητής $F:\mathcal{C}\to\mathcal{B}$, καλείται επίπεδος αν για κάθε $B\in\mathcal{B}$ η κόμμα κατηγορία $B/\mathcal{B}$ είναι συν-φιλτραρισμένη (αντίστοιχη γενίκευση έχουμε και για τα άλλα δύο είδη επιπεδότητας). Με άλλα λόγια η προηγούμενη συνθήκη μας λέει, ότι ο συναρτητής που προκύπτει από τον F συντιθέμενο με κάθε αναπαραστάσιμο $\hom_{\mathcal{B}}(B,-):\mathcal{B}\to\mathbf{Set}$, είναι επίπεδος ως συναρτητής στην κατηγορία των συνόλων. Αυτού του είδους η γενίκευση όμως, δεν δίνει λύση στο πρόβλημα το οποίο θέσαμε (δηλαδή δεν χαρακτηρίζει την διατήρηση -κάποιας κλάσης - πεπερασμένων ορίων από τον Lan_yF). Για παράδειγμα ο συναρτητής της κατηγορικής πραγματοποίησης

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathbf{SSet} \arrow[dl, "Lan_yU=\tau_1"] \\ & \mathbf{Cat} & \end{tikzcd}$$

διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα, αλλά ο συναρτητής U δεν είναι sifted-επίπεδος με την παραπάνω έννοια. Επιπλέον, αυτή η έννοια επιπεδότητας δεν είναι ισοδύναμη με την αρχική έννοια επιπεδότητας, όταν η κατηγορία $\mathcal{B}$ είναι η κατηγορία των συνόλων.

Σε πολλές από τις καταστάσεις που αναφέραμε παραπάνω η έλλειψη ικανής και αναγκαίας για την διατήρηση (κάποιας κλάσης) πεπερασμένων ορίων από την αριστερή επέκταση Kan, οδηγεί σε κάποιες πλάγιες μεθόδους. Για παράδειγμα, ας δούμε την περίπτωση της γεωμετρικής πραγματοποίησης

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbf{SSet} \arrow[dl, shift left, "Lan_y\Delta=|\cdot|"] \\ & \mathbf{Ke} \arrow[ur, shift left, "S"] & \end{tikzcd}$$

όπου με $\mathbf{Ke}$ συμβολίζουμε την κατηγορία των χώρων Kelley. Υπάρχει ένας "επιλήσμων" (forgetfull) συναρτητής $U:\mathbf{Ke}\to\mathbf{Set}$ ο οποίος αντιστοιχίζει ένα χώρο Kelley στο υποκείμενο σύνολο του. Ένας τρόπος για να δείξει κανείς την αριστερή ακρίβεια της γεωμετρικής πραγματοποίησης (βλέπε [43]), είναι να δείξει την επιπεδότητα του συναρτητή $U\circ\Delta$, συμπεραίνοντας έτσι την την αριστερή ακρίβεια του συναρτητή $U\circ|\cdot|$ και αξιοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα να δείξει τελικά την αριστερή ακρίβεια του συναρτητή $|\cdot|$.

Όμως εκτός από την περίπτωση που έχουμε ένα συναρτητή με τιμές στην κατηγορία των συνόλων, ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την διατήρηση όλων πεπερασμένων ορίων από την αριστερή επέκταση Kan ενός συναρτητή, υπάρχουν και στην περίπτωση που ο συναρτητής λαμβάνει τιμές σ΄ ένα τόπο του Grothendieck (ή ακόμα πιο γενικά σ΄ ένα συν-πλήρη στοιχειώδη τόπο): Η αριστερή επέκταση Kan $Lan_y F$, ενός συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ από μια μικρή κατηγορία προς ένα τόπο του Grothendieck κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda, διατηρεί πεπερασμένα όρια αν και μόνο αν ο F είναι φιλτραρισμένος. Η έννοια του φιλτραρισμένου συναρτητή είναι ασθενέστερη της έννοιας του επίπεδου συναρτητή. Μιλώντας όχι τόσο αυστηρά, ένα συναρτητής είναι φιλτραρισμένος αν για κάθε $E \in \mathcal{E}$ η κατηγορία E/F είναι συν-φιλτραρισμένη αναφορικά με μία επιμορφική οικογένεια του E.

Οι συνθήκες για την επιπεδότητα ενός συναρτητή με τιμές στην κατηγορία των συνόλων, μπορούν να γενικευτούν κατάλληλα έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνεται με αυτή τη γενίκευση και ή έννοια του φιλτραρισμένου συναρτητή. Είναι γνωστό από την παράδοση της Θεωρίας Τόπων, ότι οι συνθήκες για την επιπεδότητα μπορούν να τυποποιηθούν ως προτάσεις σε μία κατάλληλη γλώσσα της λογικής, που επιτρέπει τον σχηματισμό άπειρων διαζεύξεων και άρα μπορούν να ερμηνευτούν σε κάθε κατηγορία η οποία είναι εφοδιασμένη με μία τοπολογία Grothendieck, δηλαδή να εκφραστούν αναφορικά με τις καλύπτουσες οικογένειες. Με αυτόν τον τρόπο η έννοια του φιλτραρισμένου συναρτητή δεν είναι τίποτα άλλο παρά η ερμηνεία των συνθηκών της επιπεδότητας αναφορικά με την τοπολογία των επιμορφικών καλυμμάτων με την οποία είναι εφοδιασμένος κάθε τόπος. Αλλά και η γενική έννοια της επιπεδότητας για ένα συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ προς μία τυχαία κατηγορία, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι συνθήκες επιπεδότητας αναφορικά με την τετριμμένη τοπολογία της κατηγορίας $\mathcal{B}$.

Από την άλλη πλευρά, ακόμα και όταν ο $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ είναι φιλτραρισμένος, αυτό δεν επαρκεί ώστε ο $Lan_y F$ να διατηρεί πεπερασμένα όρια, όταν η $\mathcal{E}$ δεν είναι τόπος (του Grothendieck). Για παράδειγμα στην αριστερή επέκταση Kan

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{BAlg_f} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "i"'] & & {[\mathbf{BAlg_f}^{op}, \mathbf{Set}]} \arrow[dl, "Lan_y i"] \\
& \mathbf{BAlg} &
\end{tikzcd}$$

όπου i η εμφύτευση των πεπερασμένων αλγεβρών Boole στις άλγεβρες Boole, ο συναρτητής i είναι επίπεδος αναφορικά με οποιαδήποτε τοπολογία στην κατηγορία **BAlg**, αλλά η αριστερή επέκταση Kan δεν διατηρεί πεπερασμένα όρια. Ο λόγος είναι ότι σ΄ ένα τόπο έχουμε συνθήκες ακριβείας (exactness conditions) οι οποίες δεν είναι διαθέσιμες σε κάθε κατηγορία. Έτσι, ερχόμαστε στην θεμελιώδη παρατήρηση του Anders Kock η οποία εστιάζει στο γεγονός ότι η αριστερή επέκταση Kan δίνεται ως ένα συνόριο και ότι στην περίπτωση ενός συναρτητή με τιμές στην κατηγορία των συνόλων, πέραν της ύπαρξης κώνων στην κατηγορία των στοιχείων (επιπεδότητα), το επιπλέον στοιχείο που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την αριστερή ακρίβεια της αριστερής επέκτασης Kan είναι ο τρόπος κατασκευής των συνορίων στα σύνολα (και στους τόπους). Πιο συγκεκριμένα αν $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ είναι ένας συναρτητής που λαμβάνει τιμές στην κατηγορία των συνόλων, τότε το συνόριο αυτού του διαγράμματος είναι ένα πηλικοσύνολο του συν-γινομένου (διαζευγμένη ένωση) $\coprod_{C \in \mathcal{C}} FC$. Περιγραφικά αυτό σημαίνει ότι:

- Κάθε στοιχείο του συνορίου μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα στοιχείο κάποιας συνιστώσας του.

- Αν ένα στοιχείο του συνορίου έχει δύο τέτοιες αναπαραστάσεις, τότε υπάρχει μία συνθήκη συμβατότητας μεταξύ των δύο αυτών αναπαραστάσεων.

Και αυτές οι δύο συνθήκες μπορούν να τυποποιηθούν ως προτάσεις σε μία κατάλληλη τυπική γλώσσα και κατά συνεπεία να εκφραστούν με στοιχειώδης όρους σε μία κατηγορία η οποία είναι εφοδιασμένη με μία τοπολογία Grothendieck. Τέτοια συνόρια καλούνται καθορισμένα (postulated colimits).

Με βάση λοιπόν την έννοια της επιπεδότητας αναφορικά με μία τοπολογία Grothendieck και την έννοια του καθορισμένου συνορίου, κινούμαστε σε αυτή την διατριβή στην κατεύθυνση της εύρεσης ικανών και αναγκαίων συνθηκών για να διατηρεί η αριστερή επέκταση Kan ενός συναρτητή κάποια κλάση πεπερασμένων ορίων. Πίο συγκεκριμένα:

Στο Κεφάλαιο 2, παρουσιάζουμε αρχικά την έννοια της αριστερής επέκτασης Kan και κάποια παραδείγματα που σχετίζονται με την κατηγορία των μονόπλοκων συνόλων. Στην συνέχεια αναφέρουμε τα διάφορα είδη επιπεδότητας συναρτητών με τιμές στα σύνολα και πως αυτά σχετίζονται με την αριστερή ακρίβεια επεκτάσεων Kan. Επιπλέον παρουσιάζουμε την υπάρχουσα γενίκευση της έννοιας της επιπεδότητας για συναρτητές που λαμβάνουν τιμές σε μία τυχαία κατηγορία, και δίνουμε (αντί-)παραδείγματα που δείχνουν ότι η γενικότερη έννοια της επιπεδότητας δεν μπορεί να υπηρετήσει τον ίδιο σκοπό, δηλαδή δεν χαρακτηρίζει με όρους του συναρτητή, την αριστερή ακρίβεια της αριστερής επέκτασης Kan αυτού.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε την "σωστή" γενίκευση της έννοιας (των εννοιών) της επιπεδότητας για ένα συναρτητή που λαμβάνει τιμές σε μία κατηγορία εφοδιασμένη με μία υποκανονική τοπολογία Grothendieck και παρουσιάζουμε αναλυτικά την έννοια του καθορισμένου συνορίου.

Στο Κεφάλαιο 4, όπου παρουσιάζεται το πρώτο μέρος της πρωτότυπης συνεισφοράς αυτής της διατριβής ([30]), διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την διατήρηση πεπερασμένων γινομένων από αριστερές επεκτάσεις Kan. Οι συνθήκες αυτές διατυπώνονται με όρους sifted επιπεδότητας αναφορικά με μία τοπολογία, στην βάση της ανάλυσης του Κεφαλαίου 3. Επιπλέον, αναλύουμε πως κάποια γνωστά αποτελέσματα, συνάγονται από την μέθοδος μας. Ειδικότερα, δείχνουμε πως ένας συναρτητής που λαμβάνει τιμές σ΄ ένα τόπο πληροί τις συνθήκες τις sifted επιπεδότητας στην εσωτερική λογική του τόπου, αν και μόνο αν η αριστερή επέκταση Kan του συναρτητή κατά μήκος της εμφύτεσης Yoneda διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα. Επιπλέον, αναλύουμε πώς τα γνωστά αποτελέσματα διατήρησης γινομένων από την γεωμετρική και την κατηγορική πραγματοποίηση συνάγονται από τη μέθοδό μας, εφοδιάζοντας με κατάλληλες υποκανονικές τοπολογίες τις κατηγορίες των χώρων Kelley και των μικρών κατηγοριών αντίστοιχα.

Στο Κεφάλαιο 5, που συνιστά το δεύτερο μέρος της πρωτότυπης συνεισφοράς αυτής της διατριβής ([31]), διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την διατήρηση πεπερασμένων συνεκτικών ορίων από αριστερές επεκτάσεις Kan και εξειδικεύουμε για την περίπτωση των εξισωτών. Καθοδηγούμενοι από την γενική μέθοδο διερευνούμε συνθήκες που εξασφαλίζουν ότι ο αριστερά προσαρτημένος ενός επιλήσμονα συναρτητή μεταξύ αλγεβρικών κατηγοριών διατηρεί μονομορφισμούς. Δείχνουμε πώς οι συνθήκες αυτές εξειδικεύονται στις κλασικές εκείνες συνθήκες που, δοθέντος ενός ομομορφισμού δακτυλίων $A \to B$, χαρακτηρίζουν την A-άλγεβρα B ως επίπεδο A-module. Τέλος, στο Παράρτημα, διερευνούμε την περίπτωση της διατήρησης εξισωτών από αριστερές επεκτάσεις Kan. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στο Παράρτημα είναι κατά κύριο λόγο πρωτοτυπα και ο λόγος που τά παραθέτουμε ξεχωριστά, είναι η μακροσκελής έκταση των αποδείξεων.

Κεφάλαιο 2

Αριστερές Επεκτάσεις **Kan** και είδη Επίπεδων Συναρτητών

Στο Κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε κατά κύριο λόγο στις αριστερές επεκτάσεις Kan και στα διάφορα είδη επιπεδότητας ενός συναρτητή, όπως αυτά προκύπτουν από την απαίτηση συγκεκριμένες επεκτάσεις Kan (συναρτητών με τιμές στα σύνολα κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda) να διατηρούν κάποιες κλάσεις πεπερασμένων ορίων. Εκτός από την περίπτωση διατήρησης όλων των πεπερασμένων ορίων (επιπεδότητα) έχουμε και τις περιπτώσεις της διατήρησης των πεπερασμένων γινομένων (sifted επιπεδότητα) και της διατήρησης των πεπερασμένα συνεκτικών ορίων (επιπεδότητα ως προς συνεκτικά όρια). Με εξαίρεση κάποια (αντί-) παραδείγματα που δίνονται και κάποια αποτελέσματα που αφορούν την κατηγορία $\mathbf{\Delta}$, τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου μπορούν να βρεθούν (ατόφια) σε διάφορες πηγές από την υπάρχουσα (διεθνή) βιβλιογραφία. Η έκθεση αυτών των αποτελεσμάτων στην διατριβή αυτή, έχει ως σκοπό την πληρότητα του κειμένου, μιας και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην ενότητα 2.3, είναι αυτά τα οποία γενικεύονται στο πρωτότυπο μέρος αυτής της διατριβής. Οι αναφορές που δίνονται δεν είναι απαραίτητα αυτές στις οποίες έχουν πρωτοδημοσιευτεί τα αντίστοιχα αποτελέσματα και δίνονται ως πηγές που μπορεί κανείς να βρει πλήρεις αποδείξεις των αποτελεσμάτων που παραθέτουμε.

2.1 Κάποια αποτελέσματα από την Θεωρία των Κατηγοριών

Στην ενότητα αυτή αναφέρουμε κάποιες έννοιες και κάποια αποτελέσματα από την Θεωρία των Κατηγοριών τα οποία θα χρειαστούμε σε κάποια σημεία της παρούσας διατριβής. Η παράγραφος αυτή δεν έχει κάποια ιδιαίτερη συνοχή και χρησιμοποιείται για να ανακαλούμε ορισμούς και αποτελέσματα που εμφανίζονται στο υπόλοιπο της διατριβής. Τα αποτελέσματα αυτής ενότητας υπάρχουν σχεδόν σε κάθε εγχειρίδιο για την Θεωρία των Κατηγοριών. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα πλέον κλασικά [10], [39].

Εάν $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, τότε το κάθε $B \in \mathcal{B}$ αποτελεί συν-κώνο (με φυσικό τρόπο) του διαγράμματος: $U : F/B \to \mathcal{B}$, με $U(FA \to B) = FA$. Αναφερόμαστε σε αυτό το διάγραμμα ως το **κανονικό διάγραμμα** του B σε σχέση με τον F.

2.1.1 Ορισμός. *([39] Κεφ. X, §6) Ένας συναρτητής $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ καλείται* **πυκνός** *(dense), αν κάθε αντικείμενο $B \in \mathcal{B}$ είναι το συνόριο του κανονικού του διαγράμματος σε σχέση με τον F.*

Αν $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι δύο κατηγορίες και η $\mathcal{A}$ είναι μικρή, τότε με $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ συμβολίζουμε την **συναρτητική κατηγορία** που έχει αντικείμενα συναρτητές από την κατηγορία $\mathcal{A}$ προς την κατηγορία $\mathcal{B}$ και μορφισμούς φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ συναρτητών. Αν τώρα $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι ένας συναρτητής όπου η $\mathcal{A}$ είναι μία μικρή κατηγορία, τότε επάγεται ένας συναρτητής $S_F : \mathcal{B} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ με $S_F(B)$ να είναι ο συναρτητής $\hom_{\mathcal{B}}(F(-), B)$. Ο συναρτητής αυτός φέρει την ονομασία, ο **ιδιάζων** συναρτητής (singular functor) που αντιστοιχεί στον F.

2.1.2 Πρόταση. *Έστω $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής όπου η $\mathcal{A}$ είναι μία μικρή κατηγορία. Ο F είναι πυκνός αν και μόνο αν ο S_F είναι πλήρης και πιστός.*

2.1.3 Ορισμός. *Αν $\mathcal{A}$ είναι μία κατηγορία και $F : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής που λαμβάνει τιμές στην κατηγορία των συνόλων, τότε με $\mathrm{elts}F$ συμβολίζουμε την* **κατηγορία των στοιχείων** *του F. Η κατηγορία αυτή, έχει ως αντικείμενα ζεύγη της μορφής (A, x), όπου $A \in \mathcal{A}$ και $x \in FA$ και ένας μορφισμός από το $(A, x \in FA)$ προς το $(A', x' \in FA')$, είναι ένας μορφισμός $f : A \to A'$ της κατηγορίας $\mathcal{A}$, με την ιδιότητα $Ff(x) = x'$.*

2.1.4 Παρατήρηση. Από το λήμμα του Yoneda έχουμε ότι η κόμμα κατηγορία $y \downarrow F$, είναι ισοδύναμη με την κατηγορία των στοιχείων του F. Ο συναρτητής y, είναι η **εμφύτευση Yoneda** $y : \mathcal{A} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ [1] και η τιμή του σ' ένα αντικείμενο $A \in \mathcal{A}$ είναι ο ανταλλοίωτος **αναπαραστάσιμος συναρτητής** (contravariant representable functor) $\hom_{\mathcal{C}}(-, A)$.

2.1.5 Θεώρημα. *([26]) Αν $\mathcal{A}$ είναι μία μικρή κατηγορία, τότε κάθε ανταλλοίωτος συναρτητής $F : \mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Set}$ (**προδράγμα**[2] της $\mathcal{A}$) είναι (με προσέγγιση φυσικού ισομορφισμού)*

[1] Χρησιμοποιούμε τον όρο εμφύτευση (embedding), γιατί ο συναρτητής y είναι πλήρης και πιστός (full and faithfull) συναρτητής. Μέσω αυτού του συναρτητή τώρα, η κατηγορία $\mathcal{A}$ μπορεί να ειδωθεί ως μία πλήρης υποκατηγορία της κατηγορίας $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$.

[2] Μετάφραση του αγγλικού όρου presheaf (prefaiscaux στα γαλλικά)

το συνόριο ενός διαγράμματος αναπαραστάσιμων. Πιο συγκεκριμένα είναι το συνόριο του διαγράμματος:

$$\mathrm{elts}F \xrightarrow{\pi} \mathcal{A} \xrightarrow{y} [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$$

όπου $\pi(A, x \in FA) = A$.

2.1.6 Ορισμός. *Αν* $\mathcal{C}$ *είναι μία κατηγορία, τότε μία οικογένεια μορφισμών στην* $\mathcal{C}$ *με κοινό συν-πεδίο* $\{f_i : C_i \to C | i \in I\}$, *καλείται* **από κοινού επιμορφική** *(jointly epimorphic) αν ο επαγόμενος μορφισμός* $\coprod\limits_{i \in I} C_i \to C$ *από το συν-γινόμενο των* C_i *στο* C *είναι ένας επιμορφισμός.*

2.1.7 Παρατήρηση. Άμεσα από τον παραπάνω ορισμό έχουμε ότι μία οικογένεια $\{f_i : C_i \to C | i \in I\}$ είναι επιμορφική αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι μορφισμών στην $\mathcal{C}$ με την ιδιότητα $u \circ f_i = v \circ f_i$ για κάθε $i \in I$, έχουμε ότι $u = v$. Επιπλέον αν ένας τουλάχιστον απο τους μορφισμούς της οικογένειας είναι επιμορφισμός, τότε η οικογένεια είναι επιμορφική.

2.1.8 Ορισμός. *Ένας μορφισμός* $f : C \to D$ *σε μία κατηγορία* $\mathcal{C}$ *καλείται* **διασπώμενος** *(split) αν έχει δεξιά αντίστροφο, δηλαδή υπάρχει ένας μορφισμός* $g : D \to C$ *στην* $\mathcal{C}$ *τέτοιος ώστε* $f \cdot g = id_D$.

2.1.9 Παρατήρηση. Εύκολα προκύπτει ότι κάθε διασπώμενος μορφισμός είναι επιμορφισμός και ότι αν ένας μορφισμός είναι διασπώμενος και επιπλέον είναι και μονομορφισμός τότε είναι ισομορφισμός.

2.1.10 Πρόταση. *Έστω* $f : X \to Y$ *ένας μορφισμός σε μία κατηγόρια* $\mathcal{C}$ *με την ιδιότητα ότι για κάθε μορφισμό* $g : Z \to Y$ *υπάρχει ένας μορφισμός* $g' : Z \to X$ *τέτοιος ώστε* $f \cdot g' = g$. *Τότε ο* f *είναι διασπώμενος.*

Η απόδειξη είναι άμεση αν για g θεωρήσουμε τον ταυτοτικό μορφισμό του Y.

2.1.11 Ορισμός. *Έστω* $\mathcal{C}$ *μία κατηγορία με πεπερασμένα όρια και αρχικό αντικείμενο και* $(C_i)_{i \in I}$ *μία οικογένεια αντικειμένων της* $\mathcal{C}$ *τέτοια ώστε να υπάρχει το συν-γινόμενο* $\coprod\limits_{i \in I} C_i$.

1. *Θα λέμε ότι το συν-γινόμενο* $\coprod\limits_{i \in I} C_i$ *είναι* **διαζευγμένο** *(disjoint) αν*

   - *Οι κανονικοί μορφισμοί* $C_i \to \coprod\limits_{i \in I} C_i$ *προς το συν-γινόμενο είναι μονομορφισμοί.*

- *Για κάθε δύο αντικείμενα C_i, C_j το παρακάτω διάγραμμα είναι διάγραμμα εφέλκυσης (pullback)*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & C_i \arrow[d] \\ C_j \arrow[r] & \coprod_{i\in I} C_i \end{tikzcd}$$

2. *Θα λέμε ότι το συν-γινόμενο $\coprod_{i\in I} C_i = L$ είναι* **καθολικό** *(universal) αν για κάθε μορφισμό $f : X \to \coprod_{i\in I} C_i$ ισχύει ότι: $\coprod_{i\in I}(C_i \times_L X) = X$.*

2.1.12 Πρόταση. *([17], §4, Άσκηση 3) Έστω $\mathcal{C}$ είναι μία πεπερασμένα πλήρης κατηγορία, με συν-γινόμενα τα οποία είναι καθολικά. Αν για κάθε $i \in I$, $E_i \to X_i \rightrightarrows Y$ είναι διάγραμμα εξισωτή στην $\mathcal{C}$, τότε και το επαγόμενο διάγραμμα $\coprod_i E_i \to \coprod_i X_i \rightrightarrows Y$ είναι διάγραμμα εξισωτή στην $\mathcal{C}$.*

2.1.13 Ορισμός. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **συνεκτική** *, αν είναι μη κενή και για οποιαδήποτε δύο αντικείμενα C, C' στην $\mathcal{C}$ υπάρχει ένα πεπερασμένο* **ζιγκ-ζαγκ** *που τα συνδέει.*

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & C_n \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & \\ C & & \cdot \arrow[r, dotted, no head] & \cdot & & C' \end{tikzcd}$$

2.1.14 Ορισμός. *Αν $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ είναι δύο κατηγορίες και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ είναι ένας συναρτητής, θα λέμε ότι ο F είναι* **τελικός** *(final[3]) αν για κάθε αντικείμενο $D \in \mathcal{D}$ η κόμμα κατηγορία $D \downarrow F$ είναι συνεκτική. Στην περίπτωση που η $\mathcal{C}$ είναι μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{D}$ και ο συναρτητής που εμφυτεύει (embedding) την $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{D}$ είναι τελικός, τότε θα λέμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι μία* **τελική** *υποκατηγορία της $\mathcal{D}$.*

Αναλυτικά ένας συναρτητής είναι τελικός αν:

- Για κάθε αντικείμενο $D \in \mathcal{D}$ υπάρχει ένα αντικείμενο $C_D \in \mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $D \to FC_D$

[3]Σε κάποιες περιπτώσεις στην βιβλιογραφία χρησιμοποιείται ο όρος cofinal για να δηλώσει την ίδια ιδιότητα (π.χ στο [4])

- Αν $h : D \to FC_D$ και $h' : D \to FC'_D$, τότε υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ

$$\begin{tikzcd}
 & C_D^1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & C_D^n \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & \\
C_D & & \cdot \arrow[rr, dotted, no head] & & \cdot & & C'_D
\end{tikzcd}$$

  στην κατηγορία $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $h_1 : D \to FC_D^1$, ..., $h_n : D \to FC_D^n$ στην κατηγορία $\mathcal{D}$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & & & D \arrow[dll, "h_1"] \arrow[drr, "h_n"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] \arrow[ddlll, bend right, "h"'] \arrow[ddrrr, bend left, "h'"] & & & \\
 & FC_D^1 \arrow[dl, "Fd_{1,0}"'] \arrow[dr, "Fd_{1,1}"] & & & & FC_D^n \arrow[dl, "Fd_{n,0}"'] \arrow[dr, "Fd_{n,1}"] & \\
FC_D & & \cdot \arrow[rr, dotted, no head] & & \cdot & & FC'_D
\end{tikzcd}$$

Αν $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ είναι ένα $\mathcal{I}$-διάγραμμα σε μία κατηγορία $\mathcal{C}$ και $G : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ είναι ένας συναρτητής, τότε αν τα συνόρια των διαγραμμάτων F και $F \cdot G$ υπάρχουν, από την καθολική ιδιότητα του συνορίου $\mathrm{colim}(F \cdot G)$ έχουμε ότι επάγεται ένας μορφισμός

$$h : \mathrm{colim}(F \cdot G) \to \mathrm{colim} F$$

Αν με $incl_i^F : F(i) \to \mathrm{colim} F$, συμβολίσουμε τους μορφισμούς προς το συνόριο $\mathrm{colim} F$ και με $incl_j^{F \cdot G} : (F \cdot G)(j) \to \mathrm{colim}(F \cdot G)$, συμβολίσουμε τους μορφισμούς προς το συνόριο $\mathrm{colim}(F \cdot G)$, τότε αν $j \in \mathcal{J}$ και $G(j) = i$, η αντιμεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος δείχνει την καθολική ιδιότητα που χαρακτηρίζει τον μορφισμό h.

$$\begin{tikzcd}
(F \cdot G)(j) \arrow[d, "id"'] \arrow[dr, "incl_j^{F \cdot G}"] & \\
F(i) \arrow[dr, "incl_i^F"'] & \mathrm{colim}(F \cdot G) \arrow[d, dotted, "h"] \\
 & \mathrm{colim} F
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Όταν ο G είναι τελικός συναρτητής έχουμε το παρακάτω πολύ χρήσιμο:

2.1.15 Θεώρημα. *([39], Κεφ. IX, § 3, Θεώρημα 1.) Αν $G : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ είναι ένας τελικός συναρτητής και $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ είναι ένας συναρτητής τέτοιος ώστε να υπάρχει το συνόριο $\mathrm{colim}(F \cdot G)$, τότε θα υπάρχει και το συνόριο $\mathrm{colim}F$ και ο κανονικός μορφισμός $f : \mathrm{colim}(F \cdot G) \to \mathrm{colim}F$ είναι ισομορφισμός.*

2.1.16 Ορισμός. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία με πεπερασμένα γινόμενα. Θα λέμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι μία* **καρτεσιανά κλειστή** *κατηγορία, αν για κάθε $C \in \mathcal{C}$ ο ενδοσυναρτητής $- \times C : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ έχει δεξιά προσαρτημένο.*

2.1.17 Παρατήρηση. Αν η $\mathcal{C}$ είναι μία καρτεσιανά κλειστή κατηγορία και $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ένα διάγραμμα στην $\mathcal{C}$, για το οποίο υπάρχει το συνόριο του στην $\mathcal{C}$, τότε από το γεγονός ότι για κάθε $C \in \mathcal{C}$ ο συναρτητής $- \times C$ διατηρεί συνόρια (ως αριστερά προσαρτημένος), έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία:

$$\mathrm{colim}_i F(i) \times C \cong \mathrm{colim}_i(F(i) \times C)$$

Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία με εφελκύσεις, τότε κάθε μορφισμός $f : A \to B$ της $\mathcal{C}$, επάγει ένα συναρτητή

$$f^* : \mathcal{C}/B \to \mathcal{C}/A$$

$$C \xrightarrow{g} B \qquad \begin{tikzcd} A \times_B C \arrow[r] \arrow[d, "f^*(g)"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Ο συναρτητής f^* καλείται συναρτητής της **αλλαγής βάσης**.

2.1.18 Ορισμός. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία με πεπερασμένα όρια. Θα λέμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι μία* **τοπικά καρτεσιανά κλειστή** *κατηγορία, αν για κάθε μορφισμό $f : A \to B$ της $\mathcal{C}$, ο συναρτητής $f^* : \mathcal{C}/B \to \mathcal{C}/A$ έχει δεξιά προσαρτημένο.*

2.1.19 Παρατήρηση. Σε μία καρτεσιανά κλειστή κατηγορία έχουμε ότι τα συνόρια αντιμετατίθενται με εφελκύσεις. Αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι ο (κάθε) συναρτητής αλλαγής βάσης διατηρεί συνόρια, ως ένας αριστερά προσαρτημένος συναρτητής.

Κλείνοντας αυτή την ενότητα δίνουμε τον ορισμό του στοιχειώδους τόπου. Για τον ορισμό αυτό χρειαζόμαστε την έννοια του ταξινομητή υποαντικειμένων. Όλη η βασική θεωρία γύρω από την Θεωρία Τόπων υπάρχει στα [12], [40].

2.1.20 Ορισμός. *Έστω $\mathcal{E}$, μία κατηγορία με πεπερασμένα όρια. Ένας* **ταξινομητής υποαντικειμένων** *(subobject classifier) της $\mathcal{E}$, είναι ένα αντικείμενο $\Omega \in \mathcal{E}$ εφοδιασμένο με ένα μονομορφισμό $t : \mathbf{1} \to \Omega$, τέτοιο ώστε για κάθε μονομορφισμό $s : S \to A$ στην $\mathcal{E}$ υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\phi_S : A \to \Omega$, τέτοιος ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & \mathbf{1} \arrow[d, "t"] \\ A \arrow[r, "\phi_S"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

είναι ένα διάγραμμα εφέλκυσης.

2.1.21 Ορισμός. *Μία κατηγορία $\mathcal{E}$ καλείται* **στοιχειώδης τόπος** *ή πιο απλά τόπος αν:*

1. *Η $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένα όρια.*

2. *Η $\mathcal{E}$ είναι καρτεσιανά κλειστή.*

3. *Η $\mathcal{E}$ έχει ταξινομητή υποαντικειμένων.*

Παραδείγματα τόπων είναι μεταξύ άλλων, η κατηγορία $\mathbf{Set}$ και κάθε συναρτητική κατηγορία της μορφής $[\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$, όπου $\mathcal{C}$ μία οποιαδήποτε μικρή κατηγορία. Για αυτό το λόγο, αναφερόμαστε σε μία κατηγορία της μορφής $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ ως ο **τόπος των προδραγμάτων** (presheaf topos) της $\mathcal{C}$.

2.2 Αριστερές Επεκτάσεις Kan

Σε αυτή την ενότητα αναφερόμαστε στις αριστερές επεκτάσεις Kan και σε μερικά παραδείγματα αυτών. Επίσης αναφέρουμε και δίνουμε αποδείξεις για κάποιες κατηγορικές ιδιότητες της κατηγορίας $\mathbf{\Delta}$. Κλασική αναφορά για τις επεκτάσεις Kan είναι το [39] Κεφ. X (αν και εκεί παρουσιάζονται αποτελέσματα γύρω από τις δεξιές επεκτάσεις Kan). Επιπλέον για τις αριστερές επεκτάσεις Kan μπορεί κανείς να δει στο [10], Κεφ. 3 ή στο [32], Κεφ. 2. Για την κατηγορία $\mathbf{\Delta}$ παραπέμπουμε στα [19], [42].

Αν $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ είναι δύο συναρτητές, τότε η αριστερή επέκταση Kan του F κατά μήκος του G ορίζεται ως ο καθολικός μορφισμός από τον F (αντικείμενο της συναρτητικής κατηγορίας $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$) στον συναρτητή $- \circ G : [\mathcal{C}, \mathcal{B}] \to [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

2.2.1 Ορισμός. *Αν $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ και $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ είναι δύο συναρτητές, τότε η* **αριστερή επέκταση Kan** *του F κατά μήκος του G (αν υπάρχει) αποτελείται από ένα συναρτητή $K : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ και ένα φυσικό μετασχηματισμό $\theta : F \Rightarrow K \circ G$, έτσι ώστε για κάθε συναρτητή $H : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ και κάθε φυσικό μετασχηματισμό $\eta : F \Rightarrow H \circ G$, υπάρχει ένας μοναδικός φυσικός μετασχηματισμός $\xi : K \to H$ έτσι ώστε να ισχύει $\eta = \xi_G \circ \theta$.*

Η αριστερή επέκταση Kan του F κατά μήκος του G (όταν υπάρχει) θα συμβολίζεται με $\mathrm{Lan}_G F$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{C} \arrow[dl, "\mathrm{Lan}_G F"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Στην περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι μικρή και η $\mathcal{B}$ συν-πλήρης, τότε η αριστερή επέκταση Kan ενός συναρτητή $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ κατά μήκος οποιουδήποτε συναρτητή $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ υπάρχει πάντα και έχει την ακόλουθη περιγραφή:

Στα αντικείμενα της $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Lan}_G F(C) = \mathrm{colim}\{\, G \downarrow C \xrightarrow{\pi} \mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \,\},$$

όπου $\pi(GA \to C) = A$.

Για την δράση του $\mathrm{Lan}_G F$ στους μορφισμούς της $\mathcal{C}$ εργαζόμαστε ως εξής: Έστω $g : C \to C'$ ένας μορφισμός στην κατηγορία $\mathcal{C}$, και θέλουμε να ορίσουμε τον μορφισμό $\mathrm{Lan}_G F(g) : \mathrm{Lan}_G F(C) \to \mathrm{Lan}_G F(C')$ στην κατηγορία $\mathcal{D}$. Η δείκτρια κατηγορία για το συνόριο που μας ορίζει το $\mathrm{Lan}_G F(C)$ είναι η $G \downarrow C$. Μέσω του μορφισμού g επάγεται ο συναρτητής:

$$g \circ - : G \downarrow C \to G \downarrow C',$$

με την προφανή δράση. Κάθε A που το $F(A)$ συμμετέχει στο συνόριο $\mathrm{Lan}_G F(C)$ "βρίσκεται εκεί" λόγω κάποιου μορφισμού $GA \xrightarrow{a} C$ και συμβολίζουμε ένα τέτοιο A ως A_a. Επιπλέον για κάθε τέτοιο $a \in (G \downarrow C)$, έχουμε $g \circ a \in (G \downarrow C')$, και οι ταυτοτικοί μορφισμοί: $F(A_a) \to F(A_{g \circ a})$, επάγουν μορφισμούς προς το συνόριο $\mathrm{Lan}_G F(C')$, οπότε από την καθολική ιδιότητα του συνορίου $\mathrm{Lan}_G F(C)$, θα υπάρχει ένας (μοναδικός) μορφισμός $\mathrm{Lan}_G F(C) \to \mathrm{Lan}_G F(C')$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να αντιμετατίθεται:

$$\begin{tikzcd} F(A_a) \arrow[r, "id"] \arrow[d, "in_a"] & F(A_{g \circ a}) \arrow[d, "in_{g \circ a}"'] \\ \operatorname*{colim}_{a \in G \downarrow C} F(A_a) \arrow[r, dotted, "\mathrm{Lan}_G F(g)"] & \operatorname*{colim}_{b \in G \downarrow C'} F(A_b) \end{tikzcd}$$

2.2.2 Παράδειγμα. Έστω $\mathcal{A}$ μία μικρή κατηγορία, $A \in \mathcal{A}$ και $\hom_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \to$ **Set** ο αντίστοιχος συναλλοίωτος (covariant) αναπαραστάσιμος συναρτητής. Η αριστερή επέκταση Kan του $\hom_{\mathcal{A}}(A, -)$ κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda $y : \mathcal{A} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$, είναι ο συναρτητής **αποτίμηση** στο A: $ev_A : [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$, όπου $ev_A(F) = F(A)$.

2.2.3 Παρατήρηση. Στην περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{C}$, ή ακόμα πιο γενικά, αν ο συναρτητής G (κατα μήκος του οποίου θεωρούμε την αριστερή επέκταση Kan) είναι πλήρης και πιστός, τότε η αριστερή επέκταση Kan είναι όντως μία επέκταση με την έννοια ότι το διάγραμμα 2.2 αντιμετατίθεται, δηλαδή ο συναρτητής F είναι φυσικά ισόμορφος με τον συναρτητή $\mathrm{Lan}_G F \circ G$.

2.2.4 Παρατήρηση. Για την αριστερή επέκταση Kan ενός συναρτητή F κατά μήκος ενός συναρτητή G, εκτός του συμβολισμού $\mathrm{Lan}_G F$ χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $-\otimes_G F$, ο οποίος παραπέμπει στην "hom-tensor προσάρτηση" από την θεωρία των modules. Περισσότερα σε σχέση με αυτή την αναλογία μπορεί κανείς να δει στο [40], Κεφ. VII, §2, ή στο [25]. Επιπλέον, συνήθης είναι η περιγραφή μίας αριστερής επέκτασης Kan ως ένα συν-πέρας (coend), η οποία δίνει καλύτερη 'εποπτεία" του οριακού συν-κώνου, ειδικά σε περιπτώσεις που ο συναρτητής λαμβάνει τιμές σε μία κατηγορία τοπολογικών χώρων, και επιπλέον έχει την γενικότητα που απαιτείται για την γενίκευση της έννοιας της επέκτασης Kan στο πεδίο της εμπλουτισμένης (enriched) Θεωρίας Κατηγοριών. Για μία περιγραφή των επεκτάσεων Kan ως συν-πέρατα, μπορει κανείς να συμβουλευτεί τα [39], [48], [41].

Η θεωρία των επίπεδων συναρτητών καθώς και πληθώρα κατασκευών στην ομοτοπική θεωρία, σχετίζονται με επεκτάσεις Kan κατά μήκος ενός πλήρους και πιστού συναρτητή. Αυτές οι επεκτάσεις Kan, είναι οι επεκτάσεις Kan ενός συναρτητή κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "F"'] & & {[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]} \arrow[dl, "\mathrm{Lan}_y F"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

Θα αναφερθούμε λίγο διεξοδικότερα σε επεκτάσεις Kan αυτής της μορφής.

Αν $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι ένας συναρτητής, όπου $\mathcal{A}$ είναι μία μικρή κατηγορία και $\mathcal{B}$ είναι μία συν-πλήρης κατηγορία, και $y : \mathcal{A} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ η εμφύτευση Yoneda, τότε αν X είναι ένα προδράγμα της $\mathcal{A}$ ($X : \mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Set}$) έχουμε ότι:

$$\mathrm{Lan}_y F(X) = \mathrm{colim}\{\, y \downarrow X \xrightarrow{\pi} \mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \,\} \tag{2.3}$$

Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η εμφύτευση Yoneda είναι πλήρης και πιστός συναρτητής, άρα από την Παρατήρηση 2.2.3 έχουμε ότι

$$\mathrm{Lan}_y F \circ y \cong F$$

2. Ο συναρτητής $\mathrm{Lan}_y F : [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}] \to \mathcal{B}$ **έχει δεξιά προσαρτημένο** τον ιδιάζοντα συναρτητή $S_F : \mathcal{B} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$, με $S_F(B)$ να είναι ο συναρτητής $\hom_{\mathcal{B}}(F(-), B)$. Άρα ο $\mathrm{Lan}_y F$ ως αριστερά προσαρτημένος συναρτητής **διατηρεί συνόρια**.

3. Αν ο συναρτητής $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ πυκνός τότε ο ιδιάζων συναρτητής $S_F : \mathcal{B} \to [\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$ είναι πλήρης και πιστός (βλέπε Πρόταση 2.1.2), και σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι (μπορεί να ειδωθεί ως) μία πλήρης ανακλαστική υποκατηγορία της $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]$, άρα θα ισχύει και ότι: $\mathrm{Lan}_y F \circ S_F \cong \mathbf{1}_{[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]}$[4] (για δεξιές επεκτάσεις Kan, βλέπε [39] Κεφ. IX, Πρόταση 1).

4. Αν $G : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ είναι ένας συναρτητής, τότε (βλέπε [34], §3) έχουμε ότι:

$$\mathrm{Lan}_G F = \mathrm{Lan}_y F \circ S_G$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{C} \arrow[r, "S_G"] \arrow[d, "\mathrm{Lan}_G F"] & {[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]} \arrow[dl, "\mathrm{Lan}_y F"] \\
& \mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

Ο συναρτητής S_G διατηρεί όρια (όποια όρια υπάρχουν στην $\mathcal{C}$), άρα για να ελέγξουμε αν ο συναρτητής $\mathrm{Lan}_G F$ διατηρεί όρια, αρκεί να ελέγξουμε αν ο συναρτητής $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί όρια.

Αναφέρουμε σε αυτό το σημείο δύο κλασικές κατασκευές, την κατηγορική και την γεωμετρική πραγματοποίηση μονόπλοκων συνόλων (simplicial sets), "στιγμιότυπα" της προσάρτησης $\mathrm{Lan}_y F \dashv S_F$. Περισσότερα τέτοια παραδείγματα μπορεί κανείς να δει στο [48]. Για το δεξιά προσαρτημένο της κατηγορικής πραγματοποίησης (τον συναρτητή νεύρο) υπάρχει μία "διαφορετική" ανάλυση στο [38].

[4]Ο ισομορφισμός αυτός ισχύει γιατί η συν-μονάδα της προσάρτησης είναι ισομορφισμός (βλέπε [39], Κεφ.4, §3, Θεώρημα 1).

Με $\mathbf{\Delta}$ συμβολίζουμε την κατηγορία με αντικείμενα, όλους τους πεπερασμένους διατακτικούς αριθμούς:

$$[n] = \{0 < 1 < 2 < ... < n\}$$

και μορφισμούς μεταξύ τους, συναρτήσεις που διατηρούν την διάταξη. Η κατηγορία $[\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Set}]$, των προδραγμάτων στην $\mathbf{\Delta}$, καλείται η κατηγορία των **μονόπλοκων συνόλων** (simplicial sets) και συμβολίζεται και ως $\mathbf{SSet}$. Επιπλέον, αν $X : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Set}$, τότε τα στοιχεία του συνόλου $X([n]) =: X_n$ καλούνται n-**σύμπλοκα** (n-simplexes) του X.

2.2.5 Παράδειγμα. Η κατηγορική πραγματοποίηση και ο συναρτητής νεύρο.

Θεωρούμε τον συναρτητή

$$U : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Cat}$$

από την κατηγορία $\mathbf{\Delta}$ στην κατηγορία των μικρών κατηγοριών, ο οποίος αντιστοιχίζει τον διατακτικό $[n]$ (ολικά διατεταγμενό σύνολο) στην κατηγορία που του αντιστοιχεί. Θα συμβολίζουμε $U([n]) = \underline{n}$.

Συμβολίζουμε $\tau_1 : \mathbf{SSet} \to \mathbf{Cat}$ την αριστερή επέκταση Kan του U κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda. Ο συναρτητής τ_1 καλείται ο συναρτητής **της κατηγορικής πραγματοποίησης** (categorical realization functor) ή πιο απλά η κατηγορική πραγματοποίηση. Αν X είναι ένα μονόπλοκο σύνολο, τότε η κατηγορία $\tau_1(X)$ καλείται η **θεμελιώδης κατηγορία** (fundamental category) του X. Ο δεξιά προσαρτημένος του τ_1 (S_U), συμβολίζεται $N : \mathbf{Cat} \to \mathbf{SSet}$ και καλείται ο **συναρτητής νεύρο** (nerve functor) και η τιμή του σε μία μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$, **νεύρο της κατηγορίας**.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathbf{SSet} \arrow[dl, shift left, "\mathrm{Lan}_y U=\tau_1"] \\ & \mathbf{Cat} \arrow[ur, shift left, "N"] & \end{tikzcd}$$

Ο συναρτητής νεύρο έχει την εξής δράση:

Αν $\mathcal{C}$ είναι μία μικρή κατηγορία, τότε $N\mathcal{C} : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Set}$ είναι ο συναρτητής με $N\mathcal{C}([n])(= (N\mathcal{C})_n) = \hom_{\mathbf{Cat}}(\underline{n}, \mathcal{C})$ για $[n] \in \mathbf{\Delta}$. Ένα n-σύμπλοκο $x \in (N\mathcal{C})_n$ μπορεί να παρασταθεί και ως μία αλυσίδα από n μορφισμούς στην $\mathcal{C}$

$$x(0) \xrightarrow{x_1} x(1) \xrightarrow{x_2} x(2) \xrightarrow{x_3} \cdots \xrightarrow{x_{n-1}} x(n-1) \xrightarrow{x_n} x(n)$$

και αν $f : [m] \to [n]$ είναι ένας μορφισμός στην $\mathbf{\Delta}$, τότε: $Nf : \hom_{\mathbf{Cat}}(\underline{n}, \mathcal{C}) \to \hom_{\mathbf{Cat}}(\underline{m}, \mathcal{C})$ είναι η συνάρτηση με $Nf(x) = x \circ f$.

Τα 0-σύμπλοκα του νεύρου μίας κατηγορίας αποτελούν το σύνολο (αφού η $\mathcal{C}$ είναι μικρή κατηγορία) των αντικείμενων της $\mathcal{C}$, τα 1-σύμπλοκα αποτελούν το σύνολο των μορφισμών της $\mathcal{C}$, τα 2-σύμπλοκα αποτελούν το σύνολο των συνθέσιμων μορφισμών της $\mathcal{C}$, κ.ο.κ. Άρα το νεύρο μίας (μικρής) κατηγορίας περιέχει τις βασικές πληροφορίες για την κατηγορία.

Για την δράση του N στους μορφισμούς της $\mathbf{Cat}$, έχουμε ότι αν $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ είναι ένας συναρτητής μεταξύ μικρών κατηγοριών, τότε $NF : N\mathcal{C} \to N\mathcal{C}'$ είναι ο φυσικός μετασχηματισμός που ορίζεται στο (βήμα) $[n]$ ως:

$$(NF)_n(x) = F \circ x, \text{ αν } x \in (N\mathcal{C})_n.$$

Επιπλέον έχουμε ότι $y([n]) = N(\underline{n})$ για κάθε n, δηλαδή τα αναπαραστάσιμα μόνοπλοκα σύνολα είναι στην εικόνα του συναρτητή νεύρου. Για το ποια ακριβώς μονόπλοκα σύνολα βρίσκονται στην εικόνα του συναρτητή νεύρου μπορεί κανείς να δει στο [38].

Ένα βασικό Θεώρημα για τον συναρτητή νεύρο είναι το ακόλουθο:

2.2.6 Θεώρημα. *Ο συναρτητής νεύρο* $N\mathcal{C} : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Set}$ *είναι πλήρης και πιστός συναρτητής.*

Μία απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος μπορεί κανείς να δει στο [24], Πρόταση B.013. Από το Θεώρημα αυτό έχουμε ότι η κατηγορία όλων των μικρών κατηγοριών $\mathbf{Cat}$ είναι πλήρης ανακλαστική υποκατηγορία της κατηγορίας $\mathbf{SSet}$ των μονόπλοκων συνόλων, άρα για κάθε μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$ έχουμε ότι: $\tau_1(N(\mathcal{C})) \cong \mathcal{C}$.

Ο συναρτητής $U : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Cat}$ είναι πλήρης και πιστός συναρτητής (και υπό μία έννοια θα λέγαμε ότι δρα ταυτοτικά). Άρα η $\mathbf{\Delta}$ μπορεί να ειδωθεί ως μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathbf{Cat}$. Συνδυάζοντας λοιπόν το παραπάνω Θεώρημα με την Πρόταση 2.1.2 έχουμε:

2.2.7 Πόρισμα. *Η* $\mathbf{\Delta}$ *είναι πυκνή υποκατηγορία της* $\mathbf{Cat}$.

Αναφέρουμε εδώ ένα κλασικό αποτέλεσμα για τον συναρτητή νεύρο ([19]), το οποίο θα προκύψει και ως αποτέλεσμα της δικής μας ανάλυσης στο Κεφάλαιο 4.

2.2.8 Θεώρημα. [5] *Ο συναρτητής* $\tau_1 : \mathbf{SSet} \to \mathbf{Cat}$ *διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα.*

2.2.9 Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι ο τ_1 διατηρεί γινόμενα αναπαραστάσιμων.

$$\begin{aligned} \tau_1(y([m]) \times y([n])) &\cong \tau_1(N(\underline{m}) \times N(\underline{n})) \\ &\cong {}^{(1)}\tau_1(N(\underline{m} \times \underline{n})) \\ &\cong \underline{m} \times \underline{n} \\ &\cong \tau_1(y([m])) \times \tau_1(y([n])) \end{aligned}$$

[5] Αυτό το Θεώρημα, όπως και το Θεώρημα 2.2.6, υπάρχουν στο κλασικό βιβλίο των Gabriel και Zisman [19], και εκεί μάλλον καταγράφονται και αποδεικνύονται πρώτη φορά αυτά τα αποτελέσματα.

όπου η ισοδυναμία (1) ισχύει γιατί ο N ως δεξιά προσαρτημένος συναρτητής διατηρεί γινόμενα.

Τώρα, έστω $X : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Set}$ και $X \cong \operatorname*{colim}_{y([n]) \to X} y([n])$ η αναπαράσταση του X ως συνόριο αναπαραστάσιμων (βλέπε Θεώρημα 2.1.5). Αν τώρα $[m] \in \mathbf{\Delta}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\tau_1(X \times y([m])) &\cong \tau_1(\operatorname*{colim}_{y([n]) \to X} y([n]) \times y([m])) \\
&\cong \tau_1(\operatorname*{colim}_{y([n]) \to X} (y([n]) \times y([m]))) \ (1) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{y([n]) \to X} (\tau_1(y([n]) \times y([m]))) \ (2) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{y([n]) \to X} (\tau_1(y([n])) \times \tau_1(y([m]))) \ (3) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{y([n]) \to X} (\tau_1(y([n]))) \times \tau_1(y([m])) \ (4) \\
&\cong \tau_1(\operatorname*{colim}_{y([n]) \to X} y([n])) \times \tau_1(y([m])) \ (5) \\
&\cong \tau_1(X) \times \tau_1(y([m]))
\end{aligned}$$

όπου η ισοδυναμία (1) ισχύει γιατί η κατηγορία $[\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Set}]$ είναι καρτεσιανά κλειστή, οι ισοδυναμίες (2) και (5) ισχύουν γιατί ο συναρτητής τ_1 διατηρεί συνόρια ως αριστερά προσαρτημένος συναρτητής, η ισοδυναμία (3) ισχύει γιατί όπως δείξαμε ο συναρτητής τ_1 διατηρεί γινόμενα αναπαραστάσιμων και η ισοδυναμία (4) ισχύει γιατί η κατηγορία $\mathbf{Cat}$ είναι καρτεσιανά κλειστή.

Αν τώρα $Y : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Set}$ ένα άλλο μονόπλοκο σύνολο και έστω $Y \cong \operatorname*{colim}_{y([m]) \to Y} y([m])$, τότε από την παραπάνω ισοδυναμία και για τους ίδιους λόγους με πριν έχουμε:

$$\begin{aligned}
\tau_1(X \times Y) &\cong \tau_1(X \times \operatorname*{colim}_{y([m]) \to Y} y([m])) \\
&\cong \tau_1(\operatorname*{colim}_{y([m]) \to Y} (X \times y([m]))) \ (1) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{y([m]) \to Y} (\tau_1(X \times y([m]))) \ (2) \\
&\cong \operatorname*{colim}_{y([m]) \to Y} (\tau_1(X) \times \tau_1(y([m]))) \\
&\cong (\tau_1(X)) \times \operatorname*{colim}_{y([m]) \to Y} (\tau_1(y([m]))) \ (4) \\
&\cong \tau_1(X) \times \tau_1(\operatorname*{colim}_{y([m]) \to Y} y([m])) \ (5) \\
&\cong \tau_1(X) \times \tau_1(Y)
\end{aligned}$$

2.2.10 Παράδειγμα. Η γεωμετρική πραγματοποίηση και ο συναρτητής του ολικά ιδιάζοντος μόνοπλοκου συνολου. Αν με **Top** συμβολίσουμε την κατηγορία των τοπολογικών χώρων, θεωρούμε τον συναρτητή $\Delta : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Top}$ που αντιστοιχεί τον διατακτικό $[n]$ στο τοπολογικό n-μονόπλοκο (standard topological n-simplex)

$$\Delta([n]) = \Delta_n = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_i \geq 0, \sum_{i=0}^{n} x_i = 1\}$$

Συμβολίζουμε $|\cdot| : \mathbf{SSet} \to \mathbf{Top}$ την αριστερή επέκταση Kan του Δ κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda. Ο συναρτητής $|\cdot|$ καλείται ο συναρτητής **της γεωμετρικής πραγματοποίησης** (geometrical realization functor) ή πιο απλά η γεωμετρική πραγματοποίηση.

Έστω τώρα X ένα μονόπλοκο σύνολο, τότε έχουμε ότι (βλέπε ισότητα 2.3)

$$|X| = \mathrm{colim}\{\ y \downarrow X \xrightarrow{\pi} \mathbf{\Delta} \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Top}\ \} = \operatorname*{colim}_{x:\Delta^n \to X} \Delta_n \tag{2.4}$$

όπου με Δ^n συμβολίζουμε τον αναπαραστάσιμο $\hom_{\mathbf{\Delta}}(-, n)$.

Το συνόριο αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι ένα συνόριο στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων και είναι ο συνεξισωτής του παρακάτω διαγράμματος:

$$\delta, \tau : \coprod_{(f,x)\in(\mathrm{eltX})_1} \Delta(\vartheta_0 f) \rightrightarrows \coprod_{([n],x)\in(\mathrm{eltX})_0} \Delta([n])$$

και έχουμε

$$\coprod_{(f,x)\in(\mathrm{elt}X)_1} \Delta(\vartheta_0 f) = \coprod_{f:[n]\to[m]} \coprod_{x\in X([m])} \Delta([n]) = \coprod_{f:[n]\to[m]} X([m]) \times \Delta([n])$$

και

$$\coprod_{(n,x)\in(\mathrm{elt}X)_0} \Delta([n]) = \coprod_{[n]\in\Delta_0} \coprod_{x\in X([n])} \Delta([n]) = \coprod_{[n]\in\Delta_0} X([n]) \times \Delta([n]) := \overline{X}$$

και αν $x \in X([m])$, $a \in \Delta([n])$ και $f : [n] \to [m]$, έχουμε:

$$\delta(x, a) = (Xf(x), a)$$
$$\tau(x, a) = (x, \Delta f(a))$$

Το συνόριο ενός διαγράμματος στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων είναι ένας τοπολογικός χώρος που έχει ως υποκείμενο σύνολο το συνόριο του ίδιου διαγράμματος στην κατηγορία των συνόλων (βλέπε [39], Κεφ.6, §9 ή [21], §2.4). Άρα η γεωμετρική πραγματοποίηση ενός μονόπλοκου συνόλου X είναι ένας χώρος πηλίκο του $\overline{X}$. (Για μία περιγραφή της σχέσης ισοδυναμίας που περιγράφει το χώρο πηλίκο βλέπε [45]).

Ο δεξιά προσαρτημένος συναρτητής της γεωμετρικής πραγματοποίησης $|\cdot|$ (S_Δ) συμβολίζεται $S : \mathbf{Top} \to \mathbf{SSet}$ και καλείται ο **ο συναρτητής του ολικά ιδιάζοντος**

μονόπλοκου συνόλου (total singular complex functor) και αν Y είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε $SY : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathbf{Set}$ είναι το μόνοπλοκο σύνολο με $SY([n]) = (SY)_n = \hom_{\mathbf{Top}}(\Delta([n]), Y)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbf{SSet} \arrow[dl, shift left, "\mathrm{Lan}_y\Delta = |\cdot|"] \\
& \mathbf{Top} \arrow[ur, shift left, "S"] &
\end{tikzcd}$$

2.2.11 Παρατήρηση. Από την αντιμεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος έχουμε ότι η γεωμετρική πραγματοποίηση του αναπαραστάσιμου $\hom_{\mathbf{\Delta}}(-, [n]) = \Delta^n$, είναι το τοπολογικό n-μονόπλοκο Δ_n, το οποίο είναι συμπαγής χώρος Hausdorff.

Με **Ke** συμβολίζουμε την κατηγορία με αντικείμενα τους **χώρους Kelley** και μορφισμούς συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ τους. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται χώρος Kelley, αν είναι Hausdorff και αν για οποιοδήποτε υποσύνολο A του X, που τέμνει κάθε συμπαγές υποσύνολο του X σε ένα κλειστό σύνολο είναι και το ίδιο κλειστό σύνολο ([19], I, 1.5.3), δηλαδή:

$A \cap C=$ κλειστό για κάθε C συμπαγές, τότε A κλειστό.

Η κατηγορία **Ke** είναι μία πλήρης και συνανακλαστική (coreflective) υποκατηγορία της κατηγορίας **Hauss**, η οποία έχει αντικείμενα του χώρους Hausdorff και μορφισμούς συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ τους (βλέπε [39], Κεφ. VII, §8, Πρόταση 1). Επιπλέον η κατηγορία **Ke** είναι μία καρτεσιανά κλειστή κατηγορία [6] (βλέπε [39], Κεφ. VII, §8, Θεώρημα 3). Παραδείγματα τέτοιων χώρων είναι οι μετρικοποιήσιμοι χώροι και οι τοπικά συμπαγείς χώροι Hausdorff.

2.2.12 Πρόταση. *([19], III, 3.1) Η γεωμετρική πραγματοποίηση, λαμβάνει τιμές στην κατηγορία των χώρων* **Kelley**.

Μία απόδειξη της παρακάτω Πρότασης που θα είχε πιο κατηγορική φύση, ήταν το εφαλτήριο για την δουλειά που παρουσιάζεται στην παρούσα διδακτορική διατριβή ([28]). Μία πλήρης απόδειξη αυτής της Πρότασης μπορεί να βρεθεί στο [21] §3.1.

2.2.13 Θεώρημα. *Η γεωμετρική πραγματοποίηση* $|\cdot| : \mathbf{SSet} \to \mathbf{Ke}$, *διατηρεί πεπερασμένα όρια.*

[6] Η κατηγορία των χώρων Kelley, σ' αντίθεση με την κατηγορία **Top** όλων των τοπολογικών χώρων είναι μία καρτεσιανά κλειστή κατηγορία. Αυτό το γεγονός μαζί με κάποιες άλλες ιδιότητες της κατηγορίας αυτής (για παράδειγμα σε κατηγορικό επίπεδο, το γεγονός ότι είναι πλήρης και συν-πλήρης και σε τοπολογικό επίπεδο, το γεγονός ότι τα CW-complexes είναι αντικείμενα αυτής της κατηγορίας), κατατάσσουν την κατηγορία **Ke** στις βολικές (όπως έχει επικρατήσει να λέγονται) κατηγορίες τοπολογικών χώρων ([14], [51]).

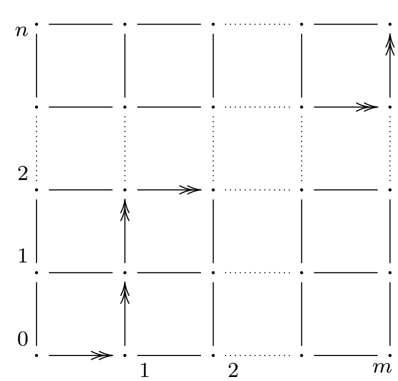
2.2.14 Παρατήρηση. Ο συναρτητής της γεωμετρικής πραγματοποίησης αν ειδωθεί ως συναρτητής στην κατηγορία των τοπολογικών χώρων δεν διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα.

Το παραπάνω παράδειγμα (της γεωμετρικής πραγματοποίησης) είναι από τα πρώτα παραδείγματα προσάρτησης και ίσως το κινητήριο για την ανάπτυξη της θεωρίας των προσαρτημένων συναρτητών ([25]), και επιπλέον έχει μεγάλη συμβολή στην ομοτοπική θεωρία λόγω της αριστερής ακρίβειας της γεωμετρικής πραγματοποίησης ([46], [21]).

Αναφέρουμε εδώ κάποιες ιδιότητες της κατηγορίας $\mathbf{\Delta}$ τις οποίες θα χρειαστούμε στο Κεφάλαιο 4, για να δούμε τα Θεωρήματα 2.2.8 και 2.2.13 υπό το πρίσμα της δικής μας ανάλυσης. Η πρώτη ιδιότητα (η οποία "μετριάζει" την έλλειψη γινομένων στην $\mathbf{\Delta}$) που αναφέρουμε στην παρακάτω Πρόταση αποτελεί εξειδίκευση του [19], 5.5, υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.4 [29].

2.2.15 Πρόταση. *Για κάθε δύο αντικείμενα $[m]$, $[n]$ της $\mathbf{\Delta}$, υπάρχει μία πεπερασμένη οικογένεια κώνων για το διακριτό διάγραμμα που αποτελείται από τα $[m]$, $[n]$, με τον κάθε κώνο της οικογένειας αυτής να έχει κορυφή τον διατακτικό $[m+n]$ και την ιδιότητα ότι κάθε άλλος κώνος παραγοντοποιείται από ένα κώνο αυτής της οικογένειας.*

2.2.16 Απόδειξη. Αν $[m]$, $[n]$ στην $\mathbf{\Delta}$ θεωρούμε την οικογένεια των ζευγαριών από συναρτήσεις της μορφής: $\alpha\colon [m+n] \to [m]$, $\beta\colon [m+n] \to [n]$, που διατηρούν την διάταξη και είναι επί. Κάθε τέτοιο ζευγάρι αντιστοιχεί σ' ένα μέγιστου μήκους μονοπάτι στο $[m]\times[n]$ πλαίσιο στο επίπεδο, όπου "ή κίνηση επιτρέπεται" μόνο προς τα πάνω και προς τα δεξιά, αφού οι συναρτήσεις α και β διατηρούν την διάταξη:



Έτσι, το μονοπάτι που είναι σχεδιασμένο παραπάνω, αντιστοιχεί στις συναρτήσεις α και β με $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = \alpha(2) = \alpha(3) = 1$, ..., $\alpha(m+n-2) = m-1$, $\alpha(m+n-1) = \alpha(m+n) = m$ και $\beta(0) = \beta(1) = 0$, $\beta(2) = 1$, $\beta(3) = 2$, ..., $\beta(m+n-2) = \beta(m+n-1) = n-1$, $\beta(m+n) = n$ (η α προβάλει στον οριζόντιο άξονα και η β στον κάθετο). Τέτοιοι κώνοι είναι $\binom{m+n}{n}$ το πλήθος.

Αν τώρα $\gamma\colon [k] \to [m]$, $\delta\colon [k] \to [n]$ ένας άλλος κώνος, τότε υπάρχει ένα σύνολο σημείων $(\gamma(i), \delta(i))$, $i \in [k]$, μέσα στο $[m] \times [n]$-πλαίσιο. Επεκτείνουμε αυτό το σύνολο σημείων σ' ένα μέγιστο μονοπάτι μ' ένα οποιοδήποτε από τους δυνατούς τρόπους. Αυτή η επέκταση καθορίζει ένα κώνο με κορυφή $[m+n]$ (όπως περιγράψαμε από πάνω). Η ζητούμενη παραγοντοποίηση είναι η $\varepsilon\colon [k] \to [m+n]$, όπου:

$$\varepsilon(i) = \text{ ο αριθμός της θέσης του } (\gamma(i), \delta(i)) \text{ μέσα στο μέγιστο μονοπάτι.}$$

Πιο γενικά έχουμε:

2.2.17 Πρόταση. *Για κάθε πεπερασμένο διάγραμμα στην κατηγορία* $\mathbf{\Delta}$ *υπάρχει μία πεπερασμένη οικογένεια κώνων για αυτό το διάγραμμα, με την ιδιότητα ότι κάθε άλλος κώνος για αυτό το διάγραμμα παραγοντοποιείται μέσω ενός κώνου από αυτή την οικογένεια. Επιπλέον, για κάθε πεπερασμένο διάγραμμα* $D\colon \mathcal{D} \to \mathbf{\Delta}$, *το όριο του διαγράμματος από αναπαραστάσιμους* $y \circ D\colon \mathcal{D} \to \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Sset}$ *στα μονόπλοκα σύνολα είναι ισόμορφο μ' ένα πεπερασμένο συνόριο από αναπαραστάσιμους.*

2.2.18 Απόδειξη. Για τον πρώτο ισχυρισμό έχουμε ότι η $\mathbf{\Delta}$ έχει τελικό αντικείμενο και ότι ένα παράλληλο ζεύγος μορφισμών είτε έχει εξισωτή (αν οι μορφισμοί έχουν ένα τουλάχιστον σημείο ταύτισης) είτε (στη περίπτωση που οι μορφισμοί δεν έχουν κανένα σημείο ταύτισης) έχουμε ένα κενό (άρα πεπερασμένο) σύνολο κώνων. Την περίπτωση του διακριτού διαγράμματος την μελετήσαμε στην προηγούμενη Πρόταση. Το συμπέρασμα έπεται από [6], Θεώρημα 2.1. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, το συμπέρασμα έπεται από [29], Θεώρημα 3.5.

2.3 Είδη Επίπεδων Συναρτητών

Στο [39] υπάρχει μία παράγραφος (Κεφ.X, Παρ. 7) με τίτλο: "Όλες οι έννοιες είναι επεκτάσεις Kan" και η παράγραφος αυτή ξεκινάει με την πρόταση:"Η έννοια (notion) των επεκτάσεων Kan συγκεντρώνει όλες τις θεμελιώδεις έννοιες (concepts) της θεωρίας κατηγοριών". Αυτό αιτιολογείται από το γεγονός ότι (όλες οι) βασικές έννοιες της Θεωρίας των Κατηγοριών όπως αυτές του συνορίου και του αριστερά προσαρτημένου ενός συναρτητή είναι ισοδύναμες με την ύπαρξη κάποιων αριστερών επεκτάσεων Kan (οι έννοιες του ορίου και του δεξιά προσαρτημένου ενός συναρτητή είναι ισοδύναμες με την ύπαρξη κάποιων δεξιών επεκτάσεων Kan). Πέρα από την θεμελιώδη σημασία τους, αριστερές επεκτάσεις Kan εμφανίζονται με μεγάλη συχνότητα στην θεωρία κατηγοριών και στην ομοτοπική θεωρία. Σε πολλές από αυτές τις περιπτώσεις μας ενδιαφέρει το κατά πόσο διατηρούν κάποια πεπερασμένα όρια. Στην περίπτωση που έχουμε αριστερές επεκτάσεις Kan συναρτητών με τιμές στην κατηγορία των συνόλων, τότε το πρόβλημα της διατήρησης (κάποιας κλάσης) πεπερασμένων ορίων από την αριστερή επέκταση Kan είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη (κάποιων) κώνων στην κατηγορία των στοιχείων του συναρτητή. Τέτοιοι συναρτητές καλούνται επίπεδοι αν μιλάμε για την ύπαρξη όλων των κώνων ή αν έχουμε ύπαρξη κάποιων κώνων, τότε μιλάμε για επίπεδους συναρτητές προσθέτοντας και ένα επίθετο ανάλογα με το ποιοι κώνοι υπάρχουν.

Σε αυτή την ενότητα κάνουμε μια ανασκόπηση των βασικών αποτελεσμάτων γύρω από τους επίπεδους συναρτητές, τους sifted επίπεδους συναρτητές και τους επίπεδους ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια συναρτητές.

2.3.1 Επίπεδοι Συναρτητές

Σε αυτή την παράγραφο κάνουμε μια ανασκόπηση της βασικής θεωρίας των επίπεδων συναρτητών. Πλήρης περιγραφή αυτών των αποτελεσμάτων υπάρχει στο [10].

2.3.1 Ορισμός. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **φιλτραρισμένη** *(filtered) αν*

1. *Είναι μη κενή.*

2. *Για κάθε δύο αντικείμενα C_1, C_2 στην $\mathcal{C}$ υπάρχει ένα αντικείμενο C_3 και μορφισμοί:*

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[dr, dotted, "f"'] & & C_2 \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & C_3 & \end{tikzcd}$$

3. *Για κάθε παράλληλο ζεύγος μορφισμών $C_2 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} C_1$ στην $\mathcal{C}$, υπάρχει ένα αντικείμενο C_3 και ένας μορφισμός $h : C_1 \to C_3$ στην $\mathcal{C}$, που συνεξισώνει τους f και g.*

$$C_2 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} C_1 \overset{h}{\dashrightarrow} C_3$$

2.3.2 Παρατήρηση. Σε κάποιες περιπτώσεις στην βιβλιογραφία με τον όρο φιλτραρισμένη κατηγορία, εννοείται η δυική έννοια (συν-φιλτραρισμένη κατηγορία) αυτού που ορίστηκε παραπάνω (π.χ στο [40]).

2.3.3 Παρατήρηση. Αν μία κατηγορία $\mathcal{C}$ είναι φιλτραρισμένη, τότε ([40], Κεφ. VII, παρ.6, Λήμμα 1) κάθε πεπερασμένο διάγραμμα στην $\mathcal{C}$ έχει συν-κώνο και επιπλέον αν μία κατηγορία έχει τελικό αντικείμενο τότε είναι φιλτραρισμένη.

2.3.4 Παρατήρηση. Οι φιλτραρισμένες κατηγορίες μπορούν ισοδύναμα να χαρακτηριστούν ως εκείνες οι κατηγορίες $\mathcal{C}$, με την ιδιότητα ότι $\mathcal{C}$-συνόρια αντιμετατίθενται με πεπερασμένα όρια στην **Set** ([10], Κεφ.2, Θεώρημα 2.13.4).

2.3.5 Ορισμός. *Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to$ **Set** καλείται* **επίπεδος** *(flat) αν η δυική της κατηγορίας των στοιχείων του F είναι φιλτραρισμένη.*

Αναλυτικά αυτό σημαίνει ότι:

1. *Υπάρχει ένα τουλάχιστον αντικείμενο C στην $\mathcal{C}$ και ένα στοιχείο $x \in FC$.*

2. *Για κάθε $C_1 \in \mathcal{C}$ και $x_1 \in FC_1$, $C_2 \in \mathcal{C}$ και $x_2 \in FC_2$, υπάρχει $C_3 \in \mathcal{C}$, $x_3 \in FC_3$ και μορφισμοί $f : C_3 \to C_1$, $g : C_3 \to C_2$, έτσι ώστε $Ff(x_3) = x_1$ και $Fg(x_3) = x_2$.*

$$\begin{tikzcd} & (C_3, x_3) \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[dr, dotted, "g"] & \\ (C_1, x_1) & & (C_2, x_2) \end{tikzcd}$$

3. *Για κάθε $C_1 \in \mathcal{C}$ (και $x_1 \in FC_1$), $C_2 \in \mathcal{C}$ και $x_2 \in FC_2$ και μορφισμούς $C_2 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} C_1$ στην $\mathcal{C}$, τέτοιους ώστε $Ff(x_2) = Fg(x_2)(= x_1)$, υπάρχουν $C_3 \in \mathcal{C}$, $x_3 \in FC_3$ και $h : C_3 \to C_2$ έτσι ώστε $f \circ h = g \circ h$ και $Fh(x_3) = x_2$*

$$\begin{tikzcd} (C_3, x_3) \arrow[r, dotted, "h"] & (C_2, x_2) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & (C_1, x_1) \end{tikzcd}$$

2.3.6 Παράδειγμα. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία κατηγορία, και $C \in \mathcal{C}$, θεωρούμε τον συναλλοίωτο (covariant) αναπαραστάσιμο συναρτητή: $\hom_{\mathcal{C}}(C, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Η κατηγορία των στοιχείων αυτού του συναρτητή έχει αρχικό αντικείμενο, το (C, id_C), άρα η δυική της είναι φιλτραρισμένη (παρατήρηση 2.3.3), αρα ο $\hom_{\mathcal{C}}(C, -)$ είναι επίπεδος.

Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής με τιμές στα σύνολα και $\mathrm{Lan}_y F : [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$ η αριστερή επέκταση Kan του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda. 'Εστω $\mathrm{D} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ένα διάγραμμα στην $\mathcal{C}$, όπου $\mathcal{I}$ πεπερασμένη κατηγορία. Το διάγραμμα αυτό μπορεί να έχει ή να μην έχει όριο στην $\mathcal{C}$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει το όριο του διαγράμματος $y \circ \mathrm{D} : \mathcal{I} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ και έχει νόημα να ρωτήσουμε αν ο συναρτητής $\mathrm{Lan}_y F$ (η επέκταση του F) διατηρεί αυτό το όριο.

Ας περιγράψουμε την περίπτωση που έχουμε ένα διακριτό διάγραμμα με δύο αντικείμενα C_1, C_2 στην $\mathcal{C}$ ($\mathcal{I} = \{\circlearrowleft \circlearrowleft\}$). Τότε:

$$\mathrm{Lan}_y F(yC_1 \times yC_2) = \mathrm{colim}\{\ \mathrm{elts}(yC_1 \times yC_2) \xrightarrow{\quad \pi \quad} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}\ \}$$

Η κατηγορία $\mathrm{elts}(yC_1 \times yC_2)$ έχει ως αντικείμενα όλους τους κώνους του διαγράμματος D

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C_1 & & C_2 \end{tikzcd}$$

και μορφισμούς συμβατές απεικονίσεις μεταξύ κώνων. Επιπλέον από την περιγραφή των συνορίων στην **Set** (βλέπε [26], §4) έχουμε ότι το παραπάνω συνόριο ισούται με ένα πηλίκο του συνόλου: $\coprod\limits_{C \in Cone(\mathrm{D})} FC$.

Από την καθολική ιδιότητα του γινομένου $\mathrm{Lan}_y F(yC_1) \times \mathrm{Lan}_y F(yC_2) \cong FC_1 \times FC_2$, έχουμε ότι υπάρχει ένας (κανονικός) μορφισμός

$$\lambda : \mathrm{Lan}_y F(yC_1 \times yC_2) \to FC_1 \times FC_2$$

Η συνάρτηση αυτή δρα ως εξής: αν $x \in FC$ για κάποιο κώνο C, $C_1 \xleftarrow{l_1} C \xrightarrow{l_2} C_2$, τότε $\lambda([x]) = (Fl_1(x), Fl_2(x))$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί το γινόμενο $yC_1 \times yC_2$, αυτό σημαίνει ότι ο παραπάνω μορφισμός είναι ισομορφισμός. Οπότε αν έχουμε $x_1 \in FC_1$, $x_2 \in FC_2$, τότε υπάρχει ένας κώνος C, $C_1 \xleftarrow{l_1} C \xrightarrow{l_2} C_2$ και ένα $x \in FC$, τέτοιο ώστε $Fl_1(x) = x_1, Fl_2(x) = x_2$ Με άλλα λόγια το διακριτό διάγραμμα στην κατηγορία $\mathrm{elts}F$, που αποτελείται από τα (C_1, x_1) και (C_2, x_2), έχει κώνο (τον (C, x)).

Γενικά αν $D : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ είναι ένα διάγραμμα στην $\mathcal{C}$, τότε θα αναφερόμαστε στο διάγραμμα $y \circ D$, ως ένα **$\mathcal{I}$-διάγραμμα αναπαραστάσιμων**. Η ανάλυση που κάναμε πιο πάνω γενικεύεται για κάθε πεπερασμένο διάγραμμα, όπως δηλώνει η παρακάτω Πρόταση [7].

2.3.7 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής με τιμές στα σύνολα και $\mathcal{I}$ μία πεπερασμένη κατηγορία. Αν ο $\mathrm{Lan}_y F : [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$, διατηρεί όρια $\mathcal{I}$-διαγραμμάτων αναπαραστάσιμων, τότε κάθε $\mathcal{I}$-διάγραμμα στην κατηγόρια των στοιχείων του F έχει κώνο.*

Το αντίστροφο του παραπάνω Θεωρήματος δεν ισχύει γενικά. Στο [1] αιτιολογείται αυτό το γεγονός και στο τέλος αυτού του Κεφαλαίου θα κάνουμε μία αναφορά σε αυτό. Στο [44] δίνονται δύο τέτοια (αντί-)παραδείγματα. Ισχύει όμως ότι αν κάθε πεπερασμένο διάγραμμα στην κατηγορία των στοιχείων του F έχει κώνο (δηλαδή ο F είναι επίπεδος), τότε ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί όλα τα πεπερασμένα όρια.

Συνοψίζοντας έχουμε το παρακάτω Θεώρημα ([10], 6.1.3).

[7] Μία απόδειξη αυτής της Πρότασης, μπορεί κανείς να δει στο [37], Λήμμα 4.7.

2.3.8 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο F είναι επίπεδος.*

2. *Η αριστερή επέκταση Kan $\mathrm{Lan}_y F$, του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ είναι αριστερά ακριβής (δηλ. διατηρεί πεπερασμένα όρια).*

Επιπεδότητα και αριστερή ακρίβεια ενός συναρτητή: Το παραπάνω Θεώρημα μας λέει ότι η επιπεδότητα ενός συναρτητή με τιμές στα σύνολα και η αριστερή ακρίβεια της αριστερής επέκτασης Kan του συναρτητή, είναι έννοιες ισοδύναμες. Η επιπεδότητα ενός συναρτητή είναι έννοια στενά συνδεδεμένη και με την αριστερή ακρίβεια του συναρτητή.

2.3.9 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία που έχει όλα τα πεπερασμένα όρια και $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο F είναι επίπεδος.*

2. *Ο F διατηρεί πεπερασμένα όρια.*

Πιο γενικά, αν η $\mathcal{C}$ δεν έχει όλα τα πεπερασμένα όρια έχουμε:

2.3.10 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής. Αν ο F είναι επίπεδος, τότε διατηρεί όλα τα πεπερασμένα όρια που υπάρχουν στην $\mathcal{C}$.*

Η απόδειξη της παραπάνω Πρότασης προκύπτει από το Θεώρημα 2.3.8 σε συνδυασμό με το ότι η εμφύτευση Yoneda διατηρεί πεπερασμένα όρια και ότι ο F είναι φυσικά ισόμορφος με τον $\mathrm{Lan}_y F \circ F$.

Η παραπάνω Πρόταση δεν χαρακτηρίζει (πλήρως) τους επίπεδους συναρτητές[8]. Για παράδειγμα αν

$$\mathcal{C} = \{C_2 \leftarrow C_1 \rightarrow C_3,\ C,\ C'\}$$

και $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ με $FC_1 = FC_2 \times FC_3$ και $FC \neq \emptyset$, $FC' \neq \emptyset$, τότε ο F διατηρεί τα πεπερασμένα όρια που υπάρχουν στην $\mathcal{C}$, αλλά δεν είναι επίπεδος (δεν πληροί την συνθήκη 2 του ορισμού 2.3.5).

Τέλος, η αριστερή ακρίβεια συναρτητών με τιμές στα σύνολα χαρακτηρίζει την αριστερή ακρίβεια συναρτητών με τιμές σε οποιαδήποτε κατηγορία όπως μας πληροφορεί η παρακάτω Πρόταση.

[8] Γι' αυτό το λόγο, είναι λανθασμένη η άποψη ότι ένας συναρτητής είναι επίπεδος αν διατηρεί τα όποια όρια υπάρχουν.

2.3.11 Πρόταση. *Αν $\mathcal{C}, \mathcal{B}$ είναι δύο κατηγορίες που έχουν όλα τα πεπερασμένα όρια και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *F διατηρεί πεπερασμένα όρια.*
2. *Για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ο συναρτητής $\mathcal{B}(B,-) \circ F = \mathcal{B}(B, F(-)) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ διατηρεί πεπερασμένα όρια.*

Από την απόδειξη της παραπάνω Πρότασης (βλέπε [10], Πρόταση 6.1.4) προκύπτει ότι ο συναρτητής F διατηρεί το όριο ενός πεπερασμένου διαγράμματος αν και μόνο αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ο συναρτητής $\mathcal{B}(B, F(-))$ το διατηρεί.

Επίπεδοι συναρτητές γενικά: Έστω $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής. Αν ο συναρτητής λαμβάνει τιμές στην κατηγορία των συνόλων, τότε ένα στοιχείο $x \in FC$, "είναι το ίδιο" με μία συνάρτηση: $\ulcorner x \urcorner : 1 \to FC$ και η κατηγορία των στοιχείων του F είναι ισοδύναμη με την κόμμα κατηγορία $1/F$. Αν ο συναρτητής λαμβάνει τιμές σε μία κατηγορία διαφορετική από αυτή των συνόλων, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τα γενικευμένα στοιχεία του FC, δηλαδή συναρτήσεις $B \to FC$, $B \in \mathcal{B}$. Αυτά είναι αντικείμενα της κατηγορίας B/F που είναι η κατηγορία των στοιχείων του συναρτητή $\mathcal{B}(B, F-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Υπό το πρίσμα και της παραπάνω Πρότασης, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

2.3.12 Ορισμός. *Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ καλείται* **επίπεδος***, αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ο συναρτητής $\mathcal{B}(B, F-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ είναι επίπεδος .*

Αναλυτικότερα έχουμε ότι ο $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ είναι επίπεδος αν για κάθε αντικείμενο $B \in \mathcal{B}$ πληρούνται οι ακόλουθες τρεις συνθήκες:

1. Υπάρχει ένα τουλάχιστον αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $B \to FC$.
2. Για κάθε διάγραμμα στην $\mathcal{B}$ της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "b_1"'] \arrow[dr, "b_2"] & \\ FC_1 & & FC_2 \end{tikzcd}$$

όπου C_1, C_2 αντικείμενα της $\mathcal{C}$, υπάρχουν: ένα αντικείμενο $C_3 \in \mathcal{C}$, ένα ζεύγος μορφισμών

$$\begin{tikzcd} & C_3 \arrow[dl, dotted, "l"'] \arrow[dr, dotted, "r"] & \\ C_1 & & C_2 \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $b_3 : B \to FC_3$ στην $\mathcal{B}$, έτσι ώστε στο παρακάτω διάγραμμα τα δύο πλευρικά τρίγωνα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[ddl, "b_1"'] \arrow[d, dotted, "b_3"] \arrow[ddr, "b_2"] & \\ & FC_3 \arrow[dl, dotted, "Fl"] \arrow[dr, dotted, "Fr"'] & \\ FC_1 & & FC_2 \end{tikzcd}$$

3. Για κάθε αντιμεταθετικό διάγραμμα στην $\mathcal{B}$ της μορφής:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "b_1"] & \\ FC_2 \arrow[r, shift left, "Ff"] \arrow[r, shift right, "Fg"'] & FC_1 \end{tikzcd}$$

όπου $C_2 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} C_1$ ένα παράλληλο ζεύγος μορφισμών στην $\mathcal{C}$, υπάρχει ένας μορφισμός $h : C_3 \to C_2$ στην $\mathcal{C}$ τέτοιος ώστε $f \cdot h = g \cdot h$ και ένας μορφισμός $B \to FC_3$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, dotted, "b_3"'] \arrow[d, "b_1"] & \\ FC_3 \arrow[r, dotted, "Fh"] & FC_2 \arrow[r, shift left, "Ff"] \arrow[r, shift right, "Fg"'] & FC_1 \end{tikzcd}$$

2.3.13 Παρατήρηση. ([50]). Όταν $\mathcal{B}$ είναι η κατηγορία των συνόλων, ο Ορισμός 2.3.12 δεν συμπίπτει με τον Ορισμό 2.3.5. Ένα παράδειγμα είναι το ακόλουθο[9]:
Έστω ότι $\mathcal{C}$ είναι μία μη κενή και μη συν-φιλτραρισμένη κατηγορία π.χ μία διακριτική κατηγορία με δύο αντικείμενα. Αν $C \in \mathcal{C}$ θέτουμε: $F = \hom_{\mathcal{C}}(C, -)$. Ο F είναι επίπεδος ως συναρτητής στην κατηγορία των συνόλων με την έννοια του Ορισμού 2.3.5 (Παράδειγμα 2.3.6). Όμως ο συναρτητής: $\mathbf{Set}(\emptyset, F(-))$ έχει σταθερή τιμή $\mathbf{1}$ (το τελικό αντικείμενο της $\mathbf{Set}$), οπότε η κατηγορία των στοιχείων του είναι η κατηγορία $\mathcal{C}$ η οποία δεν είναι συν-φιλτραρισμένη, άρα ο F δεν είναι επίπεδος (για B το κενό σύνολο) με την έννοια του Ορισμού 2.3.12[10]. Γι΄ αυτό το λόγο στο ([50]) οι συναρτητές που πληρούν τις συνθήκες

[9] Το (αντί-)παράδειγμα αυτό, δόθηκε από τον Tom Leinster ([50])

[10] Αυτό που ισχύει σε κάθε περίπτωση είναι ότι ο Ορισμός 2.3.12 είναι ισχυρότερος του ορισμού 2.3.5.

του Ορισμού 2.3.12 καλούνται representably flat. Δεν χρησιμοποιούμε αυτή την ορολογία (αν και είναι λογικό να χρειάζεται μία τέτοιου είδους τροποποίηση), γιατί με τον τρόπο που παρουσιάζουμε την έννοια της επιπεδότητας στο Κεφάλαιο 3, γίνεται φανερή η διάκριση μεταξύ αυτών των δύο ορισμών (βλέπε Παρατηρήσεις 3.2.5 και 3.2.6).

2.3.14 Παράδειγμα. Έστω $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής που είναι δεξιά προσαρτημένος και έστω $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ο αριστερά προσαρτημένος του. Τότε ο F είναι επίπεδος, αφού αν $B \in \mathcal{B}$, έχουμε ότι: $\mathcal{B}(B, F-) \cong \mathcal{C}(GB, -)$ και από το παράδειγμα 2.3.6 έχουμε ότι ο συναρτητής $\mathcal{C}(GB, -)$ είναι επίπεδος.

2.3.15 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ δύο κατηγορίες που έχουν όλα τα πεπερασμένα όρια και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο F είναι επίπεδος.*

2. *Ο F διατηρεί όλα τα πεπερασμένα όρια.*

Αν $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ είναι δύο μικρές κατηγορίες και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής, τότε με $F_! : [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}] \to [\mathcal{B}^{op}, \mathbf{Set}]$ συμβολίζουμε την αριστερή επέκταση Kan του συναρτητή:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{B} \xrightarrow{\quad y_{\mathcal{B}} \quad} [\mathcal{B}^{op}, \mathbf{Set}]$$

κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda: $y_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$.

2.3.16 Θεώρημα. *([7], Θεώρημα 6.4) Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ δύο μικρές κατηγορίες και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο F είναι επίπεδος.*

2. *Ο $F_!$ διατηρεί πεπερασμένα όρια.*

2.3.17 Παρατήρηση. Ένας επίπεδος συναρτητής με τιμές στην κατηγορία των συνόλων, χαρακτηρίζει και χαρακτηρίζεται από την αριστερή ακρίβεια της αριστερής επέκτασης Kan αυτού, κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda (βλέπε Θεώρημα 2.3.8). Κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην περίπτωση επίπεδων συναρτητών γενικά, όπως δείχνουν τα επόμενα δύο (αντί-)παραδείγματα.[11]

[11] Η αναλογία που υπάρχει με το Θεώρημα 2.3.8 είναι το Θεώρημα 2.3.16.

2.3.18 Παράδειγμα. ([10], Άσκηση 6.7.10) Έστω $\mathcal{C} = \{C_1, C_2\}$ μία διακριτική κατηγορία με δύο αντικείμενα. Ο συναρτητής Yoneda $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, δεν είναι επίπεδος. Πράγματι, αν $X : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ είναι ένας συναρτητής τέτοιος ώστε τα σύνολα XC_1 και XC_2 να είναι μη κενά, τότε η κατηγορία των στοιχείων του συναρτητή $\hom_{[\mathcal{C}^{op},\mathbf{Set}]}(X, y(-))$ είναι κενή. Όμως η αριστερή Kan επέκταση του, είναι ο ταυτοτικός συναρτητής της κατηγορίας $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, ο οποίος προφανώς διατηρεί πεπερασμένα όρια.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "y"'] & & {[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]} \arrow[dl, "\mathrm{Lan}_y y = id_{[\mathcal{C}^{op},\mathbf{Set}]}"] \\
& {[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]} &
\end{tikzcd}$$

Για το επόμενο (αντί-)παράδειγμά μας, θα χρειαστούμε το παρακάτω Θεώρημα ([22] A.4.3.1).

2.3.19 Θεώρημα. *Αν $\mathcal{C}$ είναι μία καρτεσιανά κλειστή κατηγορία και $\mathcal{D}$ μία ανακλαστική υποκατηγορία της $\mathcal{C}$, τότε η ανάκλαση $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα αν και μόνο αν η $\mathcal{D}$ είναι ένα εκθετικό ιδεώδες (exponential ideal), δηλαδή αν $Y \in \mathcal{D}$ τότε $Y^X \in \mathcal{D}$ για κάθε $X \in \mathcal{C}$. Ειδικότερα, αν ο L διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα τότε η κατηγορία $\mathcal{D}$ είναι καρτεσιανά κλειστή.*

2.3.20 Παράδειγμα. Με $i : \mathbf{BAlg_f} \to \mathbf{BAlg}$ συμβολίζουμε την εμφύτευση της κατηγορίας των πεπερασμένων αλγεβρών Boole στην κατηγορία των αλγεβρών Boole. Ο i διατηρεί πεπερασμένα όρια, άρα είναι επίπεδος (Θεώρημα 2.3.15). Επιπλέον είναι πυκνός, άρα (Πρόταση 2.1.2) ο ιδιάζων συναρτητής S_i είναι πλήρης και πιστός. Αν ο $\mathrm{Lan}_y i$ διατηρούσε πεπερασμένα όρια (άρα και πεπερασμένα γινόμενα), από το παραπάνω Θεώρημα θα είχαμε ότι η κατηγορία $\mathbf{BAlg}$ είναι καρτεσιανά κλειστή, κάτι το οποίο δεν είναι αληθές.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{BAlg_f} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "i"'] & & {[\mathbf{BAlg_f}^{op}, \mathbf{Set}]} \arrow[dl, shift left, "\mathrm{Lan}_y i"] \\
& \mathbf{BAlg} \arrow[ur, shift left, "S_i"] &
\end{tikzcd}$$

2.3.2 Sifted Επίπεδοι Συναρτητές

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε στους sifted επίπεδους συναρτητές. Πλήρης περιγραφή των βασικών αποτελεσμάτων που παρουσιάζουμε εδώ υπάρχει στο [3].

2.3.21 Ορισμός. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **sifted** *αν για κάθε δύο αντικείμενα A, B της $\mathcal{C}$ η κατηγορία $(A, B) \downarrow \mathcal{C}$ όλων των (A, B)-cospans είναι συνεκτική. Αναλυτικά αυτό σημαίνει ότι:*

1. *$(A, B) \downarrow \mathcal{C}$ είναι μη κενή, δηλαδή, υπάρχει τουλάχιστον ένα αντικείμενο $X \in \mathcal{C}$ και μορφισμοί $A \to X$ και $B \to X$.*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted] & & B \arrow[dl, dotted] \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

2. *Για κάθε δύο αντικείμενα στην $(A, B) \downarrow \mathcal{C}$*

$$
\begin{tikzcd}
& X & \\
A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & B \arrow[ul, "g_1"'] \arrow[dl, "g_2"] \\
& X' &
\end{tikzcd}
$$

υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ σε αυτή την κατηγορία που τα συνδέει

$$
\begin{tikzcd}
& X & \\
& X_n \arrow[u] \arrow[dd, dash, dotted] & \\
& & \\
A \arrow[uuur, "f_1"] \arrow[uur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[dddr, "f_2"'] & X_3 \arrow[d] & B \arrow[uuul, "g_1"'] \arrow[uul] \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[dddl, "g_2"] \\
& X_2 & \\
& X_1 \arrow[u] \arrow[d] & \\
& X' &
\end{tikzcd}
$$

όπου στο παραπάνω διάγραμμα όλα εσωτερικά τρίγωνα είναι αντιμεταθετικά.

2.3.22 Παρατήρηση. Συνήθως μία sifted κατηγορία ορίζεται ως μία κατηγορία $\mathcal{C}$ με την ιδιότητα ότι $\mathcal{C}$-συνόρια αντιμετατίθενται με πεπερασμένα όρια στην **Set** ([3]). Η επεξεργασία αυτού του Ορισμού δίνει την ισοδυναμία με τις συνθήκες του Ορισμού 2.3.21. Η ισοδυναμία αυτή δεν είναι σε καμία περίπτωση τετριμμένη ([3]) και θα προκύψει και από την δική μας ανάλυση στο Κεφάλαίο 4 ([30] Παρατήρηση 4.6).

2.3.23 Παρατήρηση. Απο την Παρατήρηση 2.3.3 έχουμε ότι αν μία κατηγορία είναι φιλτραρισμένη τότε είναι και sifted. Επιπλέον, μία κατηγορία $\mathcal{C}$ που έχει πεπερασμένα συν-γινόμενα είναι sifted.

2.3.24 Ορισμός. *Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ καλείται* **sifted επίπεδος** *αν η δυική της κατηγορίας των στοιχείων του F είναι sifted. Αναλυτικά αυτό σημαίνει ότι:*

1. *Για κάθε $C_1 \in \mathcal{C}$ και $x_1 \in FC_1$, $C_2 \in \mathcal{C}$ και $x_2 \in FC_2$, υπάρχουν: $C_3 \in \mathcal{C}$, $x_3 \in FC_3$ και μορφισμοί $f : C_3 \to C_1$, $g : C_3 \to C_2$, έτσι ώστε: $Ff(x_3) = x_1$ και $Fg(x_3) = x_2$.*

$$\begin{tikzcd} & (C_3, x_3) \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[dr, dotted, "g"] & \\ (C_1, x_1) & & (C_2, x_2) \end{tikzcd}$$

2. *Για κάθε A, B στην $\mathcal{C}$ και για κάθε X στην $\mathcal{C}$, $x \in FX$, και X' στην $\mathcal{C}$, $x' \in FX'$ και για κάθε διάγραμμα στην $\mathrm{elts}F$ της μορφής*

$$\begin{tikzcd} & (X, x) \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ (A, Ff(x)) & & (B, Fg(x)) \\ & (X', x') \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

δηλαδή ισχύει: $Ff(x) = Ff'(x')$ και $Fg(x) = Fg'(x')$, τότε υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ που συνδέει τα X, X', όπως στο παρακάτω διάγραμμα έτσι ώστε όλα τα εσωτερικά τρίγωνα σε αυτό να αντιματατίθενται και, επιπλέον υπάρχουν στοιχεία $x_1 \in FX_1$, $x_2 \in FX_2, ..., x_n \in FX_n$ έτσι ώστε:

$$Fd_1^0(x_1) = x',\ Fd_1^1(x_1) = x_2,\ ...,\ Fd_n^0(x_n) = x_{n-1},\ Fd_n^1(x_n) = x.$$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dddl, "f"'] \arrow[dddr, "g"] & \\
 & X_n \arrow[u, "d_n^1"] \arrow[ddl, "f_n"'] \arrow[ddr, "g_n"] \arrow[dd, dotted, no head] & \\
 & & \\
A & X_3 \arrow[l, "f_3"'] \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "d_3^0"'] & B \\
 & X_2 \arrow[ul, "f_2"] \arrow[ur, "g_2"'] & \\
 & X_1 \arrow[u, "d_1^1"] \arrow[uul, "f_1"] \arrow[uur, "g_1"'] \arrow[d, "d_1^0"'] & \\
 & X' \arrow[uuul, "f'"] \arrow[uuur, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

2.3.25 Παρατήρηση. Από την αντιμεταθετικότητα του παραπάνω ζιγκ-ζαγκ, έχουμε ότι ισχύουν επιπλέον οι ισότητες:
$Ff'(x') = Ff_1(x_1) = Ff_2(x_2) = ... = Ff_n(x_n) = Ff(x)$ και
$Fg'(x') = Fg_1(x_1) = Fg_2(x_2) = ... = Fg_n(x_n) = Fg(x)$.

Διατυπώνουμε τώρα το ανάλογο του Θεωρήματος 2.3.8 για sifted επίπεδους συναρτητές.

2.3.26 Θεώρημα. *([3], Θεώρημα 2.6) Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο F είναι sifted επίπεδος.*

2. *Η αριστερή επέκταση Kan $\mathrm{Lan}_y F$, του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα.*

2.3.27 Παρατήρηση. Στο παραπάνω Θεώρημα θα μπορούσαμε να προσθέσουμε την εξής ισοδύναμη συνθήκη: Ο F είναι ένα sifted συνόριο από αναπαραστάσιμους, με την έννοια ότι αν παραστήσουμε τον F ως ένα συνόριο αναπαραστάσιμων (Θεώρημα 2.1.5), τότε η δείκτρια κατηγορία που παρμετρικοποιεί αυτό το συνόριο είναι sifted. Η συνθήκη αυτή δίνεται ως ο Ορισμός του sifted επίπεδου συναρτητή στο [3].

Επιπλέον αν η $\mathcal{C}$ έχει πεπερασμένα γινόμενα τότε οι έννοιες διατήρηση πεπερασμένων γινομένων και sifted επιπεδότητας είναι ισοδύναμες όπως δηλώνει η παρακάτω Πρόταση.

2.3.28 Πρόταση. *([3], Πόρισμα 2.7)*
Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία που έχει όλα τα πεπερασμένα όρια και $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Ο F είναι sifted επίπεδος.*

2. *Ο F διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα.*

Πιο γενικά, αν η $\mathcal{C}$ δεν έχει όλα τα πεπερασμένα γινόμενα έχουμε:

2.3.29 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής. Αν ο F είναι sifted επίπεδος, τότε διατηρεί όλα τα πεπερασμένα γινόμενα που υπάρχουν στην $\mathcal{C}$.*

Σε αναλογία τώρα με τον ορισμό 2.3.12 έχουμε τον εξής ορισμό για sifted επίπεδους συναρτητές με τιμές σε μια τυχαία κατηγορία.

2.3.30 Ορισμός. *Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, καλείται* **sifted επίπεδος** *αν για κάθε αντικείμενο $B \in \mathcal{B}$, ο συναρτητής $\mathcal{B}(B, F-) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ είναι sifted επίπεδος.*
Αναλυτικά αυτό σημαίνει ότι:

1. *Για κάθε διάγραμμα στην $\mathcal{B}$ της μορφής:*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "b_1"'] \arrow[dr, "b_2"] & \\ FC_1 & & FC_2 \end{tikzcd}$$

όπου C_1, C_2 αντικείμενα της $\mathcal{C}$, υπάρχουν: ένα αντικείμενο $C_3 \in \mathcal{C}$, ένα ζεύγος μορφισμών

$$\begin{tikzcd} & C_3 \arrow[dl, dotted, "l"'] \arrow[dr, dotted, "r"] & \\ C_1 & & C_2 \end{tikzcd}$$

στην $\mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $b_3 : B \to FC_3$ στην $\mathcal{B}$, έτσι ώστε στο παρακάτω διάγραμμα τα δύο πλευρικά τρίγωνα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[ddl, "b_1"'] \arrow[d, dotted, "b_3"] \arrow[ddr, "b_2"] & \\
& FC_3 \arrow[dl, dotted, "Fl"] \arrow[dr, dotted, "Fr"'] & \\
FC_1 & & FC_2
\end{tikzcd}$$

2. *Για κάθε διάγραμμα στην $\mathcal{B}$ της μορφής:*

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "x'"'] & \\
& FX' \arrow[dl, "Ff'"'] \arrow[dr, "Fg'"] & \\
FC_1 & & FC_2 \\
& FX \arrow[ul, "Ff"] \arrow[ur, "Fg"'] & \\
& B \arrow[u, "x"] &
\end{tikzcd}$$

έτσι ώστε

$$Ff \cdot x = Ff' \cdot x'$$
$$Fg \cdot x = Fg' \cdot x'$$

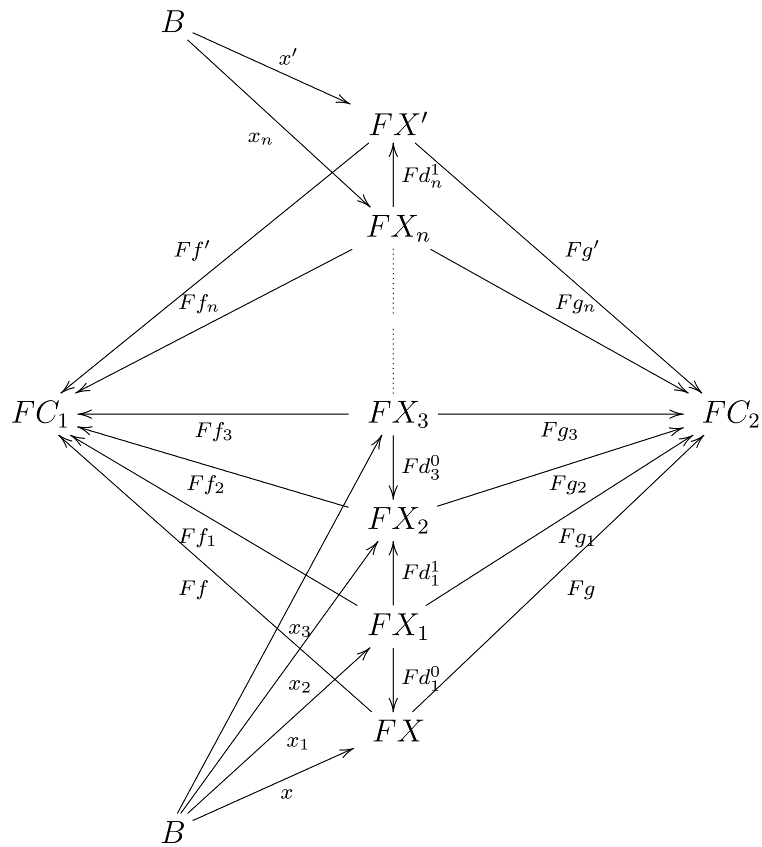
υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ (στην $\mathcal{C} \downarrow (C_1, C_2)$)

$$
\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[ddl, "f'"'] \arrow[ddr, "g'"] & \\
 & X_n \arrow[u, "d_n^1"] \arrow[dl, "f_n"'] \arrow[dr, "g_n"] \arrow[d, dotted, no head] & \\
C_1 & X_3 \arrow[l, "f_3"] \arrow[r, "g_3"'] \arrow[d, "d_3^0"'] & C_2 \\
 & X_2 \arrow[ul, "f_2"] \arrow[ur, "g_2"'] & \\
 & X_1 \arrow[u, "d_1^1"] \arrow[uul, "f_1"] \arrow[uur, "g_1"'] \arrow[d, "d_1^0"'] & \\
 & X \arrow[uuul, "f"] \arrow[uuur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

με όλα τα εσωτερικά τρίγωνα να είναι αντιμεταθετικά, και υπάρχουν και μορφισμοί:

$$
\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dll, "x_1"] \arrow[dl, "x_2"] \arrow[dr, "x_n"] & \\
FX_1 & FX_2 \arrow[rr, dotted, no head] & & FX_n
\end{tikzcd}
$$

έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό



δηλαδή ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

$$Fd_1^0 \cdot x_1 = x,\ Fd_1^1 \cdot x_1 = x_2,\ Fd_3^0 \cdot x_3 = x_2,\ Fd_3^1 \cdot x_3 = x_4,\ ...Fd_n^0 \cdot x_n = x_{n-1},\ Fd_n^1 \cdot x_n = x'$$
$$Ff \cdot x = Ff_1 \cdot x_1 = Ff_2 \cdot x_2 = ... = Ff_n \cdot x_n = Ff' \cdot x'$$
$$Fg \cdot x = Fg_1 \cdot x_1 = Fg_2 \cdot x_2 = ... = Fg_n \cdot x_n = Fg' \cdot x'$$

(και προκύπτουν (βλέπε Παρατήρηση 2.3.25) οι ισότητες:
$Ff \cdot x = Ff_1 \cdot x_1 = Ff_2 \cdot x_2 = ... = Ff_n \cdot x_n = Ff' \cdot x'$ *και*
$Fg \cdot x = Fg_1 \cdot x_1 = Fg_2 \cdot x_2 = ... = Fg_n \cdot x_n = Fg' \cdot x'$*)*

2.3.31 Παρατήρηση. Όπως και στην περίπτωση της επιπεδότητας έτσι και στην περίπτωση της sifted επιπεδότητας ο Ορισμός 2.3.24 δεν συμπίπτει με τον Ορισμό 2.3.30, όταν $\mathcal{B}$ είναι η κατηγορία των συνόλων. Το ίδιο παράδειγμα με αυτό που δώσαμε στην Παρατήρηση 2.3.13 επιβεβαιώνει αυτό τον ισχυρισμό.

2.3.32 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ δύο κατηγορίες που έχουν όλα τα πεπερασμένα γινόμενα και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ ένας συναρτητής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο F είναι sifted επίπεδος.*

2. *Ο F διατηρεί όλα τα πεπερασμένα γινόμενα.*

2.3.33 Παρατήρηση. Ένας sifted επίπεδος συναρτητής με τιμές στην κατηγορία των συνόλων, χαρακτηρίζει και χαρακτηρίζεται από την διατήρηση πεπερασμένων γινομένων από την αριστερή επέκταση Kan αυτού, κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda (Θεώρημα 2.3.26). Κάτι τέτοιο δεν ισχύει στην περίπτωση των sifted επίπεδων συναρτητών γενικά. Το Παράδειγμα 2.3.20 μας δείχνει ότι από την sifted επιπεδότητα[12] δεν συνεπάγεται η διατήρηση πεπερασμένων γινομένων από την αριστερή επέκταση Kan. Θα δώσουμε και ένα (αντί-)παράδειγμα (το οποίο υπήρξε κινητήριο μοχλός για την ανάπτυξη των αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 4), στο οποίο δείχνουμε ότι από την διατήρηση γινομένων από την αριστερή επέκταση Kan, δεν συνεπάγεται η sifted επιπεδότητα.

2.3.34 Παράδειγμα. Έστω
$$U : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Cat}$$
ο συναρτητής του παραδείγματος 2.2.5. Θα δείξουμε ότι συναρτητής U δεν είναι sifted επίπεδος.
Θεωρούμε το διατεταγμένο σύνολο $[1] \times [1]$

$$\begin{tikzcd}
& (1,1) & \\
(1,0) \arrow[ur] & & (0,1) \arrow[ul] \\
& (0,0) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

και έστω $B = \underline{1} \times \underline{1}$ η αντίστοιχη κατηγορία. Έστω επιπλέον το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \underline{1} \times \underline{1} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
\underline{1} = U([1]) & & \underline{1} = U([1])
\end{tikzcd}$$

[12]Ο συναρτητής i αυτού του παραδείγματος είναι επίπεδος άρα και sifted επίπεδος.

στην **Cat**

Αν ο U ήταν sifted επίπεδος,[13] θα έπρεπε να υπήρχε ένας διατακτικός $[n]$, δύο συναρτήσεις $[n] \rightrightarrows [1]$ που διατηρούν την διατάξη και μία συνάρτηση $[1] \times [1] \to [n]$ που διατηρεί την διάταξη, έτσι ώστε στο παρακάτω διάγραμμα τα δύο εσωτερικά τρίγωνα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
& {[1]\times[1]} \arrow[ddl, "p_1"'] \arrow[ddr, "p_2"] \arrow[d, dotted] & \\
& {[n]} \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\
{[1]} & & {[1]}
\end{tikzcd}$$

Όμως, από την Πρόταση 2.2.15, έχουμε ότι τελικά θα πρέπει να έχουμε μία παραγοντοποίηση μέσω του διατακτικού $[2] = [1 + 1]$. Δηλαδή, θα έπρεπε να υπάρχουν συναρτήσεις $f_1 : [2] \to [n]$, $f_2 : [2] \to [n]$ που είναι επί και διατηρούν την διάταξη και $h : [1] \times [1] \to [2]$ που διατηρεί την διάταξη, έτσι ώστε στο παρακάτω διάγραμμα τα δύο εσωτερικά τρίγωνα να είναι αντιμεταθετικά.

$$\begin{tikzcd}
& {[1]\times[1]} \arrow[ddl, "p_1"'] \arrow[ddr, "p_2"] \arrow[d, dotted, "h"] & \\
& {[2]} \arrow[dl, dotted, "f_1"] \arrow[dr, dotted, "f_2"'] & \\
{[1]} & & {[1]}
\end{tikzcd}$$

Υπάρχουν δύο επιλογές για τις f_1, f_2:

$f_1(0) = 0,\ f_1(1) = 1,\ f_1(2) = 1 \quad f_2(0) = 0,\ f_2(1) = 0,\ f_2(2) = 1$

ή

$f_1(0) = 0,\ f_1(1) = 0,\ f_1(2) = 1 \quad f_2(0) = 0,\ f_2(1) = 1,\ f_2(2) = 1.$

Εύκολα ελέγχεται ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $h : [1] \times [1] \to [2]$ που διατηρεί την διάταξη, έτσι ώστε στο παραπάνω διάγραμμα τα δύο εσωτερικά τρίγωνα να είναι αντιμεταθετικά. Άρα ο U δεν είναι sifted επίπεδος, όμως η αριστερή επέκταση Kan του U κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda (η κατηγορική πραγματοποίηση) διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα (Θεώρημα 2.2.8).

[13] Ο συναρτητής U μπορεί να ειδωθεί και ως συναρτητής από την κατηγορία **Pos** των μερικώς διατεταγμένων συνόλων με μορφισμούς συναρτήσεις που διατηρούν την διάταξη. Ο U είναι πλήρης και πιστός συναρτητής, οπότε αν P, Q είναι δύο μερικώς διατεταγμένα σύνολα και έχουμε ένα συναρτητή $U(P) \to U(Q)$ μεταξύ των αντίστοιχων κατηγοριών, τότε αυτός μπορεί να ειδωθεί ως μία συνάρτηση μεταξύ διατεταγμένων συνόλων που διατηρεί την διάταξη.

Στο Θεώρημα 2.3.26, η sifted επιπεδότητα ενός συναρτητή με τιμές στην κατηγορία των συνόλων δεν εξασφαλίζει και την διατήρηση του τελικού αντικειμένου (κενό γινόμενο) από την αριστερή επέκταση Kan αυτού, κατά μήκος της εμφύτεσης Yoneda, εκτός και αν προσθέσουμε την επιπλέον συνθήκη, ότι η κατηγορία των στοιχείων του συναρτητή είναι μη κενή. Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για την διατήρηση του τελικού αντικειμένου από την αριστερή επέκταση Kan, υπάρχει στο [1] (συνδυάζοντας το (iv) του παραδείγματος 2.3 με το Θεώρημα 2.4). Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε με στοιχειώδη τρόπο αυτή την ισοδυναμία, έτσι ώστε να γενικεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα στο Κεφάλαιο 4.

2.3.35 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η κατηγορία $eltF$ των στοιχείων του F είναι συνεκτική.*
2. *Η αριστερή επέκταση Kan $\mathrm{Lan}_y F$, του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ διατηρεί το τελικό αντικείμενο.*

2.3.36 Απόδειξη. Το τελικό αντικείμενο $\mathbf{1}_{\mathbf{Set}}$, στην κατηγορία των συνόλων είναι ισόμορφο με το οποιοδήποτε μονοσύνολο και συμβολίζουμε συνήθως $\{*\}$.
Το τελικό αντικείμενο $\mathbf{1}_{[\mathcal{C}^{op},\mathbf{Set}]}$, στην κατηγορία των προδραγμάτων της $\mathcal{C}$ (τελικό προδράγμα) είναι ισόμορφο με τον συναρτητή $X : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$, με $X(C) = \{*\}$ για κάθε $C \in \mathcal{C}$. Από την περιγραφή των συνορίων στην κατηγορία των συνόλων (βλέπε [26]), έχουμε ότι:

$$\mathrm{colim} F \cong \coprod_{C \in \mathcal{C}} FC/\sim \quad (T_1)$$

όπου, $FC \ni x \sim x' \in FC'$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ στην κατηγορία των στοιχείων του F που συνδέει τα (C, x) και (C', x').

Επιπλέον, αν X είναι ένα προδράγμα της $\mathcal{C}$, τότε από τον τύπο της επέκτασης Kan έχουμε

$$\mathrm{Lan}_y F(X) = \mathrm{colim}\{\ \mathrm{elts} X \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}\ \}$$

Οπότε, αν X είναι το τελικό προδράγμα, τότε $\mathrm{elts}X \cong \mathcal{C}$, άρα $\mathrm{Lan}_y F(X) \cong \mathrm{colim} F$ (T_2).

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η κατηγορία των στοιχείων του F είναι συνεκτική, τότε από την σχέση (T_1) έχουμε ότι: $\mathrm{colim} F \cong \{*\}$, και από την σχέση (T_2) προκύπτει ότι ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί το τελικό αντικείμενο.

Αντίστροφα τώρα, αν ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί το τελικό αντικείμενο, τότε από την σχέση (T_2), έχουμε ότι $\mathrm{colim} F \cong \{*\}$, άρα από την περιγραφή του συνορίου πιο πάνω έχουμε ότι η κατηγορία $eltF$ είναι συνεκτική.

2.3.3 Επίπεδοι ως προς Πεπερασμένα Συνεκτικά Όρια Συναρτητές

Στην παράγραφο αυτή κάνουμε μία ανασκόπηση, κάποιων αποτελεσμάτων για τους επίπεδους ως προς συνεκτικά όρια συναρτητές. Πιο πλήρης παρουσίαση γύρω από τους επίπεδους ως προς συνεκτικά όρια συναρτητές, μπορεί κανείς να βρει στα [37], [33].

Θεωρούμε τις συνεκτικές κατηγορίες:

$$\mathcal{I}^0 = \{ \bullet \rightrightarrows \bullet \}$$

και

$$\mathcal{J}^0 = \left\{ \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \right\}$$

2.3.37 Ορισμός. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται* **ψευδοφιλτραρισμένη** *(pseudofiltered) αν κάθε διάγραμμα στην $\mathcal{C}$ παραμετρικοποιημένο από τις κατηγορίες $\mathcal{I}^0$ και $\mathcal{J}^0$ έχει συνκώνο. Αναλυτικά αυτό σημαίνει ότι:*

1. *Για κάθε παράλληλο ζεύγος μορφισμών* $C_2 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} C_1$ *στην $\mathcal{C}$, υπάρχει ένα αντικείμενο $C_3 \in \mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $h : C_1 \to C_3$ τέτοιος ώστε $h \cdot f = h \cdot g$*

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C_1 \arrow[r, dotted, "h"] & C_3 \end{tikzcd}$$

2. *Για κάθε διάγραμμα στην $\mathcal{C}$ της μορφής:*

$$\begin{tikzcd} & C_3 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ C_1 & & C_2 \end{tikzcd}$$

υπάρχει ένα αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ και μορφισμοί $f' : C_1 \to C$ και $g' : C_2 \to C$ έτσι ώστε $f' \cdot f = g' \cdot g$

$$\begin{tikzcd} & C_3 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ C_1 \arrow[dr, dotted, "f'"'] & & C_2 \arrow[dl, dotted, "g'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

2.3.38 Ορισμός. *Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ καλείται* **επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια** *(finite connected limit flat) αν η δυική της κατηγορία των στοιχείων του είναι ψευδοφιλτραρισμένη. Αναλυτικά αυτό σημαίνει ότι:*

1. *Για κάθε διάγραμμα στην $\mathcal{C}$ της μορφής:*

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[dr, "f"'] & & C_2 \arrow[dl, "g"] \\ & C_3 & \end{tikzcd}$$

   και $x_1 \in FC_1$, $x_2 \in FC_2$ τέτοια ώστε $Ff(x_1) = Fg(x_2)$, τότε το παραπάνω διάγραμμα μπορεί να συμπληρωθεί σε ένα αντιμεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ C_1 \arrow[dr, "f"'] & & C_2 \arrow[dl, "g"] \\ & C_3 & \end{tikzcd}$$

   και υπάρχει και ένα στοιχείο $x \in FC$ τέτοιο ώστε $Ff'(x') = x_1$ και $Fg'(x') = x_2$.

2. *Για κάθε $C_1 \in \mathcal{C}$ (και $x_1 \in FC_1$), $C_2 \in \mathcal{C}$ και $x_2 \in FC_2$ και μορφισμούς $C_2 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} C_1$ στην $\mathcal{C}$, τέτοιους ώστε $Ff(x_2) = Fg(x_2)(= x_1)$, υπάρχουν $C_3 \in \mathcal{C}$, $x_3 \in FC_3$ και $h : C_3 \to C_2$ έτσι ώστε $f \circ h = g \circ h$ και $Fh(x_3) = x_2$*

$$(C_3, x_3) \overset{h}{\dashrightarrow} (C_2, x_2) \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} (C_1, x_1)$$

2.3.39 Θεώρημα. [14] *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο F είναι επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια.*

2. *Κάθε συνεκτικό διάγραμμα στην κατηγορία των στοιχείων του F, έχει κώνο.*

3. *Η αριστερή επέκταση Kan $\mathrm{Lan}_y F$, του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ διατηρεί πεπερασμένα συνεκτικά όρια.*

[14] Μία απόδειξη του θεωρήματος αυτού μπορεί κανείς να δει στο [37], Θεώρημα 4.11

Στο παραπάνω Θεώρημα, θα μπορούσε κανείς να προσθέσει την (ισοδύναμη) συνθήκη, ότι ο F είναι ισόμορφος μ' ένα άθροισμα (με την έννοια του συν-γινομένου στην κατηγορία $[\mathcal{C}, \mathbf{Set}]$) επίπεδων συναρτητών. Αυτή η συνθήκη αιτιολογεί και τις ονομασίες **ασθενώς επίπεδος** συναρτητής (weakly flat functor, [33]) και **επίπεδος ως προς συνεκτικές συνιστώσες** (componentwise flat functor, [37]). Στο [37] χρησιμοποιείται (και) ο όρος **μη εκφυλισμένος** (nondegenerate) συναρτητής.

2.3.40 Πόρισμα. *Μία κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει κώνο για κάθε πεπερασμένο συνεκτικό διάγραμμα αν και μόνο αν η δυική κατηγορία της $\mathcal{C}$ είναι ψευδοφιλτραρισμένη.*

Απόδειξη: Έστω $X : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ο συναρτητής που στέλνει κάθε αντικείμενο της $\mathcal{C}$ στο τελικό αντικείμενο της κατηγορίας των συνόλων (δηλαδή σ' ένα μονοσύνολο). Η κατηγορία των στοιχείων αυτού του συναρτητή είναι η κατηγορία $\mathcal{C}$. Το συμπέρασμα τώρα προκύπτει από την ισοδυναμία της πρώτης και της δεύτερης συνθήκης του παραπάνω Θεωρήματος.

2.3.41 Παρατήρηση. Το παραπάνω Πόρισμα αν και προκύπτει ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.39, θα μπορούσε να αποδειχτεί (με επαγωγή στον αριθμό των μορφισμών που αποτελούν ένα συνεκτικό διάγραμμα) και με εντελώς στοιχειώδη τρόπο, με τον τρόπο δηλαδή που αποδεικνύεται στο [40] (Κεφ. VII, §6, Λήμμα 1), ότι σε μία συν-φιλτραρισμένη κατηγορία, κάθε πεπερασμένο διάγραμμα της έχει κώνο. Περιγράφουμε αυτή την διαδικασία, σ' ένα πιο γενικό πλαίσιο, στην απόδειξη του Λήμματος 5.1.2.

Επειδή σε μία κατηγορία το όριο ενός διαγράμματος παραμετρικοποιημένο από την $\mathcal{I}^0$ (αντ. $\mathcal{J}^0$) είναι ένας εξισωτής (equalizer) (αντ. εφελκύση (pullback)), έχουμε ότι:

2.3.42 Πόρισμα. *Μία κατηγορία έχει όρια πεπερασμένων συνεκτικών διαγραμμάτων αν και μόνο αν έχει εξισωτές και εφελκύσεις.*

2.3.43 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ δύο κατηγορίες με πεπερασμένα συνεκτικά όρια. Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ διατηρεί πεπερασμένα συνεκτικά όρια αν και μόνο αν διατηρεί γινόμενα και εξισωτές.*

2.3.44 Παρατήρηση. Αντίστοιχα με τις περιπτώσεις της επιπεδότητας και της sifted επιπεδότητας, η έννοια της επιπεδότητας ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια ενός συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, ταυτίζεται με την έννοια της διατήρησης πεπερασμένων συνεκτικών ορίων από τον συναρτητή στην περίπτωση που $\mathcal{C}$ έχει όλα τα πεπερασμένα συνεκτικά όρια.

Η διατήρηση πεπερασμένων συνεκτικών ορίων από την αριστερή επέκταση Kan (συνεκτικότητα ως προς πεπερασμένα όρια) ανάγεται στην διατήρηση εξισωτών και εφελκύσεων (Πόρισμα 2.3.44). Το παρακάτω Θεώρημα (Λήμμα 2.1 στο [16], μέρος του Θεωρήματος 3.6 στο [33] για την περίπτωση που ο συναρτητής λαμβάνει τιμές στην κατηγορία των συνόλων) μας πληροφορεί ότι η επιπεδότητα ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια είναι ισοδύναμη με την διατήρηση εφελκύσεων από την αριστερή επέκταση Kan.

2.3.45 Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία πεπερασμένα πλήρης κατηγορία και $T : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ένας συναρτητής. Αν ο T διατηρεί εφελκύσεις, τότε θα διατηρεί όλα τα συνεκτικά όρια.*

2.3.4 Επιπεδότητα Συναρτητών σε Τόπους

Το Θεώρημα 2.3.8 στην "γλώσσα" της Θεωρίας Τόπων, μας λέει ότι αν $\mathcal{C}$ είναι μία μικρή κατηγορία, τότε τα σημεία του τόπου $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$[15] είναι σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με επίπεδους συναρτητές από την $\mathcal{C}$ προς την κατηγορία των συνόλων. Αυτό το αποτέλεσμα υποδηλώνει ([50]) ότι ο τόπος $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ είναι ο ταξινομών τόπος (classifying topos) μίας γεωμετρικής "θεωρίας επίπεδων συναρτητών" (Θεώρημα Diaconescu). Θεωρώντας λοιπόν ένα συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, από μία μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$ προς ένα στοιχειώδη τόπο $\mathcal{E}$, να είναι επίπεδος αν και μόνο αν η αριστερή επέκταση Kan αυτού, κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda, διατηρεί πεπερασμένα όρια· τότε έχουμε μία ένα προς ένα και επί αντιστοιχία ανάμεσα σε επίπεδους συναρτητές $\mathcal{C} \to \mathcal{E}$ από τη μία, και σε γεωμετρικούς μορφισμούς $\mathcal{E} \underset{G}{\overset{F}{\leftrightarrows}} [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ από την άλλη ([40], Κεφ. VII, §7, Θεώρημα 2).

Όμως τι μπορούμε να πούμε για την επιπεδότητα ενός συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ με όρους του συναρτητή F, έτσι ώστε να μπορέσουμε να μιλήσουμε με σαφήνεια για την θεωρία των επίπεδων συναρτητών; Τα (αντί-)παραδείγματα 2.3.18 και 2.3.20 δείχνουν ότι ο Ορισμός 2.3.12 δεν δίνει λύση στην εύρεση αυτής της θεωρίας. Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα δίνεται από την έννοια του φιλτραρισμένου συναρτητή ([40], Κεφ. 7, §8, Λήμμα 3).

Βέβαια να πούμε εδώ ότι η "θεωρητική" απάντηση στο ερώτημα για τον ταξινομούντα τόπο της θεωρίας των επίπεδων συναρτητών, μπορεί να δωθεί και με "κομψό" και άμεσο τρόπο, με όρους εσωτερικών κατηγοριών σ' ένα τόπο ([12], §4.5).

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε την έννοια του φιλτραρισμένου συναρτητή και την ισοδύναμία αυτής της έννοιας με την διατήρηση πεπερασμένων ορίων από την αριστερή επέκταση Kan.

2.3.46 Ορισμός. *Έστω $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, όπου $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $\mathcal{E}$ είναι ένας στοιχειώδης τόπος. Θα λέμε ότι ο συναρτητής F είναι* **φιλτραρισμένος** *αν:*

1. *Για κάθε αντικείμενο $E \in \mathcal{E}$ υπάρχει μία επιμορφική οικογένεια (βλέπε 2.1.6) $\{f_i : E_i \to E | i \in I\}$ τέτοια ώστε για κάθε $i \in I$ υπάρχει ένα αντικείμενο $C_i \in \mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $E_i \to F(C_i)$ στην $\mathcal{E}$.*

[15] Γεωμετρικοί μορφισμοί $\mathbf{Set} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, δηλαδή ένα ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών

$$\mathbf{Set} \underset{G}{\overset{F}{\leftrightarrows}} [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$$

όπου επιπλέον ο αριστερά προσαρτημένος F, διατηρεί πεπερασμένα όρια.

2. *Για κάθε δύο αντικείμενα* C, D *της* $\mathcal{C}$ *και κάθε μορφισμό* $\langle c, d\rangle : E \to F(C) \times F(D)$ *στην* $\mathcal{E}$ *υπάρχει μία επιμορφική οικογένεια* $\{f_i : E_i \to E | i \in I\}$ *τέτοια ώστε για κάθε* $i \in I$ *υπάρχει ένα αντικείμενο* $B_i \in \mathcal{C}$ *και μορφισμοί* $u_i : B_i \to C$ *και* $v_i : B_i \to D$ *στην* $\mathcal{C}$ *και* $b_i : E_i \to F(B_i)$ *στην* $\mathcal{E}$ *έτσι ώστε (για κάθε* i*) το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "t_i"'] & E \arrow[d, "\langle c,d\rangle"] \\ F(B_i) \arrow[r, "\langle F(u_i),F(v_i)\rangle"'] & F(C) \times F(D) \end{tikzcd}$$

3. *Για κάθε παράλληλο ζεύγος μορφισμών* $C \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} D$ *στην* $\mathcal{C}$ *και για κάθε μορφισμό* $c : E \to FC$ *στην* $\mathcal{E}$ *για τον οποίο* $F(u) \cdot c = F(v) \cdot c$ *υπάρχει μία επιμορφική οικογένεια* $\{f_i : E_i \to E | i \in I\}$ *τέτοια ώστε για κάθε* $i \in I$ *υπάρχει ένας μορφισμός* $w_i : B_i \to C$ *στην* $\mathcal{C}$ *με την ιδιότητα* $u \cdot w_i = v \cdot w_i$ *και ένας μορφισμός* $b_i : E_i \to F(B_i)$ *έτσι ώστε (για κάθε* i*) το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} FB_i \arrow[r, "Fw_i"] & FC \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fv"'] & FD \\ E_i \arrow[u, "b_i"] \arrow[r, "f_i"] & E \arrow[u, "c"] & \end{tikzcd}$$

2.3.47 Θεώρημα. *([40], Κεφ. 7, §9, Θεώρημα 1) Έστω* $\mathcal{C}$ *μία μικρή κατηγορία,* $\mathcal{E}$ *ένας συν-πλήρης στοιχειώδης τόπος και* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ *ένας συναρτητής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο* F *είναι φιλτραρισμένος.*

2. *Η αριστερή επέκταση Kan του* F *κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda* $\mathrm{Lan}_y F : [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}] \to \mathcal{E}$ *διατηρεί πεπερασμένα όρια.*

2.3.5 Σχόλια

Οι επίπεδοι συναρτητές με τιμές στα σύνολα, ταξινομούν τις πεπερασμένα προσιτές (λ-προσιτές, λ ένας κανονικός πληθάριθμος) κατηγορίες με την έννοια ότι κάθε τέτοια κατηγορία είναι ισοδύναμη με μία κατηγορία της μορφής $\mathbf{Flat}(\mathcal{A}, \mathbf{Set})$ (αντ.$\lambda - \mathbf{Flat}(\mathcal{A}, \mathbf{Set})$)

που έχει ως αντικείμενα επίπεδους (αντ. λ-επίπεδους) συναρτητές από μία μικρή κατηγορία $\mathcal{A}$ στην κατηγορία των συνόλων[16]. Στο [1] παρουσιάζεται μία γενίκευση, θεωρώντας $\mathbb{D}$-προσιτές κατηγορίες, όπου $\mathbb{D}$ μια συλλογή μικρών κατηγοριών (doctrine). Όταν η $\mathbb{D}$ πληροί μία τεχνική συνθήκη (soundness) τότε αποδεικνύεται ένα Θεώρημα ([1], Θεώρημα 2.4) ανάλογο (γενίκευση) των Θεωρημάτων 2.3.8, 2.3.26, 2.3.35, 2.3.42.

[16] Για κατηγορίες της μορφής $\lambda - \mathbf{Flat}(\mathcal{A}, \mathbf{Set})$ μπορεί κανείς δει στο [10] 6.4. και για την ισοδυναμία τους με λ-προσιτές (λ-accesible) κατηγορίες στο [11] Θεώρημα 5.3.5.

Κεφάλαιο 3

Θεωρίες για τα διάφορα είδη Επιπεδότητας και Καθορισμένα Συνόρια

Βασικός στόχος σε αυτή την διδακτορική διατριβή είναι να διατυπωθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες έτσι ώστε η αριστερή επέκταση Kan ενός συναρτητή να διατηρεί συγκεκριμένες κλάσεις πεπερασμένων ορίων. Στην περίπτωση που ο συναρτητής λαμβάνει τιμές στην κατηγορία των συνόλων, τότε το πρόβλημα έχει επιλυθεί πλήρως και η απάντηση σχετίζεται με την έννοια της επιπεδότητας, όπως είδαμε στο Κεφαλαίο 2 (Θεωρήματα 2.3.8, 2.3.26, 2.3.38). Για να εργαστούμε πάνω στη γενικότερη περίπτωση ενός συναρτητή με τιμές σε μία τυχαία (συν-πλήρη) κατηγορία, είχαμε ως οδηγό δύο παρατηρήσεις του Anders Kock, όπως αυτές διατυπώθηκαν στην (αδημοσίευτη) εργασία [34].

Η πρώτη παρατήρηση έχει να κάνει με το ότι οι συνθήκες για τα διάφορα είδη επιπεδότητας (βλέπε Ορισμούς 2.3.5, 2.3.24, 2.3.38) μπορούν να διατυπωθούν στα πλαίσια της γεωμετρικής λογικής, άρα έχει νόημα να μιλήσουμε (με τους ίδιους όρους) για επιπεδότητα ενός συναρτητή που λαμβάνει τιμές σε μία κατηγορία στην οποία είναι "διαθέσιμη" η sheaf σημασιολογία, δηλαδή σε μία κατηγορία εφοδιασμένη με μία τοπολογία Grothendieck (site).

Η δεύτερη παρατήρηση έχει να κάνει με τον τρόπο κατασκευής των συνορίων στην κατηγορία των συνόλων και το γεγονός ότι οι συνθήκες που περιγράφουν αυτή την κατασκευή είναι και αυτές διατυπώσιμες στην γεωμετρική λογική. Τα συνόρια που πληρούν αυτές τις συνθήκες καλούνται καθορισμένα (postulated) και πραγματευόμαστε αυτή την έννοια στην τρίτη ενότητα. Ένα στοιχείο που υποδεικνύει ότι δουλεύοντας την γενική περίπτωση, με οδηγό αυτές τις δύο παρατηρήσεις, ακολουθείται ο σωστός δρόμος για την "κατάλληλη" έννοια επιπεδότητας, είναι το γεγονός ότι σ΄ ένα συν-πλήρη στοιχειώδη τόπο $\mathcal{E}$, όλα τα συνόρια είναι καθορισμένα αναφορικά με την κανονική τοπολογία του τόπου (Πρόταση 3.3.9), και η επιπεδότητα ενός συναρτητή με τιμές στον τόπο, αναφορικά πάλι με την κανονική τοπολογία του τόπου, είναι ακριβώς η έννοια του φιλτραρισμένου συναρτητή (Παρατήρηση 3.2.6).

Στις άλλες δύο ενότητες αυτού του Κεφαλαίου πραγματευόμαστε την έννοια της τοπολογίας Grothendieck και τα διάφορα είδη επιπεδότητας ενός συναρτητή αναφορικά με μία "δομή" τοπολογίας Grothendieck που είναι εφοδιασμένη η κατηγορία που λαμβάνει τιμές ο συναρτητής.

Στην πρώτη ενότητα αυτού του Κεφαλαίου, στην οποία αναφέρονται στοιχεία που αφορούν τις τοπολογίες Grothendieck, οι έννοιες και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται μπορούν να βρεθούν σε κάθε εγχειρίδιο που πραγματεύεται τις τοπολογίες Grothendieck. Οι άλλες δύο ενότητες αυτού του Κεφαλαίου, αν και σε καμία περίπτωση δεν διεκδικούν τίτλο πρωτοτυπίας (μιας και οι ιδέες αυτές περιγράφονται από τον Anders Kock [34]), είναι κάτι παραπάνω από μία απλή παράθεση ορισμών και αποτελεσμάτων. Αυτό το οποίο κάνουμε, είναι ότι πραγματευόμαστε και τα άλλα δύο είδη επιπεδότητας και ενώ ξεκινάμε με μία "λογικό-κατηγορική θέαση" των εννοιών (όπως και στο [34]), στην συνέχεια, με μία πιο συστηματική προσέγγιση εκφράζουμε όλους τους Ορισμούς με στοιχειώδης όρους και σε καθαρά διαγραμματική μορφή. Σε κάθε περίπτωση να τονίσουμε ότι, η προσέγγιση αυτή και ιδιαίτερα η "απομόνωση" της έννοιας του καθορισμένου συνορίου οφείλεται στον Anders Kock.

3.1 Τοπολογίες Grothendieck

Σε αυτή ενότητα θα αναφερθούμε στην έννοια της (προ-)τοπολογίας Grothendieck και στην έννοια του δράγματος (sheaf). Κλασική αναφορά για αυτές τις έννοιες είναι το [40].

3.1.1 Ορισμός. *Έστω $\mathcal{E}$ μία (μικρή) κατηγορία . Μία* **προτοπολογία** *Grothendieck στην $\mathcal{E}$ είναι μία συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε $E \in \mathcal{E}$ μία κλάση $Cov(E)$, τα στοιχεία της οποίας είναι οικογένειες μορφισμών της $\mathcal{E}$, $\{t_i : E_i \to E | i \in I\}$ με κοινό συν-πεδίο το E, έτσι ώστε να πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Η (μονοστοιχειακή) οικογένεια: $\{id_E : E \to E\}$ είναι στοιχείο της κλάσης $Cov(E)$.*
2. *Αν $\{t_i : E_i \to E | i \in I\} \in Cov(E)$ και $f : D \to E$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{E}$, τότε για κάθε $i \in I$, η εφέλκυση του t_i κατά μήκος του f υπάρχει στην $\mathcal{E}$*

$$\begin{tikzcd} D \times_E E_i \arrow[r] \arrow[d, "f^*(t_i)"'] & E_i \arrow[d, "t_i"] \\ D \arrow[r, "f"'] & E \end{tikzcd}$$

και η οικογένεια $\{f^*(t_i) : D \times_E E_i \to D\}$ *ανήκει στην κλάση* $Cov(D)$.

3. *Αν η οικογένεια* $\{t_i : E_i \to E | i \in I\} \in Cov(E)$ *και για κάθε* $i \in I$ *η οικογένεια* $\{\eta_{ij} : D_{ij} \to E_i | j \in J_i\} \in Cov(E_i)$, *τότε η οικογένεια* $\{ \ D_{ij} \xrightarrow{\eta_{ij}} E_i \xrightarrow{t_i} E \ , i \in I \ , j \in J_i\} \in Cov(E)$

Αντί του όρου προτοπολογία Grothendieck για μία αντιστοιχία σαν αυτή του παραπάνω ορισμού, χρησιμοποιείται ο όρος **βάση** για μία τοπολογία Grothendieck ([40], Κεφ.3, §2, Ορισμός 2). Επιπλέον τα στοιχεία του $Cov(E)$ καλούνται **καλύπτουσες οικογένειες** του E ή πιο απλά, **καλύμματα** του E.

3.1.2 Ορισμός. *Έστω* $\mathcal{E}$ *μία κατηγορία και* $E \in \mathcal{E}$. *Μία οικογένεια μορφισμών* S *της* $\mathcal{E}$ *με κοινό συν-πεδίο το* E, *καλείται* **κόσκινο** *(sieve) του* E, *αν για κάθε* $f \in S$ *και για κάθε μορφισμό* g *της* $\mathcal{E}$ *για τον οποίο έχει νόημα η σύνθεση* $f \cdot g$, *ισχύει ότι* $f \cdot g \in S$ *(Η οικογένεια* S *είναι κάτω κλειστή ως προς την σύνθεση).*

3.1.3 Παρατήρηση. Αν S είναι ένα κόσκινο του E και $h : E' \to E$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{E}$, τότε η οικογένεια:

$$h^*(S) = \{g | cod(g) = E' \text{ και } h \cdot g \in S\}$$

είναι ένα κόσκινο του E'.
Αν τώρα $R = \{f_i : E_i \to E | i \in I\}$ μία οικογένεια μορφισμών με κοινό συν-πεδίο το E, τότε η οικογένεια

$$< R >= \{f \cdot g | dom(f) = cod(g) \text{ και } f \in R\}$$

αποτελεί κόσκινο του E[1] και μάλιστα είναι το **ελάχιστο κόσκινο** του E που περιέχει την οικογένεια R. Επιπλέον αν S είναι ένα κόσκινο του E που περιέχει ένα ισομορφισμό τότε το S είναι το μέγιστο κόσκινο του E, δηλαδή το κόσκινο $t_E = \{f \in \mathcal{E}_1 | cod(f) = E\}$

3.1.4 Ορισμός. *Έστω* $\mathcal{E}$ *μία κατηγορία. Μία* **τοπολογία** *Grothendieck στην* $\mathcal{E}$ [2] *στην* $\mathcal{E}$ *είναι μία συνάρτηση* j *που αντιστοιχεί σε κάθε* $E \in \mathcal{E}$ *μία κλάση* $j(E)$, *τα στοιχεία της οποίας είναι κόσκινα του* E, *έτσι ώστε να πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Το μέγιστο κόσκινο του* E $\{f \in \mathcal{E}_1 | cod(f) = E\}$ *είναι στοιχείο του* $j(E)$.

2. *Αν* $S \in j(E)$ *τότε* $h^*(S) \in j(D)$ *για κάθε μορφισμό* $h : D \to E$ *στην* $\mathcal{E}$.

[1]Συνήθως αναφερόμαστε στο κόσκινο $< R >$ ως το κόσκινο που παράγει η οικογένεια R.
[2]Πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε απλά τον όρο τοπολογία στην $\mathcal{E}$.

3. *Αν $S \in j(E)$ και R είναι ένα κόσκινο του E, τέτοιο ώστε $h^*(R) \in j(D)$ για κάθε μορφισμό $h : D \to E$ στο S, τότε $R \in j(E)$.*

Αν j είναι μία τοπολογία Grothendieck σε μία κατηγορία $\mathcal{E}$ και $S \in j(E)$ για κάποιο αντικείμενο $E \in \mathcal{E}$, θα λέμε ότι το S είναι ένα **καλύπτον κόσκινο** (covering sieve) του E.

3.1.5 Παρατήρηση. Οι έννοιες της προτοπολογίας Grothendieck και της τοπολογίας Grothendieck είναι ισοδύναμες σε μία κατηγορία με εφελκύσεις με την έννοια ότι κάθε προ-τοπολογία Grothendieck "παράγει" μία τοπολογία Grothendieck και το αντίστροφο. Πιο συγκεκριμένα:
• Αν $\mathcal{E}$ είναι μία κατηγορία εφοδιασμένη με μία προτοπολογία Grothendieck, τότε ορίζουμε μία τοπολογία Grothendieck j στην $\mathcal{E}$ ως εξής:

$$S \in j(E) \Leftrightarrow \text{υπάρχει } R \in Cov(E) \text{ τέτοιο ώστε } R \subseteq S \quad (1)$$

Με βάση αυτή την αντιστοιχία έχουμε ότι αν $R \in Cov(E)$ τότε $< R > \in j(E)$. Επιπλέον δύο διαφορετικές προτοπολογίες Grothendieck μπορεί να παράγουν την ίδια τοπολογία Grothendieck (βλέπε Παράδειγμα 3.1.6).

• Αν $\mathcal{E}$ είναι μία κατηγορία εφοδιασμένη με μία τοπολογία Grothendieck j, τότε ορίζουμε μία προτοπολογία Grothendieck στην $\mathcal{E}$ ως εξής:

$$R \in Cov(E) \Leftrightarrow < R > \in j(E) \quad (2)$$

Την κλάση των καλυπτουσών οικογενειών ενός αντικειμένου $E \in \mathcal{E}$ που προκύπτουν από την ισοδυναμία (2) θα την συμβολίζουμε με $Cov_j(E)$. Η παραπάνω ισοδυναμία μας παράγει την μέγιστη προτοπολογία για μία δοσμένη τοπολογία. Ο όρος μέγιστο που χρησιμοποιούμε έχει να κάνει με μία σχέση μερικής διάταξης μεταξύ των διαφορετικών (προ-)τοπολογιών Grothendieck που ορίζονται σε μία δοσμένη κατηγορία. Πιο συγκεκριμένα θα λέμε ότι η τοπολογία j είναι **λεπτότερη** (finer) της τοπολογίας j' και θα συμβολίζουμε $j' \leq j$, αν κάθε καλύπτον κόσκινο της j' είναι και καλύπτον κόσκινο της j, ή ισοδύναμα αν κάθε καλύπτουσα οικογένεια της $Cov_{j'}$ είναι και καλύπτουσα οικογένεια της Cov_j.

3.1.6 Παράδειγμα. Έστω $\mathcal{E}$ μία κατηγορία. Η **τετριμμένη τοπολογία** στην $\mathcal{E}$ είναι η τοπολογία όπου για κάθε $E \in \mathcal{E}$ η $j(E)$ περιέχει μόνο το μέγιστο κόσκινο του E, ή ισοδύναμα με όρους καλυπτουσών οικογενειών τα καλύμματα ενός αντικείμενου αποτελούνται από μονοστοιχειακές οικογένειες $\{f\}$ όπου f είναι ισομορφισμός, ή ισοδύναμα το μοναδικό κάλυμμα ενός αντικειμένου $E \in \mathcal{E}$ είναι ο ταυτοτικός μορφισμός id_E. Η τετριμμένη τοπολογία είναι η **ελάχιστη τοπολογία** Grothendieck που μπορεί να οριστεί σε μία κατηγορία.

3.1.7 Ορισμός. *Ένα ζεύγος $(\mathcal{E}, j)$, όπου $\mathcal{E}$ μία κατηγορία και j μία τοπολογία Grothendieck στην $\mathcal{E}$, καλείται* **site**.

3.1.8 Παρατήρηση. Αν $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα site τότε θα αναφερόμαστε σε καλύπτουσες οικογένειες ενός αντικείμενου της $\mathcal{E}$ με την έννοια (της δεύτερης ισοδυναμίας) της Παρατήρησης 3.1.5.
Από την άλλη, αν $\mathcal{E}$ είναι μία κατηγορία και έχουμε ορίσει καλύπτουσες οικογένειες για τα αντικείμενα της $\mathcal{E}$ (δηλαδή προτοπολογία Grothendieck), τότε θα αναφερόμαστε στο site $(\mathcal{E}, j)$ όπου j η τοπολογία Grothendieck που προκύπτει από την πρώτη ισοδυναμία της Παρατήρησης 3.1.5.

3.1.9 Ορισμός. *Θα λέμε ότι η οικογένεια $\{f_i : E_i \to E | i \in I\}$ αποτελεί* **εκλέπτυνση** *(refinement) μίας οικογένειας $\{g_j : D_j \to E | j \in J\}$, αν κάθε μορφισμός f_i της πρώτης οικογένειας, παραγοντοποιείται μέσω κάποιου μορφισμού g_j της δεύτερης οικογένειας.*

3.1.10 Πρόταση. [3] *Αν $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα site και R, P δύο καλύπτουσες οικογένειες ενός αντικειμένου E, τότε υπάρχει μία καλύπτουσα οικογένεια του E η οποία είναι* **κοινή εκλέπτυνση** *των R και P.*

3.1.11 Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα site και $F : \mathcal{E}^{op} \to \mathbf{Set}$ ενα προδράγμα στην $\mathcal{E}$ και $R = \{f_i : E_i \to E | i \in I\} \in Cov_j(E)$. Μία οικογένεια στοιχείων $x_i \in F(E_i)$, $i \in I$ καλείται* **συμβατή** *(matching) για την R, αν:*

$$F(\pi^1_{ij})(x_i) = F(\pi^2_{ij})(x_j), \text{ για κάθε } i, j \in I$$

όπου π^1_{ij}, π^2_{ij} οι προβολές από την εφέλκυση:

$$\begin{tikzcd}
E_i \times_E E_j \arrow[r, "\pi^1_{ij}"] \arrow[d, "\pi^2_{ij}"'] & E_i \arrow[d, "f_i"] \\
E_j \arrow[r, "f_j"'] & E
\end{tikzcd}$$

Μία **συγχώνευση** *(amalgamation) για μία συμβατή οικογένεια $\{x_i \in F(E_i) | i \in I\}$ της R, είναι ένα στοιχείο $x \in FE$ τέτοιο ώστε:*

$$F(f_i)(x) = x_i, \text{ για κάθε } i \in I.$$

[3] Βλέπε [40], σελ 112.

3.1.12 Παράδειγμα. Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα site και $R = \{f_i : E_i \to E | i \in I\}$ μία καλύπτουσα οικογένεια ενός αντικειμένου $E \in \mathcal{E}$. Αν $E' \in \mathcal{E}$, τότε μία συμβατή οικογένεια για τον ανταλλοίωτο hom-συναρτητή: $\hom_{\mathcal{E}}(-, E') : \mathcal{E}^{op} \to \mathbf{Set}$, θα είναι μία οικογένεια μορφισμών $\{g_i : E_i \to E' | i \in I\}$, με την ιδιότητα:

$$g_i \cdot \pi^1_{ij} = g_j \cdot \pi^2_{ij}, \text{ για κάθε } i,\, j \in I.$$

Μία συγχώνευση για μία τέτοια οικογένεια θα είναι ένας μορφισμός $f : E \to E'$ τέτοιος ώστε:

$$f \cdot f_i = g_i, \text{ για κάθε } i \in I$$

$$\begin{tikzcd}
E_i \times_E E_j \arrow[r, "\pi^1_{ij}"] \arrow[d, "\pi^2_{ij}"'] & E_i \arrow[d, "f_i"] \arrow[ddr, bend left, "g_i"] & \\
E_j \arrow[r, "f_j"'] \arrow[drr, bend right, "g_j"'] & E \arrow[dr, dotted, "f"] & \\
 & & E'
\end{tikzcd}$$

3.1.13 Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα site και $F : \mathcal{E}^{op} \to \mathbf{Set}$ ενα προδράγμα στην $\mathcal{E}$. Θα λέμε ότι ο F είναι* **δράγμα** *(sheaf) για την τοπολογία (Grothendieck) j, αν για κάθε καλύπτουσα οικογένεια $R = \{f_i : E_i \to E | i \in I\} \in Cov_j(E)$, οποιαδήποτε συμβατή οικογένεια $\{x_i \in F(E_i) | i \in I\}$ της R έχει μοναδική συγχώνευση.*

3.1.14 Ορισμός. *Μία τοπολογία Grothendieck j σε μία κατηγορία $\mathcal{E}$ καλείται* **υποκανονική** *(και το αντίστοιχο site $(\mathcal{E}, j)$* **υποκανονικό***), αν για κάθε $E \in \mathcal{E}$ ο hom-συναρτητής: $\hom_{\mathcal{E}}(-, E) : \mathcal{E}^{op} \to \mathbf{Set}$ είναι ένα δράγμα για την τοπολογία j.*

Αν $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα site, θα συμβολίζουμε με $Sh(\mathcal{E}, j)$ την κατηγορία που έχει ως αντικείμενα τα δράγματα της τοπολογίας j και μορφισμούς φυσικούς μετασχηματισμούς ανάμεσά τους. Αυτή η κατηγορία είναι μία πλήρης συνανακλαστική υποκατηγορία της κατηγορίας $[\mathcal{E}^{op}, \mathbf{Set}]$ των προδραγμάτων της $\mathcal{E}$ και επιπλέον, η ανάκλαση[4] διατηρεί πεπερασμένα όρια. Επιπλέον, αν η $\mathcal{E}$ είναι μικρή κατηγορία τότε η $Sh(\mathcal{E}, j)$ θα είναι τοπικά μικρή κατηγορία.

3.1.15 Παρατήρηση. Αν $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα (μικρό) site και $F, G : \mathcal{E}^{op} \rightrightarrows \mathbf{Set}$ δύο προδράγματα της $\mathcal{E}$, τότε ένας φυσικός μετασχηματισμός $F \Rightarrow G$ (μορφισμός στην κατηγορία των προδραγμάτων της $\mathcal{E}$) είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν κάθε συντεταγμένη του φυσικού μετασχηματισμού είναι επί συνάρτηση. Δεν ισχύει όμως το ίδιο και στην κατηγορία

[4] Η ανάκλαση της εμφύτευσης $Sh(\mathcal{E}, j) \to [\mathcal{E}^{op}, \mathbf{Set}]$ συμβολίζεται συνήθως με $\mathbf{a} : [\mathcal{E}^{op}, \mathbf{Set}] \to Sh(\mathcal{E}, j)$ και καλείται ο συναρτητής της **δραγματοποίησης** (sheafication functor).

των δραγμάτων $Sh(\mathcal{E}, j)$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη ([40], Κεφ.3 §7, Συμπέρασμα 5) για να είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\theta : F \Rightarrow G$ μεταξύ δραγμάτων, επιμορφισμός, είναι ο θ να είναι **τοπικά επί** (local surjection) . Ότι ο θ είναι τοπικά επί, σημαίνει ότι για κάθε $E \in \mathcal{E}$ και για κάθε $y \in G(E)$ υπάρχει ένα κάλυμμα R του E, τέτοιο ώστε για κάθε μορφισμό $f : D \to E$ του καλύμματος, το στοιχείο $Gf(y) \in G(D)$ να είναι στην εικόνα της συνάρτησης $\theta_D : F(D) \to G(D)$.

3.1.16 Ορισμός. *Μία κατηγορία $\mathcal{D}$ καλείται* **τόπος του Grothendieck**, *αν είναι ισοδύναμη με μία κατηγορία της μορφής $Sh(\mathcal{C}, j)$, για κάποια μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$.*

Το παρακάτω Θεώρημα χαρακτηρίζει τους τόπους του Grothendieck.

3.1.17 Θεώρημα. *(**Giraud**) Μία κατηγορία $\mathcal{E}$ που έχει όλα τα πεπερασμένα όρια είναι τόπος του Grothendieck αν και μόνο αν πληρούνται οι παρακάτω συνθήκες:*

1. *Η $\mathcal{E}$ έχει όλα τα μικρά συν-γινόμενα και αυτά είναι διαζευγμένα και καθολικά (βλέπε 2.1.11).*

2. *Στην $\mathcal{E}$ κάθε επιμορφισμός είναι συνεξισωτής για κάποιο παράλληλο ζεύγος μορφισμών της $\mathcal{E}$.*[5]

3. *Κάθε σχέση ισοδυναμίας $\vartheta_0, \vartheta_1 : R \rightrightarrows E$ στην $\mathcal{E}$ έχει συνεξισωτή $q : E \to Q$ και ϑ_0, ϑ_1 είναι το ζεύγος πυρήνα (kernel pair) του q.*[6]*.*

4. *Κάθε διάγραμμα συνεξισωτή* $E_1 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} E_2 \xrightarrow{q} Q$ *στην $\mathcal{E}$, με την ιδιότητα ότι οι f, g αποτελούν το ζεύγος πυρήνα του q είναι ευσταθές ως προς εφελκύσεις.*

5. *Υπάρχει ένα σύνολο γεννητόρων της $\mathcal{E}$.*[7]

3.1.18 Παρατήρηση. Για μία κατηγορία $\mathcal{E}$ που έχει όλα τα πεπερασμένα όρια, οι τέσσερεις πρώτες συνθήκες του παραπάνω θεωρήματος έχουν ως συνέπεια ότι η $\mathcal{E}$ έχει όλα τα συνόρια ([40], Παράρτημα, §2, Πρόταση 1) και επιπλέον, από την κατασκευή τους έχουμε ότι τα συνόρια αντιμετατίθενται με εφελκύσεις.

3.1.19 Ορισμός. *Μία πεπερασμένα πλήρης κατηγορία $\mathcal{E}$ καλείται* ∞-**προτόπος**, *αν πληρούνται οι πρώτες τέσσερις συνθήκες του παραπάνω θεωρήματος.*

---

[5]Ένας τέτοιος επιμορφισμός καλείται ομαλός επιμορφισμός (regular epimorphism).

[6]Το ζεύγος πυρήνα ενός μορφισμού q είναι η εφέλκυση του q κατά μήκος του εαυτού του. Μία τέτοια σχέση ισοδυναμίας καλείται effective equivalnce relation.

[7]Με τον όρο σύνολο γεννητόρων της $\mathcal{E}$, εννοούμε ένα σύνολο $G = \{E_i | i \in I\}$ αντικειμένων της $\mathcal{E}$, με την ιδιότητα ότι, αν $u, v : E \rightrightarrows E'$ είναι ένα παράλληλο ζεύγος μορφισμών στην $\mathcal{E}$ με $u \neq v$, τότε υπάρχει ένα αντικείμενο E_i του συνόλου G και ένας μορφισμός $w : E_i \to E$ με την $u \cdot w \neq v \cdot w$.

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, αν $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα site και η $\mathcal{E}$ είναι μία μικρή κατηγορία (μικρό site), τότε η $Sh(\mathcal{E}, j)$ θα είναι τοπικά μικρή κατηγορία για μια τοπολογία Grothendieck στην $\mathcal{E}$. Θα διατυπώσουμε μία ικανή συνθήκη (Λήμμα Σύγκρισης) έτσι ώστε να μπορούμε να αναφερόμαστε στην κατηγορία $Sh(\mathcal{E}, j)$ (με την έννοια ότι είναι τοπικά μικρή κατηγορία) και σε περιπτώσεις που η κατηγορία $\mathcal{E}$ δεν είναι μικρή.

3.1.20 Θεώρημα. *(Λήμμα Σύγκρισης[8]) Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα υποκανονικό site και $\mathcal{D}$ μία πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{E}$ έτσι ώστε για κάθε $E \in \mathcal{E}$ η οικογένεια $R = \{f : D \to E | D \in \mathcal{D}_0\}$ είναι καλύπτουσα για το E (κάλυμμα του E από τα D-αντικείμενα ή $\mathcal{D}$-κάλυμμα του E). Τότε επάγεται μία τοπολογία Grothendieck j' στην $\mathcal{D}$ τέτοια ώστε οι κατηγορίες $Sh(\mathcal{E}, j)$ και $Sh(\mathcal{D}, j')$ να είναι ισοδύναμες.*

3.1.21 Παράδειγμα. Έστω $(\mathcal{C}, j)$ ένα μικρό site και $\mathcal{E} = Sh(\mathcal{C}, j)$ ο αντίστοιχος τόπος του Grothendieck. Ορίζουμε μία προτοπολογία Grothendieck στην $\mathcal{E}$ θεωρώντας ως καλύπτουσες οικογένειες τις (μικρές) από κοινού επιμορφικές οικογένειες. Σ' ένα τόπο του Grothendieck αυτές οι οικογένειες ορίζουν μία προτοπολογία Grothendieck (αφού τα συν-γινόμενα και οι επιμορφισμοί σε τέτοιες κατηγορίες είναι σταθερά ως προς εφελκύσεις) και αυτή η τοπολογία είναι υποκανονική και μάλιστα είναι η **κανονική τοπολογία** για την $\mathcal{E}$, δηλαδή η μέγιστη υποκανονική τοπολογία της $\mathcal{E}$. Για την τοπολογία αυτή θα χρησιμοποιούμε τον όρο, **τοπολογία των επιμορφικών καλυμμάτων** .

Επειδή τώρα η τοπολογία είναι υποκανονική, έχουμε ότι η εμφύτευση Yoneda $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, λαμβάνει τιμές στην κατηγορία $Sh(\mathcal{C}, j)$. Αν τώρα $F \in Sh(\mathcal{C}, j) \subseteq [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ έχουμε ότι (βλέπε Θεώρημα 2.1.5) $F \cong \operatorname*{colim}_{yC \to F} yC$ και προκύπτει ότι ο επαγόμενος μορφισμός $\coprod_{yC \to F} yC \to F$ είναι τοπικά επί, άρα επιμορφισμός στην κατηγορία $Sh(\mathcal{C}, j)$, και κατά συνέπεια έχουμε ότι κάθε αντικείμενο F της $\mathcal{E}$ έχει ένα $\mathcal{C}$-κάλυμμα.

3.1.22 Παρατήρηση. Με τον ίδιο τρόπο όπως στο προηγούμενο παράδειγμα ορίζεται και μία υποκανονική τοπολογία σε κάθε συν-πλήρη στοιχειώδη τόπο[9] και σε κάθε ∞-προτόπο.

3.1.23 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{C}$ είναι μία μικρή κατηγορία, τότε η κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ είναι ισοδύναμη με την κατηγορία $Sh(\mathcal{C}, j)$ όπου j η τετριμμένη τοπολογία στην $\mathcal{C}$ (Παράδειγμα 3.1.6), άρα η κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ των προδραγμάτων της $\mathcal{C}$ είναι ένας τόπος του Grothendieck.

3.1.24 Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα υποκανονικό site και $E \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} E'$ ένα παράλληλο ζεύγος μορφισμών στην $\mathcal{E}$. Αν υπάρχει μία καλύπτουσα οικογένεια $R = \{\xi_t : E_t \to E | t \in T\}$ του E, τέτοια ώστε:*

[8] Βλέπε [40], Παράρτημα, Συμπέρασμα 3 ή εναλλακτικά [23].

[9] Όπως για παράδειγμα η κατηγορία των συνόλων.

$$f \cdot \xi_t = g \cdot \xi_t \textit{ για κάθε } t \in T$$ [10]

τότε $f = g$.

3.1.25 Απόδειξη. Η οικογένεια $\{f \cdot \xi_t : E_t \to E' | t \in T\}$ αποτελεί μία συμβατή οικογένεια στοιχείων του συναρτητή $\hom_{\mathcal{E}}(-, E')$, αφού $f \cdot \xi_t \cdot \pi^1_{tt'} = f \cdot \xi_{t'} \cdot \pi^2_{tt'}$.

Αφού τοπολογία είναι υποκανονική, ο $\hom_{\mathcal{E}}(-, E')$ είναι δράγμα, άρα (Παράδειγμα 3.1.12) υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $h : X \to Y$ τέτοιος ώστε $h \cdot \xi_t = f \cdot \xi_t$ για κάθε $t \in T$.

$$\begin{tikzcd}
E_t \times_E E_{t'} \arrow[r, "\pi^1_{tt'}"] \arrow[d, "\pi^2_{tt'}"'] & E_t \arrow[d, "\xi_t"] \arrow[dr, bend left, "f\cdot\xi_t"] & \\
E_{t'} \arrow[r, "\xi_{t'}"'] \arrow[drr, bend right, "f\cdot\xi_{t'}"'] & E \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
 & & E'
\end{tikzcd}$$

Όμως $f \cdot \xi_t = g \cdot \xi_t$ για κάθε $t \in T$, άρα (από την μοναδικότητα του h) έχουμε ότι $h = f = g$.

3.1.26 Παρατήρηση. Έστω $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα υποκανικό site και $R = \{\xi_t : E_t \to E | t \in T\}$ μία καλύπτουσα οικογένεια στην $\mathcal{E}$. Τότε ο επαγόμενος μορφισμός $f : \coprod\limits_{t \in T} E_t \to E$ είναι επιμορφισμός, δηλαδή η οικογένεια R είναι επιμορφική. Πράγματι, αν $g, h : E \to D$ με $g \cdot f = h \cdot f$, τότε έχουμε ότι $g \cdot \xi_t = h \cdot \xi_t$ για κάθε $t \in T$, άρα από την προηγούμενη Πρόταση συμπεραίνουμε ότι $g = h$.

3.1.27 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{E}$ είναι μία μικρή κατηγορία και j, j' δύο τοπολογίες Grothendieck στην $\mathcal{E}$ με $j \leq j'$, τότε για τις αντίστοιχες κατηγορίες των δραγμάτων έχουμε ότι $Sh(\mathcal{E}, j') \subseteq Sh(\mathcal{E}, j)$.

3.2 Θεωρίες για τα διάφορα είδη Επιπεδότητας

Όπως έχουμε αναφέρει και στην Εισαγωγή, η δουλειά μας για την εύρεση ικανών και αναγκαίων συνθηκών για την διατήρηση κλάσεων πεπερασμένων ορίων από μία αριστερή επέκταση Kan, στηρίζεται στο γεγονός ότι οι αντίστοιχες ισοδύναμες συνθήκες για συναρτητές που λαμβάνουν τιμές στην κατηγορία των συνόλων (είδη επιπεδότητας, βλέπε Θεωρήματα 2.3.8, 2.3.26, 2.3.38) μπορούν εκφραστούν με γεωμετρικές προτάσεις σε μία

[10]Όταν ισχύει αυτή η συνθήκη λέμε συνήθως ότι οι f και g είναι **ίσοι σ' ένα κάλυμμα**.

κατάλληλη γλώσσα (τη γλώσσα των συναρτητών για μία δοσμένη κατηγορία). Με τον όρο γεωμετρικές προτάσεις εννοούμε προτάσεις της μορφής:

$$\forall x_1, ..., \forall x_n(\phi(x_1, ..., x_n) \to \psi(x_1, ..., x_n))$$

όπου στο σχηματισμό των ϕ και ψ χρησιμοποιούνται μόνο οι σύνδεσμοι της σύζευξης (conjuction $\wedge$), της (ενδεχομένως και άπειρης) διάζευξης (disnjuction $\bigvee$), καθώς και ο υπαρξιακός ποσοδείκτης (existential quantifier $\exists$). Τέτοιες προτάσεις μπορούν να ερμηνευτούν σε κατηγορίες εφοδιασμένες με μία τοπολογία Grothendieck (sheaf σημασιολογία), δηλαδή σε (κατάλληλα) sites.

Στην ενότητα αυτή θα δούμε ποιες είναι οι συγκεκριμένες προτάσεις που εκφράζουν τα διάφορα είδη επιπεδότητας και ποια είναι η ερμηνεία αυτών σ' ένα site. Για την ενότητα αυτή ίσως χρειάζεται μία εξοικείωση με την κατηγορική λογική και την sheaf σημασιολογία, αν και τελικά δεν είναι αναγκαίο μιας και όποιες προτάσεις αναφέρουμε με όρους της κατηγορικής λογικής θα τις αναλύσουμε έτσι ώστε αυτές να εκφραστούν σε καθαρά διαγραμματική μορφή. Με αυτή τη μορφή (διαγραμματική) θα τις χρησιμοποιούμε και στα αποτελέσματα που αποδεικνύουμε στα Κεφάλαια 4 και 5. Επιλέγουμε όμως (τουλάχιστον σε αυτό το Κεφάλαιο), να μιλήσουμε και με όρους κατηγορικής λογικής για να καταδείξουμε τα στοιχεία εκείνα που μας οδήγησαν στην κατάλληλη γενίκευση.

Για τι έννοιες της Κατηγορικής Λογικής και την sheaf σημασιολογία μπορεί κανείς δει στο [35], μέρος II.

Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία. Θεωρούμε τη γλώσσα $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}}$, η οποία έχει ένα τύπο C για κάθε αντικείμενο της $\mathcal{C}$ και ένα συναρτησιακό σύμβολο $f\colon C \to C'$ για κάθε μορφισμό της $\mathcal{C}$. Σε αυτή τη γλώσσα θα αναφερόμαστε ως **η γλώσσα των συναρτητών της** $\mathcal{C}$. Δομές για αυτήν τη γλώσσα σε μία κατηγορία $\mathcal{E}$ θα είναι αντικείμενα FC της $\mathcal{E}$, ένα για κάθε αντικείμενο $C \in \mathcal{C}$ και μορφισμοί $Ff\colon F(C) \to F(C')$ της $\mathcal{E}$, ένας για κάθε μορφισμό $f\colon C \to C'$ στην $\mathcal{C}$. Θεωρούμε τώρα στη γλώσσα $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}}$ τη θεωρία τα αξιώματα της οποίας είναι τα ακόλουθα:

(**Fun1**:) $\forall x : C(id_C(x) = x)$

(**Fun2**:) $\forall x : C(f(g(x)) = f \cdot g(x))$

Θα αναφερόμαστε σε αυτή τη θεωρία ως **η θεωρία των συναρτητών της** $\mathcal{C}$. Μοντέλα για αυτή τη θεωρία σε μία κατηγορία $\mathcal{E}$ είναι συναρτητές από την κατηγορία $\mathcal{C}$ προς την κατηγορία $\mathcal{E}$.

Στη γλώσσα τώρα $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}}$ θεωρούμε επιπλέον τα αξιώματα:

F1: $\bigvee_{C \in \mathcal{C}} \exists x\colon C \;\; (x = x)$

SF1: Για κάθε ζευγάρι αντικειμένων C', C'',

$$\forall x' \colon C' \;\; \forall x'' \colon C'' \; \bigvee_{C} \bigvee_{\substack{u' : C \to C' \\ u'' : C \to C''}} \exists x \colon C \;\; (u'(x) = x' \wedge u''(x) = x'')$$

SF2: Για κάθε διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd}
& Z' \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\
A & & B \\
& Z \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

$\forall z \colon Z \, \forall z' \colon Z' \, ((f(z) = f'(z') \wedge g(z) = g'(z')) \to \bigvee_{\mathcal{Z}(Z,Z')} \exists z_1 \colon Z_1 \; \exists z_2 \colon Z_2 ... \exists z_n \colon Z_n (d_1^0(z_1) = z \wedge d_1^1(z_1) = z_2 \wedge ... \wedge d_n^0(z_n) = z_{n-1} \wedge d_n^1(z_n) = z')$, όπου με $\mathcal{Z}(Z, Z')$ συμβολίζουμε το σύνολο των ζιγκ-ζαγκ που συνδέουν τα Z και Z'.

CLF1: Για κάθε παράλληλο ζεύγος μορφισμών $C' \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} C''$

$$\forall x \colon C' \;\; (u(x) = v(x) \to \; \bigvee_{C} \bigvee_{\substack{w : C \to C' \\ u \cdot w = v \cdot w}} \exists y \colon C \;\; (w(y) = x))$$

CLF2:

Για κάθε ζευγάρι μορφισμών
$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[dr, "u"] & \\
& C''' \\
C'' \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$
με κοινό συν-πεδίο,

$$\forall x' \colon C' \; \forall x'' \colon C'' \;\; (u(x') = v(x'') \to \; \bigvee_{C} \bigvee_{\substack{w, r : C \to C', C'' \\ u \cdot w = v \cdot r}} \exists x \colon C \;\; (w(x) = x' \wedge r(x) = x''))$$

Αν στη θεωρία των συναρτητών της $\mathcal{C}$ προσθέσουμε τα αξιώματα SF1 και SF2 έχουμε την **θεωρία των sifted επίπεδων συναρτητών** της $\mathcal{C}$.

Αν στη θεωρία των συναρτητών της $\mathcal{C}$ προσθέσουμε τα αξιώματα CLF1 και CLF2 έχουμε την **θεωρία των επίπεδων ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια συναρτητών** της $\mathcal{C}$.

Αν στη θεωρία των συναρτητών της $\mathcal{C}$ προσθέσουμε τα αξιώματα F1, SF1 και CLF1 έχουμε την **θεωρία των επίπεδων συναρτητών** της $\mathcal{C}$.

Τα παραπάνω αξιώματα είναι γεωμετρικές προτάσεις και άρα μπορούν να εκφραστούν με στοιχειώδης όρους (δηλαδή σε καθαρά διαγραμματική μορφή) σε κατηγορίες που η έννοια της καλύπτουσας οικογένειας είναι διαθέσιμη, δηλαδή σε sites.

Αν τώρα $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα υποκανικό site, τότε ένα μοντέλο (στην $\mathcal{E}$ αναφορικά με την τοπολογία Grothenieck με την οποία είναι εφοδιασμένη) της θεωρίας των sifted επίπεδων συναρτητών της $\mathcal{C}$ θα είναι ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, όπου επιπλέον οι προτάσεις SF1 και SF2 πληρούνται σε κάθε "βήμα" $T \in \mathcal{E}$.
• Για την πρόταση SF1 αυτό σημαίνει αναλυτικά ότι:
Οποτεδήποτε έχουμε (στην $\mathcal{E}$) ένα διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "x'"'] \arrow[dr, "x''"] & \\ FC' & & FC'', \end{tikzcd}$$

υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T \mid \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο $C_\alpha \in \mathcal{C}$, μορφισμοί $u : C_\alpha \to C'$, $v : C_\alpha \to C''$ και ένας μορφισμός (γενικευμένο στοιχείο του FC_α) $x_\alpha : T_\alpha \to FC_\alpha$ έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[dr, dotted, "x_\alpha"] & T \arrow[ddl, "x'"'] \arrow[ddr, "x''"] & \\ & FC_\alpha \arrow[dl, "Fu"] \arrow[dr, "Fv"'] & \\ FC' & & FC'' \end{tikzcd}$$

δηλαδή: $Fu \cdot x_\alpha = x' \cdot t_\alpha$ και $Fv \cdot x_\alpha = x'' \cdot t_\alpha$

• Για την πρόταση SF2 έχουμε:

Οποτεδήποτε έχουμε ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα (στην $\mathcal{E}$) της μορφής:

$$
\begin{tikzcd}
& T \arrow[d, "x'"'] & \\
& FX' \arrow[dl, "Ff'"'] \arrow[dr, "Fg'"] & \\
FA & & FB \\
& FX \arrow[ul, "Ff"] \arrow[ur, "Fg"'] & \\
& T \arrow[u, "x"] &
\end{tikzcd}
$$

δηλαδή ισχύουν οι ισότητες: $Ff \cdot x = Ff' \cdot x'$ και $Fg \cdot x = Fg' \cdot x'$, τότε υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T \mid \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ $z(= z(\alpha))$:

$$
\begin{tikzcd}
& X' \arrow[dddl, "f'"'] \arrow[dddr, "g'"] & \\
& X_n \arrow[u, "d_n^1"'] \arrow[ddl, "f_n"'] \arrow[ddr, "g_n"] \arrow[dd, dotted, no head] & \\
& & \\
C_1 & X_3 \arrow[l, "f_3"] \arrow[r, "g_3"'] \arrow[d, "d_3^0"'] & C_2 \\
& X_2 \arrow[ul, "f_2"] \arrow[ur, "g_2"'] & \\
& X_1 \arrow[u, "d_1^1"'] \arrow[uul, "f_1"] \arrow[uur, "g_1"'] \arrow[d, "d_1^0"'] & \\
& X \arrow[uuul, "f"] \arrow[uuur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

με όλα τα εσωτερικά τρίγωνα να είναι αντιμεταθετικά και υπάρχουν και μορφισμοί (γενικευμένα στοιχεία):

$$\begin{tikzcd} & & T_\alpha \arrow[dll, "x_1"'] \arrow[dl, "x_2"] \arrow[dr, "x_n"] & \\ FX_1 & FX_2 \arrow[r, dotted, no head] & \cdots \arrow[r, dotted, no head] & FX_n \end{tikzcd}$$

έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
& T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[ddr, dotted, "x_n"'] & T \arrow[d, "x'"] & \\
& & FX' \arrow[ddll, "Ff'"'] \arrow[ddr, "Fg'"] & \\
& & FX_n \arrow[u, "Fd_n^1"'] \arrow[dll, "Ff_n"] \arrow[dr, "Fg_n"'] \arrow[d, dotted, no head] & \\
FC_1 & & FX_3 \arrow[ll, "Ff_3"'] \arrow[r, "Fg_3"] \arrow[d, "Fd_3^0"] & FC_2 \\
& & FX_2 \arrow[ull, "Ff_2"] \arrow[ur, "Fg_2"'] & \\
& & FX_1 \arrow[u, "Fd_1^1"'] \arrow[d, "Fd_1^0"] \arrow[uull, "Ff_1"] \arrow[uur, "Fg_1"'] & \\
& & FX \arrow[uuull, "Ff"] \arrow[uuur, "Fg"'] & \\
& T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"'] \arrow[uur, dotted, "x_1"] \arrow[uuur, dotted, "x_2"] \arrow[uuuur, dotted, "x_3"] & T \arrow[u, "x"'] &
\end{tikzcd}$$

δηλαδή ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

$Fd_1^0 \cdot x_1 = x \cdot t_\alpha,\ Fd_1^1 \cdot x_1 = x_2,\ Fd_3^0 \cdot x_3 = x_2,\ Fd_3^1 \cdot x_3 = x_4,\ ...,\ Fd_n^0 \cdot x_n = x_{n-1},\ Fd_n^1 \cdot x_n = x' \cdot t_\alpha$

3.2.1 Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα υποκανικό site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Θα λέμε ότι ο F είναι j-**sifted επίπεδος**, αν ο F πληροί (αναφορικά με την εσωτερική λογική του site) τις συνθήκες SF1 και SF2.*

Όπως και παραπάνω, αν $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα υποκανικό site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ είναι ένας συναρτητής, τότε αν ερμηνεύσουμε τις προτάσεις CLF1 και CLF2, έχουμε ότι η πρόταση

CLF1 πληρούται σε κάθε βήμα $T \in \mathcal{E}$ αν:
Για κάθε διάγραμμα (στην $\mathcal{E}$) της μορφής:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "x"] & FC' \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fv"'] & FC'' \end{tikzcd}$$

με $Fu \cdot x = Fv \cdot x$, υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T \mid \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο $C_\alpha \in \mathcal{C}$, ένας μορφισμός $w : C_\alpha \to C'$ με την ιδιότητα $u \cdot w = v \cdot w$ και ένας μορφισμός (γενικευμένο στοιχείο) $x_\alpha : T_\alpha \to FC_\alpha$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} FC_\alpha \arrow[r, "Fw"] & FC' \arrow[r, shift left, "Fu"] \arrow[r, shift right, "Fv"'] & FC'' \\ T_\alpha \arrow[u, dotted, "x_\alpha"] \arrow[r, "t_\alpha"] & T \arrow[u, "x"'] & \end{tikzcd}$$

δηλαδή: $x \cdot t_\alpha = Fw \cdot x_\alpha$

Αντίστοιχα τώρα, η πρόταση CLF2 πληρούται σε κάθε βήμα $T \in \mathcal{E}$, αν οποτεδήποτε έχουμε ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "x'"] \arrow[d, "x''"'] & FC' \arrow[d, "Fu"] \\ FC'' \arrow[r, "Fv"'] & FC''' \end{tikzcd}$$

δηλαδή $Fu \cdot x' = Fv \cdot x''$, υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T \mid \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο $C_\alpha \in \mathcal{C}$, μορφισμοί $w : C_\alpha \to C'$, $r : C_\alpha \to C''$ με την ιδιότητα $u \cdot w = v \cdot r$ και ένας μορφισμός (γενικευμένο στοιχείο) $x_\alpha : T_\alpha \to FC_\alpha$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[drr, dotted, "x_\alpha"'] & T \arrow[drr, "x'"] \arrow[ddr, "x''"'] & & \\ & & FC_\alpha \arrow[r, "Fw"] \arrow[d, "Fr"] & FC' \arrow[d, "Fu"] \\ & & FC'' \arrow[r, "Fv"] & FC''' \end{tikzcd}$$

δηλαδή: $Fw \cdot x_\alpha = x' \cdot t_\alpha$ και $Fr \cdot x_\alpha = x'' \cdot t_\alpha$

3.2.2 Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα υποκανικό site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Θα λέμε ότι ο F είναι j-* **επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια**, *αν ο F πληροί (αναφορικά με την εσωτερική λογική του site) τις συνθήκες CLF1 και CLF2.*

Τέλος, με τα ίδια δεδομένα όπως και στις αναλύσεις μας για τις προτάσεις SF1, SF2, CLF1 και CLF2, έχουμε ότι η πρόταση F1 πληρούται σε κάθε βήμα $T \in \mathcal{E}$, αν για κάθε $T \in \mathcal{E}$, υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T \mid \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο $C_\alpha \in \mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $T_\alpha \to FC_\alpha$.

3.2.3 Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα υποκανικό site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Θα λέμε ότι ο F είναι j-* **επίπεδος**, *αν ο F πληροί (αναφορικά με την εσωτερική λογική του site) τις συνθήκες F1, SF1 και CLF1.*

3.2.4 Παρατήρηση. Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ είναι επίπεδος με την έννοια του Ορισμού 2.3.12, αν και μόνο αν είναι είναι j-επίπεδος, όπου j είναι η τετριμμένη τοπολογία στην $\mathcal{E}$ (βλέπε Παράδειγμα 3.1.6). Το ίδιο ισχύει και για sifted-επίπεδους συναρτητές (Ορισμός 2.3.30) και επίπεδους ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια συναρτητές.

3.2.5 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{E}$ είναι μία κατηγορία και j, j' δύο τοπολογίες στην $\mathcal{E}$ με $j' \leq j$ και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ είναι ένας συναρτητής. Αν ο F είναι j'-επίπεδος (αντίστοιχα j'-sifted-επίπεδος, j'-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια), τότε είναι και j-επίπεδος (αντίστοιχα j-sifted-επίπεδος, j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια). Άρα αν ο F είναι επίπεδος (αντίστοιχα sifted-επίπεδος, επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια), τότε είναι και j-επίπεδος (αντίστοιχα j-sifted-επίπεδος, j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια) για οποιαδήποτε (υποκανονική) τοπολογία j.

3.2.6 Παρατήρηση. Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ με τιμές στην κατηγορία των συνόλων, είναι επίπεδος (αντίστοιχα sifted-επίπεδος, επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια) με την έννοια του Ορισμού 2.3.5 (αντίστοιχα Ορισμοί 2.3.24 και 2.3.38), αν και μόνο αν είναι είναι j-επίπεδος (αντίστοιχα j-sifted-επίπεδος, j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια), όπου j είναι η τοπολογία των επιμορφικών καλυμμάτων στην **Set** (βλέπε Παρατήρηση 3.1.22). Επίσης αν $\mathcal{E}$ είναι ένας στοιχειώδης τόπος και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, τότε ο F είναι φιλτραρισμένος (βλέπε Ορισμός 2.3.46) αν και μόνο αν είναι j-επίπεδος όπου όπου j είναι η τοπολογία των επιμορφικών καλυμμάτων στον τόπο $\mathcal{E}$.

3.2.7 Παρατήρηση. Όπως αναφέραμε στην Παρατήρηση 2.3.13, αν $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ είναι ένας συναρτητής με τιμές στην κατηγορία των συνόλων, τότε οι Ορισμοί 2.3.5 και 2.3.12, δεν σημαίνουν (απαραίτητα) το ίδιο. Σύμφωνα με την ανάλυση που κάναμε σ' αυτή την ενότητα η διαφορά είναι ότι, ο μεν Ορισμός 2.3.5, σημαίνει j-επιπεδότητα αναφορικά με την τοπολογία των επιμορφικών καλυμμάτων στον τόπο των συνόλων (Παρατήρηση 3.2.6), ο δε Ορισμός 2.3.12, σημαίνει j-επιπεδότητα αναφορικά με την τετριμμένη τοπολογία στην κατηγορία των συνόλων (Παρατήρηση 3.2.4).

3.3 Καθορισμένα Συνόρια

Όπως αναφέραμε και στην αρχή αυτού του Κεφαλαίου τα καθορισμένα συνόρια εισήχθησαν από τον Anders Kock ([34]). Σ΄ αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε αυτή την έννοια με αναλυτικό τρόπο, αναφέρουμε τα βασικά αποτελέσματα της εργασίας [34] και επεξεργαζόμαστε λίγο πιο αναλυτικά, κάποια από αυτά. Πέραν της εργασίας ([34]), για την έννοια των καθορισμένων συνορίων υπάρχει και η εργασία [20], η οποία στην §6 πραγματεύεται αυτή την έννοια μ΄ ένα διαφορετικό (αλλά ισοδύναμο) τρόπο.

Όπως έχουμε αναφέρει και σε κάποια άλλα σημεία, αν $\mathcal{C}$ είναι μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ ένας συναρτητής με τιμές στην κατηγορία των συνόλων ($\mathcal{C}$-διάγραμμα στα σύνολα), τότε το συνόριο ενός τέτοιου διαγράμματος υπάρχει πάντα και έχει την ακόλουθη περιγραφή:

$$\mathrm{colim} F \cong \coprod_{C \in \mathcal{C}} FC \Big/ \sim$$

όπου: $FC \ni x \sim x' \in FC'$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ στην κατηγορία των στοιχείων του F που συνδέει τα (C, x) και (C', x'). Πιο αναλυτικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ στην $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & C_n \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & \\ C & & \cdot \arrow[r, dotted, no head] & \cdot & & C' \end{tikzcd}$$

και στοιχεία $x_1 \in FC_1$, $x_2 \in FC_2$, ..., $x_n \in FC_n$, τέτοια ώστε $Fd_{1,0}(x_1) = x$, $Fd_{1,1}(x_1) = x_2$,..., $Fd_{n,1}(x_n) = x'$.

Επιπλέον οι κανονικοί μορφισμοί προς το συνόριο είναι: $FC \to \coprod_{C \in \mathcal{C}} FC \to \coprod_{C \in \mathcal{C}} FC \Big/ \sim$

Αν περιγράψουμε λίγο την παραπάνω κατασκευή έχουμε για το συνόριο ενός συναρτητή με τιμές στα σύνολα ότι:

- Κάθε στοιχείο του συνορίου μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα στοιχείο κάποιας συνιστώσας του.
- Αν ένα στοιχείο του συνορίου έχει δύο τέτοιες αναπαραστάσεις, τότε υπάρχει μία συνθήκη συμβατότητας μεταξύ των δύο αυτών αναπαραστάσεων.

Οι δύο αυτές συνθήκες χρησιμοποιούνται ουσιωδώς για τις αποδείξεις θεωρημάτων όπως το Θεώρημα 2.3.26, και όπως παρατήρησε ο Anders Kock ([34]) μπορούμε να εκφράσουμε αυτές τις συνθήκες στα πλαίσια της γεωμετρικής λογικής, δηλαδή με γεωμετρικές προτάσεις και κατά συνέπεια να μπορούμε να "μιλήσουμε" γι΄ αυτές τις συνθήκες όταν αντί της κατηγορίας των συνόλων έχουμε ένα οποιοδήποτε site $(\mathcal{E}, j)$.

Πιο συγκεκριμένα, αν $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ είναι ένα (μικρό) διάγραμμα σε μία κατηγορία $\mathcal{E}$ και $\{\mathrm{incl}_C : F(C) \to L |\, C \in \mathcal{C}\}$ (1) ένας συν-κώνος γι΄ αυτό το διάγραμμα, θεωρούμε τις εξής προτάσεις (διατυπωμένες στην εσωτερική γλώσσα της $\mathcal{E}$):

PC1: $\forall x : L \bigvee\limits_{C \in \mathcal{C}} \exists y : FC \ \ (\mathrm{incl}_C(y) = x)$ και

PC2: $\forall x : FC\ \forall y : FC' \ \ (\mathrm{incl}_C(x) = \mathrm{incl}_{C'}(y) \to \bigvee\limits_{\mathcal{Z}(C,C')} \exists z_1 {:} FC_1 ... \ \exists z_n : FC_n \ (Fd_{1,0}(z_1) =$
$x \ \wedge Fd_{1,1}(z_1) = Fd_{2,0}(z_2) \ \wedge ... \wedge \ Fd_{n,1}(z_n) = y))$,

όπου με $\mathcal{Z}(C, C')$ συμβολίζουμε το σύνολο των ζιγκ-ζαγκ από το C στο C'

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & C_n \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & \\
C & & \cdot \arrow[r, dotted, no head] & \cdot & & C'
\end{tikzcd}$$

Αν τώρα η κατηγορία $\mathcal{E}$ είναι εφοδιασμένη με μία (υποκανονική) τοπολογία Grothendieck j (δηλ. $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα site), τότε οι ερμηνείες αυτών των προτάσεων μπορούν να εκφραστούν σε καθαρά διαγραμματική μορφή. Πιο συγκεκριμένα θα λέμε ότι ο συν-κώνος (1) είναι j-**καθορισμένος** (postulated) , αν οι προτάσεις PC1 και PC2 αληθεύουν (αναφορικά με την εσωτερική λογική του site $(\mathcal{E}, j)$) σε κάθε "βήμα" $X \in \mathcal{E}$ και αυτό σημαίνει:

1. Οποτεδήποτε έχουμε ένα μορφισμό $x : X \to L$, υπάρχει ένα κάλυμμα $\{\xi_\alpha {:} X_\alpha \to X \mid \alpha \in A\}$ του X τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο $C_\alpha \in \mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $x_\alpha : X_\alpha \to FC_\alpha$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[r, "\xi_\alpha"] \arrow[d, "x_\alpha"'] & X \arrow[d, "x"] \\
FC_\alpha \arrow[r, "incl_{C_\alpha}"'] & L
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $incl_{C_\alpha} \cdot x_\alpha = x \cdot \xi_\alpha$

2. Οποτεδήποτε έχουμε ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα της μορφής:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
FC \arrow[dr, "incl_C"'] & & FC' \arrow[dl, "incl_{C'}"] \\
 & L &
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $incl_C \cdot x = incl_{C'} \cdot y$, υπάρχει ένα κάλυμμα $\{\xi_\alpha : X_\alpha \to X \mid \alpha \in A\}$ του X τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ $z(= z(\alpha))$ στην $\mathcal{C}$ που συνδέει τα C, C'

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & C_n \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & \\
C & & \cdot \arrow[r, dotted, dash] & \cdot & & C'
\end{tikzcd}$$

και μορφισμοί (γενικευμένα στοιχεία σε βήμα X_α)

$$\begin{tikzcd}
& & & X_\alpha \arrow[dlll, "x_1"'] \arrow[dl, "x_2"'] \arrow[d, "x_n"] \\
FC_1 & & FC_2 \arrow[r, dotted, dash] & FC_n
\end{tikzcd}$$

έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

$$Fd_1^0 \cdot x_1 = x \cdot \xi_\alpha, \;\; Fd_1^1 \cdot x_1 = x_2, \;\; Fd_3^0 \cdot x_3 = x_2, \;\; Fd_3^1 \cdot x_3 = x_4, ..., Fd_n^1 \cdot x_n = y \cdot \xi_\alpha$$

δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
& & X_\alpha \arrow[dr, "\xi_\alpha"] \arrow[ddl, "x_1"'] \arrow[ddd, "x_2"] \arrow[ddrrr, bend left, "x_n"] & & & & \\
& & & X \arrow[ddlll, bend right, "x"'] \arrow[ddrrr, bend left, "y"] & & & \\
& FC_1 \arrow[dl, "Fd_{1,0}"] \arrow[dr, "Fd_{1,1}"] & & & & FC_n \arrow[dl, "Fd_{n,0}"'] \arrow[dr, "Fd_{n,1}"'] & \\
FC & & \cdot \arrow[rr, dotted, dash] & & \cdot & & FC'
\end{tikzcd}$$

3.3.1 Παρατήρηση. Αν $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα υποκανονικό site, τότε το αντίστροφο της συνθήκης PC2 ισχύει πάντα για ένα συν-κώνο $\{\mathrm{incl}_C : F(C) \to L | \, C \in \mathcal{C}\}$ στην $\mathcal{E}$. Δηλαδή, αν για κάθε $\alpha \in A$ το παραπάνω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό, τότε από το γεγονός ότι το L είναι συν-κώνος, έχουμε ότι το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
 & & X_\alpha \arrow[dr, "\xi_\alpha"] \arrow[ddl, "x_1"'] \arrow[ddd, "x_2"] \arrow[ddrrr, bend left, "x_n"] & & & & \\
 & & & X \arrow[ddlll, bend right, "x"'] \arrow[ddrrr, bend left, "y"] & & & \\
 & FC_1 \arrow[dl, "Fd_{1,0}"'] \arrow[dr, "Fd_{1,1}"] \arrow[ddrr, bend right, "incl_{C_1}"] & & & & FC_n \arrow[dl, "Fd_{n,0}"'] \arrow[dr, "Fd_{n,1}"] \arrow[ddll, bend left, "incl_{C_n}"'] & \\
FC \arrow[drrr, "incl_C"'] & & \cdot \arrow[rr, dotted, no head] & & \cdot & & FC' \arrow[dlll, "incl_{C'}"] \\
 & & & L & & &
\end{tikzcd}
$$

είναι αντιμεταθετικό. Από την αντιμεταθετικότητα αυτού του διαγράμματος προκύπτει ότι: $incl_C \cdot x \cdot \xi_\alpha = incl_{C'} \cdot y \cdot \xi_\alpha$ και επειδή το site είναι υποκανονικό έχουμε (Πρόταση 3.1.23) ότι: $incl_C \cdot x = incl_{C'} \cdot y$.

3.3.2 Παρατήρηση. Αν $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα υποκανονικό site, τότε για να πληρούται η συνθήκη PC1 πρέπει και αρκεί η οικογένεια $\{\mathrm{incl}_C : F(C) \to L | C \in \mathcal{C}\}$ να είναι καλύπτουσα (με την έννοια ότι παράγει ένα καλύπτον κόσκινο για την τοπολογία j (βλέπε Παρατήρηση 3.1.5). Ένας τρόπος για να το δούμε άμεσα, είναι ότι η συνθήκη PC1 είναι μία αναδιατύπωση του γεγονότος ότι ο επαγόμενος μορφισμός $\coprod_{C \in \mathcal{C}} y(FC) \to y(L)$ είναι τοπικά επί (βλέπε Παρατήρηση 3.1.15). Το συμπέρασμα έπεται από [40], Κεφ.3, §7, Πορίσματα 5 και 6.

3.3.3 Παρατήρηση. Αν ένας συν-κώνος $\{\mathrm{incl}_C : F(C) \to L | \, C \in \mathcal{C}\}$ είναι j- καθορισμένος για κάποια υποκανονική τοπολογία j στην $\mathcal{E}$, τότε ([34], Πρόταση 2.1) το L είναι το συνόριο του διαγράμματος και $\mathrm{incl}_C : F(C) \to L$ είναι οι κανονικοί μορφισμοί προς το συνόριο. Με βάση αυτή την παρατήρηση στο υπόλοιπο αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιούμε μόνο τον όρο **j-καθορισμένα συνόριο** αντί του όρου j-καθορισμένος συν-κώνος. Από την απόδειξη αυτής της Πρότασης μπορεί κανείς να δει ότι η εμφύτευση Yoneda της κατηγορίας $\mathcal{E}$ (η οποία λαμβάνει τιμές στην κατηγορία $Sh(\mathcal{E}, j)$ αφού η j είναι υποκανονική) αντιστοιχεί ένα καθορισμένο συνόριο της $\mathcal{E}$ στο συνόριο του αντίστοιχου διαγράμματος στην $Sh(\mathcal{E}, j)$. Μάλιστα, αυτή η συνθήκη χαρακτηρίζει τα καθορισμένα συνόρια της $\mathcal{E}$.

Καθορισμένα συν-γινόμενα: Αν $\mathcal{C}$ είναι μία διακριτική κατηγορία και το συν-γινόμενο $\{\mathrm{incl}_C : F(C) \to \coprod_{C \in \mathcal{C}} FC\}$ (υπάρχει και) είναι καθορισμένο, τότε εφαρμόζοντας την συνθήκη PC2 στην περίπτωση ενός διαγράμματος της μορφής

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ FC \arrow[dr, "incl_C"'] & & FC \arrow[dl, "incl_C"] \\ & \coprod\limits_{C\in\mathcal{C}} FC & \end{tikzcd}$$

έχουμε ως συμπέρασμα ότι οι μορφισμοί προς το συν-γινόμενο είναι μονομορφισμοί. Πράγματι, έχουμε ότι $\mathcal{Z}(C, C) = \{id_C\}$, οπότε αν $incl_C \cdot x = incl_C \cdot y$ έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{\xi_\alpha\colon X_\alpha \to X \mid \alpha \in A\}$ του X έτσι ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει μορφισμός $f_\alpha : X_\alpha \to FC$ έτσι ώστε $x\cdot\xi_\alpha = f_\alpha$ και $y\cdot\xi_\alpha = f_\alpha$, άρα $x\cdot\xi_\alpha = y\cdot\xi_\alpha$ και επειδή το site είναι υποκανονικό έχουμε ότι $x = y$. Επιπλέον, επειδή στην περίπτωση που $\mathcal{C}$ είναι διακριτική κατηγορία έχουμε ότι $\mathcal{Z}(C, D) = \emptyset$ όταν $C \neq D$ και αν επιπλέον η $\mathcal{E}$ έχει εφελκύσεις και αρχικό αντικείμενο ($\mathbf{0}$), τότε έχουμε ως συμπέρασμα ότι: $FC \times_{\coprod\limits_{C\in\mathcal{C}} FC} FD = \mathbf{0}$.

3.3.4 Συμπέρασμα. Τα καθορισμένα συν-γινόμενα χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι είναι διαζευγμένα (Ορισμός 2.1.11) και οι κανονικοί μορφισμοί προς το συν-γινόμενο αποτελούν μία καλύπτουσα οικογένεια. Επιπλέον ([34], Πρόταση 1.2,) τα καθορισμένα συν-γινόμενα είναι καθολικά.

3.3.5 Ορισμός. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα υποκανονικό site και $f : X \to Y$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{E}$. Ο f καλείται* **καθορισμένος επιμορφισμός** *(postulated epi), αν για κάθε $Z \in \mathcal{E}$ και για κάθε $z : Z \to Y$ υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : Z_\alpha \to Z | \alpha \in A\}$ του Z έτσι ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο $Z_\alpha \in \mathcal{E}$ και ένας μορφισμός $z_\alpha : Z_\alpha \to X$ τέτοιος ώστε το παρακάτω τετράγωνο να είναι αντιμεταθετικό*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ Z_\alpha \arrow[u, "z_\alpha"] \arrow[r, "t_\alpha"'] & Z \arrow[u, "z"'] \end{tikzcd}$$

3.3.6 Παρατήρηση. Με όρους της εσωτερικής λογικής του site θα λέγαμε ότι ο f είναι καθορισμένος επιμορφισμός αν πληρούται η πρόταση:
(**PE**): $\forall z : Y\, \exists x : X(f(x) = z)$.

Επίσης, το να είναι ο f καθορισμένος επιμορφισμός, είναι ισοδύναμο το να είναι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "id_y"] \\ Y \arrow[r, "id_y"'] & Y \end{tikzcd}$$

καθορισμένη εξώθηση (pushout).

3.3.7 Παρατήρηση. Στην Παρατήρηση 3.1.26 είδαμε ότι κάθε καλύπτουσα οικογένεια είναι επιμορφική. Αν τώρα $R = \{f_i : E_i \to E | i \in I\}$ μία οικογένεια μορφισμών τέτοια ώστε ο επαγόμενος μορφισμός $\coprod_{i\in I} E_i \to E$ να είναι καθορισμένος επιμορφισμός και το συν-γινόμενο $\coprod_{i\in I} E_i$ είναι καθορισμένο, τότε η οικογένεια R είναι καλύπτουσα (με την έννοια ότι $< R >\in j(E)$). Πράγματι, από το γεγονός ότι η εμφύτευση Yoneda στέλνει καθορισμένα συνόρια της $\mathcal{E}$ σε συνόρια στην $Sh(\mathcal{E}, j)$, έχουμε ότι η εμφύτευση Yoneda αντιστοιχίζει το μορφισμό $\coprod_{i\in I} E_i \to E$ στο φυσικό μετασχηματισμό $\coprod_{i\in I} yE_i \to yE$ (αφού τα συν-γινόμενα είναι καθορισμένα) και ο μορφισμός αυτός θα είναι τοπικά επί (αφού οι καθορισμένοι επιμορφισμοί αντιστοιχίζονται σε επιμορφισμούς), άρα η οικογένεια R είναι καλύπτουσα (βλέπε Παρατήρηση 3.3.2).

3.3.8 Πρόταση. *Σ' ένα υποκανονικό site $(\mathcal{E}, j)$, κάθε καθορισμένος επιμορφισμός είναι επιμορφισμός. Επιπλέον κάθε καθορισμένος επιμορφισμός που είναι και μονομορφισμός είναι διασπώμενος*[11]*. Κατά συνέπεια, αν ένας μορφισμός είναι καθορισμένος επιμορφισμός και μονομορφισμός τότε είναι και ισομορφισμός.*

3.3.9 Απόδειξη. Έστω $f : X \to Y$ ένας καθορισμένος επιμορφισμός στην $\mathcal{E}$ και $g, h : Y \rightrightarrows Z$ έτσι ώστε $g \cdot f = h \cdot f$. Θεωρώντας τον ταυτοτικό μορφισμό $id_Y : Y \to Y$ του Y, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : Y_\alpha \to Y | \alpha \in A\}$ του Y τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο Y_α και ένας μορφισμός $f_\alpha : Y_\alpha \to Y$ έτσι ώστε $f \cdot f_\alpha = t_\alpha$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ Y_\alpha \arrow[u, "f_\alpha"] \arrow[r, "t_\alpha"'] & Y \arrow[u, "id_Y"'] \end{tikzcd}$$

Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε $\alpha \in A$: $g \cdot t_\alpha = g \cdot f \cdot f_\alpha = h \cdot f \cdot f_\alpha = h \cdot t_\alpha$ και αφού το site είναι υποκανονικό έχουμε ότι $g = h$, δηλαδή ο f είναι επιμορφισμός.

[11] Ορισμός 2.1.8

Αν τώρα ο f είναι και μονομορφισμός, τότε η οικογένεια $\{f_\alpha : Y_\alpha \to X | \alpha \in A\}$ αποτελεί μία συμβατή οικογένεια στοιχείων του συναρτητή $\hom_{\mathcal{E}}(-, X)$ για το κάλυμμα $\{t_\alpha | \alpha \in A\}$. Πράγματι:
Αν α, $\alpha' \in A$ έχουμε: $f \circ f_\alpha \circ \pi^1_{aa'} = t_\alpha \circ \pi^1_{\alpha\alpha'} = t_{\alpha'} \circ \pi^2_{aa'} = f \circ f_{\alpha'} \circ \pi^2_{\alpha\alpha'}$ και επειδή ο f είναι μονομορφισμός, έχουμε ότι: $f_\alpha \circ \pi^1_{aa'} = f_{\alpha'} \circ \pi^2_{aa'}$.

Άρα αφού το site $(\mathcal{E}, j)$ είναι υποκανονικό, έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός $g : Y \to X$ με την ιδιότητα $g \circ t_\alpha = f_\alpha$ για κάθε $\alpha \in A$ (βλέπε Παράδειγμα 3.1.12).

$$\begin{tikzcd}
Y_\alpha \times_Y Y_{\alpha'} \arrow[r, "\pi^1_{\alpha\alpha'}"] \arrow[d, "\pi^2_{\alpha\alpha'}"'] & Y_\alpha \arrow[d, "t_\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "f_\alpha"] & \\
Y_{\alpha'} \arrow[r, "t_{\alpha'}"'] \arrow[drr, bend right, "f_{\alpha'}"'] & Y \arrow[dr, dotted, "g"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Τέλος, για κάθε $\alpha \in A$ έχουμε:
$f \circ g \circ t_a = f \circ f_\alpha = id_Y \circ t_\alpha$, άρα από την υποκανονικότητα του site έχουμε ότι $f \circ g = id_Y$, δηλαδή ο f είναι διασπώμενος.

Καθορισμένοι συνεξισωτές: Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα υποκανονικό site και $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{q} Q$ ένα διάγραμμα συνεξισωτή στην $\mathcal{E}$. Ο συνεξισωτής $((Q, q))$ είναι καθορισμένος αν:

- Ο μορφισμός $q : Y \to Q$ είναι καθορισμένος επιμορφισμός.
- Αν $x, y : T \to Y$ τέτοιοι ώστε $q \cdot x = q \cdot y$,[12] τότε υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ της μορφής

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & Y & & \cdots\cdots & & Y
\end{tikzcd}$$

και μορφισμοί

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dash, dotted] \\
T_\alpha \arrow[ur, "x_1"] \arrow[r, "x_2"] \arrow[dr, "x_n"'] & X \\
& X
\end{tikzcd}$$

[12]Τα γενικευμένα στοιχεία x και y ισούνται στον συνεξισωτή.

έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
 & & T_\alpha \arrow[dr, "t_\alpha"] \arrow[ddl, "x_1"'] \arrow[ddr, "x_2"] \arrow[ddrrr, bend left, "x_n"] & & & & \\
 & & & T \arrow[ddlll, bend right, "x"'] \arrow[ddrrr, bend left, "y"] & & & \\
 & X \arrow[dl, "f"] \arrow[dr, "g"] & & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & Y & & \cdots\cdots & & Y
\end{tikzcd}
$$

δηλαδή ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες

$$f \cdot x_1 = x \cdot t_\alpha,\ g \cdot x_1 = f \cdot x_2,\ g \cdot x_2 = f \cdot x_3,\ ...,\ g \cdot x_{n-1} = f \cdot x_n,\ g \cdot x_n = y \cdot t_\alpha$$

Από το κλασικό Θεώρημα της Θεωρίας των Κατηγοριών σύμφωνα με το οποίο, μία κατηγορία έχει όλα τα (μικρά) συνόρια αν και μόνο αν έχει όλα τα (μικρά) συν-γινόμενα και όλους τους συνεξισωτές έχουμε άμεσα ότι:

3.3.10 Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα υποκανονικό και συν-πλήρες site. Αν οι συνεξισωτές και όλα τα μικρά συν-γινόμενα στην $\mathcal{E}$ είναι καθορισμένα, τότε και όλα τα μικρά συνόρια θα είναι καθορισμένα.*

Οι ∞-προτόποι χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι όλα τα συνόρια είναι καθορισμένα. Πιο συγκεκριμένα, αν $\mathcal{E}$ είναι ένας ∞-προτόπος, τότε οι από κοινού επιμορφικές οικογένειες ορίζουν μία υποκανονική τοπολογία Grothendieck στην $\mathcal{E}$. Με αυτή την τοπολογία στην $\mathcal{E}$ έχουμε:

3.3.11 Πρόταση. *([34], Πρόταση 2.1) Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας ∞-προτόπος, τότε κάθε συνόριο στην $\mathcal{E}$ είναι καθορισμένο.*

Για την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού αρκεί κάποιος να δείξει ότι οι συνεξισωτές και όλα τα συν-γινόμενα στην $\mathcal{E}$ είναι καθορισμένα (Πρόταση 3.3.10). Για τα συν-γινόμενα, προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι προφανώς οι κανονικοί μορφισμοί προς ένα συν-γινόμενο αποτελούν επιμορφική οικογένεια (άρα καλύπτουσα οικογένεια στην περίπτωση μας) και επιπλέον από την πρώτη συνθήκη του θεωρήματος Giraud τα συν-γινόμενα είναι διαζευγμένα. Οι συνεξισωτές είναι καθορισμένοι για το λόγο ότι σ' ένα ∞-προτόπο ο συνεξισωτής ενός παράλληλου ζεύγους μορφισμών $E_1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} E_2$ κατασκευάζεται όπως και στην περίπτωση (με τις κατάλληλες αναλογίες) της κατηγορίας των συνόλων, δηλαδή ως η ελάχιστη σχέση ισοδυναμίας που περιέχει τα ζεύγη $(a(x), b(x))$.[13]

Αντίστροφα τώρα έχουμε:

3.3.12 Πρόταση. *([34], Πρόταση 2.1) Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα υποκανονικό site που έχει όλα τα συνόρια και όλα τα πεπερασμένα όρια. Αν στην $\mathcal{E}$ όλα τα συνόρια είναι καθορισμένα τότε η $\mathcal{E}$ είναι ένας ∞-προτόπος και οι καλύπτουσες οικογένειες της τοπολογίας j είναι οι (μικρές) απο κοινού επιμορφικές οικογένειες.*

3.3.13 Παρατήρηση. Αν $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα υποκανονικό site που έχει όλα τα συνόρια και $F : \mathcal{I} \to \mathcal{E}$ ένα $\mathcal{I}$-διάγραμμα στην $\mathcal{E}$ και $G : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ ένας τελικός συναρτητής (βλέπε Ορισμός 2.1.14), τότε αν ένα από τα συνόρια $\mathrm{colim}F$, $\mathrm{colim}(F \cdot G)$ είναι καθορισμένο, τότε θα είναι και το άλλο. Για παράδειγμα ας δούμε την περίπτωση που το συνόριο $\mathrm{colim}F$, πληροί την συνθήκη PC1.

Έστω λοιπόν, $x : T \to \mathrm{colim}(F \cdot G)$. Εφαρμόζουμε την συνθήκη PC1 για τον μορφισμό $h \cdot x : T \to \mathrm{colim}F$ (ο μορφισμός $h : \mathrm{colim}(F \cdot G) \to \mathrm{colim}F$, είναι ο κανονικός μορφισμός που συνδέει τα δύο συνόρια, βλέπε διάγραμμα 2.1, σελ.13). Άρα, υπάρχει ένα κάλυμμα $\{T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο $i_\alpha \in I$ και ένας μορφισμός $x_\alpha : T_\alpha \to F(i_\alpha)$, έτσι ώστε το παρακάτω τετράγωνο να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "x_\alpha"'] & T \arrow[d, "h \cdot x"] \\ F(i_\alpha) \arrow[r, "incl^F_{i_\alpha}"'] & \mathrm{colim}F \end{tikzcd}$$

Από την τελικότητα του συναρτητή G, έχουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο $j_\alpha \in \mathcal{J}$ και ένας μορφισμός $y_\alpha : i_\alpha \to G(j_\alpha)$ στην $\mathcal{I}$.

Από το παραπάνω αντιμεταθετικό διάγραμμα και το αντιμεταθετικό διάγραμμα 2.1, σελ.

[13]Για την κατασκευή των συνεξισωτών στην κατηγορία των συνόλων μπορείς κανείς να δει στο [26] §2, και για την γενικότερη κατασκευή των συνεξισωτών σ' ένα ∞-προτόπο στο [40], Παράρτημα, Απόδειξη Πρότασης 1).

13, έχουμε ότι [14]: $h \cdot x \cdot t_\alpha = h \cdot incl^{F \cdot G}_{j_\alpha} \cdot F(y_\alpha) \cdot x_\alpha$, και αφού ο h είναι ισομορφισμός, έχουμε την αντιμεταθετικότητα (για κάθε $\alpha \in A$) του παρακάτω διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "F(y_\alpha)\cdot x_\alpha"'] & T \arrow[d, "x"] \\
(F \cdot G)(j_\alpha) \arrow[r, "incl^{F\cdot G}_{j_\alpha}"'] & \mathrm{colim}(F \cdot G)
\end{tikzcd}$$

και συνεπώς, πληρούται η συνθήκη PC1 για το συνόριο $\mathrm{colim}(F \cdot G)$.

[14]Χρησιμοποιούμε επιπλέον, την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
F(i_\alpha) \arrow[rr, "F(y_\alpha)"] \arrow[dr, "incl^F_{i_\alpha}"'] & & F(G(j_\alpha)) \arrow[dl, "incl^F_{Gj_\alpha}"] \\
& \mathrm{colim}F &
\end{tikzcd}$$

Κεφάλαιο 4

Αριστερές Επεκτάσεις Kan που διατηρούν Πεπερασμένα Γινόμενα

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο, παρουσιάσαμε το "μηχανισμό" εκείνο, που μας επιτρέπει να διατυπώσουμε την "σωστή" έννοια επιπεδότητας για ένα συναρτητή με τιμές σε μία οποιαδήποτε κατηγορία εφοδιασμένη με μία υποκανονική τοπολογία Grothendieck. Στο Κεφάλαιο αυτό, χρησιμοποιώντας την έννοια της sifted επιπεδότητας αναφορικά με μία τοπολογία Grothendieck, και την έννοια του καθορισμένου συνορίου, παρουσιάζουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να διατηρεί η αριστερή επέκταση Kan πεπερασμένα γινόμενα. Επιπλέον παρουσιάζουμε πως εφαρμόζεται η μέθοδος που αναπτύξαμε με κάποια παραδείγματα. Τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου υπάρχουν ως επί το πλείστον στην εργασία μας [30].

4.1 Αποτελέσματα

Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $\mathcal{E}$ μία συν-πλήρης κατηγορία με πεπερασμένα γινόμενα και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Έστω τώρα C_1, C_2 δύο αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Αν θεωρήσουμε το γινόμενο $yC_1 \times yC_2$ των αντίστοιχων αναπαραστάσιμων στην κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, τότε αυτό μπορεί να γραφεί (βλέπε Θεώρημα 2.1.5) ως ένα συνόριο αναπαραστάσιμων. Η δείκτρια κατηγορία αυτού του συνορίου είναι η κατηγορία των στοιχείων του συναρτητή $yC_1 \times yC_2 : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$. Αν $C \in \mathcal{C}$, τότε $(yC_1 \times yC_2)(C) = yC_1(C) \times yC_2(C)$, συνεπώς τα αντικείμενα της κατηγορίας των στοιχείων του συναρτητή $yC_1 \times yC_2$ αποτελούν κώνους για το διακριτό διάγραμμα που αποτελείται από τα C_1 και C_2. Μορφισμοί σε αυτή την κατηγορία είναι **συμβατοί μορφισμοί** μεταξύ κώνων. Με τον όρο συμβατός μορφισμός μεταξύ κώνων, εννοούμε ότι αν $C_1 \xleftarrow{l_1} C \xrightarrow{l_2} C_2$ και $C_1 \xleftarrow{m_1} C' \xrightarrow{m_2} C_2$ δύο κώνοι, τότε ένας συμβατός μορφισμός από τον κώνο (C, l_1, l_2) στον κώνο (C', m_1, m_2) είναι ένας μορφισμός $f : C \to C'$ τέτοιος ώστε: $m_1 \cdot f = l_1$ και $m_2 \cdot f = l_2$. Έστω τώρα ότι η κατηγορία των στοιχείων του $yC_1 \times yC_2$ έχει μία τελική υποκατηγορία (βλέπε Ορισμός 2.1.14) [1] και $\{P_k | k \in K\}$ το σύνολο (αφού η $\mathcal{C}$ είναι μικρή) των αντικειμένων της, όπου κάθε P_k είναι ένας κώνος για το διακριτό διάγραμμα που αποτελείται από τα C_1 και C_2, δηλαδή κάθε P_k είναι εφοδιασμένο με δύο μορφισμούς

$$\begin{tikzcd} & P_k \arrow[dl, "p_k^1"'] \arrow[dr, "p_k^2"] & \\ C_1 & & C_2 \end{tikzcd}$$

Ένα τέτοιο σύνολο θα λέμε ότι αποτελεί μία **τελική οικογένεια κώνων** για για το διακριτό διάγραμμα που αποτελείται από τα C_1 και C_2. Για μία τέτοια τελική οικογένεια κώνων έχουμε (βλέπε Ορισμός 2.1.14 και Θεώρημα 2.1.15) τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

- Αν $C_1 \xleftarrow{l_1} C \xrightarrow{l_2} C_2$ ένας κώνος, τότε υπάρχει ένας δείκτης $k \in K$ έτσι ώστε ο κώνος (C, l_1, l_2) να παραγοντοποιείται μέσω του κώνου (P_k, p_k^1, p_k^2), δηλαδή υπάρχει μορφισμός (όχι απαραίτητα μοναδικός) $h : C \to P_K$, τέτοιος ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[ddl, "l_1"'] \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[ddr, "l_2"] & \\ & P_k \arrow[dl, "p_k^1"] \arrow[dr, "p_k^2"'] & \\ C_1 & & C_2 \end{tikzcd}$$

  και αν (P_k, p_k^1, p_k^2), $(P_{k'}, p_{k'}^1, p_{k'}^2)$ είναι δύο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις του κώνου (C, l_1, l_2), τότε υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ συμβατών μορφισμών από την τελική οικογένεια κώνων που κάθε ένας από αυτούς παραγοντοποιεί τον (C, l_1, l_2).

$$\begin{tikzcd} & & & C \arrow[dll] \arrow[drr] \arrow[ddlll, bend right] \arrow[ddrrr, bend left] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & & & \\ & P_{k_1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & P_{k_n} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ P_k & & \cdot & \cdots & \cdot & & P_{k'} \end{tikzcd}$$

[1] Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε την ίδια την κατηγορία των στοιχείων αυτού του συναρτητή.

- $\mathrm{colim}_k yP_k \cong yC_1 \times yC_2$

Από την συμβατότητα των μορφισμών μεταξύ των κώνων P_k, προκύπτει ότι το γινόμενο $FC_1 \times FC_2$ (στην $\mathcal{E}$) αποτελεί συν-κώνο για το διάγραμμα στην $\mathcal{E}$ που αποτελείται από τα FP_k. Άρα επάγεται ένας μορφισμός $f : \mathrm{colim}_k FP_k \to FC_1 \times FC_2$, όπως υποδεικνύεται από τα παρακάτω διαγράμματα, όπου με p_1, p_2 συμβολίζουμε τις προβολές του γινομένου $FC_1 \times FC_2$ και με $in_k : FP_k \to \mathrm{colim}_k FP_k$ τους κανονικούς μορφισμούς προς το συνόριο.

$$\begin{tikzcd} & P_k \arrow[dl, "p_k^1"'] \arrow[dr, "p_k^2"] & \\ C_1 & & C_2 \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} & FP_k \arrow[dl, "F(p_k^1)"'] \arrow[dr, "F(p_k^2)"] & \\ FC_1 & & FC_2 \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} & FP_k \arrow[d, dotted, "f_k"] \arrow[ddl, "F(p_k^1)"'] \arrow[ddr, "F(p_k^2)"] & \\ & FC_1 \times FC_2 \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\ FC_1 & & FC_2 \end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} FP_k \arrow[dr, "in_k"] \arrow[ddr, "f_k"'] & & FP_{k'} \arrow[dl, "in_{k'}"'] \arrow[ddl, "f_{k'}"] \\ & \mathrm{colim}_k FP_k \arrow[d, dotted, "f"] & \\ & FC_1 \times FC_2 & \end{tikzcd}$$

Επειδή η $\mathcal{E}$ είναι συν-πλήρης, όπως είδαμε στο Κεφαλαίο 2, η αριστερή επέκταση Kan του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda υπάρχει και η τιμή της σ′ ένα προδράγμα $X : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ είναι το συνόριο:

$$\mathrm{Lan}_y F(X) = \mathrm{colim}\{\ \mathrm{elts}(X) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E}\ \}$$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι το συνόριο $\mathrm{colim}_k FP_k$ είναι (με προσέγγιση ισομορφισμού) το συνόριο που υπεισέρχεται στον υπολογισμό της αριστερής επέκτασης Kan του γινόμενου $yC_1 \times yC_2$.

Στην Παράγραφο 3.2, είδαμε αναλυτικά την έννοια της j-sifted επιπεδότητας και στην Παράγραφο 3.3 την έννοια του καθορισμένου συνορίου. Τώρα, με τον συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το βασικό μας αποτέλεσμα.

4.1.1 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες υποκανονικό site με πεπερασμένα γινόμενα και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Έστω επιπλέον ότι για δύο αντικείμενα C_1, C_2 της $\mathcal{C}$, $\{P_k | k \in K\}$ είναι μία τελική οικογένεια κώνων για αυτό το ζευγάρι αντικειμένων με την ιδιότητα ότι το συνόριο $\mathrm{colim}_k FP_k$ πληροί την συνθήκη PC1. Τότε, αν ο F είναι j-sifted επίπεδος, ο μορφισμός*

$$f : \mathrm{colim}_k FP_k \to FC_1 \times FC_2$$

είναι ισομορφισμός.

4.1.2 Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι ο f είναι μονομορφισμός και διασπώμενος μορφισμός και κατά συνέπεια θα είναι ισομορφισμός (βλέπε Παρατήρηση 2.1.9)

Δείχνουμε πρώτα ότι ο f είναι μονομορφισμός: Θεωρούμε

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \mathrm{colim} FP_k \arrow[r, "f"] & FC_1 \times FC_2 \end{tikzcd}$$

με $f \cdot u = f \cdot v$. Χρησιμοποιώντας την συνθήκη PC1 (βλέπε σελ. 68) για τον μορφισμό $u : T \to \mathrm{colim} FP_k$, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T \mid \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$, υπάρχει ένας δείκτης $k(\alpha) \in K$ και ένας μορφισμός $u_\alpha : T_\alpha \to FP_{k(\alpha)}$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "u_\alpha"'] & T \arrow[d, "u"] \\ FP_{k(\alpha)} \arrow[r, "in_{k(\alpha)}"'] & \mathrm{colim} FP_k \end{tikzcd}$$

Όμοια, για τον μορφισμό $v : T \to \mathrm{colim} FP_k$, έχουμε για κάθε $\alpha \in A$, ένα αντιμεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "v_\alpha"'] & T \arrow[d, "v"] \\ FP_{k'(\alpha)} \arrow[r, "in_{k'(\alpha)}"'] & \mathrm{colim} FP_k \end{tikzcd}$$

Θεωρήσαμε ότι έχουμε το ίδιο κάλυμμα και τις δύο φορές που εφαρμόσαμε το PC1 μιας και οποιαδήποτε δύο καλύμματα έχουν μία κοινή εκλέπτυνση (βλέπε Πρόταση 3.1.10).

Το site είναι υποκανονικό, οπότε για να δείξουμε την ισότητα $u = v$, αρκεί να δείξουμε ότι $u \cdot t_\alpha = v \cdot t_\alpha$ για κάθε $\alpha \in A$ (βλέπε Πρόταση 3.1.24). Τότε, από την αντιμεταθετικότητα των δύο παραπάνω τετραγώνων, αρκεί να δείξουμε ότι $in_k \cdot u_\alpha = in_{k'} \cdot v_\alpha$.

Θεωρούμε τώρα το παρακάτω διάγραμμα στην $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd}
& T_\alpha \arrow[d, "u_\alpha"'] & \\
& FP_{k(\alpha)} \arrow[dl, "Fp^1_{k(\alpha)}"'] \arrow[dr, "Fp^2_{k(\alpha)}"] & \\
FC_1 & & FC_2 \\
& FP_{k'(\alpha)} \arrow[ul, "Fp^1_{k'(\alpha)}"] \arrow[ur, "Fp^2_{k'(\alpha)}"'] & \\
& T_\alpha \arrow[u, "v_\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

Το διάγραμμα αυτό είναι αντιμεταθετικό, αφού:

$$\begin{aligned}
Fp^1_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha &= p_1 \cdot f \cdot in_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha \\
&= p_1 \cdot f \cdot v \cdot t_\alpha \\
&= p_1 \cdot f \cdot u \cdot t_\alpha \\
&= p_1 \cdot f \cdot in_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha \\
&= Fp^1_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Fp^2_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha &= p_2 \cdot f \cdot in_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha \\
&= p_2 \cdot f \cdot v \cdot t_\alpha \\
&= p_2 \cdot f \cdot u \cdot t_\alpha \\
&= p_2 \cdot f \cdot in_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha \\
&= Fp^2_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha
\end{aligned}$$

Ο F είναι j-sifted επίπεδος, οπότε κάνοντας χρήση της συνθήκης SF2 (βλέπε σελ. 62) έχουμε ότι:

Για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_{\alpha\xi} : T_{\alpha\xi} \to T_\alpha | \xi \in \Xi_\alpha\}$ του T_α, έτσι ώστε για κάθε $\xi \in \Xi_\alpha$ υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ στην κατηγορία $(C_1, C_2) \downarrow \mathcal{C}^{op}$ που συνδέει τα $C_1 \xleftarrow{p^1_{k(\alpha)}} P_{k(\alpha)} \xrightarrow{p^2_{k(\alpha)}} C_2$ και $C_1 \xleftarrow{p^1_{k'(\alpha)}} P_{k'(\alpha)} \xrightarrow{p^2_{k'(\alpha)}} C_2$ με τον τρόπο που υποδεικνύει το ακόλουθο διάγραμμα (όπου, για την οικονομία της παρουσίασης θεωρήσαμε ένα ζιγκ-ζαγκ μήκους τρία):

$$\begin{tikzcd}
 & P_{k(\alpha)} \arrow[ddl, "p^2_{k(\alpha)}"'] \arrow[ddr, "p^1_{k(\alpha)}"] & \\
 & P_{k_3(\alpha)} \arrow[u, "d_3^1"] \arrow[d, "d_3^0"] \arrow[dl, "p^1_{k_3(\alpha)}"] \arrow[dr, "p^2_{k_3(\alpha)}"'] & \\
C_1 & P_{k_2(\alpha)} \arrow[l, "p^1_{k_2(\alpha)}"] \arrow[r, "p^2_{k_2(\alpha)}"'] & C_2 \\
 & P_{k_1(\alpha)} \arrow[u, "d_1^1"] \arrow[d, "d_1^0"] \arrow[ul, "p^1_{k_1(\alpha)}"] \arrow[ur, "p^2_{k_1(\alpha)}"'] & \\
 & P_{k'(\alpha)} \arrow[uul, "p^1_{k'(\alpha)}"] \arrow[uur, "p^1_{k'(\alpha)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρήσαμε ότι οι συνιστώσες του ζιγκ-ζαγκ είναι αντικείμενα της $\mathcal{C}$ που ανήκουν στην τελική οικογένεια των κώνων P_k. Ο λόγος είναι ότι κάθε συνιστώσα ενός τέτοιου ζιγκ-ζαγκ αποτελεί κώνο για το διακριτό διάγραμμα στην $\mathcal{C}$, άρα θα παραγοντοποιείται μέσω κάποιου P_k.

Επιπλέον, (από την συνθήκη SF2), έχουμε ότι για κάθε $\xi \in \Xi_\alpha$ υπάρχουν μορφισμοί (γενικευμένα στοιχεία)

$$\begin{tikzcd}
 & FP_{k_1(\alpha)} \\
T_{\alpha\xi} \arrow[ur, "x_1"] \arrow[r, "x_2"] \arrow[dr, "x_3"'] & FP_{k_2(\alpha)} \\
 & FP_{k_3(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
 & T_\alpha \arrow[d, "u_\alpha"] & \\
 & FP_{k(\alpha)} \arrow[ddr, "\langle Fp^1_{k(\alpha)}, Fp^2_{k(\alpha)}\rangle"] & \\
 & FP_{k_3(\alpha)} \arrow[u, "Fd_3^1"] \arrow[d, "Fd_3^0"] \arrow[dr] & \\
T_{\alpha\xi} \arrow[uuur, "t_{\alpha\xi}"] \arrow[ur, "x_3"] \arrow[r, "x_2"] \arrow[dr, "x_1"] \arrow[dddr, "t_{\alpha\xi}"] & FP_{k_2(\alpha)} \arrow[r] & FC_1 \times FC_2 \\
 & FP_{k_1(\alpha)} \arrow[u, "Fd_1^1"] \arrow[d, "Fd_1^0"] \arrow[ur] & \\
 & FP_{k'(\alpha)} \arrow[uur, "\langle Fp^1_{k'(\alpha)}, Fp^2_{k'(\alpha)}\rangle"] & \\
 & T_\alpha \arrow[u, "v_\alpha"] &
\end{tikzcd}
$$

δηλαδή:

$$Fd_1^0 \cdot x_1 = v_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}, \;\; Fd_1^1 \cdot x_1 = x_2, \;\; Fd_3^0 \cdot x_3 = x_2, \;\; Fd_3^1 \cdot x_3 = u_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}$$

Περεταίρω, από το γεγονός ότι έχουμε ένα συνοριακό συν-κώνο, έχουμε ότι και το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
 & FP_{k_1(\alpha)} \arrow[dl, "Fd_{1,0}"'] \arrow[dr, "Fd_{1,1}"] \arrow[ddr, "in_{k_1(\alpha)}"'] & & FP_{k_3(\alpha)} \arrow[dl, "Fd_{3,0}"'] \arrow[dr, "Fd_{3,1}"] \arrow[ddl, "in_{k_3(\alpha)}"] & \\
FP_{k'(\alpha)} \arrow[drr, "in_{k'(\alpha)}"'] & & FP_{k_2(\alpha)} \arrow[d, "in_{k_2(\alpha)}"'] & & FP_{k(\alpha)} \arrow[dll, "in_{k(\alpha)}"] \\
 & & \mathrm{colim} FP_k & &
\end{tikzcd}
$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε:

$$
\begin{aligned}
in_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha \cdot t_{\alpha\xi} &= in_{k(\alpha)} \cdot Fd_3^1 \cdot x_3 \\
&= in_{k_3(\alpha)} \cdot x_3 \\
&= in_{k_2(\alpha)} \cdot Fd_3^0 \cdot x_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= in_{k_2(\alpha)} \cdot x_2 \\
&= in_{k_2(\alpha)} \cdot Fd_1^1 \cdot x_1 \\
&= in_{k_1(\alpha)} \cdot x_1 \\
&= in_{k'(\alpha)} \cdot Fd_1^0 \cdot x_1 \\
&= in_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}
\end{aligned}
$$

άρα

$$in_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha = in_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha$$

αφού είναι ίσοι αν περιοριστούν σ΄ ένα κάλυμμα του πεδίου τους.

Στην συνέχεια δείχνουμε ότι ο f είναι διασπώμενος. Θα δείξουμε ότι ο f πληροί την υπόθεση της Πρότασης 2.1.10. Έστω $x = \langle x_1, x_2\rangle : T \to FC_1 \times FC_2$, ένα τυχαίο γενικευμένο στοιχείο του γινομένου. Εφαρμόζοντας την συνθήκη SF1 (βλέπε σελ. 62), έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T, τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο της τελικής οικογένειας κώνων (πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας) και ένας μορφισμός $x_\alpha : T_\alpha \to FP_{k(a)}$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[dr, "t_\alpha"] \arrow[ddr, "x_\alpha"'] & & \\
& T \arrow[ddl, "x_1"'] \arrow[ddr, "x_2"] & \\
& FP_{k(\alpha)} \arrow[dl, "Fp^1_{k(\alpha)}"] \arrow[dr, "Fp^2_{k(\alpha)}"'] & \\
FC_1 & & FC_2
\end{tikzcd}
$$

δηλαδή, $Fp^1_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha = x_1 \cdot t_\alpha$ και $Fp^2_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha = x_2 \cdot t_\alpha$. Στην συνέχεια δείχνουμε ότι η οικογένεια $\{in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha | \, \alpha \in A\}$ από στοιχεία του συναρτητή $\hom_{\mathcal{E}}(-, \mathrm{colim} FP_k)$ είναι μία συμβατή οικογένεια για το κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ (βλέπε Παράδειγμα 3.1.12). Θεωρούμε λοιπόν το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & T_\alpha \arrow[r, "x_\alpha"] \arrow[dr, "t_\alpha"] & FP_{k(\alpha)} \arrow[dr, "in_{k(\alpha)}"] & \\
T_\alpha \times_T T_{\alpha'} \arrow[ur, "\pi^1_{\alpha\alpha'}"] \arrow[dr, "\pi^2_{\alpha\alpha'}"'] & & T & \mathrm{colim} FP_k \\
 & T_{\alpha'} \arrow[r, "x_{\alpha'}"'] \arrow[ur, "t_{\alpha'}"] & FP_{k(\alpha')} \arrow[ur, "in_{k(\alpha')}"'] &
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

για τυχαία $\alpha, \alpha' \in A$. Πρέπει να δείξουμε ότι το εξωτερικό διάγραμμα του παραπάνω διαγράμματος είναι αντιμεταθετικό. Έχουμε ότι το επάνω μονοπάτι ακολουθούμενο από τον μορφισμό $p_1 \cdot f$, δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με το κάτω μονοπάτι ακολουθούμενο από τον ίδιο μορφισμό.

$$\begin{tikzcd}
 & & FC_1 \\
\mathrm{colim} FP_k \arrow[r, "f"] & FC_1 \times FC_2 \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
 & & FC_2
\end{tikzcd}$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot f \cdot in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} &= p_1 \cdot f_{k(\alpha)} \cdot x_a \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} \\
&= Fp^1_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} \\
&= x_1 \cdot t_\alpha \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} \\
&= x_1 \cdot t_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'} \\
&= Fp^1_{k(\alpha')} \cdot x_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'} \\
&= p_1 \cdot f_{k(\alpha')} \cdot x_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'} \\
&= p_1 \cdot f \cdot in_{k(\alpha')} \cdot x_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'},
\end{aligned}$$

Όμοια το επάνω μονοπάτι και το κάτω μονοπάτι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα αν συνθέσουμε αυτή τη φορά με $p_2 \cdot f$, δηλαδή:

$$p_2 \cdot f \cdot in_{k(\alpha)} \cdot x_a \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} = p_2 \cdot f \cdot in_{k(\alpha')} \cdot x_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'}.$$

Από τις παραπάνω ισότητες και από την καθολική ιδιότητα του γινομένου έχουμε ότι:

$$f \cdot in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} = f \cdot in_{k(\alpha')} \cdot x_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'}.$$

και τελικά αφού ο f είναι μονομορφισμός έχουμε την ζητούμενη ισότητα, δηλαδή:

$$in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} = in_{k(\alpha')} \cdot x_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'}.$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι η οικογένεια $\{in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha | \, \alpha \in A\}$ είναι συμβατή οικογένεια για το δράγμα $\hom_{\mathcal{E}}(-, \mathrm{colim} FP_k)$ (η τοπολογία είναι υποκανονική άρα κάθε αναπαραστάσιμος είναι δράγμα) σε σχέση με το κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$. Άρα υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός (βλέπε Παράδειγμα 3.1.12) $r : T \to \mathrm{colim} FP_k$, τέτοιος ώστε για κάθε $\alpha \in A$, $r \cdot t_\alpha = in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[rr, "x_\alpha"] \arrow[dr, "t_\alpha"] & & FP_{k(\alpha)} \arrow[dr, "in_{k(\alpha)}"] & \\
& T \arrow[rr, dotted, "r"] & & \mathrm{colim} FP_k
\end{tikzcd}$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot f \cdot r \cdot t_\alpha &= p_1 \cdot f \cdot in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \\
&= p_1 \cdot f_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \\
&= Fp^1_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \\
&= x_1 \cdot t_\alpha
\end{aligned}$$

για κάθε $\alpha \in A$, και συνεπώς $p_1 \cdot f \cdot r = x_1$ αφού το site είναι υποκανονικό. Με παρόμοιο επιχείρημα έχουμε ότι $p_2 \cdot f \cdot r = x_2$, άρα ο μορφισμός r μας δίνει την ζητούμενη παραγοντοποίηση

$$f \cdot r = \langle x_1, x_2 \rangle = x \qquad \blacksquare$$

4.1.3 Παρατήρηση. Στην παραπάνω απόδειξη δεν κάναμε καθόλου χρήση της συνθήκης PC2.

4.1.4 Παρατήρηση. Στη διατύπωσης της Πρότασης 4.1.1 θεωρήσαμε μία τελική οικογένεια κώνων $\{P_k\}$ για ένα διακριτό διάγραμμα με την απαίτηση το συνόριο $\mathrm{colim}_k FP_k$ να πληροί την συνθήκη PC1. Χωρίς να επηρεάζεται καθόλου η γενικότητα της Πρότασης, θα μπορούσαμε από την Παρατήρηση 3.3.13 να θεωρήσουμε την οικογένεια όλων των κώνων για το διακριτό διάγραμμα.[2]

4.1.5 Πόρισμα. *Έστω $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής από μία μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$ σ' ένα συν-πλήρες, υποκανικό site με πεπερασμένα γινόμενα ο οποίος πληροί τις υποθέσεις της Πρότασης 4.1.1, δηλαδή το συνόριο $\mathrm{colim} FP_k$, που υπεισέρχεται στον υπολογισμό της αριστερής επέκτασης Kan $\mathrm{Lan}_y F$ ενός γινομένου δύο αναπαραστάσιμων, πληροί την συνθήκη*

[2] Μας επισημάνθηκε αυτό το γεγονός από τον (ανώνυμο) κριτή της εργασίας μας [30].

PC1 σε σχέση με την τοπολογία j και ο F είναι j-sifted-επίπεδος. Τότε η αριστερή επέκταση Kan του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda y διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα από αναπαραστάσιμους. Επιπλέον, αν η $\mathcal{E}$ είναι μία καρτεσιανά κλειστή κατηγορία, τότε η αριστερή επέκταση Kan διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα.

4.1.6 Απόδειξη. Για τον πρώτο ισχυρισμό έχουμε[3]:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lan}_y F(yC_1 \times yC_2) &\cong \mathrm{Lan}_y F(\mathrm{colim}_k yP_k)\\
&\cong \mathrm{colim}_k \mathrm{Lan}_y F(yP_k)\\
&\cong \mathrm{colim}_k FP_k\\
&\cong FC_1 \times FC_2\\
&\cong \mathrm{Lan}_y F(yC_1) \times \mathrm{Lan}_y F(yC_2)
\end{aligned}$$

Αν τώρα η $\mathcal{E}$ είναι μία καρτεσιανά κλειστή κατηγορία, τότε αν εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο όπως στην Απόδειξη 2.2.9, έχουμε ότι ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα. ■

4.1.7 Παρατήρηση. Αν έχουμε ένα "διάγραμμα επέκτασης Kan"

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "F"'] & & {[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]} \arrow[dl, shift left, "\mathrm{Lan}_y F"] \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, shift left, "S_F"] &
\end{tikzcd}$$

όπου η κατηγορία $\mathcal{E}$ είναι υποκατηγορία της $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, άρα ανακλαστική υποκατηγορία, τότε από το Θεώρημα 2.3.19, συμπεραίνουμε ότι έχει νόημα να ελέγξουμε αν ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα, μόνο στην περίπτωση που η $\mathcal{E}$ είναι καρτεσιανά κλειστή κατηγορία.

4.1.8 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες υποκανονικό site με πεπερασμένα γινόμενα και $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Έστω επιπλέον ότι για δύο αντικείμενα C_1, C_2 της $\mathcal{C}$, $\{P_k | k \in K\}$ είναι μία τελική οικογένεια κώνων για αυτό το ζευγάρι αντικειμένων με την ιδιότητα ότι το συνόριο $\mathrm{colim}_k FP_k$ είναι καθορισμένο (πληροί τις συνθήκες PC1, PC2). Τότε αν ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα αναπαραστάσιμων, ο F είναι j-sifted επίπεδος.*

4.1.9 Απόδειξη. Από την παραπάνω Απόδειξη (4.1.5) έχουμε ότι αν ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα αναπαραστάσιμων, τότε ο μορφισμός $f : \mathrm{colim}_k FP_k \to FC_1 \times FC_2$

[3]Για τις παρακάτω ισοδυναμίες, πέραν των υποθέσεων της πρότασης χρησιμοποιούμε και το γεγονός ότι ο $\mathrm{Lan}_y F$ ως αριστερά προσαρτημένος συναρτητής διατηρεί συνόρια και επιπλέον συντιθέμενος με τον y είναι ισόμορφος με τον F (βλέπε σελ. 18).

είναι ισομορφισμός. Συμβολίζουμε με $f^{-1} : FC_1 \times FC_2 \to \mathrm{colim}_k FP_k$ τον αντίστροφο του f.

Έστω τώρα

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[dr, "x_2"] & \\ FC_1 & & FC_2 \end{tikzcd}$$

Με x συμβολίζουμε το μορφισμό $\langle x_1, x_2 \rangle : T \to FC_1 \times FC_2$. Εφαρμόζοντας την συνθήκη PC1 για τον μορφισμό $f^{-1} \cdot x : T \to \mathrm{colim}_k FP_k$, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένας δείκτης $k(\alpha)$ και ένας μορφισμός $x_\alpha : T_\alpha \to FP_{k(\alpha)}$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "x_\alpha"'] & T \arrow[d, "f^{-1} \cdot x"] \\ FP_{k(\alpha)} \arrow[r, "in_{k(\alpha)}"'] & \mathrm{colim}_k FP_k \end{tikzcd}$$

δηλαδή: $f^{-1} \cdot x \cdot t_\alpha = in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha$.

Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο διάγραμμα (στην $\mathcal{E}$)

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[dr, "t_\alpha"] \arrow[ddr, dotted, "x_\alpha"'] & & \\ & T \arrow[ddl, "x_1"'] \arrow[ddr, "x_2"] & \\ & FP_{k(\alpha)} \arrow[dl, "Fp^1_{k(\alpha)}"] \arrow[dr, "Fp^2_{k(\alpha)}"'] & \\ FC_1 & & FC_2 \end{tikzcd}$$

το οποίο είναι αντιμεταθετικό.

Πράγματι:

$$\begin{aligned} Fp^1_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha &= p_1 \cdot f_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \\ &= p_1 \cdot f \cdot in_{k(a)} \cdot x_a \\ &= p_1 \cdot f \cdot f^{-1} \cdot x \cdot t_\alpha \\ &= p_1 \cdot x \cdot t_\alpha \\ &= x_1 \cdot t_\alpha \end{aligned}$$

και ομοίως

$$Fp^2_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha = x_2 \cdot t_\alpha$$

Οι παραπάνω ισότητες δείχνουν ότι η πρώτη συνθήκη (SF1) για να είναι ο F j-sifted επίπεδος (Ορισμός 3.2.1) ισχύει.

Τώρα, για δύο αντικείμενα C_1, C_2 στην $\mathcal{C}$ θεωρούμε ένα διάγραμμα της μορφής[4]:

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[d, "z'"'] & \\
 & FP_{k'} \arrow[dl, "Fp^1_{k'}"'] \arrow[dr, "Fp^2_{k'}"] & \\
FC_1 & & FC_2 \\
 & FP_k \arrow[ul, "Fp^1_k"] \arrow[ur, "Fp^2_k"'] & \\
 & T \arrow[u, "z"] &
\end{tikzcd}$$

έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} Fp^1_k \cdot z = Fp^1_{k'} \cdot z' \\ Fp^2_k \cdot z = Fp^2_{k'} \cdot z' \end{aligned}$$

Τότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot f \cdot in_k \cdot z &= p_1 \cdot f_k \cdot z \\ &= Fp^1_k \cdot z \\ &= Fp^1_{k'} \cdot z' \\ &= p_1 \cdot f_{k'} \cdot z' \\ &= p_1 \cdot f \cdot in_{k'} \cdot z' \end{aligned}$$

και ομοίως ότι:

$$p_2 \cdot f \cdot in_k \cdot z = p_2 \cdot f \cdot in_{k'} \cdot z'$$

[4]Πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε αντικείμενα P_k από την τελική οικογένεια των κώνων, αντί για τυχαία αντικείμενα της $\mathcal{C}$.

Από τις παραπάνω ισότητες και την καθολική ιδιότητα του γινομένου $FC_1 \times FC_2$ έχουμε ότι:

$$f \cdot in_k \cdot z = f \cdot in_{k'} \cdot z'$$

και αφού ο f είναι μονομορφισμός έχουμε τελικά ότι:

$$in_k \cdot z = in_{k'} \cdot z'$$

Λόγω της παραπάνω ισότητας, με εφαρμογή της συνθήκης PC2 για τον συνοριακό συνκώνο $\{in_k : FP_k \to \mathrm{colim}_k FP_k\}$, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ στην $\mathcal{C}$ αποτελούμενο από αντικείμενα της τελικής οικογένειας, το οποίο συνδέει τα P_k και $P_{k'}$

$$\begin{tikzcd}
& P_{k_1} \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & P_{k_n} \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & \\
P_k & & \cdot \cdots\cdots & \cdots\cdots \cdot & & P_{k'}
\end{tikzcd}$$

και επιπλέον υπάρχουν μορφισμοί $x_1 \colon T_\alpha \to FP_{k_1}$ ... $x_n \colon T_\alpha \to FP_{k_n}$, έτσι ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες

$$Fd_1^0 \cdot x_1 = z \cdot t_\alpha, \;\; Fd_1^1 \cdot x_1 = x_2, \;\; Fd_3^0 \cdot x_3 = x_2, \;\; Fd_3^1 \cdot x_3 = x_4, ..., Fd_n^1 \cdot x_n = z' \cdot t_\alpha$$

Από τις παραπάνω ισότητες συμπεραίνουμε ότι ισχύει και η δεύτερη συνθήκη (SF2) για να είναι ο F j-sifted επίπεδος. ■

Από το Πόρισμα 4.1.5 και την Πρόταση 4.1.8, έχουμε ότι δεδομένου του γεγονότος ότι στην κατηγορία $\mathcal{E}$ κάποια (και όχι όλα) τα συνόρια είναι καθορισμένα, τότε η διατήρηση πεπερασμένων γινομένων από την αριστερή επέκταση Kan ενός συναρτητή ισοδυναμεί με την j-sifted επιπεδότητα του συναρτητή. Έτσι, αν η κατηγορία $\mathcal{E}$ είναι ένα Grothendieck τόπος (ή πιο γενικά ένας ∞-προτόπος) και j είναι η τοπολογία των επιμορφικών καλυμμάτων στην $\mathcal{E}$ (βλέπε Παράδειγμα 3.1.21), τότε από το γεγονός ότι όλα τα συνόρια στην $\mathcal{E}$ είναι καθορισμένα γι΄ αυτή την τοπολογία (βλέπε Πρόταση 3.3.11), έχουμε ως άμεση συνέπεια το ακόλουθο:

4.1.10 Πόρισμα. *Έστω $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής από μία μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$ σ΄ ένα Grothendieck τόπο (ή πιο γενικά σ΄ ένα ∞-προτόπο). Ο συναρτητής F είναι j-sifted επίπεδος αν και μόνο αν ο συναρτητής $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα.*

4.1.11 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{C}$ μία sifted κατηγορία (βλέπε Ορισμός 2.3.21) και F ο συναρτητής $\mathcal{C}^{op} \to \mathbf{1} \to \mathbf{Set}$, όπου $\mathbf{1}$ η κατηγορία μ΄ ένα μόνο αντικείμενο και $\mathbf{1} \to \mathbf{Set}$ ο συναρτητής που αντιστοιχεί το μοναδικό αντικείμενο της $\mathbf{1}$ σ' ένα μονοσύνολο. Η δυική της κατηγορίας των στοιχείων του F είναι η $\mathcal{C}$, άρα ο F είναι sifted επίπεδος σε σχέση με την τοπολογία των επιμορφικών καλυμμάτων στον τόπο των συνόλων (βλέπε Παρατήρηση 3.1.22). Από το παραπάνω Πόρισμα έχουμε ότι ο συναρτητής $\mathrm{Lan}_y F$, ο οποίος σ' αυτή την περίπτωση είναι ο συναρτητής που αντιστοιχίζει ένα $\mathcal{C}$-διάγραμμα της κατηγορίας των συνόλων στο συνόριό του, θα διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα. Συνεπώς, sifted συνόρια αντιμετατίθενται με πεπερασμένα γινόμενα στα σύνολα. Όπως είχαμε αναφέρει και στην Παρατήρηση 2.3.22, αυτός ήταν και ο αρχικός ορισμός για μία sifted κατηγορία.

4.1.12 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{C}$ και $\mathcal{E}$ είναι δύο κατηγορίες με περασμένα γινόμενα και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ είναι ένας συναρτητής που διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα, τότε από το Θεώρημα 2.3.32 έχουμε ότι ο F είναι j-sifted επίπεδος, για j την τετριμμένη τοπολογία της $\mathcal{E}$ και αντίστροφα (βλέπε Παρατήρηση 3.2.4). Κατά συνέπεια θα είναι j-sifted επίπεδος αναφορικά με οποιαδήποτε υποκανονική τοπολογία της $\mathcal{E}$.

Έστω τώρα ότι ο F είναι j-sifted επίπεδος αναφορικά με μία υποκανονική τοπολογία j της $\mathcal{E}$. Αν τα συνόρια που περιγράφονται στο Πόρισμα 4.1.5 πληρούν την συνθήκη PC1 και η $\mathcal{E}$ είναι καρτεσιανά κλειστή, τότε λαμβάνοντας υπόψη ότι η εμφύτευση Yoneda διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα, και τον ισομορφισμό $\mathrm{Lan}_y F \cdot y \cong F$, έχουμε ότι ο F διατηρεί γινόμενα.

4.2 Παραδείγματα

4.2.1 Η Κατηγορική Πραγματοποίηση

Στο Παράδειγμα 2.2.5 αναφερθήκαμε στον συναρτητή της κατηγορικής πραγματοποίησης και τον δεξιά προσαρτημένο του, τον συναρτητή νεύρο

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Delta} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "U"'] & & \mathbf{SSet} \arrow[dl, shift left, "\mathrm{Lan}_y U = \tau_1"] \\ & \mathbf{Cat} \arrow[ur, shift left, "N"] & \end{tikzcd}$$

και είδαμε ότι ο συναρτητής τ_1 διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα.[5] Θα μελετήσουμε πως το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να προκύψει ως αποτέλεσμα της δικής μας ανάλυσης (από τις συνθήκες δηλαδή του Πορίσματος 4.1.5).

Χρειάζεται λοιπόν να ορίσουμε μια (κατάλληλη για τις απαιτήσεις του Πορίσματος 4.1.5) τοπολογία Grothendieck στην $\mathbf{Cat}$. Οι από κοινού επιμορφικές οικογένειες της κατηγορίας $\mathbf{SSet} = [\mathbf{\Delta}^{op}, \mathbf{Set}]$ ορίζουν (όπως και σε κάθε τόπο προδραγμάτων) μία υποκανονική

[5]Επιπλέον, στο Παράδειγμα 2.3.34 είδαμε ότι ο U δεν είναι sifted επίπεδος.

τοπολογία Grothendieck σε αυτή (βλέπε Παρατήρηση 3.1.22). Ορίζουμε λοιπόν μία τοπολογία Grothendieck στην **Cat** ως εξής:
Αν $\mathcal{C}$ είναι μία μικρή κατηγορία, τότε η οικογένεια (από συναρτητές) $\{F_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{C} | i \in I\}$ είναι κάλυμμα της $\mathcal{C}$, αν και μόνο αν η οικογένεια $\{N(f_i) : N\mathcal{C}_i \to N\mathcal{C} | i \in I\}$ είναι κάλυμμα του $N(C)$, δηλαδή, ο επαγόμενος μορφισμός (φυσικός μετασχηματισμός) $\coprod_{i\in I} N\mathcal{C}_i \to N\mathcal{C}$ είναι ένας επιμορφισμός στην κατηγορία **SSet**. Από το γεγονός ότι ο συναρτητής νεύρο είναι πλήρης και πιστός και διατηρεί εφελκύσεις (ως δεξιά προσαρτημένος), άμεσα έχουμε ότι με αυτό τον τρόπο ορίζεται μία (προ-)τοπολογία Grothendieck στην **Cat**. Δείχνουμε τώρα την υποκανονικότητα της τοπολογίας αυτής.

Έστω $\mathcal{D}$ μία μικρή κατηγορία. Θα δείξουμε ότι ο συναρτητής $\hom_{\mathbf{Cat}}(-, \mathcal{D})$ έχει την ιδιότητα του δράγματος γι΄ αυτή την τοπολογία. Θεωρούμε λοιπόν ένα κάλυμμα $\{F_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{C} | i \in I\}$ μίας μικρής κατηγορίας $\mathcal{C}$ και μία συμβατή οικογένεια στοιχείων του συναρτητή $\hom_{\mathbf{Cat}}(-, \mathcal{D})$ γι΄ αυτό το κάλυμμα, δηλαδή, συναρτητές $G_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{D}, i \in I$, έτσι ώστε $G_i \circ \pi^1_{ij} = G_j \circ \pi^2_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_i \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_j \arrow[r, "\pi^1_{ij}"] \arrow[d, "\pi^2_{ij}"'] & \mathcal{C}_i \arrow[d, "F_i"] \arrow[ddr, bend left, "G_i"] & \\
\mathcal{C}_j \arrow[r, "F_j"'] \arrow[drr, bend right, "G_j"'] & \mathcal{C} & \\
& & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Αναζητούμε λοιπόν ένα συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ με την ιδιότητα $F \circ F_i = G_i$ για κάθε $i \in I$. Από το γεγονός τώρα ότι η οικογένεια $\{F_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{C} | i \in I\}$ είναι καλύπτουσα, έχουμε ότι ο επαγόμενος φυσικός μετασχηματισμός $\coprod_{i\in I} N\mathcal{C}_i \to N\mathcal{C}$ είναι ένας επιμορφισμός. Έτσι, στο βήμα 0 έχουμε την επί συνάρτηση:

$$K : \coprod (\mathcal{C}_i)_0 \to (\mathcal{C})_0$$

όπου $K((C, i)) = F_i(C)$. Έστω $C \in \mathcal{C}$. Αφού η συνάρτηση K είναι επί, υπάρχει ένα ζεύγος (C_i, i) με $C_i \in \mathcal{C}_i$, έτσι ώστε $C = F_i(C_i)$. Ορίζουμε τον συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ στα αντικείμενα της $\mathcal{C}$, $F(C) = G_i(C_i)$. Ο ορισμός είναι καλός, αφού αν για κάποιο άλλο ζευγάρι (C_j, j) με $C_j \in \mathcal{C}_j$ και $C = F_j(C_j)$, τότε έχουμε ότι $(C_i, C_j) \in \mathcal{C}_i \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_j$ και από το γεγονός ότι $\{G_i\}_{i\in I}$ είναι συμβατή οικογένεια έχουμε ότι $G_i(C_i) = G_j(C_j)$. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε τον συναρτητή F στους μορφισμούς της $\mathcal{C}$.

Αν τώρα, $[m], [n] \in \mathbf{\Delta}$ και $\{P_k | k \in K\}$ μία τελική οικογένεια κώνων για το διακριτό διάγραμμα στην $\mathbf{\Delta}$ που αποτελείται από τα $[m]$ και $[n]$, τότε από την Πρόταση 2.2.15, έχουμε άμεσα ότι η οικογένεια $\{incl_{P_k} : U(P_k) \to \mathrm{colim}_k U(P_k)\}$ είναι καλύπτουσα για την τοπολογία της **Cat** που ορίσαμε. Συνεπώς από την Παρατήρηση 3.3.2, το συνόριο $\mathrm{colim}_k U(P_k)$ πληροί την συνθήκη PC1.

Τέλος, η sifted επιπεδότητα του συναρτητή U σε σχέση με την τοπολογία που ορίσαμε, προκύπτει από την Πρόταση 2.2.15 και από το γεγονός ότι επειδή η κατηγορία $\mathbf{\Delta}$ είναι πυκνή στην **Cat** (βλέπε Πόρισμα 2.2.7) έχουμε για κάθε κατηγορία, ένα κάλυμμα αυτής αποτελούμενο από αντικείμενα της $\mathbf{\Delta}$. Πιο συγκεκριμένα, έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $N\mathcal{C} \cong \underset{(n,x)\in \mathrm{elts} N\mathcal{C}}{\mathrm{colim}} y([n])$, η έκφραση του νεύρου της $\mathcal{C}$ ως ένα συνόριο αναπαραστάσιμων. Τότε, ο μορφισμός $\coprod_{(n,x)} y([n]) \to N\mathcal{C}$ είναι ένας επιμορφισμός στην **SSet**. Από το γεγονός τώρα ότι $y([n]) \cong N(\underline{n})$ και επιπλέον ένα αντικείμενο (n, x) στην $\mathrm{elts} N\mathcal{C}$ αντιπροσωπεύει ένα συναρτητή $x : \underline{n} \to \mathcal{C}$, έχουμε ότι η οικογένεια $\{\underline{n} \to \mathcal{C} | [n] \in \mathbf{\Delta}\}$ είναι καλύπτουσα.

Ας δούμε τώρα ότι πληρούται η συνθήκη SF1. Αν $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, θεωρούμε ένα διάγραμμα στην **Cat** της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "G"] & \\ \underline{m} & & \underline{n} \end{tikzcd}$$

Αν τώρα $\{\underline{k} \to \mathcal{C} | [k] \in \mathbf{\Delta}\}$, το κάλυμμα της $\mathcal{C}$ που περιγράψαμε παραπάνω, τότε αν $x_k : \underline{k} \to \mathcal{C}$ ένα στοιχείο του καλύμματος, προκύπτει το ακόλουθο διάγραμμα στην **Cat**

$$\begin{tikzcd} & \underline{k} \arrow[dl, "F \circ t_k"'] \arrow[dr, "G \circ t_k"] & \\ \underline{m} & & \underline{n} \end{tikzcd}$$

και από το γεγονός ότι ο U είναι πλήρης και πιστός, έχουμε το "ίδιο" διάγραμμα στην $\mathbf{\Delta}$. Από την Πρόταση 2.2.15, έχουμε την εξής παραγοντοποίηση στην $\mathbf{\Delta}$

$$\begin{tikzcd} & {[k]} \arrow[d, dotted] \arrow[ddl, "F \circ t_k"'] \arrow[ddr, "G \circ t_k"] & \\ & {[m+n]} \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\ {[m]} & & {[n]} \end{tikzcd}$$

Τελικά, έχουμε το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα στην **Cat**

$$\begin{tikzcd}
\underline{k} \arrow[dr, "x_k"] \arrow[ddr, dotted] & & \\
& \mathcal{C} \arrow[ddl, "F"'] \arrow[ddr, "G"] & \\
& \underline{m+n} \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted] & \\
\underline{m} & & \underline{n}
\end{tikzcd}$$

το οποίο επιβεβαιώνει ότι ισχύει η συνθήκη SF1 σε σχέση με την τοπολογία που ορίσαμε στην **Cat**. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να επιβεβαιώσουμε και την συνθήκη SF2.

Σχόλιο: Στο Παράδειγμα 2.3.34 είδαμε ότι η συνθήκη της sifted επιπεδότητας (Ορισμός 2.3.30) δεν είναι αναγκαία για την διατήρηση πεπερασμένων γινομένων από την αριστερή επέκταση Kan. Η συνθήκη της sifted επιπεδότητας για το συγκεκριμένο παράδειγμα μας "επέβαλε" η κατηγορία $\mathcal{C} \downarrow U$ να είναι co-sifted, δηλαδή την ύπαρξη κάποιων κώνων σε αυτή την κατηγορία κάτι που όπως είδαμε δεν μπορεί να συμβαίνει (για κάθε μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$). Οι συνθήκες όμως της sifted επιπεδότητας σε σχέση με μία τοπολογία j, "επιβάλουν" η κατηγορία $\mathcal{C} \downarrow U$ να έχει κώνους σε "επίπεδο" ενός καλύμματος της $\mathcal{C}$, κάτι που όπως είδαμε είναι εφικτό για μία κατάλληλη τοπολογία.

Επιπλέον το Πόρισμα 4.1.5 έχει ως συνθήκη, κάποια και όχι όλα τα συνόρια της κατηγορίας που λαμβάνει τιμές ο συναρτητής να είναι καθορισμένα. Για παράδειγμα η **Cat** δεν έχει όλα τα συνόρια καθορισμένα, αφού ως κατηγορία δεν είναι ομαλή (regular) (βλέπε [11], Αντιπαράδειγμα 2.4.6), άρα δεν είναι ∞-προτόπος (Πρόταση 3.3.12).

4.2.2 Η Γεωμετρική Πραγματοποίηση

Στο Παράδειγμα 2.2.10 αναφερθήκαμε στο συναρτητή της γεωμετρικής πραγματοποίησης

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbf{SSet} \arrow[dl, shift left, "\mathrm{Lan}_y\Delta=|\cdot|"] \\
& \mathbf{Ke} \arrow[ur, shift left, "S"] &
\end{tikzcd}$$

και αναφέραμε ότι ο συναρτητής αυτός διατηρεί πεπερασμένα όρια, άρα και γινόμενα ειδικότερα. Το κλασικό (και θεμελιώδες στα πλαίσια της ομοτοπικής άλγεβρας) αυτό αποτέλεσμα οφείλεται στους Gabriel και Zisman ([19], III, 3)[6]. Η κατηγορία των χώρων Kelley είναι

[6] Μία αρκετά κατανοητή απόδειξη αυτού του γεγονότος υπάρχει στο [43]

μία ομαλή (regular) κατηγορία, αλλά όχι ακριβής (exact)([15]), άρα δεν είναι ∞-προτόπος. Στην παρούσα παράγραφο, θα περιγράψουμε μία τοπολογία Grothendieck στην κατηγορία **Ke**, κατάλληλη για να εξάγει κανείς την διατήρηση πεπερασμένων γινομένων από την γεωμετρική πραγματοποίηση (και πιθανόν και για άλλες παρόμοιες περιπτώσεις), με βάση τα αποτελέσματα της Ενότητας 4.1.

4.2.1 Πρόταση. *Υπάρχει μία υποκανονική τοπολογία στην κατηγορία* **Ke** *των χώρων Kelley, τέτοια ώστε οι πεπερασμένες οικογένειες της μορφής* $\{\mathrm{incl}_i\colon K_i \to \mathrm{colim}_i K_i\}$*, όπου* K_i *συμπαγείς χώροι Hausdorff, να είναι καλύπτουσες.*

4.2.2 Απόδειξη. Θεωρούμε την τοπολογία Grothendieck που παράγεται από τις οικογένειες $\{\mathrm{incl}_i\colon K_i \to \mathrm{colim}_i K_i\}$ πεπερασμένων διαγραμμάτων συμπαγών χώρων Hausdorff. Τέτοιες οικογένειες δεν είναι ευσταθείς (stable) ως προς εφελκύσεις κατά μήκος μίας συνεχούς συνάρτησης. Θεωρούμε λοιπόν τις εφελκύσεις αυτών των οικογενειών κατά μήκος οποιασδήποτε συνεχούς συνάρτησης προς ένα πεπερασμένο συνόριο συμπαγών χώρων Hausdorff.

Αν $\{f_i\colon K_i \to Z | i \in I\}$ είναι μία συμβατή οικογένεια από συνεχείς συναρτήσεις στην **Ke** (δηλαδή το εξωτερικό του διαγράμματος 4.1 είναι αντιμεταθετικό), τότε ορίζουμε

$$f\colon \mathrm{colim}_i\, K_i \to Z$$

με $f(x) = f_i(x_i)$, αφού για κάθε $x \in \mathrm{colim}_i\, K_i = K$ έχουμε ότι $x = \mathrm{incl}_i(x_i)$, για κάποιο $x_i \in K_i$ [7]. Η συνάρτηση είναι καλώς ορισμένη και αυτό προκύπτει από την συμβατότητα της οικογένειας. Η συνάρτηση f είναι συνεχής γιατί, αν C είναι ένα κλειστό υποσύνολο του Z, τότε $f^{-1}C = \bigcup_i \mathrm{incl}_i[f_i^{-1}C]$. Κάθε σύνολο $\mathrm{incl}_i[f_i^{-1}C]$ είναι κλειστό γιατί η συνάρτηση incl_i είναι κλειστή, ως μία συνεχής συνάρτηση μεταξύ συμπαγών χώρων Hausdorff, και η ένωση είναι πεπερασμένη. Άρα το σύνολο $f^{-1}C$ είναι κλειστό. Δείξαμε λοιπόν, ότι κάθε αναπαραστάσιμος $\mathrm{hom}_{\mathbf{Ke}}(-, Z)$ στην κατηγορία των χώρων Kelley έχει την ιδιότητα του δράγματος σε σχέση με τις οικογένειες που παράγουν την προτοπολογία.

$$\begin{tikzcd}
K_i \times_K K_j \arrow[r, "\pi^1_{ij}"] \arrow[d, "\pi^2_{ij}"'] & K_i \arrow[d, "incl_i"'] \arrow[ddr, bend left, "f_i"] & \\
K_j \arrow[r, "incl_j"] \arrow[drr, bend right, "f_j"'] & K \arrow[dr, dotted, "f"] & \\
& & Z
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

[7] Ο συλλογισμός αυτός προκύπτει από το γεγονός ότι το υποκείμενο σύνολο του συνορίου κατασκευάζεται όπως στα σύνολα.

Μένει να δείξουμε ότι ο αναπαραστάσιμος $\hom_{\mathbf{Ke}}(-, Z)$ έχει την ιδιότητα του δράγματος σε σχέση με μία οικογένεια $\{t_i\colon T_i \to T\}$ η οποία προκύπτει από την εφέλκυση μίας οικογένειας $\{\mathrm{incl}_i\colon K_i \to \mathrm{colim}_i K_i\}$ κατά μήκος μίας συνεχούς συνάρτησης $T \to \mathrm{colim}_i K_i$

$$\begin{tikzcd} K_i \times_K T = T_i \arrow[r] \arrow[d, "t_i"'] & K_i \arrow[d, "incl_i"] \\ T \arrow[r, "h"'] & \mathrm{colim}_i K_i \end{tikzcd}$$

Σε αυτή την περίπτωση, αν $x \in T$ έχουμε ότι $h(x) \in K = \mathrm{colim}_i K_i$ και συνεπώς $f(x) = incl_i(x_i)$ για κάποιο $x_i \in K_i$. Επειδή τώρα, το υποκείμενο σύνολο της εφέλκυσης $K_i \times_K T$ είναι η εφέλκυση των υποκείμενων συνόλων, έχουμε ότι $x = t_i(a_i)$ όπου $a_i = (x_i, x) \in K_i \times_K T = T_i$. Με αυτή την παρατήρηση, αν τώρα $\{g_i : T_i \to Z\}$ είναι μία συμβατή οικογένεια, τότε η επέκταση $g : T \to Z$ ορίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και προηγουμένως η f. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με πριν, γιατί κάθε συνάρτηση $t_i\colon T_i \to T$ είναι κλειστή. Το ότι η κάθε συνάρτηση είναι κλειστή $t_i\colon T_i \to T$ αιτιολογείται ως εξής:
Οι συναρτήσεις $\mathrm{incl}_i\colon K_i \to \mathrm{colim}_i K_i = K$, ως συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ συμπαγών χώρων Hausdorff, είναι ευσταθώς κλειστές (stably closed)[8] και επιπλέον οι εφελκύσεις $T_i \cong K_i \times_K T$ υπολογίζονται όπως στην κατηγορία όλων των τοπολογικών χώρων, αφού οι χώροι K_i είναι συμπαγείς.

$$\begin{tikzcd} T_i \times_T T_j \arrow[r, "\pi^1_{ij}"] \arrow[d, "\pi^2_{ij}"'] & T_i \arrow[d, "t_i"] \arrow[dr, bend left, "g_i"] & \\ K_j \arrow[r, "t_j"] \arrow[drr, bend right, "g_j"'] & T \arrow[dr, dotted, "g"] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Από την παραπάνω Πρόταση και την Παρατήρηση 3.3.2, έχουμε:

4.2.3 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία με την ιδιότητα ότι για κάθε πεπερασμένο διάγραμμα $D\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, το όριο του επαγόμενου διαγράμματος $y \cdot D : \mathcal{D} \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ από αναπαραστάσιμους είναι ισόμορφο μ΄ ένα πεπερασμένο συνόριο αναπαραστάσιμων,*

$$\lim\, y \cdot D \;\cong\; \mathrm{colim}_k\, yP_k$$

*Αν $F\colon \mathcal{C} \to$ **Ke** είναι ένας συναρτητής προς την κατηγορία των χώρων Kelley και οι χώροι FP_k είναι συμπαγείς, τότε το συνόριο $\mathrm{colim}_k FP_k$ πληροί την συνθήκη PC1 για την τοπολογία της Πρότασης 4.2.1.*

[8] Βλέπε [13].

4.2.4 Πόρισμα. *Αν $\mathcal{C}$ είναι η κατηγόρια $\boldsymbol{\Delta}$, τότε το συνόριο που υπολογίζει την αριστερή επέκταση Kan ενός ορίου $\lim\limits_{d\in\mathcal{D}} yD_d$ αναπαραστάσιμων, πληροί την συνθήκη PC1 σε σχέση με την υποκανονική τοπολογία της Πρότασης 4.2.1.*

4.2.5 Απόδειξη. Στην Πρόταση 2.2.17 είδαμε ότι το όριο ενός πεπερασμένου ορίου αναπαραστάσιμων της $\boldsymbol{\Delta}$ εκφράζεται ως ένα πεπερασμένο συνόριο αναπαραστάσιμων. Επιπλέον οι αναπαραστάσιμοι της $\boldsymbol{\Delta}$ αντιστοιχίζονται από την αριστερή επέκταση Kan στα τοπολογικά n-μονόπλοκα (βλέπε Παρατήρηση 2.2.11). Το συμπέρασμα τώρα, είναι άμεσο από την παραπάνω Πρόταση.

4.3 Διατήρηση του Τελικού Αντικειμένου

Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε, ικανή και αναγκαία συνθήκη για να διατηρεί η αριστερή επέκταση Kan το τελικό αντικείμενο, σε αναλογία με την Πρόταση 2.3.35.

Αν $\mathcal{C}$ είναι μία μικρή κατηγορία. θεωρούμε την εξής πρόταση, διατυπωμένη στην γλώσσα $\mathfrak{L}_{\mathcal{C}}$ (βλέπε §3.2):

Για κάθε ζευγάρι αντικειμένων C, C'

Con:$\forall x\colon C \quad \forall x'\colon C' \quad \bigvee\limits_{\mathcal{Z}(C,C')} (\exists z_1 : C_1\ \exists z_2 : C_2\ \ldots\ \exists z_n : C_n)\ d_{1,0}(z_1) = x\ \wedge d_{1,1}(z_1) = z_2\ \wedge d_{3,0}(z_3) = z_2\ \wedge \ldots \wedge\ d_{n,1}(z_n) = x'))$

όπου, με $\mathcal{Z}(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ συμβολίζουμε το σύνολο των ζιγκ-ζαγκ απο το C στο C'.

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & C_n \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & \\
C & & \cdot \cdots\cdots \cdots\cdots \cdot & & & C'
\end{tikzcd}$$

Αν τώρα $(\mathcal{E}, j)$ είναι ένα υποκανονικό site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής, τότε έχουμε ότι η παραπάνω πρόταση πληρούται (σε κάθε βήμα T) αν:

Για κάθε $T \in \mathcal{E}$ και μορφισμούς (γενικευμένα στοιχεία)

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "x'"] & \\
FC & & FC'
\end{tikzcd}$$

υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ στην $\mathcal{C}$ που συνδέει τα C και C'

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & C_n \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & \\ C & & \cdot \arrow[r, dotted, no head] & \cdot & & C' \end{tikzcd}$$

και μορφισμοί $x_1 : T_\alpha \to FC_1$, ..., $x_n : T_\alpha \to FC_n$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & & & T_\alpha \arrow[d, "t_\alpha"] \arrow[ddll, "x_1"'] \arrow[ddrr, "x_n"] & & & \\ & & & T \arrow[dddlll, bend right, "x"'] \arrow[dddrrr, bend left, "x'"] & & & \\ & FC_1 \arrow[dl, "Fd_{1,0}"] \arrow[dr, "Fd_{1,1}"] & & & & FC_n \arrow[dl, "Fd_{n,0}"'] \arrow[dr, "Fd_{n,1}"'] & \\ FC & & \cdot \arrow[rr, dotted, no head] & & \cdot & & FC' \end{tikzcd}$$

4.3.1 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες υποκανονικό site με τελικό αντικείμενο. Τότε, αν $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ είναι ένας συναρτητής και επιπλέον το συνόριο $\mathrm{colim} F$ είναι καθορισμένο, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο συναρτητής F πληροί τις συνθήκες F1 και Con.*

2. *Η αριστερή Kan επέκταση $\mathrm{Lan}_y F$, του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda, διατηρεί το τελικό προδράγμα.*

4.3.2 Απόδειξη. 1) $\Rightarrow$ 2) Όπως και στην Απόδειξη 2.3.36, αρκεί να δείξουμε ότι το συνόριο $\mathrm{colim} F$ είναι ισόμορφο με το τελικό αντικείμενο της $\mathcal{E}$, $\mathbf{1}_{\mathcal{E}}$.

Έστω λοιπόν $t_1 : \mathrm{colim} F \to \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$, ο μοναδικός μορφισμός από το συνόριο $\mathrm{colim} F$ προς το τελικό αντικείμενο. Θα δείξουμε ότι ο t_1 είναι μονομορφισμός και καθορισμένος επιμορφισμός, άρα και ισομορφισμός (βλέπε Πρόταση 3.3.8).

• t_1 είναι μονομορφισμός:

Έστω $u, v : T \rightrightarrows \mathrm{colim} F$ (είναι ίσοι αν συντεθούν με τον t_1, αφού το συν-πεδίο τους είναι το τελικό αντικείμενο). Εφαρμόζοντας την συνθήκη PC1, για τους μορφισμούς $u : T \to \mathrm{colim} F$ και $v : T \to \mathrm{colim} F$ έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $R = \{t_\alpha : T_\alpha \to T \mid \alpha \in A\}$ του T [9], τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$, υπάρχουν αντικείμενα C_α και C'_α στην $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $u_\alpha : T_\alpha \to FC_\alpha$, $v_\alpha : T_\alpha \to FC'_\alpha$ έτσι ώστε τα ακόλουθα τετράγωνα να είναι αντιμεταθετικά

[9] Όπως και στην Απόδειξη 4.1.2, παίρνουμε την κοινή εκλέπτυνση των δύο καλυμμάτων που προκύπτουν από την διπλή εφαρμογή του PC1.

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "u_\alpha"'] & T \arrow[d, "u"] \\ FC_\alpha \arrow[r, "incl_{C_\alpha}"'] & \mathrm{colim}F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "v_\alpha"'] & T \arrow[d, "v"] \\ FC'_\alpha \arrow[r, "incl_{C'_\alpha}"'] & \mathrm{colim}F \end{tikzcd}$$

Τώρα, με εφαρμογή της συνθήκης Con για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & T_\alpha \arrow[dl, "u_\alpha"'] \arrow[dr, "v_\alpha"] & \\ FC_\alpha & & FC'_\alpha \end{tikzcd}$$

έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_{\alpha\xi} : T_{\alpha\xi} \to T_\alpha | \xi \in \Xi_\alpha\}$ του T_α, έτσι ώστε για κάθε $\xi \in \Xi_\alpha$ υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ που συνδέει τα C_α και C'_α και μορφισμοί από το $T_{\alpha\xi}$ προς τις εικόνες των στοιχείων του ζιγκ-ζαγκ, έτσι ώστε να πληρούνται οι αντιμεταθετικότητες που υποδεικνύονται από το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & & & T_{\alpha\xi} \arrow[d, "t_{\alpha\xi}"] \arrow[ddll] \arrow[ddrr] & & & \\ & & & T_\alpha \arrow[ddlll, bend right, "u_\alpha"'] \arrow[ddrrr, bend left, "v_\alpha"] & & & \\ & FC_1 \arrow[dl, "Fd_{1,0}"] \arrow[dr, "Fd_{1,1}"] & & & & FC_n \arrow[dl, "Fd_{n,0}"'] \arrow[dr, "Fd_{n,1}"'] & \\ FC_\alpha & & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & & FC'_\alpha \end{tikzcd}$$

Από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος, συμπεραίνουμε ότι (βλέπε Παρατήρηση 3.3.1) ότι $incl_{C_\alpha} \cdot u_\alpha = incl_{C'_\alpha} \cdot v_\alpha$ και κατά συνέπεια, από την αντιμεταθετικότητα των τετραγώνων, έχουμε ότι οι μορφισμοί u και v, ισούνται στο κάλυμμα R, άρα είναι ίσοι αφού το site είναι υποκανονικό.

- t_1 είναι καθορισμένος επιμορφισμός

Έστω $T \in \mathcal{E}$ και $t_2 : T \to \mathbf{1}$ ο μοναδικός μορφισμός από το T στο τελικό αντικείμενο. Με εφαρμογή της συνθήκης F1 στο βήμα T (βλέπε σελ.66), έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T \mid \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο $C_\alpha \in \mathcal{C}$ και ένας μορφισμός $f_\alpha : T_\alpha \to FC_\alpha$. Άρα για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένας μορφισμός $incl_{C_\alpha} \circ f_\alpha : T_\alpha \to \mathrm{colim}F$, έτσι ώστε το ακόλουθο τετράγωνο να είναι αντιμεταθετικό [10]

[10] Το τετράγωνο προφανώς είναι αντιμεταθετικό, αφού οι δύο διαφορετικοί δρόμοι καταλήγουν στο τελικό αντικείμενο

$$\begin{tikzcd} \mathrm{colim}F \arrow[r, "t_1"] & \mathbf{1} \\ T_\alpha \arrow[u, "incl_{C\alpha}\circ f_\alpha"] \arrow[r, "t_\alpha"'] & T \arrow[u, "t_2"'] \end{tikzcd}$$

2) $\Rightarrow$ 1)

Από την υπόθεση ότι $\mathrm{Lan}_y F(\mathbf{1}_{[\mathcal{C}^{op},\mathbf{Set}]}) \cong \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ (βλέπε Απόδειξη 2.3.36) συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{colim}F \cong \mathbf{1}_{\mathcal{E}}$ (1).

Έστω τώρα $T \in \mathcal{E}$. Από την σχέση (1), έχουμε ότι υπάρχει ένας (μοναδικός) μορφισμός $t : T \to \mathrm{colim}F$. Αφού το συνόριο $\mathrm{colim}F$ είναι καθορισμένο, με εφαρμογή της συνθήκης PC1 (για τον μορφισμό $T \to \mathrm{colim}F$), συμπεραίνουμε ότι πληρούται η συνθήκη F1.

Αν τώρα, θεωρήσουμε το ακόλουθο διάγραμμα στην $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ FC & & FD \end{tikzcd}$$

τότε, αφού $\mathrm{colim}F \cong \mathbf{1}$, έχουμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ FC \arrow[dr, "incl_C"'] & & FD \arrow[dl, "incl_D"] \\ & \mathrm{colim}F & \end{tikzcd}$$

Με εφαρμογή της συνθήκης PC2, έχουμε ως συμπέρασμα ότι και η συνθήκη Con πληρούται.

Κεφάλαιο 5

Αριστερές Επεκτάσεις **Kan** που διατηρούν Πεπερασμένα Συνεκτικά Όρια

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο είδαμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την διατήρηση ορίων πεπερασμένων διακριτών διαγραμμάτων από αριστερές επεκτάσεις Kan. Σε αυτό το Κεφάλαιο θα μελετήσουμε το πρόβλημα της διατήρησης ορίων πεπερασμένων συνεκτικών διαγραμμάτων από αριστερές επεκτάσεις Kan. Επιπλέον θα μελετήσουμε την περίπτωση της διατήρησης μονομορφισμών, από αριστερές επεκτάσεις Kan μεταξύ αλγεβρικών κατηγοριών, που επάγονται από μορφισμούς μεταξύ αλγεβρικών θεωριών. Τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου υπάρχουν ως επί το πλείστον στην εργασία μας [31].

5.1 Διατήρηση Πεπερασμένων Συνεκτικών Ορίων

Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής από μία μικρή κατηγορία. Αν $T \in \mathcal{E}$, τότε ένας ταιριαστός όρος για την κόμμα κατηγορία T/F, θα ήταν "**γενικευμένη** κατηγορία των στοιχείων του F σε βήμα T".[1]

Ένα (πεπερασμένο) διάγραμμα στην T/F, αποτελείται από ένα διάγραμμα $\mathrm{C} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$

[1]Στο [40], σελ. 397, χρησιμοποιείται ο όρος: " η κατηγορία των γενικευμένων στοιχειών που ορίζονται πάνω από το T" (the category of generalized elements defined over T) του συναρτητή F, για να δηλώσει την κατηγορία των στοιχείων του συναρτητή $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{E} \xrightarrow{hom_{\mathcal{E}}(T,-)} \mathbf{Set}$, την οποία συμβολίζουν με F^T. Η κατηγορία των στοιχείων αυτού του συναρτητή είναι ισοδύναμη με την κόμμα κατηγορία T/F, όποτε μιλάμε για το ίδιο πράγμα χρησιμοποιώντας διαφορετικό συμβολισμό, που μας επιτρέπει να "κινηθούμε πιο άνετα" στις αποδείξεις μας.

στην $\mathcal{C}$, όπου $\mathcal{I}$ πεπερασμένη κατηγορία και επιπλέον για κάθε $i \in \mathcal{I}$ έχουμε μορφισμούς (γενικευμένα στοιχεία) $x_i : T \to FC_i$, έτσι ώστε για κάθε μορφισμό $i \to j$ στην $\mathcal{I}$ κάθε τρίγωνο της μορφής:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "x_i"'] \arrow[dr, "x_j"] & \\ FC_i \arrow[rr] & & FC_j \end{tikzcd}$$

να είναι αντιμεταθετικό.

Θα λέμε ότι υπάρχει **τοπικά** ένας κώνος γι΄ αυτό το διάγραμμα, αν υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα αντικείμενο C_α της $\mathcal{C}$ και μορφισμοί $u_a^i : C_a \to C_i$ (ένας για κάθε $i \in I$) έτσι ώστε το C_α να είναι κώνος για το διάγραμμα C, και υπάρχει και ένας μορφισμός (γενικευμένο στοιχείο σε βήμα T_α) $x_\alpha : T_\alpha \to FC_\alpha$, έτσι ώστε για κάθε $i \in I$ το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[rr, "t_\alpha"] \arrow[dr, "x_\alpha"'] & & T \arrow[dd, "x_i"] \\ & FC_\alpha \arrow[dr, "F(u^i_\alpha)"'] & \\ & & FC_i \end{tikzcd}$$

δηλαδή: $F(u^i_\alpha) \cdot x_\alpha = x_i \cdot t_\alpha$

5.1.1 Παρατήρηση. Με αυτή την ορολογία, η συνθήκη CLF1 για παράδειγμα θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής: *Για κάθε $T \in \mathcal{E}$, κάθε διάγραμμα στην T/F παραμετρικοποιημένο από την κατηγορία $\mathcal{I}^0 = \{ \bullet \rightrightarrows \bullet \}$ έχει τοπικά κώνο.* Αντίστοιχα μπορούν να διατυπωθούν και οι άλλες συνθήκες (SF1, SF2,...) που είδαμε στην Παράγραφο 3.2.

Στο [40][2] αποδεικνύεται ότι αν ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ από μία μικρή κατηγορία προς ένα στοιχειώδη τόπο είναι φιλτραρισμένος (δηλαδή j-επίπεδος, όπου j η τοπολογία των επιμορφικών καλυμμάτων), τότε για κάθε $T \in \mathcal{E}$, κάθε πεπερασμένο διάγραμμα στην κατηγορία T/F έχει κώνο. Όπως μπορεί κανείς να παρατηρήσει από την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, το γεγονός ότι η κατηγορία $\mathcal{E}$ είναι ένας στοιχειώδης τόπος, χρησιμεύει μόνο στην μεταβατικότητα της κλάσης των επιμορφικών οικογενειών, δηλαδή στο γεγονός ότι οι επιμορφικές οικογένειες πληρούν την τρίτη συνθήκη του Ορισμού την προτοπολογίας Grothendieck (Ορισμός 3.1.1). Πιο γενικά λοιπόν, έχουμε το παρακάτω Λήμμα.

[2] Κεφ. VII, §8, Λήμμα 4.

5.1.2 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $(\mathcal{E}, j)$ ένα site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Ο F είναι j-επίπεδος αν και μόνο αν για κάθε $T \in \mathcal{E}$, κάθε πεπερασμένο διάγραμμα στην κατηγορία T/F έχει κώνο.*

Στην παράγραφο 2.3.3 είδαμε ότι αν μία κατηγορία έχει κώνο για κάθε συνεκτικό διάγραμμα που παραμετρικοποιείται από την κατηγορία $\mathcal{I}^0 = \{ \bullet \rightrightarrows \bullet \}$ και την κατηγορία $\mathcal{J}^0 = \{ \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet \}$, τότε έχει κώνο για κάθε πεπερασμένο συνεκτικό διάγραμμα. Πιο γενικά τώρα και σε αναλογία με το παραπάνω Λήμμα, έχουμε:

5.1.3 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $(\mathcal{E}, j)$ ένα site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Ο F είναι j-επίπεδος ως προς συνεκτικά όρια αν και μόνο αν για κάθε $T \in \mathcal{E}$, κάθε πεπερασμένο συνεκτικό διάγραμμα στην κατηγορία T/F έχει κώνο.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο F είναι j-επίπεδος ως προς συνεκτικά όρια. Θα αποδείξουμε ότι κάθε συνεκτικό διάγραμμα στην κατηγορία T/F έχει κώνο χρησιμοποιώντας επαγωγή στον αριθμό των μορφισμών του διαγράμματος. Σε κάθε συνεκτικό διάγραμμα, υπάρχει τουλάχιστον ένας μορφισμός. Στην περίπτωση που το διάγραμμα έχει ένα μόνο μορφισμό

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ FC_1 \arrow[rr] & & FC_2 \end{tikzcd}$$

τότε προφανώς έχει τοπικά (για το ταυτοτικό κάλυμμα) κώνο.

Έστω ότι στην κατηγορία T/F έχουμε ένα συνεκτικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \\ FC_1 \arrow[r] & FC_2 & FC_3 \arrow[l] \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \qquad (CD)$$

Αν προσθέσουμε σε αυτό ένα επιπλέον μορφισμό, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι προκύπτει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \\ FC_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, dotted, shift right, "u"'] & FC_2 & FC_3 \arrow[l] \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \qquad (CD^+)$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, το διάγραμμα (CD) έχει τοπικά κώνο:

$$\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[d, dotted] \arrow[dr, "t_\alpha"] & & & \\
FC_\alpha \arrow[d, dotted] \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, dotted] & T \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
FC_1 \arrow[r] & FC_2 & FC_3 \arrow[l] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Τώρα, εφαρμόζοντας την συνθήκη CLF1 για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[d] & \\
FC_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right, "u"'] & FC_2
\end{tikzcd}$$

έχουμε τον εξής τοπικό κώνο:

$$\begin{tikzcd}
T_{\alpha\xi} \arrow[r, "t_{\alpha\xi}"] \arrow[d, dotted] & T_\alpha \arrow[d] & \\
FC_{\alpha\xi} \arrow[r, dotted] & FC_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right, "u"'] & FC_2
\end{tikzcd}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την συνθήκη CLF2 για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
T_{\alpha\xi} \arrow[r] \arrow[d] & FC_\alpha \arrow[d] \\
FC_{\alpha\xi} \arrow[r] & FC_1
\end{tikzcd}$$

έχουμε τον εξής τοπικό κώνο:

$$\begin{tikzcd}
T_{\alpha\xi\zeta} \arrow[r, "t_{\alpha\xi\zeta}"] \arrow[drr, dotted, "x_{\alpha\xi\zeta}"'] & T \arrow[drr] \arrow[ddr] & & \\
& & FC_{\alpha\xi\zeta} \arrow[r] \arrow[d] & FC_\alpha \arrow[d] \\
& & FC_{\alpha\xi} \arrow[r] & FC_1
\end{tikzcd}$$

Η οικογένεια $\{T_{\alpha\xi\zeta} \xrightarrow{t_{\alpha\xi\zeta}} T_{\alpha\xi} \xrightarrow{t_{\alpha\xi}} T_\alpha \longrightarrow T | \alpha \in A, \xi \in \Xi_\alpha, \zeta \in J_\xi\}$ είναι καλύπτουσα οικογένεια του T (βλέπε συνθήκη 3 του Ορισμού 3.1.1) και κατά συνέπεια έχουμε ένα τοπικό κώνο

$$\begin{tikzcd}
T_{\alpha\xi\zeta} \arrow[d, dotted, "x_{\alpha\xi\zeta}"] \arrow[dr, "t_{\alpha\xi\zeta}"] & & & \\
FC_{\alpha\xi\zeta} \arrow[d, dotted] \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, dotted] & T \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
FC_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right, "u"'] & FC_2 & FC_3 \arrow[l] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

για το διάγραμμα (CD^+).▲

Για το αντίστροφο, βλέπε Παρατήρηση 5.1.1. ■

Στην αρχή του προηγούμενου Κεφαλαίου, είδαμε πως αν $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ είναι ένας συναρτητής από μία μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$ προς μία κατηγορία $\mathcal{E}$ η οποία είναι συν-πλήρης και έχει πεπερασμένα γινόμενα, τότε για οποιαδήποτε δύο αντικείμενα C_1, C_2 της $\mathcal{C}$ επάγεται ένας μορφισμός προς το γινόμενο $FC_1 \times FC_2$, από ένα κατάλληλο συνόριο. Ξαναπαρουσιάζουμε εδώ την ίδια διαδικασία με λιγότερες λεπτομέρειες, στην περίπτωση που έχουμε ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο διάγραμμα στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

Έστω λοιπόν, $\mathrm{C} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ένα πεπερασμένο διάγραμμα στην $\mathcal{C}$. Το διάγραμμα $y \circ \mathrm{C}$ έχει όριο στην κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ των προδραγμάτων της $\mathcal{C}$, έστω L. Αν εκφράσουμε το L ως συνόριο αναπαραστάσιμων (βλέπε Θεώρημα 2.1.5), τότε η δείκτρια κατηγορία που παραμετρικοποιεί το συνόριο αυτό, είναι η κατηγορία των στοιχείων του L, η όποια είναι η κατηγορία των συμβατών κώνων για το διάγραμμα C. Έστω τώρα ότι η κατηγορία $\mathrm{elts}(L)$ έχει μία τελική υποκατηγορία[3] και $\{P_k | k \in K\}$ το σύνολο (αφού η $\mathcal{C}$ είναι μικρή) των αντικειμένων της. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\mathrm{colim}_k y P_k \cong \lim_i y C_i.$$

Αν τώρα η $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένα όρια, από το γεγονός ότι το όριο $\lim\limits_{i \in \mathcal{I}} FC_i$ αποτελεί συνκώνο για το διάγραμμα που αποτελείται από τα FP_k, επάγεται ένας κανονικός μορφισμός $f : \mathrm{colim}_{k \in K} FP_k \to \lim_{i \in \mathcal{I}} FC_i$, όπως υποδεικνύεται από τα παρακάτω διαγράμματα, όπου με l_i συμβολίζουμε τους οριακούς μορφισμούς από το όριο $\lim_{i \in \mathcal{I}} FC_i$ προς τις συνιστώσες του και με $in_k : FP_k \to \mathrm{colim}_k FP_k$ τους κανονικούς μορφισμούς προς το συνόριο.

[3]Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε την ίδια την κατηγορία των στοιχείων του L.

$$\begin{tikzcd}
 & P_k \arrow[dl, "p_k^i"'] \arrow[dr, "p_k^j"] & \\
C_i & & C_j
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
 & FP_k \arrow[dl, "F(p_k^i)"'] \arrow[dr, "F(p_k^j)"] & \\
FC_i & & FC_j
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
 & FP_k \arrow[d, dotted, "f_k"] \arrow[ddl, "F(p_k^i)"'] \arrow[ddr, "F(p_k^j)"] & \\
 & \lim\limits_{i \in \mathcal{I}} FC_i \arrow[dl, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & \\
FC_i & & FC_j
\end{tikzcd}$$

$$\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
FP_k \arrow[dr, "in_k"] \arrow[ddr, "f_k"'] & & FP_{k'} \arrow[dl, "in_{k'}"'] \arrow[ddl, "f_{k'}"] \\
 & \mathrm{colim} FP_k \arrow[d, dotted, "f"] & \\
 & limFC_i &
\end{tikzcd}
\qquad (\mathbf{CL})$$

5.1.4 Παρατήρηση. Αν ο μορφισμός f που ορίστηκε παραπάνω, είναι ισομορφισμός, τότε η αριστερή επέκταση Kan $\mathrm{Lan}_y F$ του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda (η οποία υπάρχει γιατί υποθέσαμε ότι η κατηγορία $\mathcal{E}$ είναι συν-πλήρης) διατηρεί το όριο του διαγράμματος $y \circ \mathrm{C}$ (από αναπαραστάσιμους) και αντίστροφα. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lan}_y F(\lim_i yC_i) &\cong \mathrm{Lan}_y F(\mathrm{colim}_k yP_k) \\
&\cong \mathrm{colim}_k \mathrm{Lan}_y F(yP_k) \\
&\cong \mathrm{colim}_k FP_k \\
&\cong \lim_i FC_i \\
&\cong \lim_i \mathrm{Lan}_y F(yC_i)
\end{aligned}$$

Με όλα τα παραπάνω μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι:

5.1.5 Πρόταση. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες και πεπερασμένα πλήρες υποκανονικό site, $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Έστω επιπλέον, $\mathcal{I}$ μία πεπερασμένη κατηγορία τέτοια ώστε για κάθε $\mathcal{I}$-διάγραμμα $\mathrm{C} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ στην $\mathcal{C}$, να υπάρχει μία τελική οικογένεια κώνων $\{P_k | k \in K\}$ για την οποία το συνόριο $\mathrm{colim} FP_k$ πληροί την συνθήκη PC1. Αν ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί όρια $\mathcal{I}$-διαγραμμάτων από αναπαραστάσιμους, τότε για κάθε $T \in \mathcal{E}$ κάθε $\mathcal{I}$-διάγραμμα στην κατηγορία T/F έχει τοπικά κώνο.*

5.1.6 Απόδειξη. Έστω $T \in \mathcal{E}$ και ένα $\mathcal{I}$-διάγραμμα στην κόμμα κατηγορία T/F

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "x_i"'] \arrow[dr, "x_j"] & \\
FC_i \arrow[rr] & & FC_j
\end{tikzcd}
\qquad (*)$$

Το T, ως κώνος στην $\mathcal{E}$, παραγοντοποιείται μέσω του οριακού κώνου $\lim_i FC_i$

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[ddl, "x_i"'] \arrow[d, dotted, "x"] \arrow[ddr, "x_j"] & \\ & \lim_i FC_i \arrow[dl, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & \\ FC_i \arrow[rr] & & FC_j \end{tikzcd}$$

και επιπλέον, από την υπόθεση ότι ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί $\mathcal{I}$-όρια αναπαραστάσιμων και την Παρατήρηση 5.1.4 έχουμε ότι ο επαγόμενος μορφισμός $f : \mathrm{colim}_k FP_k \to \lim_i FC_i$ είναι ισομορφισμός.

Αν εφαρμόσουμε την συνθήκη PC1 για τον μορφισμό $f^{-1} \cdot x : T \to \mathrm{colim}_k FP_k$, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένας δείκτης $k(\alpha) \in K$ και ένας μορφισμός $x_\alpha : T_\alpha \to FP_{k(\alpha)}$, έτσι ώστε το ακόλουθο τετράγωνο να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "x_\alpha"'] & T \arrow[d, "f^{-1} \cdot x"] \\ FP_{k(\alpha)} \arrow[r, "in_{k(\alpha)}"'] & \mathrm{colim} FP_k \end{tikzcd}$$

δηλαδή: $in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha = f^{-1} \cdot x \cdot t_\alpha$. Τελικά έχουμε ότι $x_\alpha : T_\alpha \to FP_{k(\alpha)}$ είναι ο ζητούμενος τοπικός κώνος για το διάγραμμα (*).

Πράγματι:

Για κάθε $\alpha \in A$, $P_{k(\alpha)}$ είναι κώνος για το αντίστοιχο $\mathcal{I}$-διάγραμμα στην $\mathcal{C}$ και επιπλέον

$$\begin{aligned} Fp^i_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha &= l_i \cdot f_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \\ &= l_i \cdot f \cdot in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \\ &= l_i \cdot f \cdot f^{-1} \cdot x \cdot t_\alpha \\ &= l_i \cdot x \cdot t_\alpha \\ &= x_i \cdot t_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[dr, dotted, "x_\alpha"] & T \arrow[ddl, "x_i"'] \arrow[ddr, "x_j"] & \\
& FC_\alpha \arrow[dl, "Fp^i_{k(\alpha)}"] \arrow[dr, "Fp^j_{k(\alpha)}"'] & \\
FC_i \arrow[rr] & & FC_j
\end{tikzcd}$$

5.1.7 Πόρισμα. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες, πεπερασμένα πλήρες, υποκανονικό site, $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Έστω επιπλέον, για κάθε πεπερασμένο διάγραμμα στην $\mathcal{C}$ υπάρχει μία τελική οικογένεια κώνων $\{P_k | k \in K\}$ γι΄ αυτό το διάγραμμα, για την οποία το συνόριο $\mathrm{colim} FP_k$ πληροί την συνθήκη PC1. Τότε, αν ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί πεπερασμένα όρια αναπαραστάσιμων, ο F είναι j-επίπεδος.*

Απόδειξη: Άμεσα εξάγουμε το συμπέρασμα από την Πρόταση 5.1.5 σε συνδυασμό με το Λήμμα 5.1.2. ■

5.1.8 Πόρισμα. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες, με πεπερασμένα συνεκτικά όρια, υποκανονικό site, $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Έστω επιπλέον, για κάθε πεπερασμένο συνεκτικό διάγραμμα στην $\mathcal{C}$ υπάρχει μία τελική οικογένεια κώνων $\{P_k | k \in K\}$ γι΄ αυτό το διάγραμμα, για την οποία το συνόριο $\mathrm{colim} FP_k$ πληροί την συνθήκη PC1. Τότε, αν ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί πεπερασμένα συνεκτικά όρια αναπαραστάσιμων, ο F είναι j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια.*

Απόδειξη: Άμεσα εξάγουμε το συμπέρασμα από την Πρόταση 5.1.5 σε συνδυασμό με το Λήμμα 5.1.3. ■

5.1.9 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες, με πεπερασμένα συνεκτικά όρια, υποκανονικό site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Έστω επιπλέον, $\mathrm{C} : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ένα συνεκτικό διάγραμμα στην $\mathcal{C}$ (δηλαδή η κατηγορία $\mathcal{I}$ είναι συνεκτική) και ότι υπάρχει μία τελική οικογένεια κώνων $\{P_k | k \in K\}$ γι΄ αυτό το διάγραμμα για την οποία το συνόριο $\mathrm{colim}_k FP_k$ πληροί την συνθήκη PC1. Τότε, αν ο F είναι j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια, ο κανονικός μορφισμός $f : \mathrm{colim}_k FP_k \to \lim_i FC_i$ είναι ισομορφισμός.*

5.1.10 Απόδειξη. Για λόγους ευκολίας και για να είναι πιο κατανοητή η διαδικασία της απόδειξης, θα αποδείξουμε την Πρόταση στην περίπτωση που η $\mathcal{I}$ είναι η κατηγορία $\mathcal{I}^0 = \{\bullet \rightrightarrows \bullet\}$. Από την διαδικασία της απόδειξης γίνεται κατανοητό πως μπορούμε να γενικεύσουμε για οποιαδήποτε άλλη συνεκτική κατηγορία. Έστω λοιπόν, $C_1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} C_2$ ένα παράλληλο ζεύγος μορφισμών στην $\mathcal{C}$ και (E, e) ο εξισωτής στην $\mathcal{E}$ του επαγόμενου διαγράμματος μέσω του F:

$$E \xrightarrow{e} FC_1 \underset{Fb}{\overset{Fa}{\rightrightarrows}} FC_2$$

Επιπλέον, κάθε P_k είναι εφοδιασμένο μ΄ ένα μορφισμό $p_k : P_k \to C_1$, που έχει την ιδιότητα $a \cdot p_k = b \cdot p_k$. Με τον συμβολισμό της Πρότασης, έχουμε ότι $E = \lim_{i \in \mathcal{I}} FC_i$ και $f : \mathrm{colim}_k FP_k \to E$ ο επαγόμενος μορφισμός. Επιπλέον, το συνόριο $\mathrm{colim}_k yP_k$ είναι ο εξισωτής του διαγράμματος $yC_1 \underset{yb}{\overset{ya}{\rightrightarrows}} yC_2$ στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$.

- Ο f είναι μονομορφισμός.

Έστω $T \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} \mathrm{colim}_k FP_k$ με $f \cdot u = f \cdot v$.

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη PC1 για τον μορφισμό $u : T \to \mathrm{colim}_k FP_k$ και για τον μορφισμό $v : T \to \mathrm{colim}_k FP_k$, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T \mid \alpha \in A\}$ του T [4]τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχουν δείκτες $k(\alpha), k'(\alpha) \in K$ και μορφισμοί $u_\alpha : T_\alpha \to FP_{k(\alpha)}$, $v_\alpha : T_\alpha \to FP_{k'(\alpha)}$, έτσι ώστε τα ακόλουθα δύο τετράγωνα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "u_\alpha"'] & T \arrow[d, "u"] \\ FP_{k(\alpha)} \arrow[r, "in_{k(\alpha)}"'] & \mathrm{colim}_k FP_k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "v_\alpha"'] & T \arrow[d, "v"] \\ FP_{k'(\alpha)} \arrow[r, "in_{k'(\alpha)}"'] & \mathrm{colim}_k FP_k \end{tikzcd}$$

δηλαδή $in_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha = u \cdot t_\alpha$ και $in_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha = v \cdot t_\alpha$. Από αυτές τις ισότητες και επειδή το site είναι υποκανονικό, για να δείξουμε την ισότητα $u = v$, αρκεί να δείξουμε ότι $in_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha = in_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha$ για κάθε $\alpha \in A$. Από τις ισότητες:

$$\begin{aligned} Fp_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha &= e \cdot f_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha \\ &= e \cdot f \cdot in_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha \\ &= e \cdot f \cdot u \cdot t_\alpha \\ &= e \cdot f \cdot v \cdot t_\alpha \\ &= e \cdot f \cdot in_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha \\ &= e \cdot f_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha \\ &= Fp_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha \end{aligned}$$

[4]Όπως και στην Απόδειξη 4.1.2, θεωρούμε το ίδιο κάλυμμα στην διπλή εφαρμογή του PC1, ως την κοινή εκλέπτυνση των δύο καλυμμάτων.

έχουμε ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& T_a \arrow[dl, "u_a"'] \arrow[dr, "v_a"] & \\
FP_{k(a)} \arrow[dr, "Fp_{k(a)}"'] & & FP_{k'(a)} \arrow[dl, "Fp_{k'(a)}"] \\
& FC_1 \arrow[d, shift right, "Fb"'] \arrow[d, shift left, "Fa"] & (*) \\
& FC_2 &
\end{tikzcd}$$

είναι ένα πεπερασμένο συνεκτικό διάγραμμα στην κατηγορία T_α/F (των γενικευμένων στοιχείων του F σε βήμα T_α). Άρα, από το Λήμμα 5.1.3 έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_{\alpha\xi} : T_{\alpha\xi} \to T_\alpha | \, \alpha \in A, \xi \in \Xi_\alpha\}$ του T_α, τέτοιο ώστε για κάθε $\xi \in \Xi_\alpha$, υπάρχει ένας κώνος $P_{k(\alpha\xi)}$ στην $\mathcal{C}$ για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
P_{k(\alpha)} \arrow[dr, "p_{k(\alpha)}"'] & & P_{k'(\alpha)} \arrow[dl, "p_{k'(\alpha)}"] \\
& C_1 \arrow[d, shift right, "b"'] \arrow[d, shift left, "a"] & \\
& C_2 &
\end{tikzcd}$$

και ένας μορφισμός $x_{\alpha\xi} : T_{\alpha\xi} \to FP_{k(\alpha\xi)}$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό [5]

[5]Θεωρήσαμε κάποιο αντικείμενο $P_{k(\alpha\xi)}$ από την τελική οικογένεια των κώνων του διαγράμματος $C_1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} C_2$, γιατί αυτό το αντικείμενο είναι κώνος για ένα διάγραμμα που περιέχει το διάγραμμα $C_1 \underset{a}{\overset{b}{\rightrightarrows}} C_2$

$$\begin{tikzcd}
& T_{\alpha\xi} \arrow[dr, "t_{\alpha\xi}"] \arrow[ddr, "x_{\alpha\xi}"'] & & \\
& & T_\alpha \arrow[ddl, "u_\alpha"'] \arrow[ddr, "v_\alpha"] & \\
& & FP_{k(\alpha\xi)} \arrow[dl, "Fq"] \arrow[dr, "Fr"'] & \\
& FP_{k(\alpha)} \arrow[dr, "Fp_{k(\alpha)}"'] & & FP_{k'(\alpha)} \arrow[dl, "Fp_{k'(\alpha)}"] \\
& & FC_1 \arrow[d, shift right, "Fb"'] \arrow[d, shift left, "Fa"] & \\
& & FC_2 &
\end{tikzcd}$$

Από την αντιμεταθετικότητα αυτού του διαγράμματος οι μορφισμοί p και q είναι συμβατοί μορφισμοί μεταξύ κώνων του διαγράμματος $C_1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} C_2$. Άρα, βρήκαμε ένα ζιγκ-ζαγκ, που συνδέει το $P_{k(\alpha)}$ και το $P_{k'(\alpha)}$, και συνεπώς από το αντίστροφο της συνθήκης PC2 (βλέπε Παρατήρηση 3.3.1) έχουμε ότι $in_{k(\alpha)} \cdot u_\alpha = in_{k'(\alpha)} \cdot v_\alpha$.

• Ο f είναι διασπώμενος.

Έστω $x : T \to E$. Έχουμε ότι: $Fa \cdot e \cdot x = Fb \cdot e \cdot x$. Από την συνθήκη CLF1 έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένας δείκτης $k(\alpha) \in K$ και ένας μορφισμός $x_\alpha : T_\alpha \to FP_{k(\alpha)}$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
FP_{k(\alpha)} \arrow[r, "Fp_{k(\alpha)}"] & FC_1 \arrow[r, shift left, "Fa"] \arrow[r, shift right, "Fb"'] & FC_2 \\
T_\alpha \arrow[u, dotted, "x_\alpha"] \arrow[r, "t_\alpha"] & T \arrow[u, "e\cdot x"'] &
\end{tikzcd}$$

δηλαδή, $e \cdot x \cdot t_\alpha = Fp_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha$

Δείχνουμε τώρα ότι η οικογένεια $\{in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha | \, \alpha \in A\}$, στοιχείων του συναρτητή $hom_{\mathcal{E}}(-, \mathrm{colim} FP_k)$, είναι συμβατή για το κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$.

Για τυχαία $\alpha, \alpha' \in A$, θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & T_\alpha \arrow[r, "x_\alpha"] \arrow[dr, "t_\alpha"] & FP_{k(\alpha)} \arrow[dr, "in_{k(\alpha)}"] & \\
T_\alpha \times_T T_{\alpha'} \arrow[ur, "\pi^1_{\alpha\alpha'}"] \arrow[dr, "\pi^2_{\alpha\alpha'}"'] & & T & \mathrm{colim} FP_k \\
 & T_{\alpha'} \arrow[r, "x_{\alpha'}"'] \arrow[ur, "t_{\alpha'}"] & FP_{k(\alpha')} \arrow[ur, "in_{k(\alpha')}"'] &
\end{tikzcd}$$

Από τις ισότητες:

$$\begin{aligned}
e \cdot f \cdot in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} &= e \cdot f_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} \\
&= Fp_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} \\
&= e \cdot x \cdot t_\alpha \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} \\
&= e \cdot x \cdot t_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'} \\
&= Fp_{k(\alpha')} \cdot x_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'} \\
&= e \cdot f_{k(\alpha')} \cdot x_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'} \\
&= e \cdot f \cdot in_{k(\alpha')} \cdot x_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'}
\end{aligned}$$

και από το γεγονός ότι οι μορφισμοί e, f είναι μονομορφισμοί,[6] έχουμε ότι

$$in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha \cdot \pi^1_{\alpha\alpha'} = in_{k(\alpha')} \cdot x_{\alpha'} \cdot \pi^2_{\alpha\alpha'}$$

Από την τελευταία ισότητα έχουμε ότι η οικογένεια $\{in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha | \, \alpha \in A\}$ είναι συμβατή. Το site $(\mathcal{E}, j)$ είναι υποκανικό, οπότε από το γεγονός ότι ο αναπαραστάσιμος $hom_{\mathcal{E}}(-, \mathrm{colim} FP_k)$ είναι δράγμα, έχουμε ότι υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $r : T \to \mathrm{colim} FP_k$, έτσι ώστε για κάθε $\alpha \in A$ ισχύει η ισότητα $r \cdot t_\alpha = in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[r, "x_\alpha"] \arrow[dr, "t_\alpha"'] & FP_{k(\alpha)} \arrow[dr, "in_{k(\alpha)}"] & \\
 & T \arrow[r, dotted, "r"'] & \mathrm{colim} FP_k
\end{tikzcd}$$

Τώρα, για κάθε $\alpha \in A$ έχουμε ότι:

$$e \cdot f \cdot r \cdot t_\alpha = e \cdot f \cdot in_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha = e \cdot f_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha = Fp_{k(\alpha)} \cdot x_\alpha = e \cdot x \cdot t_\alpha$$

και από το γεγονός ότι ο e είναι μονομορφισμός και το site είναι υποκανονικό, έχουμε τελικά ότι $f \cdot r = x$. ■

[6] Ο e είναι μονομορφισμός γιατί είναι εξισωτής ενός παράλληλου ζεύγους μορφισμών και για τον f αποδείξαμε πριν ότι είναι μονομορφισμός.

5.1.11 Παρατήρηση. Στην παραπάνω απόδειξη αν αντί του διαγράμματος $\mathcal{I}^0$ είχαμε ένα οποιοδήποτε άλλο συνεκτικό διάγραμμα, τότε αντί του διαγράμματος (*) θα προέκυπτε ένα άλλο συνεκτικό διάγραμμα στην κατηγορία T_α/F, και πάλι από το Λήμμα 5.1.3 θα είχαμε τον τοπικό κώνο που χρειαζόμαστε. Επιπλέον, αντί του γεγονότος ότι ο e είναι μονομορφισμός, θα χρησιμοποιούσαμε το γεγονός ότι η οικογένεια $\{l_i : \lim_i FC_i \to FC_i\}$ είναι από κοινού μονομορφική.

5.1.12 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες, με πεπερασμένα συνεκτικά όρια, υποκανονικό site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Έστω επιπλέον, τα συνόρια που υπεισέρχονται στον υπολογισμό της αριστερής επέκτασης Kan ενός πεπερασμένου συνεκτικού ορίου αναπαραστάσιμων πληρούν την συνθήκη PC1. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Ο F είναι j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια.*
2. *Ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί πεπερασμένα συνεκτικά όρια αναπαραστάσιμων.*

Απόδειξη: Από την παραπάνω Πρόταση και την Παρατήρηση 5.1.4, προκύπτει ότι $1 \Rightarrow 2$. Η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι το Πόρισμα 5.1.8 ■

Μέχρι τώρα σε αυτό Κεφάλαιο έχουμε βρει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να διατηρεί ο $\mathrm{Lan}_y F$ πεπερασμένα συνεκτικά όρια αναπαραστάσιμων. Στο προηγούμενο κεφάλαιο που μελετήσαμε την περίπτωση των πεπερασμένων γινομένων, για το "πέρασμα" από την διατήρηση πεπερασμένων γινομένων αναπαραστάσιμων στην διατήρηση όλων των πεπερασμένων γινομένων, αρκούσε η καρτεσιανή κλειστότητα της κατηγορίας $\mathcal{E}$ (βλέπε Πόρισμα 4.1.5). Στην περίπτωση τώρα των πεπερασμένων συνεκτικών ορίων χρειαζόμαστε "περισσότερη δομή" για την κατηγορία $\mathcal{E}$. Το παρακάτω Λήμμα μας λέει ότι αρκεί η κατηγορία $\mathcal{E}$ να είναι ένας στοιχειώδης τόπος. Στην απόδειξη του Λήμματος αυτού ([40], Κεφ. VII, §10, Λήμμα C), υπάρχει μία ασάφεια ως προς την δικαιολόγηση κάποιων ισομορφισμών.[7] Μας επισημάνθηκαν από τον Peter Johnstone οι λόγοι που βεβαιώνουν την ορθότητα αυτών των ισομορφισμών. Ξαναγράφουμε λοιπόν την απόδειξη αυτού του λήμματος, και για τον επιπλέον λόγο, ότι από την απόδειξη φαίνεται ότι μπορεί να γενικευτεί το παραπάνω αποτέλεσμα και σε περιπτώσεις που η κατηγορία $\mathcal{E}$ είναι "κάτι λιγότερο" από στοιχειώδης τόπος.

5.1.13 Λήμμα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $\mathcal{E}$ ένα στοιχειώδης τόπος και $G : [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}] \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Αν ο G διατηρεί συνόρια και εφελκύσεις διαγραμμάτων από αναπαράστασιμους, τότε ο G διατηρεί όλες τις εφελκύσεις.*

[7] Αναφερόμαστε στους ισομορφισμούς της εξίσωσης 21.

5.1.14 Απόδειξη. Πρώτα απ΄ όλα, όταν μιλάμε για εφελκύσεις διαγραμμάτων από αναπαραστάσιμους, εννοούμε εφελκύσεις στον τόπο των προδραγμάτων $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ της $\mathcal{C}$, της μορφής

$$\begin{tikzcd} yC_1 \times_{yD} yC_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & yC_1 \arrow[d, "yf=f\circ -"] \\ yC_2 \arrow[r, "yg=g\circ -"'] & yD \end{tikzcd}$$

Έστω τώρα, ένα τυχαίο διάγραμμα εφέλκυσης στην κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$

$$\begin{tikzcd} Q \times_P R \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d] \\ Q \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

Έστω $P \cong \operatorname*{colim}_{i\in I} P_i$ όπου $P_i = yC_i$ η παράσταση του P ως ένα συνόριο αναπαραστάσιμων. Για κάθε $i \in I$, θεωρούμε τις εφελκύσεις $R_i = P_i \times_P R$, $Q_i = P_i \times_P Q$

$$\begin{tikzcd} R_i \arrow[r] \arrow[d] & P_i \arrow[d] \\ R \arrow[r] & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q_i \arrow[r] \arrow[d] & P_i \arrow[d] \\ Q \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

Αν τώρα $R_i \cong \operatorname*{colim}_{j\in J_i} R_{ij}$ όπου $R_{ij} = yC_{ij}$ και $Q_i \cong \operatorname*{colim}_{k\in K_i} Q_{ik}$ όπου $Q_{ik} = yC_{ik}$ και για κάθε k θεωρήσουμε την εφέλκυση

$$\begin{tikzcd} R_{ij} \times_{P_i} Q_{ik} \arrow[rr] \arrow[dd] & & Q_{ik} \arrow[d] \\ & & Q_i \arrow[d] \\ R_{ij} \arrow[r] & R_i \arrow[r] & P_i \end{tikzcd}$$

τότε από τον ισομορφισμό $Q_i \cong \operatorname*{colim}_{k\in K_i} Q_{ik}$ και το γεγονός ότι σε κάθε τόπο (άρα και στον τόπο των προδραγμάτων) έχουμε αντιμετάθεση συνορίων με εφελκύσεις,[8] έχουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα, είναι διάγραμμα εφέλκυσης

$$\begin{tikzcd} \operatorname{colim}_k(R_{ij} \times_{P_i} Q_{ik}) \arrow[rr] \arrow[d] & & Q_i \arrow[d] \\ R_{ij} \arrow[r] & R_i \arrow[r] & P_i \end{tikzcd}$$

[8] Κάθε τόπος είναι μία τοπικά καρτεσιανά κλειστή κατηγορία.

δηλαδή

$$\mathrm{colim}_k(R_{ij} \times_{P_i} Q_{ik}) \cong R_{ij} \times_{P_i} Q_i \tag{5.1}$$

Με το ίδιο σκεπτικό έχουμε ότι

$$\mathrm{colim}_j(R_{ij} \times_{P_i} Q_i) \cong R_i \times_{P_i} Q_i \tag{5.2}$$

Άμεσα τώρα μπορεί κάποιος να δείξει ότι: $(Q \times_P R) \times_P P_i \cong R_i \times_{P_i} Q_i$. Από αυτό τον ισομορφισμό και χρησιμοποιώντας μία φορά ακόμα την αντιμετάθεση συνορίων με εφελκύσεις, έχουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι διάγραμμα εφέλκυσης

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{colim}_k(R_i \times_{P_i} Q_i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{colim}_i P_i \arrow[d] \\
Q \times_P R \arrow[r] & P
\end{tikzcd}$$

και επειδή ο δεξιός κάθετος μορφισμός της παραπάνω εφέλκυσης είναι ισομορφισμός, έχουμε ότι:

$$\mathrm{colim}_k(R_i \times_{P_i} Q_i) \cong Q \times_P R \tag{5.3}$$

Από τους ισομορφισμούς 5.1, 5.2, 5.3, έχουμε ότι:

$$\mathrm{colim}_i \mathrm{colim}_j \mathrm{colim}_k(R_{ij} \times_{P_i} Q_{ik}) \cong Q \times_P R \tag{5.4}$$

Χρησιμοποιώντας τον ίδιο συλλογισμό (δουλεύοντας τώρα στον τόπο $\mathcal{E}$), και από το γεγονός ότι ο G διατηρεί εφελκύσεις αναπαραστάσιμων, έχουμε ότι

$$\mathrm{colim}_i \mathrm{colim}_j \mathrm{colim}_k(G(R_{ij}) \times_{G(P_i)} G(Q_{ik})) \cong G(Q) \times_{G(P)} G(R) \tag{5.5}$$

Από την υπόθεση, έχουμε ότι ο G διατηρεί εφελκύσεις της μορφής $R_{ij} \times_{P_i} Q_{ik}$ καθώς και συνόρια, άρα το αριστερό μέρος της παραπάνω εξίσωσης ισούται με

$$G(\mathrm{colim}_i \mathrm{colim}_j \mathrm{colim}_k(R_{ij} \times_{P_i} Q_{ik}))$$

και συνεπώς από την 5.4 έχουμε ότι ισούται με $G(Q \times_P R)$. Δηλαδή

$$G(Q \times_P R) \cong G(Q) \times_{G(P)} G(R) \qquad \blacksquare$$

5.1.15 Παρατήρηση. Η υπόθεση ότι η κατηγορία $\mathcal{E}$ είναι ένας στοιχειώδης τόπος, χρειάστηκε στην παραπάνω απόδειξη μόνο για το το γεγονός ότι σε στοιχειώδεις τόπους ισχύει η αντιμετάθεση των συνορίων με εφελκύσεις. Αυτό ισχύει γιατί σ' ένα στοιχειώδη τόπο, αν $f : A \to B$ είναι ένας μορφισμός, τότε ο συναρτητής της αλλαγής βάσης $f^* : \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A$ έχει δεξιά προσαρτημένο (άρα ως αριστερά προσαρτημένος διατηρεί συνόρια). Οι κατηγορίες που έχουν αυτή την ιδιότητα είναι οι τοπικά καρτεσιανά κλειστές κατηγορίες (βλέπε Ορισμός 2.1.18). Όμως είναι δυνατόν σε μία κατηγορία να έχουμε αντιμετάθεση συνορίων με εφελκύσεις χωρίς απαραίτητα η κατηγορία να είναι τοπικά καρτεσιανά κλειστή. Για παράδειγμα οι ∞-προτόποι έχουν αυτή την ιδιότητα (βλέπε Παρατήρηση 3.1.18).

5.1.16 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $\mathcal{E}$ ένας ∞-προτόπος και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Ο F είναι j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια αν και μόνο αν η αριστερή επέκταση Kan $\mathrm{Lan}_y F : [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}] \to \mathcal{E}$ του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda, διατηρεί πεπερασμένα συνεκτικά όρια.*

Απόδειξη: Σ' ένα ∞-προτόπο όλα τα συνόρια είναι καθορισμένα αναφορικά με την τοπολογία των επιμορφικών καλυμμάτων (βλέπε Πρόταση 3.3.11). Αν τώρα ο F είναι j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια, τότε από το Πόρισμα 5.1.12 έχουμε ότι ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί συνεκτικά όρια αναπαραστάσιμων και ειδικότερα εφελκύσεις αναπαραστάσιμων. Ο $\mathrm{Lan}_y F$ ως αριστερά προσαρτημένος συναρτητής διατηρεί συνόρια, άρα από την Παρατήρηση 5.1.15 συμπεραίνουμε ότι θα διατηρεί εφελκύσεις. Από το Θεώρημα 2.3.45, έχουμε τελικά ότι ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί όλα τα πεπερασμένα συνεκτικά όρια.
Το αντίστροφο τώρα, είναι άμεση συνέπεια του Πορίσματος 5.1.8. ■

Το παρακάτω Πόρισμα, έχει διατυπωθεί και αποδειχτεί με λογικό-κατηγορικές μεθόδους από τον Anders Kock ([34], Πόρισμα 3.3), κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Diaconescu. Το αποδεικνύουμε εδώ με βάση την δική μας ανάλυση και παίρνουμε ως πόρισμα το Θεώρημα Diaconescu.

5.1.17 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $\mathcal{E}$ ένας ∞-προτόπος και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$. Ο F είναι j-επίπεδος αν και μόνο αν η αριστερή επέκταση Kan $\mathrm{Lan}_y F : [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}] \to \mathcal{E}$, του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda, διατηρεί πεπερασμένα όρια.*

Απόδειξη: Ο F είναι j-επίπεδος, άρα και j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια. Από το προηγούμενο Πόρισμα τώρα, έχουμε ότι ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί εφελκύσεις. Από το Λήμμα 5.1.2 ο F πληροί τις συνθήκες Con και F1, άρα από το Πρόταση 4.3.1, έχουμε ότι ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί και το τελικό αντικείμενο. ■

5.2 Επίπεδοι Μορφισμοί Θεωριών

Οι μορφισμοί μεταξύ αλγεβρικών θεωριών επάγουν ανταλλοίωτους συναρτητές μεταξύ των κατηγοριών από μοντέλα τους (κατηγορίες αλγεβρών). Στην περίπτωση των θεωριών Lawvere, είναι γνωστό (ήδη από την διδακτορική διατριβή του Lawvere [36]), ότι τέτοιοι συναρτητές έχουν αριστερά προσαρτημένο. Επιπλέον είναι γνωστό ότι σε κάποιες από αυτές τις περιπτώσεις, ο αριστερά προσαρτημένος διατηρεί μονομορφισμούς. Τέτοιες περιπτώσεις είναι μεταξύ άλλων, η εμφύτευση της κατηγορίας των ομάδων σε αυτή των μονοϊδών και η εμφύτευση της κατηγορίας των αλγεβρών Boole στην κατηγορία των επιμεριστικών δικτυωτών (distributive lattices).

Στην ενότητα αυτή, εξετάζουμε το γενικότερο πλαίσιο στο οποίο υπάγονται τα παραπάνω, και δίνουμε ικανές συνθήκες (με όρους επιπεδότητας) για τους μορφισμούς μεταξύ θεωριών, για τους οποίους ο αριστερά προσαρτημένος που αναφέραμε παραπάνω (ο οποίος προκύπτει ως μία αριστερή επέκταση Kan) διατηρεί μονομορφισμούς.

5.2.1 Κατηγορίες Αλγεβρών ως Ελεύθερες Πληρώσεις

Κεντρικό ρόλο στο βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας (Θεώρημα 5.2.8), είναι το γεγονός ότι οι κατηγορίες αλγεβρών για μία αλγεβρική θεωρία, προκύπτουν ως ελεύθερες πληρώσεις (free cocompletions) ως προς sifted συνόρια (των δυϊκών) των αντίστοιχων θεωριών τους ([3]). Παρουσιάζουμε σε αυτή την παράγραφο, τα στοιχεία που θα χρειαστούμε για την απόδειξη του αποτελέσματός μας. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τέτοιου είδους ελεύθερες πληρώσεις μπορεί κανείς να δει στο [2], §4.

5.2.1 Ορισμός. *Με τον όρο **αλγεβρική θεωρία**, εννοούμε μία μικρή κατηγορία $\mathcal{A}$ με πεπερασμένα γινόμενα. Ένας μορφισμός μεταξύ δύο αλγεβρικών θεωριών $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}'$, είναι ένας συναρτητής που διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα. Μία **άλγεβρα** για μία αλγεβρική θεωρία $\mathcal{A}$, είναι ένας συναρτητής $A : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$, ο οποίος διατηρεί γινόμενα. Η κατηγορία με αντικείμενα τις άλγεβρες για μία αλγεβρική θεωρία $\mathcal{A}$ και μορφισμούς φυσικούς μετασχηματισμούς συμβολίζεται με $\mathrm{Alg}\mathcal{A}$. Μία κατηγορία καλείται **αλγεβρική**, αν είναι ισοδύναμη με μία κατηγορία της μορφής $\mathrm{Alg}\mathcal{A}$, για κάποια αλγεβρική θεωρία $\mathcal{A}$.*

5.2.2 Ορισμός. *Έστω $\mathcal{A}$ μία (μικρή) κατηγορία. Η **ελεύθερη πλήρωση** (free cocompletion) της $\mathcal{A}$ ως προς sifted συνόρια, αποτελείται από μία κατηγορία την οποία συμβολίζουμε $\mathrm{Sind}\mathcal{A}$, η οποία έχει sifted συνόρια και από ένα πλήρη και πιστό συναρτητή $\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathrm{Sind}\mathcal{A}$, έτσι ώστε να πληρούται η ακόλουθη καθολική ιδιότητα:*

Για κάθε κατηγορία $\mathcal{B}$ η οποία έχει sifted συνόρια και για κάθε συναρτητή $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, υπάρχει ένας μοναδικός (με προσέγγιση φυσικού ισομορφισμού) συναρτητής $F^* : \mathrm{Sind}\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, τέτοιος ώστε ο F να είναι φυσικά ισόμορφος με τον $F^* \circ \eta_{\mathcal{A}}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\eta_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathrm{Sind}\mathcal{A} \arrow[dl, dotted, "F^*"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

Αποδεικνύεται ότι αν η κατηγορία $\mathcal{A}$ έχει πεπερασμένα συν-γινόμενα, τότε η ελεύθερη πλήρωση της $\mathcal{A}$ ως προς sifted συνόρια, είναι η κατηγορία $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]_{\mathrm{pp}}$, η οποία είναι η πλήρης υποκατηγορία των προδραγμάτων της $\mathcal{A}$, με αντικείμενα τους ανταλλοίωτους συναρτητές από την $\mathcal{A}$ προς την κατηγορία των συνόλων, οι οποίοι διατηρούν πεπερασμένα γινόμενα. Ο συναρτητής $\eta_{\mathcal{A}}$ είναι η εμφύτευση Yoneda[9] και αν $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, ένας συναρτητής προς μία κατηγορία $\mathcal{B}$ με sifted συνόρια, τότε ο συναρτητής F^* είναι η αριστερή επέκταση Kan του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda. Επιπλέον, κάθε προδράγμα X της κατηγορίας $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]_{\mathrm{pp}}$ μπορεί να παρασταθεί ως ένα sifted συνόριο αναπαραστάσιμων.

5.2.3 Παρατήρηση. Με βάση τα παραπάνω. έχουμε ότι αν $\mathcal{A}$ είναι μία αλγεβρική θεωρία, τότε $\mathrm{Alg}\mathcal{A} = \mathrm{Sind}\mathcal{A}^{op}$ και κάθε άλγεβρα μπορεί να παρασταθεί ως ένα sifted συνόριο αναπαραστάσιμων.

5.2.4 Ορισμός. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία με sifted συνόρια και $C \in \mathcal{C}$. Το C καλείται* ***ισχυρά πεπερασμένα παρουσιάσιμο*** *(strongly finitely presentable) αντικείμενο της $\mathcal{C}$, αν ο συναλλοίωτος hom-συναρτητής $\hom_{\mathcal{C}}(C, -) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, διατηρεί sifted συνόρια.*

5.2.5 Παρατήρηση. Αν $\mathcal{A}$ είναι μία αλγεβρική θεωρία, τότε η κατηγορία $\mathrm{Alg}\mathcal{A}$ των αλγεβρών της $\mathcal{A}$, έχει sifted συνόρια, τα οποία διατηρούνται από την εμφύτευση $\mathrm{Alg}\mathcal{A} \hookrightarrow [\mathcal{A}, \mathbf{Set}]$, άρα τα sifted συνόρια στην $\mathrm{Alg}\mathcal{A}$ υπολογίζονται κατά σημείο (βλέπε [2], Πρόταση 2.5). Επιπλέον, τα αντικείμενα της $\mathrm{Alg}\mathcal{A}$ τα οποία είναι στην εικόνα του $\eta_{\mathcal{A}}$ (δηλαδή οι συναλλοίωτοι αναπαραστάσιμοι), είναι ισχυρά πεπερασμένα παρουσιάσιμα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathrm{Alg}\mathcal{A}$.
Πράγματι:
Έστω $\eta_{\mathcal{A}}A = \hom_{\mathcal{A}}(A, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ και $\mathrm{colim}_i X_i$ ένα sifted συνόριο στην $\mathrm{Alg}\mathcal{A}$ ($X_i : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$ συναρτητές που διατηρούν γινόμενα). Τότε, από το λήμμα του Yoneda και το γεγονός ότι η $\mathrm{Alg}\mathcal{A}$ ως υποκατηγορία της $[\mathcal{A}, \mathbf{Set}]$ είναι κλειστή ως προς sifted συνόρια, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathrm{Alg}\mathcal{A}}(\hom_{\mathcal{A}}(A, -),\ \mathrm{colim}_i X_i) &\cong (\mathrm{colim}_i X_i)(A) \\
&\cong \mathrm{colim}_i X_i(A) \\
&\cong \mathrm{colim}_i \hom_{\mathrm{Alg}\mathcal{A}}(\hom_{\mathcal{A}}(A, -),\ X_i)
\end{aligned}$$

Από τον τρόπο κατασκευής συνορίων στην κατηγορία των συνόλων (βλέπε σελ. 67), έχουμε:

5.2.6 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία με sifted συνόρια και $C \in \mathcal{C}$. Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

[9] Για κάθε αντικείμενο A της κατηγορίας $\mathcal{A}$, ο ανταλλοίωτος hom- συναρτητής $yA = \hom_{\mathcal{A}}(-, A) : \mathcal{A}^{op} \to \mathbf{Set}$, έχει την ιδιότητα ότι, αν $A_1 \sqcup A_2$ είναι το συν-γινόμενο δύο αντικειμένων στην κατηγορία $\mathcal{A}$, τότε $\hom_{\mathcal{A}}(A_1 \sqcup A_2, A) = \hom_{\mathcal{A}}(A_1, A) \times \hom_{\mathcal{A}}(A_2, A)$. Άρα, η εμφύτευση Yoneda λαμβάνει τιμές στην κατηγορία $[\mathcal{A}^{op}, \mathbf{Set}]_{\mathrm{pp}}$.

1. *Το C είναι ισχυρά πεπερασμένα παρουσιάσιμο*

2. *Για κάθε sifted συνόριο* $\mathrm{colim}_i C_i$ *στην* $\mathcal{C}$ *και για κάθε μορφισμό* $f : C \to \mathrm{colim}_i C_i$*, υπάρχει μία συνιστώσα* C_i *του συνορίου, τέτοια ώστε ο* f *να παραγοντοποιείται μέσω του μορφισμού* $in_i : C_i \to \mathrm{colim}_i C_i$

$$\begin{tikzcd} & C_i \arrow[d, "in_i"'] \\ C \arrow[ur, dotted, "f_i"] \arrow[r, "f"'] & \mathrm{colim}_i C_i \end{tikzcd}$$

και αν υπάρχουν δύο τέτοιες παραγοντοποιήσεις

$$\begin{tikzcd} & C_i \arrow[dr, "in_i"] & \\ C \arrow[ur, dotted, "f_i"] \arrow[rr, "f"'] \arrow[dr, dotted, "f_j"'] & & \mathrm{colim}_i C_i \\ & C_j \arrow[ur, "in_j"'] & \end{tikzcd}$$

τότε υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ (στην $\mathcal{C}$ *που προέρχεται από την δείκτρια κατηγορία του συνορίου) που συνδέει τα* C_i, C_j

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & C_n \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & \\ C_i & & \cdot \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] & \cdot & & C_j \end{tikzcd}$$

και μορφισμοί από το C *προς τα* C_1, ..., C_n*, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό*

$$
\begin{tikzcd}
& & C_i \arrow[dddr, "in_i"] & \\
& C_1 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddrr] & & \\
& & \cdot \arrow[dr] \arrow[dd, dotted, no head] & \\
C \arrow[uuurr, bend left, "f_i"] \arrow[uur, dotted] \arrow[ddr, dotted] \arrow[rrr] \arrow[dddrr, bend right, "f_j"'] & & & \mathrm{colim}_i C_i \\
& & \cdot \arrow[ur] & \\
& C_n \arrow[ur] \arrow[uurr] \arrow[dr] & & \\
& & C_j \arrow[uuur, "in_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

Έστω τώρα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ αλγεβρικές θεωρίες και $I : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας μορφισμός μεταξύ τους. Τότε επάγεται ένας συναρτητής μεταξύ αλγεβρικών κατηγοριών

$$- \circ I : \mathrm{Alg}\mathcal{B} \to \mathrm{Alg}\mathcal{A}$$

με την προφανή δράση, δηλαδή αντιστοιχίζει ένα συναρτητή $F : \mathcal{B} \to \mathbf{Set}$ που διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα στον συναρτητή $\mathcal{A} \xrightarrow{I} \mathcal{B} \xrightarrow{F} \mathbf{Set}$. Ο I ως ένας μορφισμός μεταξύ αλγεβρικών θεωριών διατηρεί γινόμενα, όποτε ο συναρτητής $- \circ I$ είναι καλά ορισμένος.

Αν τώρα θεωρήσουμε τον συναρτητή $\mathcal{A}^{op} \xrightarrow{I^{op}} \mathcal{B}^{op} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{B}}} \mathrm{Alg}\mathcal{B}$, τότε από το λήμμα του Yoneda, ο ιδιάζων συναρτητής που του αντιστοιχεί (βλέπε σελ. 10) είναι ο συναρτητής $- \circ I$.[10]. Αν επιπλέον, με $I^* : \mathrm{Alg}\mathcal{A} \to \mathrm{Alg}\mathcal{B}$ συμβολίσουμε την αριστερή επέκταση Kan του συναρτητή $\eta_{\mathcal{B}} \circ I^{op}$ κατά μήκος του συναρτητή $\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}^{op} \to \mathrm{Alg}\mathcal{A}$, [11] τότε εξακολουθεί να υφίσταται η προσάρτηση μεταξύ της αριστερής επέκτασης Kan και του ιδιάζοντα συναρτητή

[10] Για την ακρίβεια ο ιδιάζων συναρτητής είναι φυσικά ισόμορφος με τον $- \circ I$.

[11] Ο συναρτητής $\eta_{\mathcal{A}}$ είναι ο περιορισμός στο συν-πεδίο της ανταλλοίωτης εμφύτευσης Yoneda.

(βλέπε [2], Παρατήρηση 4.15), δηλαδή: $I^* \dashv - \circ I$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{op} \arrow[rr, "\eta_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "I^{op}"'] & & \mathrm{Alg}(\mathcal{A}) \arrow[dd, shift left, "I^*"] \\ & \mathcal{B}^{op} \arrow[dr, "\eta_{\mathcal{B}}"'] & \\ & & \mathrm{Alg}(\mathcal{B}) \arrow[uu, shift left, "- \circ I"] \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

5.2.2 Συνθήκες Επιπεδότητας για Μορφισμούς μεταξύ Θεωριών

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας (Θεώρημα 5.2.8), παρέχει ικανή συνθήκη για τους μορφισμούς $I : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ δύο αλγεβρικών θεωριών $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, για τους οποίους η επαγόμενη αριστερή επέκταση Kan $I^* : \mathrm{Alg}\mathcal{A} \to \mathrm{Alg}\mathcal{B}$ μεταξύ αλγεβρικών κατηγοριών, διατηρεί μονομορφισμούς. Η συνθήκη που χαρακτηρίζει τέτοιους μορφισμούς I, είναι η επιπεδότητα ως προς συνεκτικά όρια του συναρτητή $I^{op} : \mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}^{op}$ αναφορικά με την τετριμμένη τοπολογία της κατηγορίας $\mathcal{B}$. Προτού περάσουμε στην απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, αναλύουμε την παραπάνω συνθήκη:

- Οποτεδήποτε έχουμε ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα στην $\mathcal{B}$, της μορφής:

$$\begin{tikzcd} IA_1 \arrow[r, "I\alpha"] \arrow[d, "I\beta"'] & IA_2 \arrow[d, "\omega_1"] \\ IA_3 \arrow[r, "\omega_2"'] & B \end{tikzcd}$$

  τότε υπάρχουν μορφισμοί $\theta_1 : A_2 \to A$, $\theta_2 : A_3 \to A$ στην $\mathcal{A}$ και ένας μορφισμός $\rho\colon IA \to B$ στην $\mathcal{B}$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα της κατηγορίας $\mathcal{B}$ να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} IA_1 \arrow[r, "I(\alpha)"] \arrow[d, "I(\beta)"'] & IA_2 \arrow[d, "I\theta_1"'] \arrow[ddr, "\omega_1"] & \\ IA_3 \arrow[r, "I\theta_2"] \arrow[drr, "\omega_2"'] & IA \arrow[dr, dotted, "\rho"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

- Οποτεδήποτε έχουμε ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα στην $\mathcal{B}$, της μορφής:

$$\begin{tikzcd} IA_1 \arrow[r, shift left, "I(\beta)"] \arrow[r, shift right, "I(\alpha)"'] & IA_2 \arrow[r, "\omega"] & B, \end{tikzcd}$$

τότε υπάρχει ένας μορφισμός $\theta : A_2 \to A$ στην $\mathcal{A}$ και ένας μορφισμός $\rho\colon IA \to B$ στην $\mathcal{B}$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα της κατηγορίας $\mathcal{B}$ να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} IA_1 \arrow[r, shift left, "I(\beta)"] \arrow[r, shift right, "I(\alpha)"'] & IA_2 \arrow[r, "I(\theta)"] \arrow[dr, "\omega"'] & IA \arrow[d, dotted, "\rho"] \\ & & B \end{tikzcd}$$

5.2.7 Παρατήρηση. Από την Λήμμα 5.1.3, έχουμε ότι αν πληρούνται οι δύο παραπάνω συνθήκες, τότε για κάθε $B \in \mathcal{B}$, κάθε συνεκτικό διάγραμμα στην κόμμα κατηγορία $I/B = (B/I^{op})^{op}$ έχει συν-κώνο.

5.2.8 Θεώρημα. *Έστω $I : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας μορφισμός μεταξύ αλγεβρικών θεωριών. Αν ο I^{op} είναι επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια, τότε ο $I^* : \mathrm{Alg}\mathcal{A} \to \mathrm{Alg}\mathcal{B}$ διατηρεί μονομορφισμούς.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το διάγραμμα επέκτασης Kan

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{op} \arrow[rr, "\eta_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "I^{op}"'] & & \mathrm{Alg}(\mathcal{A}) \arrow[dd, "I^*"] \\ & \mathcal{B}^{op} \arrow[dr, "\eta_{\mathcal{B}}"'] & \\ & & \mathrm{Alg}(\mathcal{B}) \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

και έστω $m\colon X \to Y$ ένας μονομορφισμός στην $\mathrm{Alg}(\mathcal{A})$. Έστω επιπλέον, $X \cong \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{A}} C_i$ και $Y \cong \mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{A}} D_k$, η γραφή των X και Y ως sifted συνορίων αντικείμενων στην εικόνα της $\eta_{\mathcal{A}}$ (βλέπε Παρατήρηση 5.2.3). Από την αντιμεταθετικότητα του παραπάνω διαγράμματος και το γεγονός ότι ο I^* διατηρεί συνόρια (ως αριστερά προσαρτημένος), έχουμε ότι:

$$I^*(m) : \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{B}} I C_i \to \mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{B}} I D_k$$

Από το γεγονός ότι τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathrm{Alg}\mathcal{B}$ τα οποία είναι στην εικόνα της $\eta_{\mathcal{B}}$, αποτελούν ένα σύνολο γεννητόρων της $\mathrm{Alg}\mathcal{B}$, για να δείξουμε ότι ο $I^*(m)$ είναι μονομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι για τυχαίο $B \in \mathcal{B}$ και μορφισμούς $u, v : \eta_{\mathcal{B}} B \rightrightarrows \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{B}} I C_i$, για τους οποίους $I^*(m) \cdot u = I^*(m) \cdot v$, ισχύει ότι $u = v$. Έστω λοιπόν, τέτοιοι u και v

$$\begin{tikzcd} \eta_{\mathcal{B}} B \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{B}} I C_i \arrow[r, "I^*(m)"] & \mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{B}} I D_k \end{tikzcd}$$

Από το γεγονός ότι το πεδίο των u και v είναι ισχυρά πεπερασμένα παρουσιάσιμο (βλέπε Παρατήρηση 5.2.5) και το συνόριο $\mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{B}} IC_i$ είναι sifted, έχουμε παραγοντοποιήσεις των u και v, μέσω κάποιων συνιστωσών του συνορίου (βλέπε Πρόταση 5.2.6)

$$\begin{tikzcd}
 & \eta_{\mathcal{B}} IC_i \arrow[dr, "in_i"] & & \\
\eta_{\mathcal{B}} B \arrow[ur, "u_i"] \arrow[dr, "v_j"'] \arrow[rr, shift left, "u"] \arrow[rr, shift right, "v"'] & & \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{B}} IC_i \arrow[r, "I^* m"] & \mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{B}} ID_k \\
 & \eta_{\mathcal{B}} IC_j \arrow[ur, "in_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

δηλαδή $u = in_i \cdot u_i$ και $v = in_j \cdot v_j$. Από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος 5.7 και το γεγονός ότι ο I^* διατηρεί συνόρια, έχουμε το παρακάτω διάγραμμα στην $\mathrm{Alg}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd}
\eta_{\mathcal{A}} C_i \arrow[dr, "in_i"] & & \\
 & \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{A}} C_i \arrow[r, "m"] & \mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{A}} D_k \\
\eta_{\mathcal{A}} C_j \arrow[ur, "in_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

και πάλι από το γεγονός ότι τα αντικείμενα στην εικόνα της $\eta_{\mathcal{A}}$ είναι ισχυρά πεπερασμένα παρουσιάσιμα και το $\mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{A}} D_k$ είναι sifted, έχουμε ότι οι μορφισμοί $m \cdot in_i$ και $m \cdot in_j$, παραγοντοποιούνται μέσω κάποιων συνιστωσών του συνορίου $\mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{A}} D_k$

$$\begin{tikzcd}
\eta_{\mathcal{A}} C_i \arrow[rr, "m_i"] \arrow[dr, "in_i"] & & \eta_{\mathcal{A}} D_{k(i)} \arrow[dr, "in_{k(i)}"] & \\
 & \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{A}} C_i \arrow[rr, "m"] & & \mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{A}} D_k \\
\eta_{\mathcal{A}} C_j \arrow[rr, "m_j"] \arrow[ur, "in_j"] & & \eta_{\mathcal{A}} D_{k(j)} \arrow[ur, "in_{k(j)}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.8}$$

δηλαδή $m \cdot in_i = in_{k(i)} \cdot m_i$ και $m \cdot in_j = in_{k(j)} \cdot m_j$ και επιπλέον από το γεγονός ότι ο συναρτητής $\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathrm{Alg}\mathcal{A}$ είναι πλήρης και πιστός, έχουμε ότι υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί $\check{m}_i : C_i \to D_{k(i)}$ και $\check{m}_j : C_j \to D_{k(j)}$ τέτοιοι ώστε $\eta_{\mathcal{A}}(\check{m}_i) = m_i$ και $\eta_{\mathcal{A}}(\check{m}_j) = m_j$. Εφαρμόζοντας τον I^* στο παραπάνω διάγραμμα, έχουμε ότι το εξωτερικό του παρακάτω διαγράμματος είναι αντιμεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
 & \eta_{\mathcal{B}} IC_i \arrow[rr, "I^*(m_i)"] \arrow[dr, "in_i"] & & \eta_{\mathcal{B}} ID_{k(i)} \arrow[dr, "in_{k(i)}"] & \\
\eta_{\mathcal{B}} B \arrow[ur, "u_i"] \arrow[dr, "v_j"'] & & \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{B}} IC_i \arrow[rr, "I^*(m)"] & & \mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{B}} ID_k \\
 & \eta_{\mathcal{B}} IC_j \arrow[rr, "I^*(m_j)"'] \arrow[ur, "in_j"'] & & \eta_{\mathcal{B}} ID_{k(j)} \arrow[ur, "in_{k(j)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

δηλαδή $in_{k(i)} \cdot (I^* m_i \cdot u_i) = in_{k(j)} \cdot (I^* m_j \cdot v_j)$. Από τις παραπάνω ισότητες, έχουμε ότι ο μορφισμός $I^* m \cdot u = I^* m \cdot v$ με πεδίο το ισχυρά πεπερασμένα παρουσιάσιμο αντικείμενο $\eta_{\mathcal{B}} B$, παραγοντοποιείται μέσω δύο συνιστωσών του sifted συνορίου $\mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{B}} ID_k$. Άρα (Πρόταση 5.2.6), υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ Z στην $\mathcal{A}$ που συνδέει τα $D_{k(i)}$ και $D_{k(j)}$

$$
\begin{tikzcd}
 & D_{z_1} \arrow[dl, "z_{1,0}"'] \arrow[dr, "z_{1,1}"] & & & D_{z_n} \arrow[dl, "z_{n,0}"'] \arrow[dr, "z_{n,1}"] & \\
D_{k(i)} & & \cdot \arrow[r, dotted, no head] & \cdot & & D_{k(j)}
\end{tikzcd}
$$

και μορφισμοί $t_1 : \eta_{\mathcal{B}} B \to \eta_{\mathcal{B}} ID_{z_1}$, ..., $t_n : \eta_{\mathcal{B}} B \to \eta_{\mathcal{B}} ID_{z_n}$, έτσι ώστε να ισχύουν οι ισότητες $\eta_{\mathcal{B}} I(m_i) \cdot u_i = \eta_{\mathcal{B}} I(z_{1,0}) \cdot t_1$, $\eta_{\mathcal{B}} I(z_{1,1}) \cdot t_1 = \eta_{\mathcal{B}} I(z_{3,0}) \cdot t_3 = t_2$, ..., $\eta_{\mathcal{B}} I(m_j) \cdot v_j = \eta_{\mathcal{B}} I(z_{n,1}) \cdot t_n$. Από το γεγονός ότι ο ανταλλοίωτος συναρτητής $\eta_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}^{op} \to \mathrm{Alg}\mathcal{B}$ είναι πλήρης και πιστός, έχουμε ότι για τον μορφισμό $u_i : \eta_{\mathcal{B}} B \to \eta_{\mathcal{B}} IC_i$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $\check{u}_i : IC_i \to B$, τέτοιος ώστε $\eta_{\mathcal{B}}(\check{u}_i) = u_i$. Όμοια και για τους μορφισμούς v_i, t_1, ... , t_n. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο αντιμεταθετικό διάγραμμα στην κατηγορία $\mathcal{B}$

$$
\begin{tikzcd}
 & IC_i \arrow[ddl, "\check{u}_i"'] & & ID_{k(i)} \arrow[ll, "I(\check{m}_i)"'] \arrow[dl, "I(z_{1,0})"] \\
 & & ID_{z_1} \arrow[dll, "\check{t}_1"] \arrow[dd, squiggly, no head, "I(Z)"'] & \\
B & & & \\
 & & ID_{z_n} \arrow[ull, "\check{t}_n"'] & \\
 & IC_j \arrow[uul, "\check{v}_j"] & & ID_{k(j)} \arrow[ll, "I(\check{m}_j)"] \arrow[ul, "I(z_{n,1})"']
\end{tikzcd}
$$

Το παραπάνω διάγραμμα είναι ένα συνεκτικό διάγραμμα στην κατηγορία I/B. Από την συνεκτική επιπεδότητα του I^{op}, έχουμε ότι υπάρχει ένας συν-κώνος $(C,\ s_i : C_i \to C,\ s_1 : D_{z_1} \to C, ..., s_n : D_{z_n} \to C, s_j : C_j \to C)$ στην $\mathcal{A}$ και ένας μορφισμός $r \colon B \to IC$ στην $\mathcal{B}$, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα στην $\mathcal{B}$ να είναι αντιμεταθετικό (έχουμε παραλείψει τους μορφισμούς $\check{t}_i$)

$$\begin{tikzcd}
 & & IC_i \arrow[ddll, "\check{u}_i"'] \arrow[ddl, "I(s_i)"] & & ID_{k(i)} \arrow[ll, "I(m_i)"'] \arrow[dl, "I(z_{1,0})"] \\
 & & & ID_{z_1} \arrow[dll, "I(s_1)"] \arrow[dd, squiggly, no head, "I(Z)"] & \\
B & IC \arrow[l, dotted, "r"] & & & \\
 & & & ID_{z_n} \arrow[ull, "I(s_n)"'] & \\
 & & IC_j \arrow[uull, "\check{v}_j"] \arrow[uul, "I(s_j)"'] & & ID_{k(j)} \arrow[ll, "I(m_j)"] \arrow[ul, "I(z_{n,1})"']
\end{tikzcd}$$

δηλαδή, $r \cdot I(s_i) = \check{u}_i$, $r \cdot I(s_l) = \check{t}_l$, για όλα τα $l = 1, 2, ..., n$ και $r \cdot I(s_j) = \check{v}_j$.

Από τώρα και στο εξής, για να αποφύγουμε επιπλέον συμβολισμό και διαγράμματα που ίσως κάνουν δυσνόητη την απόδειξη, θα συμβολίζουμε (όπου δεν δημιουργείται σύγχυση) απλά με A, ένα αντικείμενο της κατηγορίας Alg$\mathcal{A}$ της μορφής $\eta_{\mathcal{A}}A$ και αντίστοιχα για τους μορφισμούς της μορφής $\eta_{\mathcal{A}}f$, όπου f ένας μορφισμός της $\mathcal{A}$. Το ίδιο υιοθετούμε και για την κατηγορία Alg$\mathcal{B}$. Επιπλέον, για να μην δημιουργηθεί σύγχυση, θα χρησιμοποιούμε κανονικά τον συμβολισμό με τα $\eta_{\mathcal{A}}$ και $\eta_{\mathcal{B}}$, στη γραφή ενός συνορίου.

Από το παραπάνω διάγραμμα τώρα, μπορούμε να δούμε ότι οι μορφισμοί $s = in_i \cdot s_i$, $s' = in_j \cdot s_j$ στην κατηγορία Alg$\mathcal{A}$ με πεδίο το ισχυρά πεπερασμένα παρουσιάσιμο αντικείμενο $\eta_{\mathcal{A}}C$ και συν-πεδίο το sifted συνόριο colim$_i\eta_{\mathcal{A}}C_i$, είναι ίσοι. Πράγματι, από τις ισότητες που προκύπτουν από παραπάνω διάγραμμα και το διάγραμμα 5.8, καθώς και από τις αντιμεταθετικότητες που προκύπτουν από το γεγονός ότι το συνόριο colim$_i\eta_{\mathcal{A}}C_i$ αποτελεί συν-κώνο, έχουμε:

$$\begin{aligned}
m \cdot s &= m \cdot in_i \cdot s_i \\
&= in_{k(i)} \cdot m_i \cdot s_i \\
&= in_{k(i)} \cdot I(z_{1,n}) \cdot s_1 \\
&= in_{z_1} \cdot s_1 \\
&= ...
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= in_{z_n} \cdot s_n \\
&= in_{k(j)} \cdot I(z_{n,1}) \cdot s_n \\
&= in_{k(j)} \cdot m_j \cdot s_j \\
&= m \cdot s'.
\end{aligned}
$$

και αφού ο m είναι μονομορφισμός, έχουμε ότι: $in_i \cdot s'_i = in_j \cdot s_j$. Έχουμε δηλαδή το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα στην Alg$\mathcal{A}$

$$
\begin{tikzcd}
 & C_i \arrow[rrr, "m_i"] \arrow[dr, "in_i"] & & & D_{k(i)} \arrow[dd, "in_{k(i)}"] \\
 & & & D_{z_1} \arrow[ur, "z_{0,1}"] \arrow[dd, no head, squiggly] & \\
C \arrow[uur, "s_i"] \arrow[ddr, "s_j"'] \arrow[urrr, bend left, "s_1"] \arrow[drrr, bend right, "s_n"'] \arrow[rr, shift left, "s"] \arrow[rr, shift right, "s'"'] & & \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{A}} C_i \arrow[rr, "m"] & & \mathrm{colim}_k \eta_{\mathcal{A}} D_k \\
 & & & D_{z_n} \arrow[dr, "z_{n-1,n}"] & \\
 & C_j \arrow[rrr, "m_j"] \arrow[uur, "in_j"] & & & D_{k(j)} \arrow[uu, "in_{k(j)}"']
\end{tikzcd}
$$

Άρα από γεγονός ότι το αντικείμενο $\eta_{\mathcal{A}} C$ είναι ισχυρά πεπερασμένα παρουσιάσιμο αντικείμενο της Alg$\mathcal{A}$ και ο μορφισμός $s = s' : \eta_{\mathcal{A}} C \to \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{A}} C_i$, έχει δύο παραγοντοποιήσεις μέσω συνιστωσών του συνορίου $\mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{A}} C_i$, έχουμε ότι υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ ζ που συνδέει τα C_i και C_j στην $\mathcal{A}$

$$
\begin{tikzcd}
 & C_{\alpha_1} \arrow[dl, "\zeta_{1,0}"'] \arrow[dr, "\zeta_{1,1}"] & & & & C_{\alpha_q} \arrow[dl, "\zeta_{q,0}"'] \arrow[dr, "\zeta_{q,1}"] & \\
C_i & & \cdot \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] & \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] & \cdot & & C_j
\end{tikzcd}
$$

και μορφισμοί $p_\lambda \colon C \to C_{\alpha_\lambda}$, $\lambda = 1, 2, ..., q$, προς τις (εικόνες μέσω της $\eta_{\mathcal{A}}$) κορυφές του ζιγκ-ζαγκ, έτσι ώστε να ισχύουν οι κατάλληλες αντιμεταθετικότητες. Αν θεωρήσουμε τώρα, την εικόνα των παραπάνω στην κατηγορία Alg$(\mathcal{B})$ και στο αντιμεταθετικό διάγραμμα που προκύπτει, επισυνάψουμε τους μορφισμούς $u_i \colon B \to IC_i$, $v_j \colon B \to IC_j$ και $r \colon B \to IC$, έχουμε τελικά το ακόλουθο διάγραμμα στην Alg$(\mathcal{B})$

$$
\begin{tikzcd}
 & & IC_i \arrow[ddr, "in_i"] & \\
 & & IC_{\alpha_1} \arrow[u, "I(\zeta_{1,0})"'] \arrow[dd, squiggly, no head, "I(\zeta)"'] & \\
B \arrow[r, "r"] \arrow[uurr, "u_i"] \arrow[ddrr, "v_j"'] & IC \arrow[uur, "s_i"] \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_q"'] \arrow[ddr, "s_j"'] & & \mathrm{colim}_i \eta_{\mathcal{B}} IC_i \\
 & & IC_{\alpha_q} \arrow[d, "I(\zeta_{q,1})"] & \\
 & & IC_j \arrow[uur, "in_j"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
u = in_i \cdot u_i &= in_i \cdot I(p_i) \cdot r \\
&= in_i \cdot I(\zeta_{0,1}) \cdot I(p_1) \\
&= ... \\
&= in_{\alpha_q} \cdot I(p_q) \cdot r \\
&= in_{\alpha_q} \cdot I(\zeta_{q,1}) \cdot s_j \cdot r \\
&= in_j \cdot I(s_j) \cdot r \\
&= in_j \cdot v_j = v \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

5.2.3 Η περίπτωση των Θεωριών Lawvere

5.2.9 Ορισμός. *Με τον όρο* ***θεωρία Lawvere****, εννοούμε μια μικρή κατηγορία $\mathcal{A}$ με πεπερασμένα γινόμενα (και τελικό αντικείμενο), με την ιδιότητα ότι υπάρχει ένα αντικείμενο $A \in \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε κάθε άλλο αντικείμενο της κατηγορίας $\mathcal{A}$ να είναι ισόμορφο με μία n-οστή δύναμη $A^n \cong A \times A \times ... \times A$ του αντικειμένου A. Το A καλείται το βασικό αντικείμενο της θεωρίας. Ένας μορφισμός μεταξύ δύο θεωριών Lawvere, είναι ένας συναρτητής που διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα (και το τελικό αντικείμενο) και αντιστοιχίζει το βασικό αντικείμενο της μίας θεωρίας, στο βασικό αντικείμενο της άλλης.*

Αν $\mathcal{A}$ είναι μία θεωρία Lawvere, με βασικό αντικείμενο A, τότε θα αναφερόμαστε στα στοιχεία του συνόλου $\hom_{\mathcal{A}}(A^n, A)$ ως n-μελείς $\mathcal{A}$-**πράξεις** (n-ary operations)

Αν $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ είναι δύο θεωρίες Lawvere, με βασικά αντικείμενα A και B αντίστοιχα και $I : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ένας μορφισμός μεταξύ θεωριών. Από την καθολική ιδιότητα των γινομένων, έχουμε ότι για τις συνθήκες επιπεδότητας (του I^{op}) που είδαμε στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου, χρειάζεται να διατυπωθούν μόνο για μορφισμούς της μορφής $IA^n \to B$. Αναλυτικά έχουμε:

- Για όλες τις n-άδες από (r-μελείς) $\mathcal{A}$-πράξεις $(\alpha_i)_{i=1}^n$, m-άδες από (r-μελείς) $\mathcal{A}$-πράξεις $(\beta_j)_{j=1}^m$ και n-μελείς και m-μελείς $\mathcal{B}$-πράξεις ω_1, ω_2, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$\omega_1(I\alpha_1, ..., I\alpha_n) = \omega_2(I\beta_1, ..., I\beta_m),$$

$$\begin{tikzcd} IA^r \arrow[r, "(I\alpha_i)"] \arrow[d, "(I\beta_j)"'] & IA^n \arrow[d, "\omega_1"'] \\ IA^m \arrow[r, "\omega_2"] & B \end{tikzcd}$$

  υπάρχουν k το πλήθος $\mathcal{A}$-πράξεις $(\gamma_l)_{l=1}^k$, k το πλήθος $\mathcal{A}$-πράξεις $(\delta_l)_{l=1}^k$ και μία $\mathcal{B}$-πράξη ρ

$$\begin{tikzcd} IA \arrow[r, "(I\alpha_i)"] \arrow[d, "(I\beta_j)"'] & IA^n \arrow[d, dotted, "(I\gamma_l)"'] \arrow[ddr, "\omega_1"] & \\ IA^m \arrow[r, dotted, "(I\delta_l)"] \arrow[drr, "\omega_2"'] & IA^k \arrow[dr, dotted, "\rho"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

  έτσι ώστε $(\gamma_l(\alpha_1, ...\alpha_n))_{l=1}^k = (\delta_l(\beta_1, ...\beta_m))_{l=1}^k$ και $\rho(I\gamma_1, ...I\gamma_n) = \omega_1$, $\rho(I\delta_1, ...I\delta_n) = \omega_2$.

- Οποτεδήποτε έχουμε δύο m-άδες από n-μελείς $\mathcal{A}$-πράξεις $\alpha_1, ..., \alpha_m$, $\beta_1, ..., \beta_m$ και μία m-μελή $\mathcal{B}$-πράξη ω έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} IA^n \arrow[r, shift left, "(I\beta_i)"] \arrow[r, shift right, "(I\alpha_i)"'] & IA^m \arrow[r, "\omega"] & B, \end{tikzcd}$$

  δηλαδή: $\omega(I\alpha_1, ..., I\alpha_m) = \omega(I\beta_1, ..., I\beta_m)$, τότε υπάρχουν k το πλήθος m-μελείς $\mathcal{A}$-πράξεις θ_i, $i = 1, ...k$ και μία k-μελής $\mathcal{B}$-πράξη ρ, έτσι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} IA^n \arrow[r, shift left, "(I\beta_i)"] \arrow[r, shift right, "(I\alpha_i)"'] & IA^m \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, dotted, "(I\theta_i)"] & & B, \\ & & IA^k \arrow[ur, dotted, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

Η περίπτωση των δακτυλιωτών (annular) θεωριών Αν A είναι ένας μοναδιαίος δακτύλιος, τότε η κατηγορία $\mathrm{Mod}(A)$ (των δεξιων A-modules) αποτελεί μία κατηγορία αλγεβρών για μία Θεωρία Lawvere $T_{\mathrm{Mod}(A)}$. Η κατηγορία $T_{\mathrm{Mod}(A)}$ έχει ως αντικείμενα τους φυσικούς αριθμούς, και μορφισμοί από το n στο k είναι πίνακες με n στήλες και k γραμμές που αποτελούνται από στοιχεία του δακτυλίου A. Η σύνθεση ενός μορφισμού $P : m \to n$ και ενός μορφισμού $Q : n \to k$ είναι ο πολλαπλασιασμός πινάκων $Q \cdot P$. Με αυτό τον τρόπο, κάθε A-module, μπορεί να ειδωθεί ως ένας συναρτητής $T_{\mathrm{Mod}(A)} \to \mathbf{Set}$ που διατηρεί πεπερασμένα γινόμενα (βλέπε [2], Παράδειγμα 1.12).

Αν τώρα A και B είναι δύο μοναδιαίοι δακτύλιοι, τότε ένας ένας μορφισμός μεταξύ των θεωριών $T_{\mathrm{Mod}(A)}$ και $T_{\mathrm{Mod}(B)}$, είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων $I : A \to B$ και ο συναρτητής I^* (5.6) είναι ο συναρτητής

$$- \otimes_A B : \ \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(B)$$

με δεξιά προσαρτημένο τον συναρτητή που μέσω του ομομορφισμού I, ‟βλέπει” ένα B-module ως ένα A-module (restriction of scalars)[12]

Οι θεωρίες της μορφής $T_{\mathrm{Mod}(A)}$ όπου A ένας μοναδιαίος δακτύλιος κατασκευάζονται ως οι δυϊκες υποκατηγορίες των πεπερασμένα ελεύθερων modules. Σε αυτή την περίπτωση η πρώτη συνθήκη για την επιπεδότητα, ανάγεται στην δεύτερη. Αυτό γιατί, μπορούμε να θεωρήσουμε την διαφορά δύο συναρτήσεων από το IA^r προς το αμφιγινόμενο (biproduct) $IA^m \oplus IA^n$, αντί ενός ζεύγους συναρτήσεων σε καθένα από τους παράγοντες. Η δεύτερη συνθήκη τώρα, εξειδικεύεται (πάλι θεωρώντας την διαφορά συναρτήσεων) ως εξής:

- Για κάθε n-άδα στοιχείων του A,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : A \to A^n$$

και κάθε n-άδα στοιχείων του B,

$$(x_1, ..., x_n) \colon IA^n = B^n \to B$$

έτσι ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

[12] Ο συναρτητής αυτός, αντιστοιχίζει ένα B-module Y, στο A-module πού έχει την ίδια υποκείμενη αβελιανή ομάδα, και αν $a \in A$ και $y \in Y$, τότε $a \cdot y = I(a) \cdot y$.

υπάρχει ένας $m \times n$- πίνακας από στοιχεία του A

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix} : A^n \to A^m$$

και μία m-άδα στοχείων του B,

$$(y_1, ..., y_m) \colon IA^m = B^m \to B$$

έτσι ώστε

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

και

$$(y_1, ..., y_m) \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m1} & \dots & u_{mn} \end{pmatrix} = (x_1, ..., x_n)$$

Αν ο δακτύλιος B ειδωθεί μέσω του ομομορφισμού I, ως ένα A-module, τότε οι δύο παραπάνω συνθήκες είναι ο κλασικός χαρακτηρισμός της επιπεδότητας για το B (βλέπε [52], Κεφάλαιο I, Πρόταση 10.7).

Παράρτημα

Διατήρηση Εξισωτών

Μελετάμε τώρα την περίπτωση της διατήρησης εξισωτών (μόνο), από την αριστερή επέκταση Kan ενός συναρτητή με τιμές σ' ένα υποκανονικό site.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε συνθήκες (Πόρισμα 5.1.12) για να διατηρεί μία αριστερή επέκταση Kan τον εξισωτή ενός παράλληλου ζεύγους αναπαραστάσιμων $yC_1 \underset{yb}{\overset{ya}{\rightrightarrows}} yC_2$. Θα μελετήσουμε αρχικά την περίπτωση που έχουμε ένα διάγραμμα στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, της μορφής: $yC \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Z$. Στο ([27]) περιγράφεται αναλυτικά η κατασκευή του εξισωτή ενός τέτοιου παράλληλου ζεύγους μορφισμών. Στην προσέγγισή μας για την διατήρηση από μία μία αριστερή επέκταση Kan του εξισωτή ενός τέτοιου διαγράμματος, θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την κατασκευή, την περιγραφή της οποίας δίνουμε τώρα.

Αν λοιπόν, $Z \cong \mathrm{colim}_{i \in I} yC_i$ η γραφή του Z ως ένα συνόριο αναπαραστάσιμων (Θεώρημα 2.1.5), τότε από το λήμμα του Yoneda, οι φυσικοί μετασχηματισμοί f και g αντιστοιχίζονται σε μορφισμούς $\check{f}\colon C \to C_i$ και $\check{g}\colon C \to C_j$ για κάποια i και j[13]. Τότε, αν $X = Eq(f, g)$, ισχύει ότι:

$$X \cong \mathrm{colim}_z \mathrm{colim}_k \; yP_{z,k} \tag{5.9}$$

όπου $\{P_{z,k} | k \in K\}$ είναι μία οποιαδήποτε τελική οικογένεια κώνων για το διάγραμμα D_z το οποίο αποτελείται από ένα ζιγκ-ζαγκ z που συνδέει τα C_i και C_j και από τους μορφισμούς $\check{f}$ και $\check{g}$

[13]Ο φυσικός μετασχηματισμός $f : yC \to \mathrm{colim}_{i \in I} yC_i$, αντιστοιχίζεται μέσω του λήμματος του Yoneda σ' ένα αντικείμενο του συνόλου $\mathrm{colim}_{i \in I}(yC_i(C)) \cong \coprod_{i \in I} \hom_{\mathcal{C}}(C_i, C)/\sim$. Ο f λοιπόν, αντιστοιχίζεται στην κλάση $[\check{f}]_\sim$, όπου $\check{f}\colon C \to C_i$ για κάποιο $i \in I$, ένας αντιπρόσωπος της κλάσης αυτής. Όμοια και για τον φυσικό μετασχηματισμό g.

$$\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[dddlll, bend right, "\check{f}"'] \arrow[dddrrr, bend left, "\check{g}"] & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & & C_n \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & & (D_z) \\
C_i & & \cdot & \cdots\cdots & \cdot & & C_j &
\end{tikzcd}$$

Περιγράφουμε τώρα τα συνόρια που υπεισέρχονται στην εξίσωση 5.9

- $\mathrm{colim}_k\, yP_{z,k}$
  Αν z είναι ένα ζιγκ-ζαγκ στην $\mathcal{C}$ που συνδέει τα C_i και C_j και D_z το (επαυξημένο) διάγραμμα που αποτελείται από το ζιγκ-ζαγκ και τους μορφισμούς $\check{f}$ και $\check{g}$, τότε η δείκτρια κατηγορία αυτού του συνορίου είναι μία (οποιαδήποτε) τελική υποκατηγορία της κατηγορίας $\mathrm{elts}(\mathrm{lim} y(D_z))$.

- $\mathrm{colim}_z \mathrm{colim}_k\, yP_{z,k}$
  Η δείκτρια κατηγορία αυτού του συνορίου είναι η κατηγορία με αντικείμενα όλα τα ζιγκ-ζαγκ που συνδέουν τα C_i και C_j και ένας μορφισμός μεταξύ δύο τέτοιων ζιγκ-ζαγκ, αποτελείται από μορφισμούς της $\mathcal{C}$ μεταξύ των αντιστοιχών κορυφών των ζιγκ-ζαγκ, έτσι ώστε τα τρίγωνα και τα τετράγωνα που προκύπτουν να είναι αντιμεταθετικά. Αν τα ζιγκ-ζαγκ δεν έχουν το ίδιο μήκος, τότε προσθέτουμε ταυτοτικούς μορφισμούς σε αυτό με το μικρότερο μήκος. Συμβολίζουμε με $ZZ(C_i, C_j)$ αυτή την κατηγορία.[14] Έστω τώρα z, z' δύο ζιγκ-ζαγκ που συνδέουν τα C_i και C_j και έστω $\{P_{z,k} | k \in K\}$ μία τελική οικογένεια κώνων για το διάγραμμα D_z και $\{P_{z',\lambda} | \lambda \in \Lambda\}$ μία τελική οικογένεια κώνων για το διάγραμμα $D_{z'}$. Τότε αν $z \to z'$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ των δύο ζιγκ-ζαγκ, τότε κάθε $P_{z,k}$ αποτελεί κώνο για το διάγραμμα $D_{z'}$, άρα θα παραγοντοποιείται μέσω κάποιου $P_{z',\lambda}$. Από την καθολική ιδιότητα τώρα του συνορίου $\mathrm{colim}_k\, yP_{z,k}$ επάγεται ένας μορφισμός $\mathrm{colim}_k\, yP_{z,k} \to \mathrm{colim}_\lambda\, yP_{z',\lambda}$. Έχουμε λοιπόν ότι το διάγραμμα του οποίου το συνόριο δηλώνεται στην 5.9 είναι:

$$ZZ(C_i, C_j) \to [\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$$
$$z \longmapsto \mathrm{colim}_k\, yP_{z,k}$$

Έστω τώρα $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής από μία μικρή κατηγορία $\mathcal{C}$ προς μία συν-πλήρη και πεπερασμένα πλήρη κατηγορία $\mathcal{E}$. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό F^* για την αριστε-

[14] Στο [3], Παρατήρηση 1.4, περιγράφεται η κατηγορία $ZZ(\mathcal{D})$ των ζιγκ-ζαγκ σε μία κατηγορία $\mathcal{D}$. Η περίπτωση εδώ είναι διαφορετική και δεν πρέπει να συγχέεται.

ρή επέκταση Kan $\mathrm{Lan}_y F$ του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda, έστω (E,e) ο εξισωτής των F^*f, F^*g στην $\mathcal{E}$. Εφαρμόζοντας τον F^* στον εξισωτή $X \xrightarrow{a} yC \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} colimyC_i$, από το γεγονός ότι ο F^* διατηρεί συνόρια, έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα στην $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{colim}_z\mathrm{colim}_k\ FP_{z,k} \arrow[d, dotted, "h"'] \arrow[dr, "F^*a"] & & \\
E \arrow[r, "e"] & FC \arrow[r, shift left, "F^*f"] \arrow[r, shift right, "F^*g"'] & \mathrm{colim}FC_i
\end{tikzcd} \qquad (\mathbf{Eq})$$

όπου h είναι ο μορφισμός της $\mathcal{E}$, ο οποίος επάγεται από τη καθολική ιδιότητα του εξισωτή (E,e). Ο μορφισμός F^*a ως ένας μορφισμός που προκύπτει από την δράση μίας αριστερής επέκτασης Kan (βλέπε περιγραφή σελ. 16), χαρακτηρίζεται σε αυτή την περίπτωση από την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε ζιγκ-ζαγκ z και κάθε κώνο $P_{z,k}$

$$\begin{tikzcd}
 & & & P_{z,k} \arrow[ddll, bend right, "\lambda_{C_1}"'] \arrow[d, "\lambda_C"] \arrow[ddrr, bend left, "\lambda_{C_n}"] & & & \\
 & & & C \arrow[ddlll, bend right, "\check{f}"'] \arrow[ddrrr, bend left, "\check{g}"] & & & \\
 & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & & & C_n \arrow[dl, "d_{n,0}"'] \arrow[dr, "d_{n,1}"] & \\
C_i & & \cdot \arrow[rr, dotted, no head] & & \cdot & & C_j
\end{tikzcd} \qquad (D_z)$$

το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
FP_{z,k} \arrow[dr, "in_{z,k}"] \arrow[dddrr, bend right, "F\lambda_C"'] & & \\
 & \mathrm{colim}_k\ FP_{z,k} \arrow[dr, "in_z"] & \\
 & & \mathrm{colim}_z\mathrm{colim}_k\ FP_{z,k} \arrow[d, "F^*a"] \\
 & & FC
\end{tikzcd}$$

Για την διατήρηση του εξισωτή (X,a) από την αριστερή επέκταση Kan, αρκεί ο επαγόμενος μορφισμός h να είναι ισομορφισμός. Το παρακάτω λήμμα μας λέει υπό ποιες προϋποθέσεις πληρούται αυτή η συνθήκη.

5.2.10 Λήμμα. *Έστω $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής από μία μικρή κατηγορία προς ένα συν-πλήρες και περασμένα πλήρες υποκανονικό site $(\mathcal{E}, j)$. Έστω επιπλέον, ένα διάγραμμα της μορφής:* $yC \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$ *στην* $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ *και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό που υιοθετήσαμε παραπάνω, ισχύει ότι το συνόριο* $\mathrm{colim}_z\mathrm{colim}_k\ FP_{z,k}$ *πληροί την συνθήκη PC1 και το συνόριο* $\mathrm{colim}_k\ FP_{z,k}$ *είναι καθορισμένο. Τότε, αν ο F είναι j-επίπεδος ως προς συνεκτικά όρια, ο h είναι ο μονομορφισμός. Αν επιπλέον το συνόριο* $\mathrm{colim}_i FC_i$ *πληροί την συνθήκη PC2, τότε ο h είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη: • Ο h είναι μονομορφισμός

Έστω $T \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} \mathrm{colim}_z\mathrm{colim}_k FP_{z,k} \xrightarrow{h} E$, με $h \cdot u = h \cdot v$.

Εφαρμόζοντας την συνθήκη PC1 για τον μορφισμό $u : T \to \mathrm{colim}_z\mathrm{colim}_k\ FP_{z,k}$ και για τον μορφισμό $v : T \to \mathrm{colim}_z\mathrm{colim}_k\ FP_{z,k}$, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T,[15] τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχουν ζιγκ-ζαγκ z, z' (αντικείμενα της δείκτριας κατηγορίας του συνορίου), που συνδέουν τα C_i και C_j, έτσι ώστε τα ακόλουθα τετράγωνα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "u_\alpha"'] & T \arrow[d, "u"] \\ \mathrm{colim}_k FP_{z,k} \arrow[r, "in_z"'] & \mathrm{colim}_z\mathrm{colim}_k FP_{z,k} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "v_\alpha"'] & T \arrow[d, "v"] \\ \mathrm{colim}_\lambda FP_{z',\lambda} \arrow[r, "in_{z'}"'] & \mathrm{colim}_{z'}\mathrm{colim}_\lambda FP_{z',\lambda} \end{tikzcd}$$

δηλαδή, $in_z \cdot u_\alpha = u \cdot t_\alpha$ και $in_{z'} \cdot v_\alpha = v \cdot t_\alpha$.

Τώρα, αν εφαρμόσουμε την συνθήκη PC1 για τους μορφισμούς $u_\alpha : T_\alpha \to \mathrm{colim}_k\ FP_{z,k}$ και $v_\alpha : T_\alpha \to \mathrm{colim}_\lambda\ FP_{z,\lambda}$, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_{\alpha\xi} : T_{\alpha\xi} \to T_\alpha | \xi \in \Xi_\alpha\}$ του T_α, τέτοιο ώστε για κάθε $\xi \in \Xi_\alpha$, υπάρχουν δείκτες $k(= k(\alpha\xi))$ και $\lambda(= \lambda(\alpha\xi))$ και μορφισμοί $u_{\alpha\xi} : T_{\alpha\xi} \to FP_{z,k}$, $v_{\alpha\xi} : T_{\alpha\xi} \to FP_{z',\lambda}$, τέτοιοι ώστε τα ακόλουθα τετράγωνα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd} T_{\alpha\xi} \arrow[r, "t_{\alpha\xi}"] \arrow[d, "u_{\alpha\xi}"'] & T_\alpha \arrow[d, "u_\alpha"] \\ FP_{z,k} \arrow[r, "in_{z,k}"'] & \mathrm{colim}_k FP_{z,k} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_{\alpha\xi} \arrow[r, "t_{\alpha\xi}"] \arrow[d, "v_{\alpha\xi}"'] & T_\alpha \arrow[d, "v_\alpha"] \\ FP_{z',\lambda} \arrow[r, "in_{z',\lambda}"'] & \mathrm{colim}_k FP_{z',\lambda} \end{tikzcd}$$

δηλαδή, $in_{z,k} \cdot u_{\alpha\xi} = u_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}$ και $in_{z',\lambda} \cdot v_{\alpha\xi} = v_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}$. Από την υποκανονικότητα της τοπολογίας, έχουμε ότι για να δείξουμε την ισότητα $u = v$ αρκεί να δείξουμε ότι $u \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha\xi} =$

[15] Όπως και στην Απόδειξη 4.1.2 , θεωρήσαμε το ίδιο κάλυμμα στην διπλή εφαρμογή του PC1, ως την κοινή εκλέπτυνση των δύο καλυμμάτων.

$v \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}$ (για κάθε $\alpha \in A$ και κάθε $\xi \in \Xi_\alpha$). Τότε, από την αντιμεταθετικότητα των παραπάνω τεσσάρων τετραγώνων αρκεί να δείξουμε ότι $in_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha\xi} = in_{z'} \cdot in_{z',\lambda} \cdot v_{\alpha\xi}$. Τα παρακάτω διαγράμματα τώρα, αποτυπώνουν τα διαγράμματα D_z και $D_{z'}$ (όπου για ευκολία, θεωρήσαμε τα ζιγκ-ζαγκ να είναι μήκους τρία), μαζί με τους κώνους $P_{z,k}$ και $P_{z',\lambda}$ αντίστοιχα.

$$
\begin{tikzcd}
& P_{z,k} \arrow[dd, "\lambda_{C_1}"'] \arrow[dr, "\lambda_C"] \arrow[dddr, "\lambda_{C_2}"] \arrow[ddrr, bend left, "\lambda_{C_3}"] & & & \\
& & C \arrow[ddll, bend right, "\check{f}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\check{g}"] & & \\
& C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & C_3 \arrow[dl, "d_{3,0}"'] \arrow[dr, "d_{3,1}"] & \\
C_i & & C_2 & & C_j
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
& P_{z',\lambda} \arrow[dd, "\mu_{D_1}"'] \arrow[dr, "\mu_C"] \arrow[dddr, "\mu_{D_2}"] \arrow[ddrr, bend left, "\mu_{D_3}"] & & & \\
& & C \arrow[ddll, bend right, "\check{f}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\check{g}"] & & \\
& D_1 \arrow[dl, "e_{1,0}"'] \arrow[dr, "e_{1,1}"] & & D_3 \arrow[dl, "e_{3,0}"'] \arrow[dr, "e_{3,1}"] & \\
C_i & & D_2 & & C_j
\end{tikzcd}
\tag{5.10}
$$

Έχουμε τώρα τις παρακάτω ισότητες:

$$
\begin{aligned}
F\lambda_C \cdot u_{\alpha,\xi} &= F^*a \cdot in_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \\
&= e \cdot h \cdot in_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \\
&= e \cdot h \cdot in_z \cdot u_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} \\
&= e \cdot h \cdot u \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} \\
&= e \cdot h \cdot v \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} \\
&= e \cdot h \cdot in_{z'} \cdot v_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} \\
&= e \cdot h \cdot in_{z'} \cdot in_{z',\lambda} \cdot v_{\alpha,\xi} \\
&= F^*a \cdot in_{z'} \cdot in_{z',\lambda} \cdot v_{\alpha,\xi} \\
&= F\mu_C \cdot v_{\alpha,\xi}
\end{aligned}
$$

Από την ισότητα $F\lambda_C \cdot u_{\alpha,\xi} = F\mu_C \cdot v_{\alpha,\xi}$ και την αντιμεταθετικότητα των διαγραμμάτων 5.10 έχουμε ότι το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & T_{\alpha\xi} \arrow[drrrrr, bend left, "F\lambda_C \cdot u_{\alpha,\xi}"] \arrow[dd, "F\lambda_{C_1} \cdot u_{\alpha\xi}"'] \arrow[dddr] \arrow[ddrrrrrr, "F\mu_{D_1} \cdot v_{\alpha,\xi}"] & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & FC \arrow[ddllllll, bend right, "F\check{f}"'] \arrow[ddll, "F\check{g}"'] \arrow[ddrr, "F\check{f}"] \arrow[ddrrrrrr, bend left, "F\check{g}"] & & & & & & \\
 & FC_1 \arrow[dl, "Fd_{1,0}"] \arrow[dr] & & FC_3 \arrow[dl, "Fd_{3,0}"] \arrow[dr] & & FD_3 \arrow[dl, "Fe_{3,1}"] \arrow[dr] & & FD_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & FD_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & FD_3 \arrow[dl, "Fe_{3,0}"] \arrow[dr] & \\
FC_i & & FC_2 & & FC_j & & FD_2 & & FC_i & & FD_2 & & FC_j
\end{tikzcd}
$$

(**A**)

είναι ένα πεπερασμένο συνεκτικό διάγραμμα στην κατηγορία $T_{\alpha\xi}/F$. Άρα από το Λήμμα 5.1.3, έχουμε ότι υπάρχει τοπικά ένας κώνος γι' αυτό το διάγραμμα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{t_{\alpha\xi\zeta} : T_{\alpha\xi\zeta} \to T_{\alpha\xi} | \alpha \in A, \xi \in \Xi_\alpha, \zeta \in J_\xi\}$ του $T_{\alpha\xi}$, τέτοιο ώστε για κάθε ζ υπάρχει ένα κώνος $P_{z\cup z',p}$ για το διάγραμμα $D_{z\cup z'}$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & P_{z\cup z',p} \arrow[drrrr, "\nu_C"] \arrow[ddd, "\nu_{C_2}"] \arrow[ddrrrrr, "\nu_{D_1}"] & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & C \arrow[ddllllll, bend right, "\check{f}"'] \arrow[ddll, bend right, "\check{g}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\check{f}"] \arrow[ddrrrrrr, bend left, "\check{g}"] & & & & & & \\
 & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"] \arrow[dr] & & C_3 \arrow[dl, "d_{3,0}"] \arrow[dr] & & D_3 \arrow[dl, "e_{3,1}"] \arrow[dr] & & D_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & D_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & D_3 \arrow[dl, "e_{3,0}"] \arrow[dr] & \\
C_i & & C_2 & & C_j & & D_2 & & C_i & & D_2 & & C_j
\end{tikzcd}
$$

($\mathbf{A}_1$)

και επιπλέον υπάρχει ένας μορφισμός $w_{\alpha,\xi,\zeta} : T_{\alpha\xi\zeta} \to FP_{z\cup z',p}$, τέτοιος ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$
\begin{tikzcd}
 & T_{\alpha\xi\zeta} \arrow[r] \arrow[dr, "w_{\alpha,\xi,\zeta}"'] & T_{\alpha\xi} \arrow[drrrr, bend left, "F\lambda_C \cdot u_{\xi,\alpha}"] & & & & & & & & & & \\
 & & FP_{z\cup z',p} \arrow[rrrr, "F\nu_C"] \arrow[dd, "F\nu_{C_2}"] \arrow[drrrrr, "F\nu_{D_1}"] & & & & FC \arrow[ddllllll, bend right, "F\check{f}"'] \arrow[ddrrrrrr, bend left, "F\check{g}"] & & & & & & \\
 & FC_1 \arrow[dl, "Fd_{1,0}"'] \arrow[dr] & & FC_3 \arrow[dl, "Fd_{3,0}"'] \arrow[dr] & & FD_3 \arrow[dl, "Fe_{3,1}"'] \arrow[dr] & & FD_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & FD_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & FD_3 \arrow[dl, "Fe_{3,0}"'] \arrow[dr] & \\
FC_i & & FC_2 & & FC_j & & FD_2 & & FC_i & & FD_2 & & FC_j
\end{tikzcd}
\qquad (\mathbf{B})
$$

Τώρα, από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος $(\mathbf{A}_1)$ έχουμε ότι $(P_{z\cup z',p}, \nu)$ αποτελεί κώνο (στην $\mathcal{C}$) για καθένα από τα διαγράμματα D_z και $D_{z'}$, και κατά συνεπεία θα παραγοντοποιείται από ένα στοιχείο (P_{z,k_1}, η) της τελικής οικογένειας κώνων του διαγράμματος D_z και ομοίως, θα παραγοντοποιείται από ένα στοιχείο $(P_{z,\lambda_1}, \theta)$ της τελικής οικογένειας κώνων του διαγράμματος $D_{z'}$, όπως υποδεικνύεται στα παρακάτω αντιμεταθετικά διαγράμματα

$$
\begin{tikzcd}
 & P_{z\cup z',p} \arrow[rr, dotted, "\gamma"] \arrow[dr, "\nu_C"] \arrow[dd, "\nu_{C_1}"'] & & P_{z,k_1} \arrow[dl, "\eta_C"'] \arrow[dd, "\eta_{C_3}"] & \\
 & & C \arrow[ddll, bend right, "\check{f}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\check{g}"] & & \\
 & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"] \arrow[dr, "d_{1,1}"'] & & C_3 \arrow[dl, "d_{3,0}"] \arrow[dr, "d_{3,1}"'] & \\
C_i & & C_2 & & C_j
\end{tikzcd}
\qquad (\mathbf{C}_1)
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & P_{z\cup z',p} \arrow[rr, dotted, "\delta"] \arrow[dr, "\nu_C"] \arrow[dd, "\nu_{D_1}"'] & & P_{z',\lambda_1} \arrow[dl, "\theta_C"'] \arrow[dd, "\theta_{D_3}"] & \\
 & & C \arrow[dll, bend right, "\check{f}"'] \arrow[drr, bend left, "\check{g}"] & & \\
 & D_1 \arrow[dl, "e_{1,0}"] \arrow[dr, "e_{1,1}"'] & & D_3 \arrow[dl, "e_{3,0}"] \arrow[dr, "e_{3,1}"'] & (\mathbf{C}_2) \\
C_i & & D_2 & & C_j
\end{tikzcd}
$$

Επειδή τώρα το διάγραμμα D_z είναι συνεκτικό, από την Πρόταση 5.1.9 έχουμε ότι ο κανονικά επαγόμενος μορφισμός $r_z : \mathrm{colim}_k\ FP_{z,k} \to \lim F(D_z) = L_z$ είναι ισομορφισμός. Με $\psi_C, \psi_{C_1},,,$ συμβολίζουμε τους μορφισμούς από το όριο L_z προς τις συνιστώσες του διαγράμματος $F(D_z)$

$$
\begin{tikzcd}
 & L_z \arrow[dr, "\psi_C"] \arrow[dd, "\psi_{C_1}"'] \arrow[ddr, "\psi_{C_2}"] \arrow[ddrr, bend left, "\psi_{C_3}"] & & & \\
 & & FC \arrow[dll, bend right, "F\check{f}"'] \arrow[drr, bend left, "F\check{g}"] & & \\
 & FC_1 \arrow[dl, "Fd_{1,0}"] \arrow[dr] & & FC_3 \arrow[dl, "Fd_{3,0}"] \arrow[dr, "Fd_{3,1}"'] & \\
FC_i & & FC_2 & & FC_j
\end{tikzcd}
$$

Από την αντιμεταθετικότητα των διαγραμμάτων **CL** (βλέπε σελ. 106), έχουμε ότι τα παρακάτω δύο διαγράμματα είναι αντιμεταθετικά

$$
\begin{tikzcd}
FP_{z,k} \arrow[r, "r_z\cdot in_{z,k}"] \arrow[drr, "F\lambda_C"'] & L_z \arrow[dr, "\psi_C"] \arrow[dd, "\psi_{C_1}"'] \arrow[ddr, "\psi_{C_2}"] \arrow[ddrr, bend left, "\psi_{C_3}"] & & & \\
 & & FC \arrow[dll, bend right, "F\check{f}"'] \arrow[drr, bend left, "F\check{g}"] & & \\
 & FC_1 \arrow[dl, "Fd_{1,0}"] \arrow[dr] & & FC_3 \arrow[dl, "Fd_{3,0}"] \arrow[dr, "Fd_{3,1}"'] & (\mathbf{D}_1) \\
FC_i & & FC_2 & & FC_j
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FP_{z,k_1} \arrow[r, "r_z\cdot in_{z,k_1}"] \arrow[drr, "F\eta_C"'] & L_z \arrow[dr, "\psi_C"] \arrow[dd, "\psi_{C_1}"'] \arrow[ddr, "\psi_{C_2}"] \arrow[ddrr, bend left, "\psi_{C_3}"] & & & \\
 & & FC \arrow[dll, bend right, "F\check{f}"'] \arrow[drr, bend left, "F\check{g}"] & & \\
 & FC_1 \arrow[dl, "Fd_{1,0}"] \arrow[dr] & & FC_3 \arrow[dl, "Fd_{3,0}"] \arrow[dr, "Fd_{3,1}"'] & (\mathbf{D}_2) \\
FC_i & & FC_2 & & FC_j
\end{tikzcd}
$$

Από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος (**B**), έχουμε ότι $(T_{\alpha\xi\zeta}, F\nu_C \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}, F\nu_{C_1} \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}, ...)$ αποτελεί κώνο στην κατηγορία $\mathcal{E}$ για το διάγραμμα $F(D_z)$. Από την αντιμεταθετικότητα των διαγραμμάτων $(\mathbf{D}_1)$, $(\mathbf{B})$, έχουμε ότι

$$\psi_C \cdot r_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha\xi\zeta} =^{(\mathbf{D}_1)} F\lambda_C \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha\xi\zeta} =^{(\mathbf{B})} F_{\nu_C} \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}$$

και ομοίως, $\psi_{C_r} \cdot r_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha\xi\zeta} = F\nu_{C_r} \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}$, για $r = 1, 2, 3$.
Από τις παραπάνω ισότητες, έχουμε ότι ο κώνος $T_{\alpha\xi\zeta}$ παραγοντοποιείται μέσω του οριακού κώνου απο τον μορφισμό $r_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha\xi\zeta}$.
Τώρα, από την αντιμεταθετικότητα των διαγραμμάτων $(\mathbf{D}_2)$, $(\mathbf{C}_1)$, έχουμε ότι

$$\psi_C \cdot r_z \cdot in_{z,k_1} \cdot F\gamma \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta} =^{(\mathbf{D}_2)} F\eta_C \cdot F\gamma \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta} =^{(\mathbf{C}_1)} F\nu_C \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}$$

και ομοίως $\psi_{C_r} \cdot r_z \cdot in_{z,k_1} \cdot F\gamma \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta} = F\nu_{C_r} \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}$, για $r = 1, 2, 3$.
Από τις παραπάνω ισότητες, έχουμε ότι ο κώνος $T_{\alpha\xi\zeta}$ παραγοντοποιείται μέσω του οριακού κώνου (και) από τον μορφισμό $r_z \cdot in_{z,k_1} \cdot F\gamma \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}$.
Άρα, από την μοναδικότητα της παραγοντοποίησης και το γεγονός ότι ο r_z είναι ισομορφισμός, έχουμε ότι $in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha\xi\zeta} = in_{z,k_1} \cdot F(\gamma) \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}$, δηλαδή ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & T_{\alpha\xi j} \arrow[dl, "u_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha\xi\zeta}"'] \arrow[dr, "F\gamma \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}"] & \\
FP_{z,k} \arrow[dr, "in_{z,k}"'] & & FP_{z,k_1} \arrow[dl, "in_{z,k_1}"] \\
 & \operatorname{colim}_k FP_{z,k} &
\end{tikzcd} \qquad (\mathbf{E_1})$$

Πάλι από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος $(\mathbf{B})$, έχουμε ότι $(T_{\alpha\xi\zeta}, F\nu_C \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}, F\nu_{C_1} \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}, ...)$ αποτελεί κώνο στην κατηγορία $\mathcal{E}$ για το διάγραμμα $F(D_{z'})$. Όπως ακριβώς δουλέψαμε για το διάγραμμα $F(D_z)$, δείχνουμε ότι ο κώνος αυτός έχει δύο διαφορετικές παραγοντοποιήσεις μέσω του οριακού κώνου $\lim F(D_{z'})$. Η μία παραγοντοποίηση είναι μέσω του μορφισμού $r_{z'} \cdot in_{z',\lambda} \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha\xi\zeta}$, και η άλλη είναι μέσω του μορφισμού $r_{z'} \cdot in_{z',\lambda_1} \cdot F\delta \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}$. Από το γεγονός ότι ο μορφισμός $r_{z'}$ είναι ισομορφισμός έχουμε την αντιμεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος

$$
\begin{tikzcd}
& T_{\alpha\xi\zeta} \arrow[dl, "F\delta\cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}"'] \arrow[dr, "v_{\alpha,\xi}\cdot t_{\alpha\xi\zeta}"] & & \\
FP_{z',\lambda_1} \arrow[dr, "in_{z',\lambda_1}"'] & & FP_{z',\lambda} \arrow[dl, "in_{z',\lambda}"] & (\mathbf{E_2}) \\
& \mathrm{colim}_\lambda\, FP_{z',\lambda} & &
\end{tikzcd}
$$

Θεωρούμε τώρα στην $\mathcal{C}$,το ζιγκ-ζαγκ:$\overline{z}$: $C_j \xleftarrow{\check{f}\cdot\nu_C} P_{z\cup z',p} \xrightarrow{\check{g}\cdot\nu_C} C_j$, που συνδέει τα C_i και C_j. Επιπλέον έχουμε ότι υπάρχει ένας μορφισμός $z \to \overline{z}$, όπως δείχνει το παρακάτω αντιμεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
& P_{z\cup z',p} \arrow[dl] \arrow[ddd, "\nu_{C_1}"] \arrow[dr, "id"] & & P_{z\cup z',p} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddd, "\nu_{C_3}"] & \\
C_i & & P_{z\cup z',p} \arrow[d, "\nu_{C_2}"] & & C_j \\
& & C_2 & & \\
& C_1 \arrow[uuul] \arrow[ur] & & C_3 \arrow[ul] \arrow[uuur] &
\end{tikzcd}
$$

Τώρα, το $P_{z\cup z',p}$ αποτελεί κώνο για το διάγραμμα $D_{\overline{z}}$

$$
\begin{tikzcd}
P_{z\cup z',p} \arrow[r, "\nu_C"] \arrow[dr, "id"] & C \arrow[ddl, bend right, "\check{f}"'] \arrow[ddr, bend left, "\check{g}"] & \\
& P_{z\cup z',p} \arrow[dl, "\check{f}\cdot\nu_C"'] \arrow[dr, "\check{g}\cdot\nu_C"] & \\
C_i & & C_j
\end{tikzcd}
$$

και επιπλέον παραγοντοποιείται (διάγραμμα $(\mathbf{C_1})$) από τον κώνο P_{z,k_1} του διαγράμματος D_z. Από την κατασκευή τώρα του $\mathrm{colim}_z\mathrm{colim}_k FP_{z,k}$, έχουμε ότι ο μορφισμός $z \to \overline{z}$ μεταξύ των ζιγκ-ζαγκ, επάγει ένα μορφισμό $h_1 : \mathrm{colim}_\phi\, FP_{\overline{z},\phi} \to \mathrm{colim}_k\, FP_{z,k}$ στην $\mathcal{E}$, και από την καθολική ιδιότητα αυτού, έχουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
FP_{z\cup z',p} \arrow[d, "F\gamma"'] \arrow[dr] & (\mathbf{U}_1) \\
FP_{z,k_1} \arrow[dr, "in_{z,k_1}"'] & \operatorname{colim}_\phi FP_{\overline{z},\phi} \arrow[d, dotted, "h_1"'] \\
 & \operatorname{colim}_k FP_{z,k}
\end{tikzcd}$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, έχουμε ότι υπάρχει ένας μορφισμός $h_2 : \operatorname{colim}_\phi FP_{\overline{z},\phi} \to \operatorname{colim}_\lambda FP_{z',\lambda}$, που από την καθολική ιδιότητα αυτού, έχουμε την αντιμεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
FP_{z\cup z',p} \arrow[d, "F\delta"'] \arrow[dr] & (\mathbf{F}_2) \\
FP_{z',\lambda_1} \arrow[dr, "in_{z',\lambda_1}"'] & \operatorname{colim}_\phi FP_{\overline{z},\phi} \arrow[d, dotted, "h_2"'] \\
 & \operatorname{colim}_\lambda FP_{z',\lambda}
\end{tikzcd}$$

Τελικά, συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι:
Από την αντιμεταθετικότητα των διαγραμμάτων $(\mathbf{E}_1)$ και $(\mathbf{U}_1)$ έχουμε ότι:

$$in_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha,\xi,\zeta} = in_z \cdot in_{z,k_1} \cdot F\gamma \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta} = in_z \cdot h_1 \cdot in_{z\cup z',p} \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}$$

Από το συν-κώνο $\operatorname{colim}_z \operatorname{colim}_k FP_{z,k}$ έχουμε ότι:

$$in_z \cdot h_1 \cdot in_{z\cup z',p} \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta} \cdot = in_{\overline{z}} \cdot in_{z\cup z',p} \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta} = in_{z'} \cdot h_2 \cdot in_{z\cup z',p} \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta}$$

και από αντιμεταθετικότητα των διαγραμμάτων $(\mathbf{U}_2)$ και $(\mathbf{E}_2)$ έχουμε ότι:

$$in_{z'} \cdot h_2 \cdot in_{z\cup z',p} \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta} = in_{z'} \cdot in_{z',\lambda_1} \cdot F\delta \cdot w_{\alpha,\xi,\zeta} = in_{z'} \cdot in_{z',\lambda} \cdot v_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha,\xi,\zeta}$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $in_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha,\xi,\zeta} = in_{z'} \cdot in_{z',\lambda} \cdot v_{\alpha,\xi} \cdot t_{\alpha,\xi,\zeta}$ και αφού το site είναι υποκανονικό, έχουμε ότι $in_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} = in_{z'} \cdot in_{z',\lambda} \cdot v_{\alpha,\xi}$. Όπως τώρα παρατηρήσαμε στην αρχή της απόδειξής, αυτή η ισότητα μας εξασφαλίζει ότι $u = v$, άρα τελικά δείξαμε ότι ο h είναι μονομορφισμός. ▲

• Ο h είναι διασπώμενος μορφισμός

Έστω $y : T \to E$, ένας μορφισμός από ένα τυχαίο αντικείμενο της $\mathcal{E}$ προς το συν-πεδίο του μορφισμού h.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{colim}_z \mathrm{colim}_k\ FP_{z,k} \arrow[d, "h"'] & & \\
T \arrow[r, "y"] & E \arrow[r, "e"] & FC \arrow[r, shift left, "F^*f"] \arrow[r, shift right, "F^*g"'] & \mathrm{colim} FC_i
\end{tikzcd}$$

Ο μορφισμός F^*f είναι ένας μορφισμός που προκύπτει από την δράση μίας αριστερής επέκτασης Kan. Ως τέτοιος χαρακτηρίζεται ως ο μοναδικός μορφισμός με μία συγκεκριμένη ιδιότητα (βλέπε περιγραφή σελ. 16). Μπορούμε να δούμε ότι και ο μορφισμός $incl_{C_i} \cdot F\check{f}$, όπου $\check{f} : C_i \to C$ ο μορφισμός που αντιστοιχεί μέσω του λήμματος του Yoneda στον φυσικό μετασχηματισμό $f : yC \to Z$ (βλέπε σελ. 131), έχει την ίδια ιδιότητα με τον F^*f. Άρα έχουμε ότι $incl_{C_i} \cdot F\check{f} = F^*f$. Όμοια έχουμε ότι $incl_{C_j} \cdot F\check{g} = F^*g$. Αν συμβολίσουμε με x τον μορφισμό $e \cdot y$, τότε έχουμε την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "F\check{f} \cdot x"'] \arrow[dr, "F\check{g} \cdot x"] & \\
FC_i \arrow[dr, "incl_{C_i}"'] & & FC_j \arrow[dl, "incl_{C_j}"] \\
 & \mathrm{colim} FC_i &
\end{tikzcd}$$

Με εφαρμογή της συνθήκης PC2 για το συνόριο $\mathrm{colim} FC_i$, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ z

$$\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[dl, "d_{1,0}"'] \arrow[dr, "d_{1,1}"] & & C_3 \arrow[dl, "d_{3,0}"'] \arrow[dr, "d_{3,1}"] & \\
C_i & & C_2 & & C_j
\end{tikzcd}$$

που συνδέει τα C_i και C_j, και μορφισμοί $x_1 : T_\alpha \to FC_1, x_2 : T_\alpha \to FC_2, x_3 : T_\alpha \to FC_3$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & T_\alpha \arrow[d, "x_1"'] \arrow[ddr, "x_2"] \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[drr, bend left, "x_3"] & T \arrow[ddll, bend right, "F\check{f} \cdot x"'] \arrow[ddrr, bend left, "F\check{g} \cdot x"] & & \\
 & FC_1 \arrow[dl, "Fd_1^0"] \arrow[dr] & & FC_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
FC_i & & FC_2 & & FC_j
\end{tikzcd}$$

ισοδύναμα το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & T_\alpha \arrow[dr, "x\cdot t_\alpha"] \arrow[dd, "x_1"'] \arrow[dddr, "x_2"] \arrow[ddrr, bend left, "x_3"] & & & \\
 & & FC \arrow[ddll, bend right, "F\check{f}"'] \arrow[ddrr, bend left, "F\check{g}"] & & \\
 & FC_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & FC_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
FC_i & & FC_2 & & FC_j
\end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό. Συνεπώς το παραπάνω διάγραμμα είναι ένα διάγραμμα στην κατηγορία T_α/F, παραμετρικοποιημένο από την συνεκτική κατηγορία D_z. Ο F είναι j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια, άρα από το Λήμμα 5.1.3, υπάρχει ένα κάλυμμα $\{T_{\alpha\xi} \to T_\alpha | \alpha \in A, \xi \in \Xi_\alpha\}$ του T_α, τέτοιο ώστε για κάθε $\xi \in \Xi_\alpha$ υπάρχει ένας κώνος $P_{z,k}^{\alpha,\xi}$ για το διάγραμμα D_z και ένας μορφισμός $u_{\alpha,\xi} : T_{\alpha\xi} \to FP_{z,k}^{\alpha,\xi}$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
 & T_{\alpha\xi} \arrow[r, "t_{\alpha\xi}"] \arrow[d, "u_{\alpha,\xi}"] & T_\alpha \arrow[dddl] \arrow[dd, "x\cdot t_\alpha"] \arrow[dddr, "x_3"] & & \\
 & FP_{z,k}^{\alpha,\xi} \arrow[dd, "F\lambda_{C_1}"'] \arrow[dr, "F\lambda_C"] \arrow[dddr] & & & \\
 & & FC \arrow[ddll, bend right, "F\check{f}"'] \arrow[ddrr, bend left, "F\check{g}"] & & \\
 & FC_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & FC_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
FC_i & & FC_2 & & FC_j
\end{tikzcd} \qquad (\mathbf{F})$$

Δείχνουμε τώρα ότι η οικογένεια

$$\{\ T_{\alpha,\xi} \xrightarrow{u_{\alpha,\xi}} FP_{z,k} \xrightarrow{in_z \cdot in_{z,k}} \mathrm{colim}_z \mathrm{colim}_k\, FP_{z,k}\, | \alpha \in A, \xi \in \Xi_\alpha\}$$

, αποτελεί μία συμβατή οικογένεια στοιχείων του συναρτητή $\hom_{\mathcal{E}}(-, \mathrm{colim}_z \mathrm{colim}_k\, FP_{z,k})$ για το κάλυμμα $\{t_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} : T_{\alpha,\xi} \to T | \alpha \in A, \xi \in A_\alpha\}$. Για τυχαία $\xi \in \Xi_\alpha$ και $\xi' \in \Xi_{\alpha'}$

έχουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & T_{\alpha\xi} \arrow[r, "u_{\alpha,\xi}"] \arrow[dr, "t_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}"] & FP_{z,k} \arrow[dr, "in_z \cdot in_{z,k}"] & \\
T_{\alpha,\xi} \times_T T_{\alpha'\xi'} \arrow[ur, "\pi^1_{\alpha\xi,\alpha'\xi'}"] \arrow[dr, "\pi^2_{\alpha\xi,\alpha'\xi'}"'] & & T & \mathrm{colim}_z \mathrm{colim}_k\ FP_{z,k} \\
 & T_{\alpha'\xi'} \arrow[r, "u_{\alpha',\xi'}"'] \arrow[ur, "t_{\alpha'} \cdot t_{\alpha'\xi'}"'] & FP_{z,\lambda} \arrow[ur, "in_{z'} \cdot in_{z',\lambda}"'] &
\end{tikzcd}$$

Από τις ισότητες

$$\begin{aligned}
e \cdot h \cdot in_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot \pi^1_{\alpha\xi,\alpha'\xi'} &= F^* a \cdot in_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot \pi^1_{\alpha\xi,\alpha'\xi'} \\
&= F\lambda_c \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot \pi^1_{\alpha\xi,\alpha'\xi'} \\
&= x \cdot t_\alpha \cdot\ t_{\alpha\xi} \cdot \pi^1_{\alpha\xi,\alpha'\xi'} \\
&= x \cdot t_{\alpha'} \cdot\ t_{\alpha'\xi'} \cdot \pi^2_{\alpha\xi,\alpha'\xi'} \\
&= F\mu_c \cdot u_{\alpha',\xi'} \cdot \pi^2_{\alpha\xi,\alpha'\xi'} \\
&= F^* a \cdot in_{z'} \cdot in_{z',k'} \cdot u_{\alpha',\xi'} \cdot \pi^2_{\alpha\xi,\alpha'\xi'} \\
&= e \cdot h \cdot in_{z'} \cdot in_{z',k'} \cdot u_{\alpha',\xi'} \cdot \pi^2_{\alpha\xi,\alpha'\xi'}
\end{aligned}$$

και το γεγονός ότι οι e, h είναι μονομορφισμοί, έχουμε ότι

$$in_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \cdot \pi^1_{\alpha\xi,\alpha'\xi'} = in_{z'} \cdot in_{z',k'} \cdot u_{\alpha',\xi'} \cdot \pi^2_{\alpha\xi,\alpha'\xi'}$$

άρα η οικογένεια είναι συμβατή. Από το γεγονός τώρα ότι το site είναι υποκανονικό, ο αναπαραστάσιμος $\hom_{\mathcal{E}}(-, \mathrm{colim}_z \mathrm{colim}_k\ FP_{z,k})$ έχει την ιδιότητα του δράγματος, άρα υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $u : T \to \mathrm{colim}_z \mathrm{colim}_k\ FP_{z,k}$, τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
T_{\alpha\xi} \arrow[r, "u_{\alpha,\xi}"] \arrow[dr, "t_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}"'] & FP_{z,k} \arrow[dr, "in_z \cdot in_{z,k}"] & \\
 & T \arrow[r, dotted, "u"] & \mathrm{colim}_z \mathrm{colim}_k\ FP_{z,k}
\end{tikzcd}$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}
e \cdot h \cdot u \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha\xi} &= F^* a \cdot u \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha\xi} \\
&= F^* a \cdot in_z \cdot in_{z,k} \cdot u_{\alpha,\xi} \\
&= F\lambda_c \cdot u_{\alpha,\xi} \\
&= x \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha\xi} \\
&= e \cdot y \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}
\end{aligned}$$

και από το γεγονός ότι ο e είναι μονομορφισμός και η τοπολογία υποκανονική, έχουμε τελικά ότι $h \cdot u = y$, δηλαδή ο h είναι διασπώμενος.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{colim}_z\mathrm{colim}_k\, FP_{z,k} \arrow[rr, "h"] & & E \\ & & T \arrow[u, "y"'] \arrow[ull, dotted, "u"] \end{tikzcd}$$

■

5.2.11 Παρατήρηση. Η κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ είναι μία ομαλή (regular) κατηγορία, οπότε κάθε μονομορφισμός σε αυτή την κατηγορία, είναι ο εξισωτής ενός παράλληλου ζεύγους φυσικών μετασχηματισμών. Συνεπώς, το παραπάνω λήμμα μας εφοδιάζει με συνθήκη για την διατήρηση από μία αριστερή επέκταση Kan, μονομορφισμών που είναι εξισωτές διαγραμμάτων της μορφής $yC \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Z$.

5.2.12 Πόρισμα. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες με πεπερασμένα συνεκτικά όρια, υποκανονικό site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Έστω επιπλέον ότι για κάθε διάγραμμα στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ της μορφής*

$$yC \rightrightarrows Z$$

στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, το συνόριο που υπεισέρχεται στον υπολογισμό της αριστερής επέκτασης Kan του εξισωτή του παραπάνω διαγράμματος να είναι καθορισμένο και το συνόριο που υπεισέρχεται στον υπολογισμό της αριστερής επέκτασης Kan του Z να πληροί την συνθήκη PC2. Τότε, αν ο F είναι j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια, ο $\mathrm{Lan}_y F$ διατηρεί εξισωτές τέτοιων διαγραμμάτων.

Έστω τώρα ένα τυχαίο διάγραμμα εξισωτή στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$

$$E \overset{e}{\rightarrowtail} Q \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Z$$

Αν $Q \cong \operatorname*{colim}_{i \in \mathcal{I}} yC_i$ είναι η γραφή του Q ως ένα συνόριο αναπαραστάσιμων, τότε το Q (όπως και κάθε συνόριο) είναι ο συνεξισωτής ενός παράλληλου ζεύγους μορφισμών μεταξύ συν-γινομένων (βλέπε [2], 0.7)

$$\coprod_{a \in A} yC_a \underset{q}{\overset{s}{\rightrightarrows}} \coprod_{i \in I} yC_i \overset{r}{\twoheadrightarrow} Q$$

Για κάθε $i \in I$ έχουμε και ένα διάγραμμα εξισωτή

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, tail, "e_i"] & yC_i \arrow[r, shift left, "f \cdot in_{C_i}"] \arrow[r, shift right, "g \cdot in_{C_i}"'] & Z \end{tikzcd}$$

στην $[\mathcal{C}^{op}, Set]$, όπου $in_{C_i} : yC_i \to \mathrm{colim}_{i \in \mathcal{I}} yC_i$ $i \in \mathcal{I}$ είναι οι κανονικοί μορφισμοί προς το συνόριο, και ομοίως για κάθε a

$$\begin{tikzcd} E_a \arrow[r, tail, "e_a"] & yC_a \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Z \end{tikzcd}$$

Έστω τώρα $F : \mathcal{C} \to (\mathcal{E}, j)$ ένας j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια συναρτητής, από μία μικρή κατηγορία προς ένα συν-πλήρες και πεπερασμένα πλήρες υποκανονικό site, έτσι ώστε να πληρούνται οι συνθήκες που διατυπώσαμε στο Πόρισμα 5.2.12 για τον καθορισμό των συνορίων. Τότε:

- Από το γεγονός ότι στην κατηγορία $[\mathcal{C}^{op}, Set]$ τα συν-γινόμενα είναι καθολικά, έχουμε ότι (βλέπε Πρόταση 2.1.12) το διάγραμμα

  $$\begin{tikzcd} \coprod_i E_i \arrow[r, "e'"] & \coprod_i yC_i \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "g_1"'] & Z \end{tikzcd}$$

  είναι ένα διάγραμμα εξισωτή στην $[\mathcal{C}^{op}, Set]$, και ομοίως έχουμε για το διάγραμμα

  $$\begin{tikzcd} \coprod_a E_a \arrow[r] & \coprod_a yC_a \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Z \end{tikzcd}$$

  Τώρα, στην $[\mathcal{C}^{op}, Set]$ έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα

  $$\begin{tikzcd} \coprod E_a \arrow[r, tail] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \coprod yC_a \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[rdd, bend left] \arrow[rdd, bend left=50] & \\ \coprod E_i \arrow[r, tail, "e'"] \arrow[d, "u"'] & \coprod yC_i \arrow[d, "r"'] \arrow[rd, bend left, "f_1"] \arrow[rd, "g_1"] & \\ E \arrow[r, "e"] & \mathrm{colim} yC_i \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \end{tikzcd} \qquad (\mathbf{A})$$

  Οι μορφισμοί $\coprod E_a \rightrightarrows \coprod E_i$ επάγονται από την καθολική ιδιότητα που χαρακτηρίζει τον εξισωτή $\coprod E_i$. Η μεσαία στήλη είναι συνεξισωτής και όλες οι γραμμές είναι εξισωτές. Επιπλέον, τα διαγράμματα

$$
\begin{tikzcd}
\coprod E_i \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & \coprod yC_i \arrow[d, two heads] \\
E \arrow[r, "e"] & Q
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\coprod E_a \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & \coprod yC_a \arrow[d, two heads] \\
E \arrow[r, "e"] & Q
\end{tikzcd}
$$

είναι εφελκύσεις στην $[\mathcal{C}^{op}, Set]$, άρα από την καθολικότητα των συνεξισωτών[16] στην $[\mathcal{C}^{op}, Set]$, έχουμε ότι και η αριστερή στήλη του διαγράμματος $(\mathbf{A})$ είναι επίσης συνεξισωτής.

- Από το Πόρισμα 5.2.12 έχουμε ότι το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
F^*E_i \arrow[r, tail, "F^*e_i"] & FC_i \arrow[r, shift left, "F^*(f\cdot in_{C_i})"] \arrow[r, shift right, "F^*(g\cdot in_{C_i})"'] & F^*Z
\end{tikzcd}
$$

  είναι ένα διάγραμμα εξισωτή στην $\mathcal{E}$ (για κάθε i). Επιπλέον, αν στην $\mathcal{E}$ τα συνγινόμενα είναι καθολικά, τότε και το επαγόμενο διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_i F^*E_i \arrow[r, tail] & \coprod_i FC_i \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F^*Z
\end{tikzcd}
$$

  είναι ένα διάγραμμα εξισωτή στην $\mathcal{E}$. Όμοια και για το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\coprod_a F^*E_a \arrow[r, tail] & \coprod_a FC_a \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F^*Z
\end{tikzcd}
$$

- Η αριστερή επέκταση Kan του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda διατηρεί συνόρια, ως ένας αριστερά προσαρτημένος συναρτητής. Άρα έχουμε τελικά το ακόλουθο διάγραμμα στην $\mathcal{E}$

$$
\begin{tikzcd}
\coprod F^*E_a \arrow[r, tail] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \coprod FC_a \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[ddr, bend left] \arrow[ddr, bend left=15] & \\
\coprod F^*E_i \arrow[r, tail, "F^*e'"] \arrow[d, two heads, "F^*u"'] & \coprod FC_i \arrow[d, two heads, "F^*r"'] \arrow[dr, "F^*f_1"] \arrow[dr, "F^*g_1"'] & \\
F^*E \arrow[r, "F^*e"] & \mathrm{colim} FC_i \arrow[r, shift left, "F^*f"] \arrow[r, shift right, "F^*g"'] & F^*Z
\end{tikzcd}
\qquad (\mathbf{A}')
$$

  όπου τώρα, οι στήλες είναι συνεξισωτές και η επάνω και η μεσαία γραμμή είναι εξισωτές.

[16] Για το τι σημαίνει ότι ένας συνεξισώτης είναι καθολικός, βλέπε [10], Ορισμός 2.14.1.

Αποδεικνύουμε τώρα το παρακάτω Λήμμα.

5.2.13 Λήμμα. *Έστω $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες και πεπερασμένα πλήρες υποκανονικό site. Έστω επιπλέον ένα αντιμεταθετικό διάγραμμα στην $\mathcal{E}$*

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[r, tail, "e_2"'] \arrow[d, shift right, "f'"'] \arrow[d, shift left, "g'"] & B_2 \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[rrdd, bend left, "t_2"] \arrow[rrdd, bend left=15, "t_1"'] & & \\
E_1 \arrow[r, tail, "e_1"] \arrow[d, two heads, "q'"'] & B_1 \arrow[d, two heads, "q"'] \arrow[rrd, bend left, "s_2"] \arrow[rrd, "s_1"'] & & \\
E \arrow[r, "e"] & Q \arrow[rr, shift left, "r_1"] \arrow[rr, shift right, "r_2"'] & & Z
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

δηλαδή, $r_i \cdot q = s_i,$, $s_i \cdot f (= s_i \cdot g) = t_i$, $i = 1, 2$, όπου οι στήλες είναι συνεξισωτές και η επάνω και η μεσαία γραμμή είναι εξισωτές. Τότε, αν οι συνεξισωτές στην $\mathcal{E}$ είναι καθορισμένοι, ο μορφισμός e είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη: Για τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν έναν καθορισμένο εξισωτή, βλέπε σελ. 73.
Έστω $x, y : T \rightrightarrows E$ με $e \cdot x = e \cdot y$. Αφού ο q' είναι καθορισμένος επιμορφισμός, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T, [17] τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένας μορφισμός $x_\alpha : T_\alpha \to E_1$ και ένας μορφισμός $y_\alpha : T_\alpha \to E_1$, έτσι ώστε τα ακόλουθα τετράγωνα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[r, "x_\alpha"] \arrow[d, "t_\alpha"'] & E_1 \arrow[d, "q'"] \\
T \arrow[r, "x"'] & E
\end{tikzcd} \qquad
\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[r, "y_\alpha"] \arrow[d, "t_\alpha"'] & E_1 \arrow[d, "q'"] \\
T \arrow[r, "y"'] & E
\end{tikzcd}$$

δηλαδή,

$$q' \cdot x_\alpha = x \cdot t_\alpha \tag{5.11}$$
$$q' \cdot y_\alpha = y \cdot t_\alpha \tag{5.12}$$

Από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος (*) και τις παραπάνω ισότητες, έχουμε ότι:

$$q \cdot e_1 \cdot x_\alpha = e \cdot q' \cdot x_\alpha = e \cdot x \cdot t_\alpha = e \cdot y \cdot t_\alpha = e \cdot q' \cdot y_\alpha = q \cdot e_1 \cdot y_\alpha$$

[17] Όπως και σε προηγούμενες αποδείξεις, θεωρήσαμε το ίδιο κάλυμμα στην διπλή εφαρμογή της συνθήκης ότι ο q είναι καθορισμένος επιμορφισμός.

Άρα, από το γεγονός ότι (Q, q) είναι καθορισμένος συνεξισωτής, έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{T_{\alpha\xi} \to T_\alpha | \alpha \in A, \xi \in \Xi_\alpha\}$ του T_α, τέτοιο ώστε για κάθε $\xi \in \Xi_\alpha$ υπάρχει ένα ζιγκ-ζαγκ (στην $\mathcal{E}$) της μορφής

$$\begin{tikzcd}
& B_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & B_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & B_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
B_1 & & B_1 & & \cdots\cdots & & B_1
\end{tikzcd}$$

και μορφισμοί

$$\begin{tikzcd}
& B_2 \\
T_{\alpha\xi} \arrow[ur, "x_1"] \arrow[r, "x_2"] \arrow[ddr, "x_n"'] & B2 \arrow[dd, dotted, no head] \\
& \\
& B_2
\end{tikzcd}$$

τέτοιοι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
& & T_{\alpha\xi} \arrow[dr, "t_{\alpha\xi}"] \arrow[ddl, "x_1"'] \arrow[dd, "x_2"] \arrow[ddrrr, bend left, "x_n"] & & & & \\
& & & T_\alpha \arrow[dddlll, bend right, "e_1 \cdot x_\alpha"'] \arrow[ddrrr, bend left, "e_1 \cdot y_\alpha"] & & & \\
& B_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & B_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & B_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
B_1 & & B_1 & & \cdots\cdots & & B_1
\end{tikzcd}$$

δηλαδή, ισχύουν οι παρακάτω ισότητες

$$f \cdot x_1 = e_1 \cdot x_\alpha \cdot t_{\alpha\xi},\ g \cdot x_1 = f \cdot x_2,\ g \cdot x_2 = f \cdot x_3,\ ...,\ g \cdot x_{n-1} = f \cdot x_n,\ g \cdot x_n = e_1 \cdot y_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}$$

Τώρα, από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος (*) και από τις παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι καθένας από τους μορφισμούς $x_1, , x_2, ..., x_n$, εξισώνει το παράλληλο ζεύγος

$B_2 \overset{t_1}{\underset{t_2}{\rightrightarrows}} Z$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
t_1 \cdot x_1 &= s_1 \cdot f \cdot x_1 = r_1 \cdot q \cdot f \cdot x_1 \\
&= r_1 \cdot q \cdot e_1 \cdot x_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} = r_1 \cdot e \cdot q' \cdot x_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} \\
&= r_1 \cdot e \cdot x \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} = r_2 \cdot e \cdot x \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} \\
&= r_2 \cdot e \cdot q' \cdot x_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} = r_2 \cdot q \cdot e \cdot x_\alpha \cdot t_{\alpha,\xi} \\
&= r_2 \cdot q \cdot f \cdot x_1 \cdot t_{\alpha,\xi} = s_2 \cdot f \cdot x_1 = t_2 \cdot x_1
\end{aligned}$$

Επιπλέον για $k = 2, ..., n$ έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}
t_1 \cdot x_k &= r_1 \cdot q \cdot f \cdot x_k \\
= r_1 \cdot q \cdot g \cdot x_{k-1} = r_1 \cdot q \cdot f \cdot x_{k-1} &= r_1 \cdot q \cdot g \cdot x_{k-2} = ... \\
... = r_1 \cdot q \cdot f \cdot x_2 &= r_1 \cdot q \cdot g \cdot x_1 = \\
r_1 \cdot q \cdot f \cdot x_1 &= t_1 \cdot x_1
\end{aligned}$$

και ομοίως ότι, $t_2 \cdot x_k = t_2 \cdot x_1$.
Άρα, από την καθολική ιδιότητα του εξισωτή (E_2, e_2) έχουμε ότι υπάρχουν μορφισμοί $y_1, y_2, ..., y_n : T_{\alpha\xi} \to E_2$, τέτοιοι ώστε τα ακόλουθα τρίγωνα να είναι αντιμεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
T_{\alpha\xi} \arrow[d, dotted, "y_1"'] \arrow[dr, "x_1"] & \\
E_2 \arrow[r, "e_2"'] & B_2
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
T_{\alpha\xi} \arrow[d, dotted, "y_2"'] \arrow[dr, "x_2"] & \\
E_2 \arrow[r, "e_2"'] & B_2
\end{tikzcd}
\quad ... \quad
\begin{tikzcd}
T_{\alpha\xi} \arrow[d, dotted, "y_n"'] \arrow[dr, "x_n"] & \\
E_2 \arrow[r, "e_2"'] & B_2
\end{tikzcd}$$

Τέλος, από την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος (*) και τις παραπάνω ισότητες έχουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & & T_{\alpha\xi} \arrow[dr, "t_{\alpha\xi}"] \arrow[ddll, "y_1"'] \arrow[dd, "y_2"] \arrow[ddrrr, bend left, "y_n"] & & & & \\
 & & & & T_\alpha \arrow[ddllll, bend right, "x_\alpha"'] \arrow[ddrrr, bend left, "y_\alpha"] & & & \\
 & E_2 \arrow[dl, "f'"] \arrow[dr, "g'"] & & E_2 \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "g'"] & & & E_2 \arrow[dll, "f'"'] \arrow[dr, "g'"] & \\
E_1 & & E_1 & & \cdots\cdots & & & E_1
\end{tikzcd}$$

είναι αντιμεταθετικό. Πράγματι:

$$e_1 \cdot f' \cdot y_1 = f \cdot e_2 \cdot y_1 = f \cdot x_1 = e_1 \cdot x_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}$$

και αφού ο e_1 είναι μονομορφισμός, έχουμε ότι: $f' \cdot y_1 = x_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}$. Όμοια δείχνουμε και τις υπόλοιπες ισότητες που απαιτούνται για την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος. Από το γεγονός τώρα ότι το διάγραμμα $E_2 \overset{f'}{\underset{g'}{\rightrightarrows}} E_1 \xrightarrow{q'} E$ είναι συνεξισωτής, έχουμε ότι (βλέπε Παρατήρηση 3.3.1): $q' \cdot x_\alpha \cdot t_{\alpha\xi} = q' \cdot y_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}$. Από τις ισότητες (5.11) στην αρχή της απόδειξης, έχουμε ότι

$$x \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha\xi} = y \cdot t_\alpha \cdot t_{\alpha\xi}$$

και αφού το site είναι υποκανονικό έχουμε τελικά ότι $x = y$. ∎

5.2.14 Πρόταση. *Έστω $\mathcal{C}$ μία μικρή κατηγορία, $(\mathcal{E}, j)$ ένα συν-πλήρες, με πεπερασμένα συνεκτικά όρια, υποκανονικό site και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ένας συναρτητής. Έστω επιπλέον ότι για κάθε διάγραμμα εξισωτή στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, τα συνόρια που υπεισέρχονται στον υπολογισμό της αριστερής επέκτασης Kan ενός τέτοιου διαγράμματος, είναι καθορισμένα στην $\mathcal{E}$. Τότε, αν ο F είναι j-επίπεδος ως προς πεπερασμένα συνεκτικά όρια, η αριστερή επέκταση Kan του F κατά μήκος της εμφύτευσης Yoneda διατηρεί εξισωτές.*

Απόδειξη: Έστω $E \rightarrowtail^{e} Q \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$, ένα διάγραμμα εξισωτή στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ και $Q \cong \operatorname{colim}_{i \in \mathcal{I}} yC_i$. Από το γεγονός ότι τα συνόρια που που υπεισέρχονται στον υπολογισμό της αριστερής επέκτασης Kan του παραπάνω εξισωτή είναι καθορισμένα, έχουμε ότι τα συν-γινόμενα και οι συνεξισωτές που εμφανίζονται στο διάγραμμα $(\mathbf{A'})$ στην σελίδα 147 είναι καθορισμένα. Άρα τα συν-γινόμενα αυτά είναι καθολικά (βλέπε Συμπέρασμα 3.3.4). Κατά συνέπεια, με βάση τις υποθέσεις της Πρότασης, έχουμε ότι στο διάγραμμα $(\mathbf{A'})$, οι στήλες είναι συνεξισωτές και η επάνω και η μεσαία γραμμή είναι εξισωτές, Συνεπώς από το Λήμμα 5.2.13, έχουμε ότι ο μορφισμός $F^*e : F^*E \to F^*Q$ είναι μονομορφισμός.

Δείχνουμε τώρα ότι το ζευγάρι (F^*E, F^*e) είναι ο εξισωτής του διαγράμματος

$$F^*Q = \operatorname{colim}_i yC_i \overset{F^*f}{\underset{F^*g}{\rightrightarrows}} F^*Z \text{ , στην } \mathcal{E}.$$

Έστω λοιπόν $x : T \to \operatorname{colim}_i FC_i$, ένας μορφισμός ο οποίος εξισώνει τους F^*f, F^*g, δηλαδή $F^*f \cdot x = F^*g \cdot x$. Εφαρμόζοντας την συνθήκη PC1 για το συνόριο $\operatorname{colim}_i FC_i$ έχουμε ότι υπάρχει ένα κάλυμμα $\{T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$ του T, τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει ένας δείκτης $i(\alpha) \in I$ και ένας μορφισμός $x_\alpha : T_\alpha \to FC_{i(\alpha)}$, έτσι ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} T_\alpha \arrow[r, "t_\alpha"] \arrow[d, "x_\alpha"'] & T \arrow[d, "x"] \\ FC_{i(\alpha)} \arrow[r, "incl_{i(\alpha)}"'] & \mathrm{colim}_i FC_i \end{tikzcd}$$

Τώρα, αν με $l_i : FC_i \to \coprod FC_i$ συμβολίσουμε τους μορφισμούς προς το συν-γινόμενο, έχουμε ότι για κάθε i το ακόλουθο διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{tikzcd} FC_i \arrow[r, "l_i"] \arrow[dr, "incl_i"'] & \coprod FC_i \arrow[d, "F^*r"] \\ & \mathrm{colim}_i FC_i \end{tikzcd}$$

Έχουμε τώρα ότι για κάθε α ο μορφισμός $l_{i(\alpha)} \cdot x_\alpha : T_\alpha \to \coprod FC_i$, εξισώνει τους F^*f_1, F^*g_1. Πράγματι,

$$\begin{aligned} F^*f_1 \cdot l_{i(\alpha)} \cdot x_\alpha &= F^*f \cdot F^*r \cdot l_{i(\alpha)} \cdot x_\alpha \\ &= F^*f \cdot incl_{i(\alpha)} \cdot x_\alpha \\ &= F^*f \cdot x \cdot t_\alpha \\ &= F^*g \cdot x \cdot t_\alpha \\ &= F^*g \cdot incl_{i(\alpha)} \cdot x_\alpha \\ &= F^*g \cdot F^*r \cdot l_{i(\alpha)} \cdot x_\alpha \\ &= F^*g_1 \cdot l_{i(\alpha)} \cdot x_\alpha \end{aligned}$$

Άρα (από την καθολικότητα του εξισωτή $(\coprod_i F^*E_i,\ F^*e')$, υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $y_\alpha : T_\alpha \to \coprod_i F^*E_i$, τέτοιος ώστε $F^*e' \cdot y_\alpha = l_{i(\alpha)} \cdot x_\alpha$. Δείχνουμε τώρα ότι η οικογένεια $\{F^*u \cdot y_\alpha : T_\alpha \to F^*E | \alpha \in A\}$, στοιχείων του συναρτητή $\hom_{\mathcal{E}}(-, F^*E)$, είναι μία συμβατή οικογένεια για το κάλυμμα $\{t_\alpha : T_\alpha \to T | \alpha \in A\}$. Για τυχαία $\alpha, \alpha' \in A$, έχουμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & T_\alpha \arrow[rr, "y_\alpha"] \arrow[dr, "t_\alpha"] & & \coprod_i F^*E_i \arrow[dr, "F^*u"] & \\ T_\alpha \times_T T_{\alpha'} \arrow[ur, "\pi^1_{\alpha\alpha'}"] \arrow[dr, "\pi^2_{\alpha\alpha'}"'] & & T & & F^*E \\ & T_{\alpha'} \arrow[rr, "y_{\alpha'}"'] \arrow[ur, "t_{\alpha'}"'] & & \coprod_i F^*E_i \arrow[ur, "F^*u"'] & \end{tikzcd}$$

Από τις ισότητες τώρα

$$\begin{aligned}
F^*e\cdot F^*u\cdot y_\alpha\cdot \pi^1_{\alpha,\alpha'} &= F^*r\cdot F^*e'\cdot y_\alpha\cdot \pi^1_{\alpha,\alpha'}\\
&= F^*r\cdot l_{i(\alpha)}\cdot x_\alpha\cdot \pi^1_{\alpha,\alpha'}\\
&= incl_{i(\alpha)}\cdot x_\alpha\cdot \pi^1_{\alpha,\alpha'}\\
&= x\cdot t_\alpha\cdot \pi^1_{\alpha,\alpha'}\\
&= x\cdot t_{\alpha'}\cdot \pi^2_{\alpha,\alpha'}\\
&= incl_{i(\alpha')}\cdot x_{\alpha'}\cdot \pi^2_{\alpha,\alpha'}\\
&= F^*r\cdot l_{i(\alpha')}\cdot x_{\alpha'}\cdot \pi^2_{\alpha,\alpha'}\\
&= F^*r\cdot F^*e'\cdot y_{\alpha'}\cdot \pi^2_{\alpha,\alpha'}\\
&= F^*e\cdot F^*u\cdot y_{\alpha'}\cdot \pi^2_{\alpha,\alpha'}
\end{aligned}$$

και το γεγονός ότι ο F^*e είναι μονομορφισμός έχουμε ότι το εξωτερικό του παραπάνω διαγράμματος είναι αντιμεταθετικό, άρα αποδείξαμε την συμβατότητα της οικογένειας. Από το γεγονός ότι ο αναπαραστάσιμος $\hom_{\mathcal{E}}(-,F^*E)$ είναι δράγμα, έχουμε ότι υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός $w:T\to F^*E$, τέτοιος ώστε για κάθε $\alpha\in A$ να έχουμε ότι $w\cdot t_\alpha = F^*u\cdot y_\alpha$

$$\begin{tikzcd}
T_\alpha \arrow[rr, "y_\alpha"] \arrow[dr, "t_\alpha"'] & & \coprod_i F^*E_i \arrow[dr, "F^*u"] & \\
& T \arrow[rr, dotted, "w"'] & & F^*E
\end{tikzcd}$$

Τέλος, από τις ισότητες

$$\begin{aligned}
F^*e\cdot w\cdot t_\alpha &= F^*e\cdot F^*u\cdot y_\alpha\\
&= F^*r\cdot F^*e'\cdot y_\alpha\\
&= F^*r\cdot l_{i(\alpha)}\cdot x_\alpha\\
&= incl_{i(\alpha)}\cdot x_\alpha\\
&= x\cdot t_\alpha
\end{aligned}$$

και το γεγονός ότι το site είναι υποκανονικό, έχουμε ότι ο x παραγοντοποιείται ($x=F^*e\cdot w$) μοναδικά μέσω του F^*e. ■

5.2.15 Παρατήρηση. Αν στην κατηγορία $\mathcal{E}$ ισχύει ότι φιλτραρισμένα συνόρια αντιμετατίθενται με εξισωτές (για παράδειγμα αν η $\mathcal{E}$ είναι μία τοπικά πεπερασμένα παρουσιάσιμη κατηγορία), τότε μπορούμε να "χαλαρώσουμε λίγο" τις υποθέσεις της παραπάνω πρότασης. Με αυτό εννοούμε ότι αντί να υποθέσουμε ότι για κάθε διάγραμμα εξισωτή στην $[\mathcal{C}^{op},\mathbf{Set}]$, τα συνόρια που υπεισέρχονται στον υπολογισμό της αριστερής επέκτασης Kan ενός τέτοιου διαγράμματος είναι καθορισμένα, αρκεί υποθέσουμε ότι η συνθήκη αυτή πληρούται για διαγράμματα εξισωτή στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, της μορφής $E \xrightarrow{e} P \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$, όπου προδράγμα P είναι ισόμορφο μ΄ ένα πεπερασμένο συνόριο αναπαραστάσιμων, δηλαδή το P είναι ένα πεπερασμένα παρουσιάσιμο αντικείμενο της κατηγορίας $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ (βλέπε [49], §2.1). Πράγματι, από την προηγούμενη απόδειξη, έχουμε ότι αν τροποποιούσαμε όπως περιγράψαμε πριν, την υπόθεση της Πρότασης, τότε θα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την διατήρηση εξισωτών από την αριστερή επέκταση Kan, για διαγράμματα εξισωτών όπως το παραπάνω. Αν όμως η $\mathcal{E}$ έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι φιλτραρισμένα συνόρια αντιμετατίθενται με εξισωτές, τότε αν $E \xrightarrow{e} Q \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z$ είναι ένα τυχαίο διάγραμμα εξισωτή στην $[\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}]$, από το γεγονός ότι κάθε προδράγμα γράφεται (είναι ισόμορφο) μ΄ ένα φιλτραρισμένο συνόριο πεπερασμένων παρουσιάσιμων αντικειμένων, έχουμε ότι αν $X \cong \operatorname{colim}_{j \in J} P_j$, όπου P_j πεπερασμένα παρουσιάσιμα προδράγματα και J φιλτραρισμένη κατηγορία, τότε:

$$\begin{aligned}
F^*(E) &\cong F^*(Eq(\mathrm{colim}_j P_j \rightrightarrows Y)) \\
&\cong F^*(\mathrm{colim}_j Eq(P_j \rightrightarrows Y)) \\
&\cong \mathrm{colim}_j F^*(Eq(P_j \rightrightarrows Y)) \\
&\cong \mathrm{colim}_j Eq(F^* P_j \rightrightarrows F^* Y) \\
&\cong Eq(\mathrm{colim}_j F^* P_j \rightrightarrows F^* Y) \\
&\cong Eq(F^*(\mathrm{colim}_j P_j) \rightrightarrows F^* Y) \\
&\cong Eq(F^* X \rightrightarrows F^* Y) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

[1] J. Adamek, F. Borceux, S. Lack, J. Rosicky, A classification of accessible categories, *J. Pure Appl. Alg.* , 175, 7-30 (2002).

[2] J. Adamek, J. Rosicky, E. M. Vitale, *Alebraic Theories, A Categorical Introduction to general Algebra* , Cambridge University Press (2011).

[3] J. Adamek, J. Rosicky, On sifted colimits and generalized varietes, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 8, No. 3, 33-53 (2001).

[4] J. Adamek, J. Rosicky, *Locally presentable and accessible categories*, Cambridge University Press, 1994.

[5] C. Barwick, D. M. Kan, Relative categories: Another model for the homotopy theory of homotopy theories, arXiv 1011.1691v1, (2010).

[6] T. Beke, Theories of presheaf type, *Journal of Symbolic Logic* 69 (3), 923-934 (2004).

[7] Jean Benabou, *Distributors at Work* available as:
http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/ streicher/FIBR/DiWo.pdf.

[8] C. Berger, A cellular nerve for higher categories, *Advances in Mathematics* 169, 118-175 (2002).

[9] F. Borceux, J. Rosicky, On Filtered weighted colimits of presheaves, Cahiers de Topologie et Geometrie differentielle Categoriques, Vol.XLIX-4, 4^e trimestre 2008.

[10] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Volumes 50., Cambridge University Press (1994).

[11] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 51., Cambridge University Press (1994).

[12] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 3*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 53., Cambridge University Press (1994).

[13] N. Bourbaki, *Elements of Mathemtics, General Topology*, Spinger, (1989).

[14] Ronnie Brown, Ten topologies for $X \times Y$, *Quart. J.Math.* (2) 14 1963, 303-319

[15] F. Cagliari, S. Mantovani, E. M. Vitale, Regularity of the category of Kelley spaces, *Appl. Categ. Structures* 3, 357–361 (1995).

[16] Aurelio Carboni, P. T. Johnstone, Connected limits, familial representability and Artin glueing, *Math. Structures in Computer Science* (1995), vol. 5, pp. 441-459.

[17] C. Centazzo, E. Vitale, Sheaf theory, Chapter VII in *Categorical Foundations: Special Topics in Order, Topology, Algebra, and Sheaf Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 97., Cambridge University Press (2004)

[18] Nicholas Duncan, Gros and Petit Toposes, Talk given at PSSL88, Cambridge, available as: http://www.cheng.staff.shef.ac.uk/pssl88/pssl88-duncan.pdf.

[19] P. Gabriel, M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg (1967).

[20] R. Garner, S. Lack, Lex colimits, *Journar of Pure and Applied Algebra, to appear*, available at arXiv.

[21] M.Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 63, American Mathematical Society (1999).

[22] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: a topos theory compendium: vol.1 and vol.2*, Oxford Logic Guides 43 and 44. Clarendon Press, Oxford (2002).

[23] P. T. Johnstone, Sites, *Lectures given in Haute-Bodeux*, May 29 to June 5, 2005.

[24] A. Joyal, *A course on quasicategories*, highly circulated notes.

[25] D.M.Kan, Adjoint functors, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 87 (1958) , No. 2, Mar., 1.

[26] Π. Καραζέρης, *Κατηγοριες για άμεση χρήση*, Σημειώσεις διαθέσιμες στην: http://www.math.upatras.gr/ pkarazer/.

[27] P. Karazeris, Categotical Domain theory: Scott topology, Power categories, Coherent categories, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 9, No. 6, pp. 106-120 (2001).

[28] Flatness and the left exactness of geometric realization, Notes from PSSL 83, Glasgow, May 2006, available at http://www.maths.gla.ac.uk/ tl/pssl/.

[29] P. Karazeris, J. Rosický, J. Velebil, Completeness of cocompletions, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 169, 229-250 (2005).

[30] P. Karazeris, G.Protsonis, Left Kan extensions preserving finite products, to appear in *Journal of Pure and Applied Algebra.*

[31] P. Karazeris, G.Protsonis, Flat Morphisms of Theories, *submitted.*

[32] M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer (2000).

[33] Katsov, On diagrams and flatness of functors, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 154, 247-256 (2000).

[34] A. Kock, *Postulated colimits and left exactness of Kan extensions*, Aarhus Preprint 1989/90 no. 9, Retyped in TeX in the fall of 2003, available at http://home.imf.au.dk/kock/.

[35] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, London Math. Society Lecture Notes Series No 333, Cambridge University Press, second edition (2006).

[36] F. W. Lawvere, Functorial semantics of algebraic theories Reprinted from Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), 869–872 Repr. Theory Appl. Categ. No. 5 (2004), 1- 121 .

[37] Tom Leinster, A general theory of self similarity, *Advances in Mathematics* 226 (2011), 2935- 3017 .

[38] Tom Leinster, *How I learned to love the nerve constuction*, post at the n-category cafe, avalable as:
$http : //golem.ph.utexas.edu/category/2008/01/mark\_weber\_on\_nerves\_of\_catego.html$.

[39] S. MacLane *Categories for the working mathematician*, Grad.Texts in Math., vol. 5, Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1998 .

[40] S. MacLane, L. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: a first introduction to Topos Theory*, Springer-Verlag New York, (1992).

[41] Απόστολος Ματζάρης, *Τελικές και Συν-ελεύθερες Συν-άλγεβρες σε Προσιτές κατηγορίες*, Διδακτορική Διατριβή, Πάτρα 2011, διαθέσιμο στην http://www.math.upatras.gr/ pkarazer/.

[42] P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology* Chicago Lecture Mathematics, University of Chicago Press, 1967.

[43] nLab entries: http://ncatlab.org/nlab/show/HomePage
geometric realization, http://ncatlab.org/nlab/show/geometric+realization
Kan extensions, http://ncatlab.org/nlab/show/Kan+extension

[44] Peter Normak, On equalizer and pullback flat acts, *Semigroup Forum* Vol. 36 (1987) 293-313 1987, Springer-Verlag New York Inc.

[45] Γ. Προτσώνης, *Κατηγορίες με Ομοτοπική δομή*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Πατρα 2006, διαθέσιμο στην http://www.math.upatras.gr/ pkarazer/.

[46] D. G. Quillen, Homotopical Algebra, Lect.Notes in Math., vol. 43. Springer Verlag, Berlin, 1967.

[47] E. Riehl, *A model structure for quasicategories*, available as: http://www.math.harvard.edu/ eriehl/topic.pdf.

[48] E. Riehl, *A leisurely introduction to simplicial sets*, available as: http://www.math.harvard.edu/ eriehl/ssets.pdf.

[49] J. Rosicky, Injectivity and accessible categories, *Cubo Matem. Educ.4 (2002), pg. 201-211* .

[50] Mike Shulman, *Flat Functors and Morphisms of Sites*, post at the n-Category Cafe, available at:
$http://golem.ph.utexas.edu/category/2011/06/flat\_functors\_and\_morphisms\_of.html$.

[51] Norman Steenrod, A convenient category of topological spaces, *Michigan Math. J.* 14 (1967) 133- 152.

[52] B. Stenström, Rings of quotients Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 217. An introduction to methods of ring theory. Springer-Verlag, 1975.

Ευρετήριο