

# Ασκήσεις στην Εισαγωγή στην Αλγεβρα και Θεωρία Συνόλων Φύλλο 3

20 Δεκεμβρίου 2010

**Ασκηση 1:** Δίνονται δυο συναρτήσεις  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ , για τις οποίες γνωρίζουμε ότι είναι αντιστρέψιμες. Εξηγήστε γιατί και η σύνθεσή τους  $g \circ f: X \rightarrow Z$  είναι αντιστρέψιμη και δείξτε ότι

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1},$$

όπου  $f^{-1}$  συμβολίζει την αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ .

**Ασκηση 2:** Δίνεται η συνάρτηση και  $f: X \rightarrow Y$ . Δείξτε ότι αν για τυχαία υποσύνολα  $A_1, A_2$  του  $X$ , έχουμε  $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$ , τότε η  $f$  είναι ένα - προς - ένα.

**Ασκηση 3:** Δίνεται η συνάρτηση και  $f: X \rightarrow Y$ . Η διαδικασία που στέλνει ένα υποσύνολο  $A \subseteq X$  στην εικόνα του

$$f[A] = \{y \in Y \mid \exists x \in X \ y = f(x)\}$$

ορίζει μια συνάρτηση μεταξύ δυναμοσυνόλων

$$f[-]: P(X) \rightarrow P(Y).$$

Δείξτε ότι η  $f$  είναι επί αν και μόνο αν η  $f[-]$  είναι επί.

**Ασκηση 4:** Δείξτε ότι για κάθε  $n \geq 2$ ,

$$2^n \mid 5^{2^{n-2}} - 1$$

**Ασκηση 5:** Χρησιμοποιείστε την παρατήρηση ότι  $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$  ώστε, εξισώνοντας τους συντελεστές του  $x^n$  στα δυο μέλη της ισότητας, να δείξετε ότι

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

ΠΑΡΑΚΑΛΩ ΕΠΙΣΤΡΕΨΤΕ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΑΣ ΓΡΑΠΤΩΣ ΜΕΧΡΙ ΤΗΝ ΤΡΙΤΗ  
11/1/2011