☑ Σχόλιο. Κατασκευή των τροχιών της δισδιάστατης γραμμικής δυναμικής.

Η δισδιάστατη γραμμική δυναμική ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 \end{cases}.$$

Το σύστημα αυτό έχει διατυπωθεί στις καρτεσιανές συντεταγμένες του ευκλείδειου επιπέδου, αλλά όπως διαπιστώσαμε, υπάρχουν κατάλληλες γραμμικές συντεταγμένες όπου αποκτά απλούστερη έκφραση με δυνατότητα άμεσης επίλυσής του. Αυτές οι συντεταγμένες καθορίζονται από ιδιοδιευθύνσεις ή κατάλληλες διευθύνσεις που εμφανίζονται στο ευκλείδειο επίπεδο ανάλογα με τη φύση των ιδιοτιμών της δυναμικής και οδηγούν στις *κανονικές μορφές* του συστήματος των εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha y_1 - \omega y_2 \\ \dot{y}_2 = \omega y_1 + \alpha y_2 \end{cases}.$$

- Όταν η γραμμική δυναμική έχει δυο πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές τότε στο ευκλείδειο επίπεδο εμφανίζονται δυο ανεξάρτητες ιδιοδιευθύνσεις και έτσι συγκροτείται ένα σύστημα ιδιοαξόνων στο οποίο προκύπτει η *κανονική μορφή* των εξισώσεων:

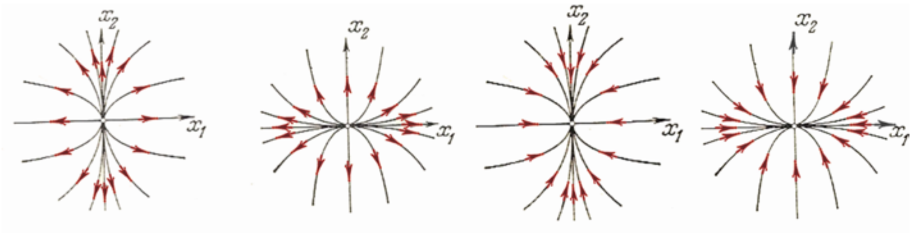
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}.$$

Για το σχεδιασμό των τροχιών είναι προτιμότερο να εργαστούμε στις συντεταγμένες του συστήματος των ιδιοαξόνων παρά στις καρτεσιανές συντεταγμένες. Πράγματι, η κανονική αυτή μορφή των εξισώσεων διατηρείται αναλλοίωτη κατά την αλλαγή:

$$y_1 \to -y_1 \quad \text{και} \quad y_2 \to -y_2 .$$

Συνεπώς, οι τροχιές οφείλουν να εμφανίζουν αξονική συμμετρία ως προς κάθε ιδιοάξονα παράλληλα προς τον άλλον. Αν κάποια από τις ιδιοτιμές είναι μηδενική τότε κάθε σημείο του αντίστοιχου ιδιοάξονα αποτελεί κατάσταση ισορροπίας και όλες οι άλλες τροχιές είναι ευθύγραμμες και εξελίσσονται κατά ζεύγη, ελκτικά ή απωστικά, εκατέρωθεν της αντίστοιχης κατάστασης ισορροπίας. Αν δεν υπάρχει μηδενική ιδιοτιμή τότε η αρχή των αξόνων αποτελεί τη μοναδική κατάσταση ισορροπίας και τέσσερις ευθύγραμμες τροχιές, που έχουν φορέα τους αντίστοιχους ημιάξονες των ιδιοδιευθύνσεων, κατευθύνονται προς αυτήν ή απομακρύνονται προς το άπειρο ανάλογα με το πρόσημο της αντίστοιχης ιδιοτιμής. Για όλες τις άλλες τροχιές, η αξονική τους συμμετρία ως προς τους ιδιοάξονες, υποδεικνύει ότι αρκεί να κατασκευαστούν στο τεταρτημόριο: $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ και εκεί διαπιστώνουμε ότι φορέας τους είναι τα γραφήματα των εκθετικών συναρτήσεων:

$$y_2 = c\, y_2^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad c > 0 .$$



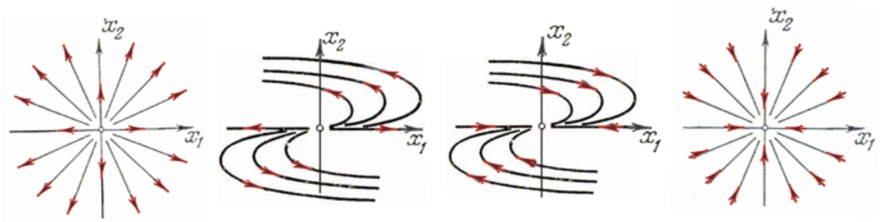
Τροχιές της γραμμικής δυναμικής στην περίπτωση απλών πραγματικών
μη μηδενικών ιδιοτιμών σε ορθοκανονικό σύστημα ιδιοαξόνων του ευκλείδειου επιπέδου.

- Όταν η γραμμική δυναμική έχει μια διπλή πραγματική ιδιοτιμή τότε, εκτός από τη μηδενική περίπτωση ή την περίπτωση ομοθεσίας, υπάρχει μόνο μια ιδιοδιεύθυνση. Έτσι, συγκροτείται ένα σύστημα αξόνων αποτελούμενο από ένα ιδιοάξονα και έναν κατάλληλα επιλεγμένο άξονα, όπως ήδη αναφέρθηκε, και σε αυτό το σύστημα γραμμικών συντεταγμένων προκύπτει η *κανονική μορφή* Jordan των εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda\, y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = (c_1 t + c_2)\, e^{\lambda t} \\ y_2(t) = c_1 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Η αρχή των αξόνων αποτελεί τη μοναδική κατάσταση ισορροπίας και δυο ευθύγραμμες τροχιές, που έχουν ως φορέα τους ημιάξονες της ιδιοδιεύθυνσης, κατευθύνονται προς αυτήν ή απομακρύνονται προς το άπειρο ανάλογα με το πρόσημο της ιδιοτιμής. Όλες οι άλλες τροχιές έχουν φορέα τα γραφήματα των συναρτήσεων:

$$y_1 = \frac{1}{\lambda}\big(ln\,|y_2| + c\big)\, y_2 \quad \text{όπου} \quad c = -\frac{1}{\lambda} ln\,|c_1| + c_2/c_1\,,\ c_1 \neq 0\,.$$



Τροχιές της γραμμικής δυναμικής στην περίπτωση διπλής ιδιοτιμής σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

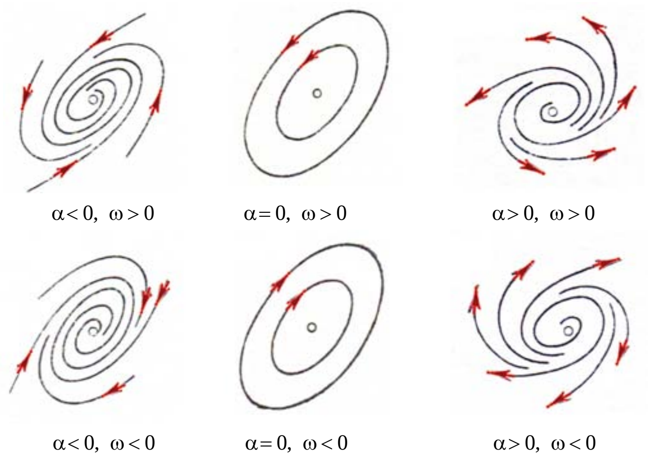
- Όταν η γραμμική δυναμική έχει μιγαδικές ιδιοτιμές:

$$\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\omega, \quad \lambda' = \alpha - \mathrm{i}\,\omega$$

τότε στο ευκλείδειο επίπεδο δεν εμφανίζονται ιδιοδιευθύνσεις αλλά, όπως αναφέρθηκε, υπάρχει σύστημα γραμμικών συντεταγμένων στο οποίο προκύπτει η *κανονική μορφή* των εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha\, y_1 - \omega y_2 \\ \dot{y}_2 = \omega y_1 + \alpha\, y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = r_o e^{\alpha t} \cos(\omega\, t + \theta_o) \\ y_2(t) = r_o e^{\alpha t} \sin(\omega\, t + \theta_o) \end{cases}$$

Η αρχή των αξόνων αποτελεί τη μοναδική κατάσταση ισορροπίας και ολόγυρά της εξελίσσονται ελλειπτικές ή σπειροειδείς τροχιές ανάλογα με το αν οι ιδιοτιμές είναι καθαρά φανταστικές ή όχι. Οι σπειροειδείς τροχιές πλησιάζουν απεριόριστα την κατάσταση ισορροπίας ή απομακρύνονται στο άπειρο ανάλογα με το αν το πραγματικό μέρος των συζυγών ιδιοτιμών είναι αρνητικό ή θετικό.



Τροχιές της γραμμικής δυναμικής στην περίπτωση μιγαδικών ιδιοτιμών στο ευκλείδειο επίπεδο.

Άσκηση 8. Σχεδιάστε τις τροχιές των δυναμικών συστημάτων που ορίζονται στο ευκλείδειο επίπεδο από τα ακόλουθα συστήματα διαφορικών εξισώσεων:

[1] $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

[2] $$\begin{cases} 2\dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

[3] $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

[4] $$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2 \end{cases}$$

Υπόδειξη.

[1] Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2$, Ιδιοδιανύσματα: $\vec{\xi}_1 = (1, -4),\ \ \vec{\xi}_2 = (1, 1)$.

Προκύπτουν γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -3y_1 \\ \dot{y}_2 = 2y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-3t} \\ y_2(t) = c_2 e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \\ x_2(t) = -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \end{cases}$$

[2] Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1/2,\ \lambda_2 = 3$, Ιδιοδιανύσματα: $\vec{\xi}_1 = (1, -2),\ \ \vec{\xi}_2 = (1, 3)$.

Προκύπτουν γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 / 2 \\ \dot{y}_2 = 3y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{t/2} \\ y_2(t) = c_2 e^{3t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{3t} \\ x_2(t) = -2c_1 e^{t/2} + 3c_2 e^{3t} \end{cases}$$

[3] Ιδιοτιμή: $\lambda = 1$, Ιδιοδιάνυσμα: $\vec{\xi} = (1, -1)$, Συμπληρωματικό διάνυσμα: $\vec{\xi}' = (-1/3,\ 0)$.
Προκύπτουν γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = (c_1 + c_2\, t)\, e^t \\ y_2(t) = c_2\, e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = 2(c_2 t + c_1 - c_2/3)\, e^t \\ x_2(t) = -2(c_2 t + c_1)\, e^t \end{cases}$$

[4] Ιδιοτιμές: $\lambda = 1 + \mathrm{i}\sqrt{5},\ \lambda' = 1 - \mathrm{i}\sqrt{5}$, Ιδιοδιανύσματα: $\vec{\zeta} = (2 + \mathrm{i}\sqrt{5}, 3),\ \vec{\zeta}' = (2 - \mathrm{i}\sqrt{5}, 3)$.
Τα διανύσματα $\vec{\xi}_1 = (2, 3),\ \vec{\xi}_2 = (-\sqrt{5}, 0)$ ορίζουν γραμμικές συντεταγμένες στις οποίες το σύστημα εκφράζεται ως εξής:

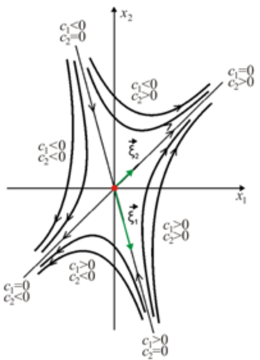
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 - \sqrt{5} y_2 \\ \dot{y}_2 = \sqrt{5} y_1 + y_2 \end{cases}$$

Από το μετασχηματισμό $y_1 = r \sin\theta,\quad y_2 = r \cos\theta$ προκύπτει:

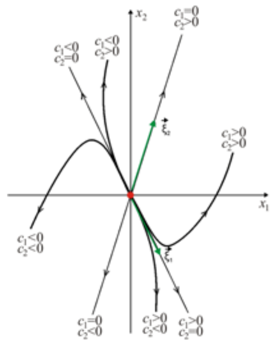
$$\begin{cases} \dot{r}(t) = r(t) \\ \dot{\theta}(t) = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = r_o\, e^t \\ \theta(t) = \sqrt{5}\, t + \theta_o \end{cases} \Rightarrow \quad r = c\, e^{\theta/\sqrt{5}}$$

άρα

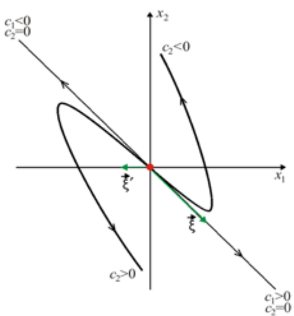
$$\begin{cases} y_1(t) = r_o\, e^t \cos(\sqrt{5}\, t + \theta_o) \\ y_2(t) = r_o\, e^t \sin(\sqrt{5}\, t + \theta_o) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = r_o\, e^t \left(2\cos(\sqrt{5}\, t + \theta_o) - \sqrt{5}\cos(\sqrt{5}\, t + \theta_o)\right) \\ x_2(t) = 2\, r_o\, e^t \sin(\sqrt{5}\, t + \theta_o) \end{cases}$$



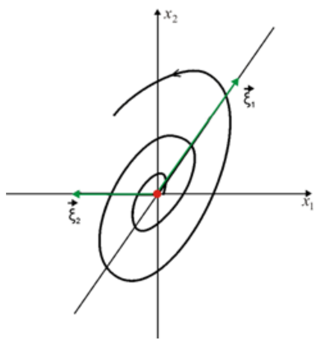
[1]



[2]



[3]

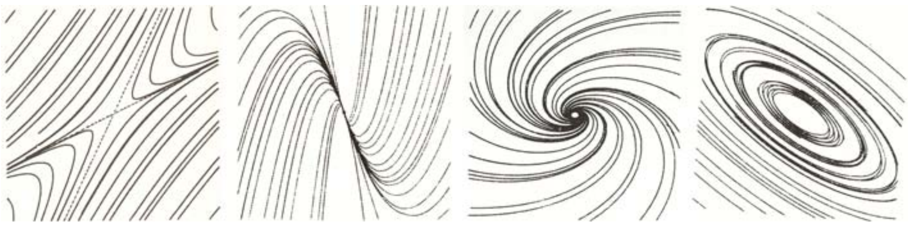


[4]

Άσκηση 9. Στο επόμενο σχήμα δίνονται οι τροχιές τριών δισδιάστατων δυναμικών συστημάτων από τα οποία μόνο ένα είναι γραμμικό. Μπορείτε να το αναγνωρίσετε;

Άσκηση 10. Σχεδιάστε τις τροχιές της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από τα ακόλουθα συστήματα γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$



Άσκηση 11. Οι γραμμικές δυναμικές στο ευκλείδειο επίπεδο με ίδιες ιδιοτιμές ορίζουν ίδιες τροχιές; Τεκμηριώστε την απάντησή σας.

Άσκηση 12. Εντοπίστε τη διαφορά των τροχιών των δυναμικών συστημάτων που ορίζονται στο ευκλείδειο επίπεδο από τα συστήματα των γραμμικών εξισώσεων:

$$[\mathrm{I}] \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 \end{cases} \qquad [\mathrm{II}] \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

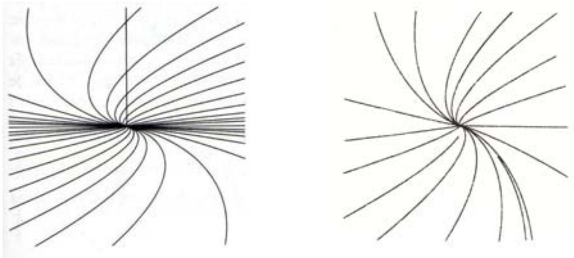
Άσκηση 13. Σχεδιάστε τις τροχιές της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων και εντοπίστε τις διαφορές τους:

$$[\mathrm{I}] \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ 9\dot{x}_2 = -8x_1 + 18x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ 9\dot{x}_2 = -10x_1 + 18x_2 \end{cases}$$

$$[\mathrm{II}] \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 10\dot{x}_1 = 10x_1 + 9x_2 \\ 10\dot{x}_2 = 9x_1 + 10x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 10\dot{x}_1 = 10x_1 + 11x_2 \\ 10\dot{x}_2 = 11x_1 + 10x_2 \end{cases}$$

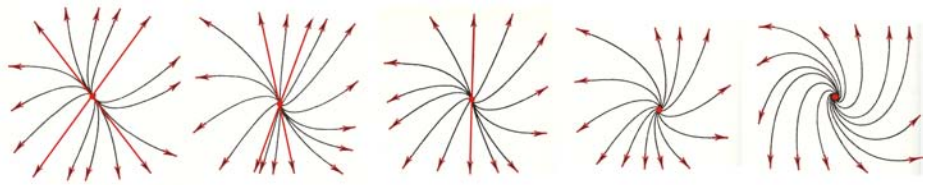
Άσκηση 14. Σχεδιάστε τις τροχιές της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από την κανονική μορφή Jordan του γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων με διπλή πραγματική ιδιοτιμή: (I) $\lambda = 1/10$, (II) $\lambda = -1/10$, και εντοπίστε τις διαφορές με την περίπτωση: $\lambda = 0$.

Άσκηση 15. Στο επόμενο σχήμα δίνονται σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του ευκλείδειου επιπέδου οι τροχιές δυο άγνωστων γραμμικών δυναμικών συστημάτων. Μπορείτε να αναγνωρίσετε τη φύση των ιδιοτιμών τους; Είναι εφικτός ο προσδιορισμός τους; Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου στα οποία η εφαπτομένη των τροχιών είναι κάθετη στην εμφανιζόμενη ιδιοδιεύθυνση;



Άσκηση 16. Σχεδιάστε τις τροχιές της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από το ακόλουθο σύστημα γραμμικών εξισώσεων για διάφορες τιμές της παραμέτρου ρ και παρατηρείστε τη συνεχή παραμόρφωσή τους που οδηγεί από *κόμβο* σε *εστία*:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + \rho x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + (2 + \rho/2)x_2 \end{cases} \qquad \rho \in \mathbb{R}.$$



$\rho = 0.5$ $\quad$ $\rho = 0.1$ $\quad$ $\rho = 0$ $\quad$ $\rho = -0.5$ $\quad$ $\rho = -2$

Άσκηση 17. Επιλέξτε (*i*) γραμμικούς ισομορφισμούς, (*ii*) αμφιδιαφορομορφισμούς, (*iii*) ομοιομορφισμούς του ευκλείδειου επιπέδου και αφήστε τους να δράσουν στην εξελικτική ροή της γραμμικής δυναμικής:

$$\mathfrak{g}^t(x_o) = x_o(e^t, e^t), \quad \forall x_o \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R},$$

ως εξής:

$$h^{-1} \circ \mathfrak{g}^t \circ h(x_o), \quad \forall x_o \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ποιο είναι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που ορίζει τη δυναμική της εξελικτικής ροής η οποία προκύπτει από αυτούς τους μετασχηματισμούς;

☑ Προβληματισμός: Τοπολογική ταξινόμηση των ροών της γραμμικής δυναμικής.

Θεωρούμε δυο γραμμικά δυναμικά συστήματα που η εξέλιξή τους στο ευκλείδειο επίπεδο διέπεται αντίστοιχα από τις γραμμικές εξισώσεις:

$$\dot{\mathrm{X}}(t) = \mathrm{A}_i \mathrm{X}(t) \,, \quad i = 1,2 \,,$$

με αντίστοιχες μονοπαραμετρικές ομάδες:

$$\left\{ \mathfrak{g}_i^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad i = 1,2 \,.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της τοπολογικής ισοδυναμίας, οι δυναμικές που ορίζονται από δυο δυναμικά συστήματα είναι τοπολογικά ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει ομοιομορφισμός:

$$h : \mathbb{R}^2 \rightleftarrows \mathbb{R}^2$$

τέτοιος ώστε:

$$h \circ \mathfrak{g}_1^t(x_o) = \mathfrak{g}_2^t \circ h(x_o) \,, \quad \forall x_o \in \mathbb{R}^2 \,, \ \forall t \in \mathbb{R} \,.$$

Αν ο ομοιομορφισμός που αποκαθιστά την τοπολογική ισοδυναμία είναι γραμμικός ή αμφιδιαφορομορφικός τότε αντίστοιχα λέμε ότι οι δυναμικές είναι γραμμικά ή διαφορικά ισοδύναμες. Καταρχάς, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε το εξής:

Θεώρημα. Δυο γραμμικές δυναμικές είναι διαφορικά ισοδύναμες αν και μόνο αν είναι γραμμικά ισοδύναμες.*

Θεώρημα. Δυο γραμμικές δυναμικές με πραγματικές διακριτές ιδιοτιμές είναι γραμμικά ισοδύναμες αν και μόνο αν έχουν ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Κάθε γραμμική δυναμική με απλές πραγματικές ιδιοτιμές αποσυντίθενται σε μονοδιάστατες γραμμικές δυναμικές. Συνεπώς, οι γραμμικές δυναμικές που έχουν ίδιες διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές δε μπορούν παρά να αποσυντεθούν στις ίδιες μονοδιάστατες γραμμικές δυναμικές. Αντίστροφα, αν οι δυο γραμμικές δυναμικές είναι γραμμικά ισοδύναμες τότε οι τελεστές τους ταυτίζονται με αλλαγή βάσης άρα έχουν ίδιες ιδιοτιμές απλές ή όχι.

Παράδειγμα γραμμικά ισοδύναμων εξελικτικών ροών της γραμμικής δυναμικής στο ευκλείδειο επίπεδο. (Άραγε, ποιοι είναι οι ισομορφισμοί ταύτισης των εξελικτικών ροών του παραδείγματος;)

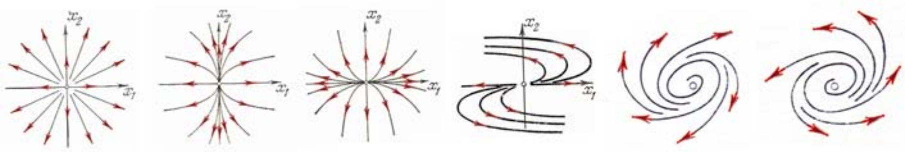
---

* Το θεώρημα δεν. υπονοεί ότι κάθε αμφιδιαφορομορφισμός που αποκαθιστά τη διαφορική ισοδυναμία των εξελικτικών ροών της γραμμικής δυναμικής είναι οπωσδήποτε γραμμικός ισομορφισμός. Όμως, θεωρώντας το διαφορικό ενός τέτοιου αμφιδιαφορομορφισμού θα μπορούσατε να αντιληφθείτε το σκεπτικό της απόδειξης. Πρόκειται για αποτέλεσμα που ισχύει και για την πολυδιάστατη γραμμική δυναμική.

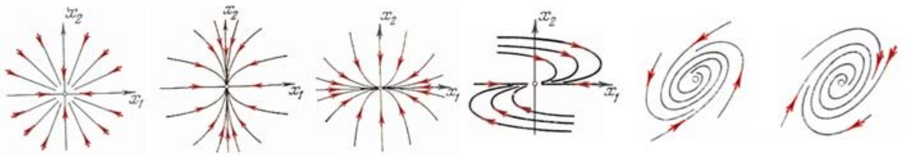
Θεώρημα: Κριτήρια τοπολογικής ταξινόμησης της γραμμικής δυναμικής.[*]

1.Οι γραμμικές δυναμικές των οποίων οι ιδιοτιμές έχουν θετικό πραγματικό μέρος είναι τοπολογικά ισοδύναμες με τη γραμμική δυναμική $\dot{x} = x$, $x \in \mathbb{R}^2$.

2.Οι γραμμικές δυναμικές των οποίων οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος είναι τοπολογικά ισοδύναμες με τη γραμμική δυναμική $\dot{x} = -x$, $x \in \mathbb{R}^2$.



Τοπολογικά ισοδύναμες γραμμικές δυναμικές στο ευκλείδειο επίπεδο.
(Ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος)



Τοπολογικά ισοδύναμες γραμμικές δυναμικές στο ευκλείδειο επίπεδο.
(Ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος)

Άσκηση 18. Αποφανθείτε για τη γραμμική και τοπολογική ισοδυναμία των εξελικτικών ροών της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων και σχεδιάστε τις τροχιές τους στο ευκλείδειο επίπεδο:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

Άσκηση 19. Αποφανθείτε για τη γραμμική και τοπολογική ισοδυναμία των εξελικτικών ροών της δυναμικής που ορίζεται από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων και σχεδιάστε τις τροχιές τους στο ευκλείδειο επίπεδο:

[1] $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ 2\dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

[2] $$\begin{cases} 2\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ 2\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ 4\dot{x}_2 = x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

[3] $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 \\ 2\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

[*] Το κριτήριο αυτό ισχύει στους πολυδιάστατους ευκλείδειους χώρους και έχει γενικότερη διατύπωση. Η κατασκευή του ομοιομορφισμού που αποκαθιστά την τοπολογική ισοδυναμία βασίζεται στη χρήση της *συνάρτησης Liapounov* που διδάσκεται σε επόμενο επίπεδο του μαθήματος των Δυναμικών Συστημάτων.

Άσκηση 20. Διαπιστώστε ότι τα ακόλουθα γραμμικά συστήματα εξισώσεων παρότι έχουν ίδιες ιδιοτιμές δεν ορίζουν γραμμικά ισοδύναμες δυναμικές και εξετάστε το ενδεχόμενο τοπολογικής ισοδυναμίας τους:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

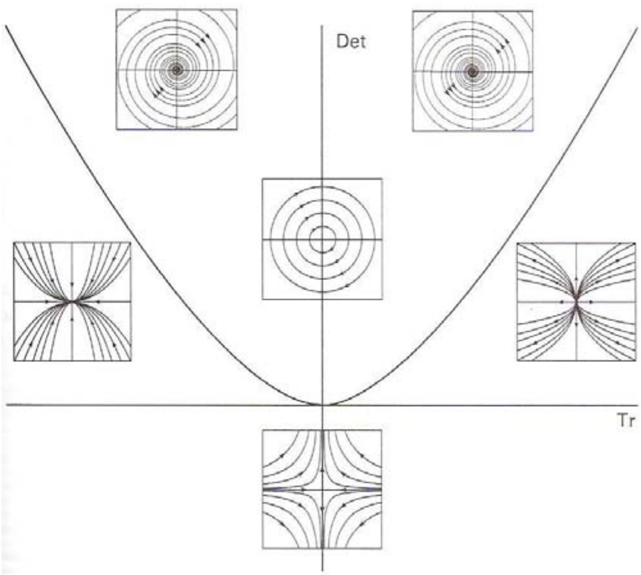
Άσκηση 21. Προσδιορίστε τις τιμές της παραμέτρου α στις οποίες η εξελικτική ροή του καθενός από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων αλλάζει τοπολογικό τύπο:

$$[\mathrm{I}] \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = \alpha\, x_2 \end{cases} \qquad [\mathrm{II}] \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha\, x_1 \end{cases}.$$

Άσκηση 22. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων a και b, αποφανθείτε για τη γραμμική και τοπολογική ισοδυναμία των αντίστοιχων εξελικτικών ροών της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

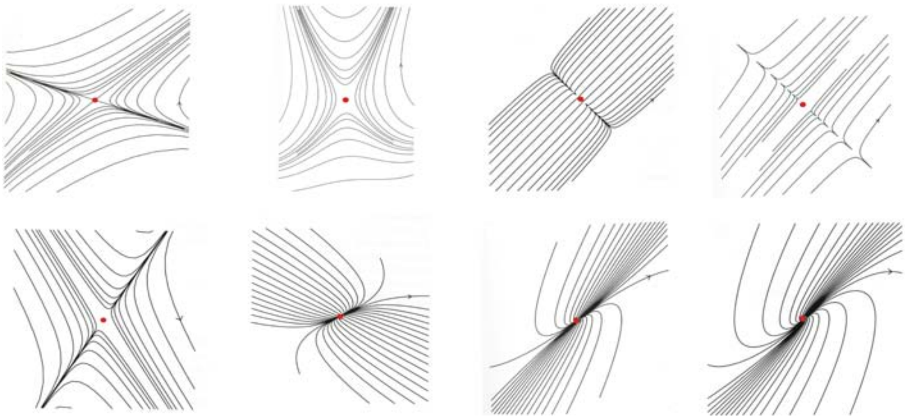
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a x_1 + b x_2 \end{cases}$$

Άσκηση 23. Ποιες είναι οι κλάσεις τοπολογικής ισοδυναμίας των εξελικτικών ροών των γραμμικών συστημάτων των οποίων οι τροχιές παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα. Τι θα λέγατε για τον διαμερισμό τους σε κλάσεις γραμμικής ισοδυναμίας; Θα μπορούσατε, σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις να προσδιορίστε την αριθμητική έκφραση του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων;

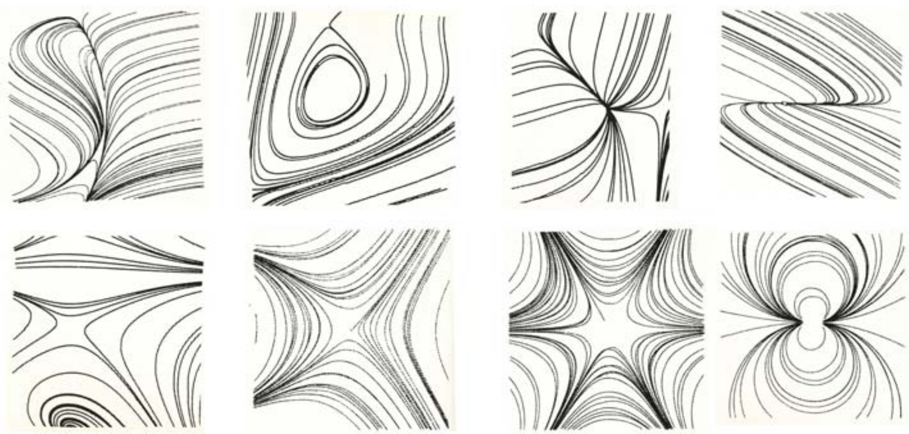


Άσκηση 24. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων a και b, αποφανθείτε για τη γραμμική και τοπολογική ισοδυναμία, ή μη, της δυναμικής που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο από την εξίσωση $\ddot{x}=a\dot{x}+bx$ με εκείνη που ορίζεται από την εξίσωση $\ddot{x}=x$ ή την εξίσωση $\ddot{x}=-x$.[*]

Άσκηση 25. Αποδεχόμενοι ότι οι τροχιές που παρατίθενται στα ακόλουθα σχήματα διανύονται με ταχύτητες αρκετά ομαλές χωρίς απότομες μεταβολές κατά την εξέλιξη, μπορείτε να τις συμπληρώσετε και να εντοπίσετε αυτές που διέπονται από γραμμική δυναμική;



Άσκηση 26. Θα μπορούσατε να αποφανθείτε για το αν οι τροχιές που εμφανίζονται στα ακόλουθα σχήματα διέπονται από γραμμική δυναμική;



[*] Σε αυτό το σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης ανάγεται κάθε γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές:

$$\ddot{x}=ax+b\dot{x}\ .$$