ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μεταπτυχιακό Μάθημα:

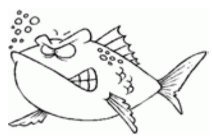
Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Καθηγητές: Α. Μπούντης - Σ. Πνευματικός

Ακαδημαϊκό έτος 2011-12

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΩΝ LOTKA-VOLTERRA ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΔΥΟ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ



Ο *Alfred Lotka* το 1910 και ο *Vito Volterra* το 1920 διαμόρφωσαν το μαθηματικό πρότυπο της πληθυσμιακής εξέλιξης δυο αλληλεπιδρώντων πληθυσμών, *θηραμάτων* και *θηρευτών*, που συνυπάρχουν στο ίδιο περιβάλλον. Κάθε χρονική στιγμή το πλήθος θηραμάτων και θηρευτών δηλώνεται αντίστοιχα με τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $x(t)$ και $y(t)$, οπότε η στιγμιαία πληθυσμιακή κατάσταση τους αναπαρίσταται με ένα σημείο στο χώρο των καταστάσεων:

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0,\, y \geq 0 \right\}.$$

Το μαθηματικό αυτό πρότυπο εκφράζεται με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων στο οποίο υπεισέρχονται παράμετροι με θετικές τιμές που καθορίζονται από τα χαρακτηριστικά των πληθυσμών:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases}$$

όπου

$$P(x,y) = x\left(a - bx - cy\right), \quad Q(x,y) = y\left(d - ex - f\,y\right).$$

Αν την αρχική στιγμή της παρατήρησης το πλήθος των θηραμάτων και των θηρευτών είναι αντίστοιχα $x(0) = x_o$ και $y(0) = y_o$, η λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων ορίζεται σε όλο το χρονικό άξονα και υποδεικνύει μονοσήμαντα τη μελλοντική και παρελθούσα πληθυσμιακή εξέλιξή τους:

$$\phi_{(x_o,y_o)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \phi_{(x_o,y_o)}(0) = (x_o, y_o).$$

Το σύστημα εκφράζεται γεωμετρικά με ένα διανυσματικό πεδίο στο χώρο των καταστάσεων:

$$\mathcal{X}(x,y) = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Τα σημεία μηδενισμού του διανυσματικού πεδίου ορίζουν τις καταστάσεις ισορροπίας του συστήματος θηραμάτων-θηρευτών, δηλαδή τα σταθερά σημεία της εξελικτικής ροής που ορίζεται ως εξής:

$$g^t : M \to M, \quad g^t(x_o, y_o) = \phi_{(x_o,y_o)}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

ΘΕΜΑ Ι

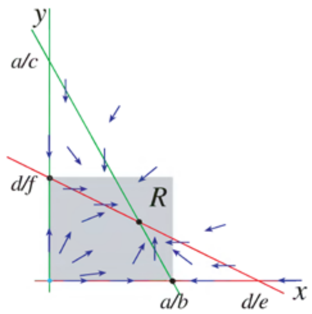
Στο χώρο των καταστάσεων του συστήματος θηράματα-θηρευτές θεωρούμε τα σύνολα:

$$N_x = \{(x,y) \in M \,/\, P(x,y) = 0\}\,, \quad N_y = \{(x,y) \in M \,/\, Q(x,y) = 0\}\,, \quad S = N_x \cap N_y\,.$$

1. Εντοπίστε στο ακόλουθο σχήμα αυτά τα σύνολα και δώστε τις εξισώσεις τους. Πώς συμπεριφέρεται το διανυσματικό πεδίο *Lotka-Volterra* στα σημεία αυτών των συνόλων; Ποιές είναι οι συντεταγμένες των σημείων ισορροπίας; Μπορείτε να προσδιορίσετε τη φύση τους παρατηρώντας τη συμπεριφορά του διανυσματικού πεδίου *Lotka-Volterra*; Εξετάστε την περίπτωση: $a = 2,\ b = 4,\ c = d = e = f = 1$.

2. Αποδείξτε ότι η εξελικτική ροή του συστήματος *Lotka-Volterra* διατηρεί αναλλοίωτο το σκιασμένο κλειστό χωρίο R που σχηματίζεται στο χώρο των καταστάσεων. Συγκεκριμένα, αποδείξτε ότι οι τροχιές με αρχική συνθήκη σε αυτό το χωρίο δεν μπορούν να εξέλθουν στο εξωτερικό του. Διαπιστώστε ότι τροχιές με αρχικές συνθήκες στο εξωτερικό αυτού του χωρίου έχουν τη δυνατότητα διείσδυσης στο εσωτερικό του.

3. Γραμμικοποιείστε τις εξισώσεις *Lotka-Volterra* στις καταστάσεις ισορροπίας τους και προσδιορίστε τη φύση των καταστάσεων ισορροπίας των γραμμικοποιημένων συστημάτων, δηλαδή την ευστάθεια, ασυμπτωτική ευστάθεια ή αστάθειά τους. Επίσης, σχεδιάστε συνοπτικά την ποιοτική συμπεριφορά των τροχιών των γραμμικοποιημένων συστημάτων στην περιοχή των καταστάσεων ισορροπίας. Το θεώρημα *Hartman-Grobman* έχει τη δυνατότητα να υποδείξει τη φύση των καταστάσεων ισορροπίας των μη γραμμικών εξισώσεων *Lotka-Volterra*; Αν ναι, δώστε τα συμπεράσματά σας.



ΘΕΜΑ ΙΙ

Θα ασχοληθούμε πλέον με την απλουστευμένη εκδοχή των εξισώσεων *Lotka-Volterra* στις οποίες υπεισέρχονται παράμετροι με θετικές τιμές που καθορίζονται από τα χαρακτηριστικά των πληθυσμών:

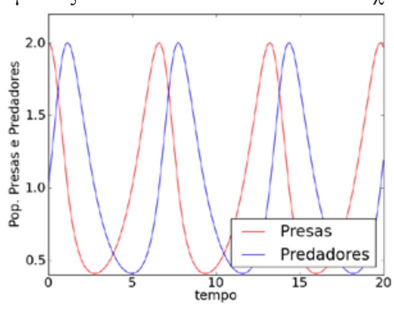
$$P(x,y) = x(\alpha - \beta y)\,, \quad Q(x,y) = -y(\gamma - \delta x)\,.$$

1. Σχεδιάστε τα γραφήματα του προηγούμενου σχήματος στην περίπτωση αυτής της απλουστευμένης εκδοχής και εξετάστε διαδοχικά όλα τα προηγούμενα ερωτήματα.

2. Εξετάστε αν είναι αλήθεια ότι στην απλουστευμένη εκδοχή των εξισώσεων *Lotka-Volterra* οι τροχιές τους εξελίσσονται περιοδικά επάνω στις καμπύλες που ορίζονται στο ευκλείδειο επίπεδο ως εξής:

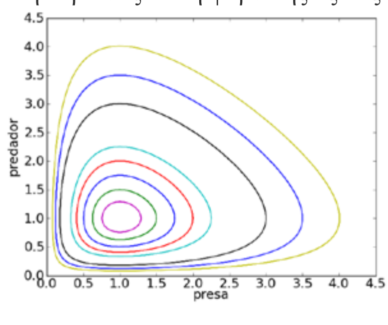
$$\alpha \ln y - \beta y + \gamma \ln x - \delta x = C\,, \quad x > 0,\ y > 0\,, \quad C \in \mathbb{R}^+\,.$$

3. Η χρονική πληθυσμιακή εξέλιξη ενός συστήματα θηρευτών-θηραμάτων αποτυπώθηκε για δεδομένες αρχικές συνθήκες στα γραφήματα του Σχ. 1. Ποια είναι η αντίστοιχη τροχιά στο χώρο των καταστάσεων μεταξύ αυτών που δίνονται στο Σχ. 2 και ποια είναι η περίοδος και η φορά της εξέλιξής της;



Σχήμα 1

$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$



Σχήμα 2

4. Εξετάστε αν οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν το εύρος και την συχνότητα της ταλαντωτικής περιοδικής πληθυσμιακής εξέλιξης και τη μέση περιοδική πληθυσμιακή πυκνότητα:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = ; \qquad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = ; \; .$$

ΘΕΜΑ III

Θεωρούμε τη συνάρτηση που ορίζεται στο χώρο των καταστάσεων ως εξής:

$$F(x,y) = g_1(x) + g_2(y)$$

όπου

$$g_1(y) = \alpha \ln y - \beta y \quad \text{και} \quad g_2(x) = \gamma \ln x - \delta x .$$

1. Εξετάστε αν τα ακόλουθα υποσύνολα του ευκλείδειου επιπέδου είναι κλειστά και φραγμένα:

$$\Sigma_c = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0,\, y > 0,\, F(x,y) \geq c \right\},\; c \in \mathbb{R}^+ .$$

Εξετάστε αν πρόκειται για κυρτά σύνολα δηλαδή, αν δυο σημεία $a = (x_1, y_1)$ και $b = (x_2, y_2)$ ανήκουν σε ένα τέτοιο σύνολο τότε στο ίδιο σύνολο ανήκουν όλα τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος:

$$(1-\lambda)a + \lambda b,\;\; 0 \leq \lambda \leq 1 .$$

2. Εξετάστε αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$c \leq c' \quad \Rightarrow \quad \Sigma_c \supseteq \Sigma_{c'}$$

και αποδείξτε ότι όλα τα προηγούμενα υποσύνολα έχουν ένα κοινό σημείο:

$$s \in \bigcap_{c>0} \Sigma_c \; .$$

3. Διαπιστώστε ότι στο κοινό αυτό σημείο η συνάρτηση $F(x,y)$ αποκτά ακρότατη τιμή και αποφανθείτε αν είναι ελάχιστη ή μέγιστη. Τι σχέση έχει αυτή η ακρότατη τιμή με την τιμή:

$$\max_{x,y>0} \frac{y^\alpha x^\gamma}{e^{\beta y + \delta x}} = \left(\alpha / \beta e\right)^\alpha \left(\gamma / \delta e\right)^\gamma = K_o \; .$$

4. Διαπιστώστε ότι οι τροχιές των εξισώσεων *Lotka-Volterra* εξελίσσονται περιοδικά επάνω στις καμπύλες που ορίζονται στο πρώτο τεταρτημόριο του ευκλείδειου επιπέδου ως εξής:

$$y^\alpha e^{-\beta y} x^\gamma e^{-\delta x} = K \;,\quad K \in \mathbb{R}^+ .$$

Αποδείξτε ότι η μη μηδενική κατάσταση ισορροπίας των εξισώσεων *Lotka-Volterra* αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή $K = K_o$ και ότι είναι ευσταθής αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθής.

ΘΕΜΑ IV

Θεωρούμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων στο οποίο υπεισέρχονται δυο θετικές παράμετροι:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\mu_1 x(1-y) \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = \;\; \mu_2 y(1-x) \end{cases}$$

1. Διαπιστώστε ότι το σύστημα αυτό προκύπτει με μια αλλαγή συντεταγμένων από το σύστημα των εξισώσεων *Lotka-Volterra* και εντοπίστε τις νέες συντεταγμένες των καταστάσεων ισορροπίας.

2. Απαλείφοντας το χρόνο προσδιορίστε την υποψήφια συνάρτηση *Lyapunov* και εξετάζοντας τη συμπεριφορά της κατά μήκος των τροχιών στην περιοχή της μη μηδενικής κατάστασης ισορροπίας αποφανθείτε για τη φύση αυτής της ισορροπίας.

3. Υπολογίζοντας το ανάπτυγμα *Taylor* της συνάρτησης *Lyapunov* στην περιοχή αυτής της κατάστασης ισορροπίας, έως την κατάλληλη τάξη, αποδείξτε την περιοδικότητα των τροχιών σε αυτή την περιοχή, επιβεβαιώνοντας την τοπολογική φύση της κατάστασης ισορροπίας.

4. Εξετάστε την επίδραση που θα έχει στην εξέλιξη των δυο πληθυσμών μια ασθενής εξωτερική διαταραχή η οποία υπεισέρχεται στις εξισώσεις *Lotka-Volterra* ως εξής:

$$P(x,y) = (\alpha-\varepsilon)x - \beta xy\,, \quad Q(x,y) = -(\delta+\varepsilon)y + \gamma xy\,.$$

ΘΕΜΑ V

Θα εξετάσουμε μια άλλη εκδοχή πληθυσμιακής εξέλιξης που εκφράζεται με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων στο οποίο υπεισέρχονται δυο θετικές παράμετροι:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \kappa_1 x(1-y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \kappa_2 (x-y) \end{cases}$$

1. Γραμμικοποιείστε στη μη μηδενική κατάσταση ισορροπίας αυτό το σύστημα και προσδιορίστε τη φύση της ισορροπίας του γραμμικοποιημένου συστήματος.

2. Μεταφέροντας την αρχή των αξόνων στη μη μηδενική κατάσταση ισορροπίας, δώστε τη νέα έκφραση των εξισώσεων και, στις νέες συντεταγμένες, εξετάστε αν η ακόλουθη συνάρτηση είναι καλή υποψήφια για την εφαρμογή του θεωρήματος *Lyapunov*:

$$V(x',y') = x' - ln(1+x') + (\kappa_1/2\kappa_2)y'^2\,.$$

3. Θα διαπιστώστε ότι το θεώρημα του *Lyapunov* δεν είναι απευθείας εφαρμόσιμο γιατί η συνάρτηση αυτή είναι χρονικά γνησίως φθίνουσα κατά μήκος των τροχιών στην περιοχή της κατάστασης ισορροπίας εκτός από τα σημεία του συνόλου:

$$\Sigma = \left\{ (x',y') \in \mathbb{R}^2 \,/\, x' > -1,\ y' = 0 \right\}.$$

Αναζητείστε στις σημειώσεις σας και στη βιβλιογραφία το θεώρημα *LaSalle*. Δώστε την εκφώνησή του και εξηγείστε γιατί και πώς θα το χρησιμοποιήσετε για να συμπεράνετε την ελκτική συμπεριφορά και την ακριβή φύση της μη μηδενικής κατάστασης ισορροπίας.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΟΥ EDWARD LORENZ

Ο *Edward Lorenz*, το 1963, μελετώντας μετεωρολογικά φαινόμενα, διαπίστωσε ότι ένα σύστημα με τρεις μεταβλητές είναι δυνατό να εμφανίσει χαοτική συμπεριφορά. Παρουσίασε τα συμπεράσματά του στο άρθρο *Deterministic Nonperiodic Flows*, όπου γίνεται για πρώτη φορά αντιληπτό ότι η πολυπλοκότητα μπορεί να είναι ενδογενές χαρακτηριστικό των συστημάτων και όχι κατ’ ανάγκη αποτέλεσμα της επίδρασης ενός μεγάλου πλήθους εξωτερικών παραγόντων. Ένα τυπικά απλό σύστημα μπορεί λοιπόν να εμπεριέχει εξαιρετικά πολύπλοκη δυναμική. Το μαθηματικό του πρότυπο εκφράζεται με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων στο οποίο υπεισέρχονται 3 θετικές παράμετροι με θετικές τιμές:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y-x) \\ \dfrac{dy}{dt} = \rho x - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = -\beta z + xy \end{cases} \tag{1}$$

1. Δείξτε ότι η φύση της ισορροπίας στην αρχή των συντεταγμένων αυτού του μη γραμμικού συστήματος προσδιορίζεται από την μελέτη της γραμμικοποιημένης δυναμικής που εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2}$$

Συγκεκριμένα, εξετάστε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$(\lambda+\beta)[\lambda^2+(\sigma+1)\lambda+\sigma(1-\rho)]=0 \tag{3}$$

και προσδιορίσετε τους ευσταθείς, ασταθείς και κεντρικούς υπόχωρους στην αρχή των συντεταγμένων στο χώρο των καταστάσεων, δείχνοντας ότι το σημείο αυτό είναι ασυμπτωτικώς ευσταθές όταν $\rho<1$ και ασταθές όταν $\rho>1$. Τι πιστεύετε ότι συμβαίνει όταν $\rho=1$;

2. Μπορείτε να συμπεράνετε, ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων, τη φύση της μη γραμμικής δυναμικής γύρω από την αρχή των συντεταγμένων χρησιμοποιώντας το θεώρημα *Hartman-Grobman*; Γιατί; Απαντήστε το ίδιο ερώτημα χρησιμοποιώντας το θεώρημα του *Lyapunov* και για το σκοπό αυτό ίσως σας φανεί χρήσιμη η συνάρτηση:

$$V(x,y,z)=\frac{x^2}{2\sigma}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}.$$

Εύκολα θα συμπεράνετε ότι η επιλογή $\rho<1$, $\beta>0$ εξασφαλίζει την ασυμπτωτική ευστάθεια.

3. Δείξτε ότι το μοντέλο του *Lorenz* που περιγράφουν οι εξισώσεις (1) έχει άλλα δύο σημεία ισορροπίας που διακλαδίζονται από το (0,0,0) για $\rho > 1$ και τα οποία ονομάζουμε P_1 και P_2. Προσδιορίστε τα σημεία P_1 και P_2 και γραμμικοποιείστε τις (1) γύρω από αυτά, παράγοντας ένα σύστημα αντίστοιχο του (2). Ακολούθως βρείτε την χαρακτηριστική εξίσωση για τις ιδιοτιμές του κατάλληλου 3x3 πίνακα,

$$f(\lambda)=0, \tag{4}$$

παρόμοια με την (3), η οποία όμως δεν είναι εύκολο να παραγοντοποιηθεί και να λυθεί αναλυτικά όπως η (3).

4. Παρόλα αυτά, σχεδιάζοντας το γράφημα της $\mu = f(\lambda)$, ως προς λ, είναι δυνατόν να μελετήσουμε τις ρίζες της (4) και να αποφανθούμε για την ευστάθεια των σημείων P_1 και P_2 για ρ λίγο μεγαλύτερο του 1 ως εξής: Θέσατε σ= 6 και β = 3 και δείξτε ότι η (4) γίνεται

$$f(\lambda)=\lambda^3+10\lambda^2+3\lambda(\rho+6)+36(\rho-1)=0 \tag{5}$$

Σχεδιάστε το γράφημα της $\mu = f(\lambda)$ και δείξτε ότι εκτός από την ρίζα $\lambda_1 = 0$ έχει άλλες δύο ρίζες πραγματικές και αρνητικές. Επιχειρηματολογήστε τώρα βάσει του γραφήματος αυτού γιατί περιμένετε ότι και για ρ λίγο μεγαλύτερο του 1 τα δύο μη τετριμμένα σημεία ισορροπίας P_1 και P_2 θα είναι ασυμπτωτικώς ευσταθή.