ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2013-14

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΜΑΘΗΜΑ 1:

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Ανασκόπηση κύριων σημείων της διδασκαλίας

Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων ενός συνόλου *E* σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο *E'*:

$$\mathfrak{F}(E,E') = \left\{ f : E \to E' \right\}.$$

Το σύνολο αυτό εφοδιασμένο με την πράξη της πρόσθεσης συναρτήσεων και του πολλαπλασιασμού τους με πραγματικούς αριθμούς είναι ένας απειροδιάστατος διανυσματικός χώρος.

Ερώτημα 1. Ποιος είναι ο λόγος που επιτρέπει να οριστούν αυτές οι δυο πράξεις στο σύνολο $\mathfrak{F}(E,E')$;

Ερώτημα 2. Ποιος είναι ο λόγος που επιτρέπει να οριστούν βάσεις στο διανυσματικό χώρο $\mathfrak{F}(E,E')$;

- Εφοδιάζουμε το σύνολο *E* και τον διανυσματικό χώρο *E'* με αντίστοιχες μετρικές και θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{C}(E,E') = \left\{ f \in \mathfrak{F}(E,E') \, / \, f \; \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma \right\}.$$

Ερώτημα 3. Ποιος είναι ο λόγος που το σύνολο $\mathcal{C}(E,E')$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathfrak{F}(E,E')$;

Ερώτημα 4. Εξετάστε αν στο διανυσματικό χώρο $\mathcal{C}(E,E')$ ορίζεται στάθμη θέτοντας:

$$\| f \| = \sup_{x \in E} \| f(x) \|_{E'}.$$

- Υποθέτουμε πλέον ότι ο μετρικός χώρος *E* είναι συμπαγής.

Ερώτημα 5. Διαπιστώστε ότι η απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα τώρα είναι καταφατική.

Ερώτημα 6. Τι εννοούμε όταν πλέον αναφερόμαστε στον τοπολογικό διανυσματικό χώρο $\mathcal{C}(E,E')$;

Ερώτημα 7. Ποιος είναι ο λόγος της μη συμπάγειας του τοπολογικού διανυσματικού χώρου $\mathcal{C}(E,E')$;

Ερώτημα 8. Σε ποια περίπτωση είναι τοπικά συμπαγής ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος $\mathcal{C}(E,E')$;

Ερώτημα 9. Πότε δεν είναι συμπαγές το ακόλουθο υποσύνολο του τοπολογικού χώρου $\mathcal{C}(E,E')$:

$$\bar{\mathfrak{B}}_o = \left\{ f \in \mathcal{C}(E,E') \, / \, \| f \| \le 1 \right\};$$

(Τι λέει το θεώρημα Riesz;)

❖ **Εφαρμογή.** Τα προηγούμενα ζητήματα θα αποσαφηνιστούν στη σκέψη σας αν εξετάσετε ένα παράδειγμα:

$$E = [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad E' = \mathbb{R},$$

$$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ συνεχης} \right\}.$$

➢ Σας προτείνουμε να εξετάσετε ξεχωριστά κάθε μια από τις ακόλουθες δυο περιπτώσεις στάθμης:

$$\text{(i)} \quad \| f \| = \sup_{x\in[a,b]} | f(x) |, \qquad \text{(ii)} \quad \| f \| = \frac{1}{b-a} \int_a^b | f(x) |\, dx .$$

Κάθε μια από αυτές τις στάθμες ορίζει διαφορετική τοπολογία στο συναρτησιακό χώρο $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

(Οι στάθμες αυτές καλούνται αντίστοιχα <u>ομοιόμορφη</u> και <u>μέση</u> στάθμη του συναρτησιακού χώρου $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$)

Ερώτημα 10. Η τοπολογία της ομοιόμορφης στάθμης είναι <u>ισχυρότερη</u> από εκείνη της μέσης στάθμης;

Ερώτημα 11. Πώς ερμηνεύετε την προηγούμενη απάντησή σας ως προς τη σύγκλιση των ακολουθιών;

Ερώτημα 12. Πώς σχετίζεται η σημειακή σύγκλιση με την ομοιόμορφη και τη μέση σύγκλιση;

➢ Θεωρούμε το σύνολο των πολυωνυμικών συναρτήσεων:

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}([a,b]) = \left\{ P(x) = a_o + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \,/\, a_i \in \mathbb{R}, i = 0,1,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N}, x \in [a,b] \right\} \subset \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}).$$

Ερώτημα 13. Διαπιστώστε ότι το σύνολο αυτό αποκτά δομή διανυσματικού υπόχωρου του $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Ερώτημα 14. Διαπιστώστε ότι επιπλέον το σύνολο αυτό αποκτά δομή δακτυλίου και δομή άλγεβρας.

➢ Ο *Karl Weierstrass*, το 1885, έδωσε το *θεώρημα πολυωνυμικής προσέγγισης* που δηλώνει ότι:

$$\text{Αν } f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \text{ τότε:} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}([a,b]) : | f(x) - P(x) | < \varepsilon,\ \forall x \in [a,b].$$

- Διαπιστώστε ότι η διατύπωση αυτή σημαίνει την ύπαρξη μιας ακολουθίας $P_n \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$, που συγκλίνει <u>ομοιόμορφα</u> στη δεδομένη συνάρτηση $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

- Διαπιστώστε ότι αυτό σημαίνει ότι η άλγεβρα των πολυωνυμικών συναρτήσεων $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}([a,b])$ είναι <u>πυκνό</u> υποσύνολο ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης στάθμης μέσα στο χώρο $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Ερώτημα 15. Διαπιστώστε την αλήθεια αυτού του θεωρήματος στις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\text{(i)} \quad f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0,1], \qquad \text{(ii)} \quad f(x) = |x|,\ x \in [-1,1].$$

(Τι λέει το θεώρημα Dini;)

➢ Ο *Sergei Bernstein*, το 1914, έδωσε μια συγκεκριμένη πολυωνυμική ακολουθία, των πολυωνύμων *Bernstein* που υπεισέρχονται στη Θεωρία Πιθανοτήτων, η οποία ανταποκρίνεται στο θεώρημα του *Weierstrass*. Ο *Marshall Stone*, το 1937, έδωσε γενική μορφή στο θεώρημα του *Weierstrass* την οποία θα εξετάσουμε στο επόμενο μάθημα.