

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Μάθημα 1^ο : ΧΡΟΝΟΣ – ΧΩΡΟΣ – ΚΙΝΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΕΝΟΣ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΡΟΣ ΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ

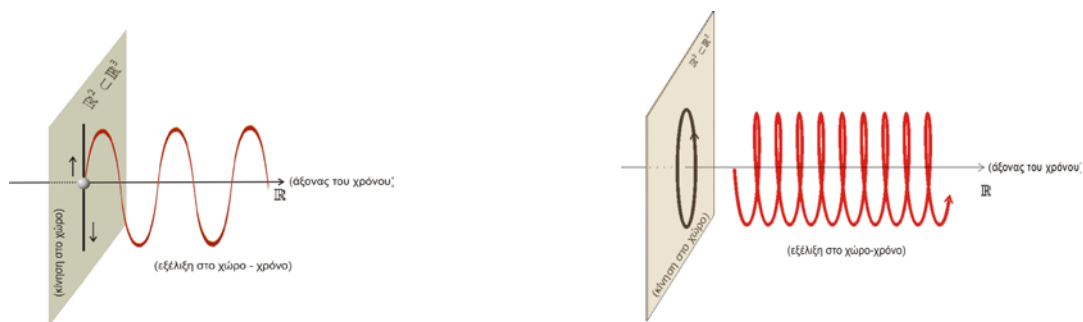
1. Ο Νεύτωνας λέει ότι *ο χρόνος και ο χώρος είναι διαχωρισμένοι μεταξύ τους και καμιά στιγμή του χρόνου και κανένα σημείο του χώρου δεν ξεχωρίζουν από τις άλλες στιγμές και τα άλλα σημεία ώστε να εκληφθούν ως απόλυτη χρονική και χωρική αρχή*. Το μαθηματικό πρότυπο που μου προτείνεις ανταποκρίνεται σε αυτά τα ζητούμενα;
2. Λες ότι η μαθηματική δομή του χώρο-χρόνου χαρακτηρίζεται από *την αφινικότητά της, τη γραμμικότητα του χρόνου και την ευκλείδεια δομή του χώρου*. Πες μου, τι ακριβώς σημαίνουν οι μαθηματικοί αυτοί όροι, ώστε να πειστώ ότι συμπίπτουν οι απόψεις μας.
3. Από μαθηματική άποψη ορίζεται κάλλιστα μετρική σε οποιονδήποτε τετραδιάστατο χώρο. Γιατί άραγε δεν υπάρχει μετρική με φυσικό νόημα που να προσμετρά συγχρόνως χωρικές και χρονικές αποστάσεις στο πλαίσιο της Κλασικής Μηχανικής;
4. Όρισες το χρόνο ως *προβολή του τετραδιάστατου χώρου των χωροχρονικών μεταφορών στο χρονικό άξονα* και λες ότι, *κάθε χρονική στιγμή, ο πυρήνας της ορίζει τον τρισδιάστατο χώρο των ταυτόχρονων γεγονότων*. Πες μου, τι ακριβώς σημαίνουν οι μαθηματικοί αυτοί όροι, ώστε να αντιληφθώ το φυσικό τους αντίκρισμα.
5. Λες ότι οι χωροχρονικές μεταφορές συγκροτούν από αλγεβρική άποψη μια ομάδα και από γεωμετρική άποψη *ένα διανυσματικό χώρο ισόμορφο προς τον τετραδιάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο*. Γιατί πρέπει να μου προκαλούν φυσικό ενδιαφέρον οι μαθηματικές αυτές δομές;

6. Ξέρεις γιατί με ενδιαφέρουν αποκλειστικά οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί και όχι όλοι οι μετασχηματισμοί του χωρο-χρόνου;
7. Γιατί πρέπει να μου προκαλέσει ενδιαφέρον η συγκρότησή των γαλιλαϊκών μετασχηματισμών σε ομάδα και πώς θα αντιληφθώ το φυσικό νόημα της μη αντιμεταθετικότητάς της; Ποια φυσική σημασία να δώσω στην ύπαρξή αντιμεταθετικών υποομάδων της;
8. Ξέρεις γιατί στους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς θέλω να συμπεριληφθούν οι αδρανειακές μετατοπίσεις και δεν μου αρκούν οι χωρικές μεταφορές στο χώρο των ταυτόχρονων γεγονότων; Πες μου, ποια είναι η μαθηματική διαφορά μεταξύ αδρανειακής μετατόπισης και χωρικής μεταφοράς, ώστε να πειστώ ότι συμπίπτουν οι απόψεις μας. Οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί που ορίζουν τις αδρανειακές μετατοπίσεις στο χώρο των ταυτόχρονων γεγονότων συγκροτούν αντιμεταθετική υποομάδα της γαλιλαϊκής ομάδας;
9. Ξέρεις γιατί θέλω οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί να διατηρούν τον προσανατολισμό του χώρου των ταυτόχρονων γεγονότων; Οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί είναι χρονικές και χωρικές ισομετρίες, αλλά δεν συμπεριλαμβάνεις σε αυτούς όλες τις χωρικές ισομετρίες. Εξήγησε μου το γιατί; Πώς αποδεικνύεις ότι οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί διατηρούν την ορθοκανονικότητα στο χώρο των ταυτόχρονων γεγονότων;
10. Πες μου, πώς θα συμπληρώσω τα αριθμητικά στοιχεία που υπεισέρχονται στον πίνακα ενός γαλιλαϊκού μετασχηματισμού μηδενικής χρονικής μεταφοράς, για τον οποίο γνωρίζω ότι στο χώρο των ταυτόχρονων γεγονότων ορίζει μηδενική χωρική μεταφορά, αδρανειακή κίνηση με ταχύτητα μοναδιαίου μέτρου στον άξονα του διανύσματος $\vec{\xi} = (1,1,1)$ και χωρική στροφή γύρω από αυτό τον άξονα κατά γωνία $\pi/2$:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ t' \end{bmatrix}.$$

11. Έχεις πειστεί για το ότι η καμπυλότητα και η στρέψη είναι ενδογενή χαρακτηριστικά κάθε τροχιάς και ότι οι γαλιλαϊκοί μετασχηματισμοί τις διατηρούν αναλλοίωτες; Γιατί χρειάστηκε να αλλάξεις τη διαβάθμιση του χρονικού άξονα για να ορίσεις την καμπυλότητα και τη στρέψη μιας τροχιάς; Πώς αποδεικνύεις τους τύπους που δίνουν την καμπυλότητα και τη στρέψη μιας τροχιάς;
12. Ποιες είναι οι τροχιές των οποίων ο λόγος της καμπυλότητας προς τη στρέψη τους είναι σταθερός; Ποια είναι η καμπυλότητα μιας ελλειπτικής τροχιάς; Ποια είναι η καμπυλότητα μιας παραβολικής τροχιάς;

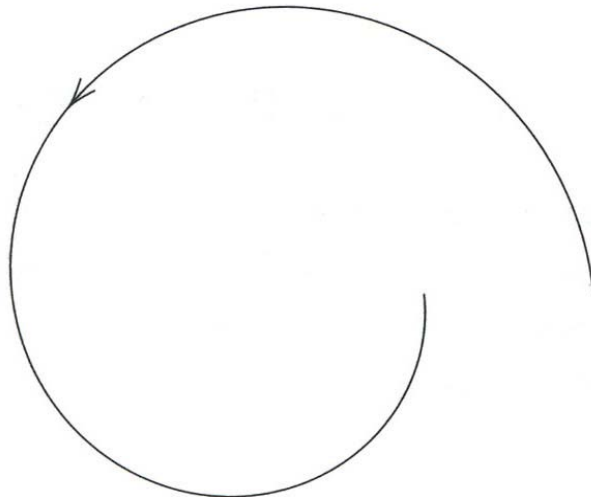
13. Ο Νεύτωνας, στη νεαρή του ηλικία, προσπαθούσε να εντοπίσει σε κάθε σημείο μιας τροχιάς το αντίστοιχο κέντρο της καμπυλότητάς της ταυτίζοντάς την τοπικά με το τόξο ενός κύκλου. Πώς εντοπίζονται σήμερα αυτά τα κέντρα καμπυλότητας και τι σηματοδοτεί ο γεωμετρικός τους τύπος για μια τροχιά; Θα ήθελα να δω μερικά απλά παραδείγματα.
14. Σχεδιάσα στην ακόλουθη εικόνα την τροχιά στο χώρο και την εξέλιξη στο χώρο-χρόνο μιας ευθύγραμμης παλινδρομικής κίνησης και μιας επίπεδης κυκλικής κίνησης. Ποιο είναι το συμπέρασμά σου για την ταχύτητα και την επιτάχυνση αυτών των κινήσεων;



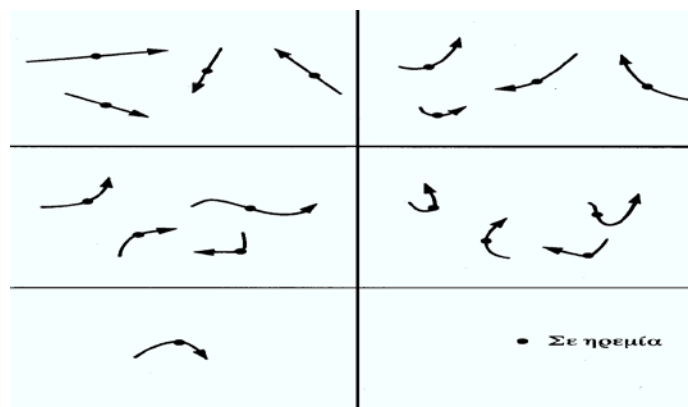
15. Με ποια επιχειρήματα θα καταρρίψεις τη λανθασμένη αριστοτελική αντίληψη που δηλώνει ότι η ταχύτητα ενός σώματος είναι ανάλογη της ασκούμενης σε αυτό δύναμης; Ίσως κάποιος ισχυριστεί ότι η θεμελιώδης εξίσωση που διέπει την κίνηση των σωμάτων δεν πρέπει να είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης αλλά τρίτης τάξης. Πώς θα καταρρίψεις έναν τέτοιο ισχυρισμό;
16. Πες μου, ποια είναι η λογική σχέση του πρώτου και του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα με τις αξιωματικές αρχές της σχετικότητας και του ντετερμινισμού; Τι εννοείς όταν λες ότι ο πρώτος νόμος είναι απαραίτητος για να αποκτήσει το νόημά του ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα; Ίσως σου πουν ότι ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα αποτελεί απόρροια του δεύτερου νόμου. Πώς θα καταρρίψεις αυτόν τον λανθασμένο ισχυρισμό;
17. Ποια λογική ανάγκη καλύπτει ο τρίτος νόμος στο σύστημα των τριών νόμων του Νεύτωνα; Πώς ερμηνεύεις τον ισχυρισμό ότι ο τρίτος νόμος υπεισέρχεται εννοιολογικά στον πρώτο και στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα; Ξέρεις τι σημαίνει όταν λέμε ότι ο τρίτος νόμος είναι νόμος δυνάμεων και όχι νόμος κίνησης όπως, τουλάχιστο άμεσα, χαρακτηρίζονται οι δυο πρώτοι νόμοι;
18. Θέλω να λύσεις το ακόλουθο πρόβλημα: Ένα τρένο κινείται σε ευθύγραμμη σιδηροδρομική γραμμή κατευθυνόμενο από μια πόλη Α προς μια πόλη Β και ο οδηγός ρυθμίζει την ταχύτητα, σε χιλιόμετρα ανά ώρα, έτσι ώστε σε κάθε χρονική στιγμή να ισούται αριθμητικά με την απόσταση, σε χιλιόμετρα, που απομένουν ως το τέλος της διαδρομής. [Π.χ., στα 100 km πριν το τέρμα θα έχει ταχύτητα 100 km/h, στα 10 km πριν το τέρμα θα έχει

ταχύτητα 10 km/h , στο 1 km θα έχει ταχύτητα 1 km/h , στα 500 m θα έχει ταχύτητα $0,5 \text{ km/h}$, κ.ο.κ.]. Πότε θα φτάσει το τρένο στο τέρμα της διαδρομής; [Ειδικότερα, υπολογίστε το πόσο θα μειωθεί σε μια ώρα η απόσταση που απομένει ως το τέρμα της διαδρομής και πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να διανυθεί το τελευταίο χιλιόμετρο.].

19. Στην ακόλουθη εικόνα φαίνεται, σε σμίκρυνση $100 : 1$, η τροχιά που διέγραψε ένα σωματίδιο από το μεσημέρι μέχρι τα μεσάνυχτα μιας μέρας όπως έχει καταγραφεί σε κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Μας πληροφορούν ότι σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, μελλοντική και παρελθούσα, η τροχιά εξελίσσεται σε ένα επίπεδο, η γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου παραμένει σταθερή και η ακτινική του ταχύτητα είναι κάθε στιγμή ανάλογη προς την απόστασή του από ένα συγκεκριμένο άγνωστο σε μας σημείο του επιπέδου της κίνησης. Πες μου, πώς θα προβλέψω τη μελλοντική πορεία της τροχιάς και θα μάθω το παρελθόν της και πώς θα διατυπώσω την εξίσωση της κίνησης που υποδεικνύεται από την αρχή του ντετερμινισμού του Νεύτωνα;



20. Στην επόμενη εικόνα δίνονται σχηματικά οι τροχιές ενός σωματιδίου όπως καταγράφονται σε ένα αδρανειακό και ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Πώς θα αντιληφθώ το είδος της κίνησης του μη αδρανειακού συστήματος αναφοράς ως προς το αδρανειακό;



Αδρανειακό σύστημα αναφοράς

Μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς