ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2012-13

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Μάθημα 2$^{\text{ο}}$: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΤΟΥΣ ΕΥΚΛΕΊΔΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

Ι. ΠΕΔΙΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΤΗΡΙΑΣ ΚΛΙΣΗΣ ΣΤΟΥΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

1. Εξετάστε αν το πεδίο διανυσμάτων του ακόλουθου σχήματος εκφράζει πράγματι την κατευθυντήρια κλίση της συνάρτησης που ορίζεται στο ευκλείδειο επίπεδο ως εξής:

$$f(x,y) = xy \ .$$

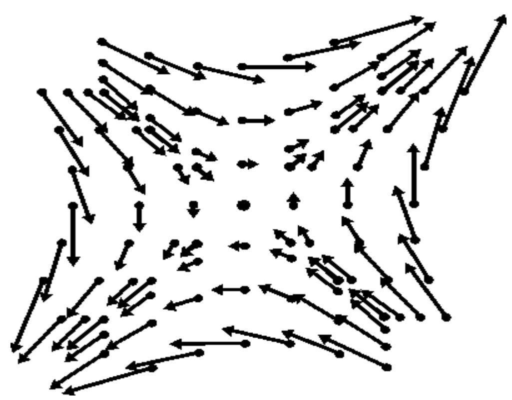
- Στα σημεία των ισοσταθμικών καμπύλων αυτής της συνάρτησης:

  $$\Sigma_c(f) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y)=c\right\}, \quad c\in\mathbb{R}\,,$$

  διαπιστώστε ότι το διανυσματικό αυτό πεδίο είναι ορθογώνιο προς τις αντίστοιχες εφαπτόμενες ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση:

  $$\partial_x f(x_{\text{o}},y_o)(x-x_{\text{o}}) + \partial_y f(x_{\text{o}},y_o)(y-y_{\text{o}}) = 0 \ .$$

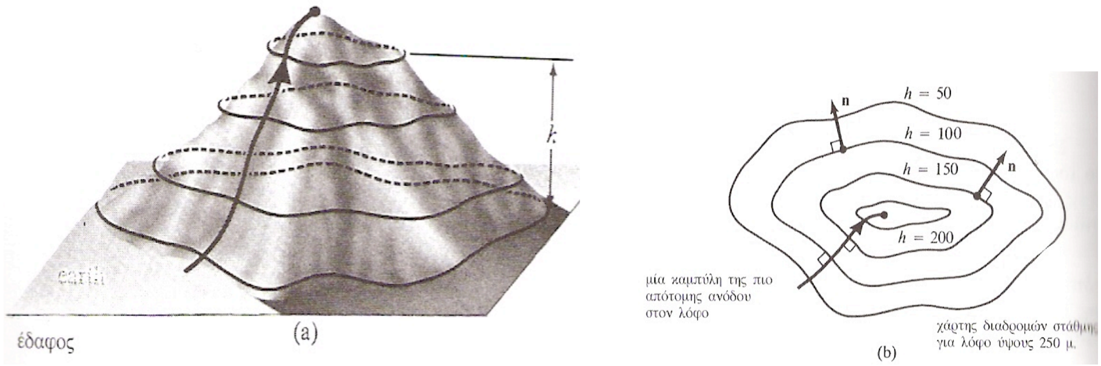
- Διαπιστώστε ότι σε κάθε σημείο του ευκλείδειου επιπέδου το διανυσματικό αυτό πεδίο υποδεικνύει την κατεύθυνση προς την οποία οι τιμές της συνάρτησης έχουν το μεγαλύτερο ρυθμό μεταβολής.



2. Ο λόφος του σχήματος ας υποθέσουμε ότι έχει ακριβώς μορφή ελλειπτικού παραβολοειδούς και ότι το υψόμετρό του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$h(x,y) = c - ax^2 - by^2 .$$

- Διαπιστώστε ότι το πεδίο κατευθυντήριας κλίσης αυτής της συνάρτησης είναι κάθετο στις ισοσταθμικές της καμπύλες και σε κάθε σημείο υποδεικνύει το συντομότερο δρόμο ανάβασης προς την κορυφή.
- Προς ποια κατεύθυνση αυξάνει εντονότερα το υψόμετρο όταν βρισκόμαστε στο σημείο με γεωγραφικές συντεταγμένες $(1,1)$; Προς ποια κατεύθυνση θα κυλήσει ένα σφαιρικό σώμα αν τον αφεθεί από αυτό το σημείο; Στο σημείο αυτό, προς ποια κατεύθυνση πρέπει να χαραχθεί ένας δρόμος ώστε να έχει κλίση 3%;



3. Ένα διαστημόπλοιο περνά κοντά από μια πηγή θερμότητας και αν (x,y,z) είναι μια δεδομένη χρονική στιγμή οι συντεταγμένες της θέσης του σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς επικεντρωμένο στην πηγή τότε η θερμοκρασία στο τοίχωμά του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$$

- Αν κάποια στιγμή το διαστημόπλοιο βρεθεί στη θέση $(1,1,1)$, προς ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί ώστε να μειωθεί η θερμοκρασία του τοιχώματός του το συντομότερο δυνατόν;
- Πόσο γρήγορα θα μειωθεί η θερμοκρασία του διαστημοπλοίου αν η ταχύτητά του προς αυτή την κατεύθυνση είναι $v_o = e^8 m/\sec$,;
- Γνωρίζοντας ότι το μέταλλο του τοιχώματος του διαστημοπλοίου θα εμφανίσει ρωγμές όταν ο ρυθμός ψύξης του είναι μεγαλύτερος από $\sqrt{14}e^2$ βαθμούς το δευτερόλεπτο, ποιες είναι οι κατευθύνσεις προς τις οποίες θα πρέπει να κινηθεί ώστε να αποφευχθεί η ρήξη του τοιχώματος;

II. ΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ ΚΑΙ Η ΑΜΦΙΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΙΜΟΤΗΤΑ

1. Θεωρούμε μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε όλη την πραγματική ευθεία:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,.$$

- Αν η συνάρτηση αυτή είναι αντιστρέψιμη και συνεχής, πιστεύετε ότι είναι αμφισυνεχής και ότι αποτελεί ομοιομορφισμό της πραγματικής ευθείας;
- Αν η συνάρτηση αυτή είναι αντιστρέψιμη και παντού διαφορίσιμη, πιστεύετε ότι είναι αμφιδιαφορίσιμη και ότι αποτελεί αμφιδιαφορομορφισμό της πραγματικής ευθείας;
- Αν η συνάρτηση αυτή είναι παντού διαφορίσιμη με μη μηδενική παράγωγο, πιστεύετε ότι αποτελεί ομοιομορφισμό και αμφιδιαφορομορφισμό της πραγματικής ευθείας;
- Εξετάστε την παραγωγίσιμότητα και την τοπική αντιστρεψιμότητα στο σημείο 0 στην περίπτωση:

$$f(x)=x+x^2\sin(\pi/x),\;\; x\neq 0,\quad f(0)=0\,.$$

2. Διαπιστώστε ότι η ακόλουθη απεικόνιση είναι τοπικός αμφιδιαφορομορφισμός σε κάθε σημείο του ευκλείδειου επιπέδου, αλλά δεν είναι ολικός ομοιομορφισμός, άρα ούτε ολικός αμφιδιαφορομορφισμός του ευκλείδειου επιπέδου στην εικόνα του:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,,\quad f(x,y)=\left(e^x\cos x,\, e^x\sin x\right).$$

3. Προσδιορίστε το μέγιστο συνεκτικό χωρίο του ευκλείδειου επιπέδου το οποίο απεικονίζεται αμφιδιαφορομορφικά στην εικόνα του διαμέσου του ακόλουθου μετασχηματισμού:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,,\quad f(x,y)=\left(x+y,\, xy\right).$$

4. Διαπιστώστετε ότι ο ακόλουθος μετασχηματισμός απεικονίζει αμφιδιαφορομορφικά το ευκλείδειο επιπέδο στον εαυτό του:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,,\quad f(x,y)=\left(\sin(y/2)-x,\, \sin(x/2)-y\right).$$

5. Διαπιστώστε ότι ο ιακωβιανός πίνακας του ακόλουθου μετασχηματισμού συμπίπτει με τον αντίστροφό του και δώστε το συμπέρασμά σας:

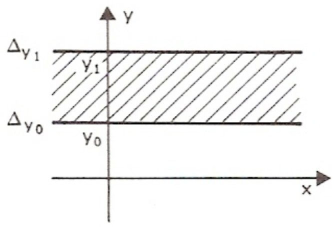
$$f:\mathbb{R}^3-\{0\}\to\mathbb{R}^3\,,\quad f(x,y,z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

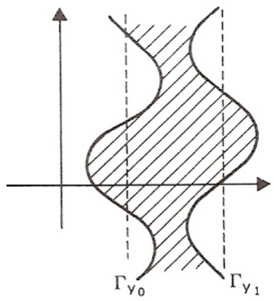
III. ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΜΦΙΔΙΑΦΟΡΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΟΥΣ ΕΥΚΛΕΊΔΕΙΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

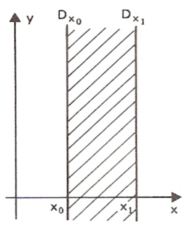
1. Προσδιορίστε την εικόνα που αποδίδει ο ακόλουθος μετασχηματισμός σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη ζώνη του ευκλείδειου επιπέδου και δώστε το συμπέρασμά σας για την εικόνα που αποδίδει σε ένα τετραγωνικό χωρίο και ένα καρτεσιανό πλέγμα του ευκλείδειου επιπέδου:

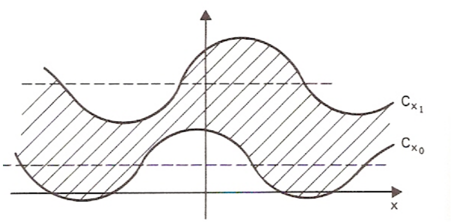
$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(x,y) = \left(\sin x + y, \cos y + x\right).$$

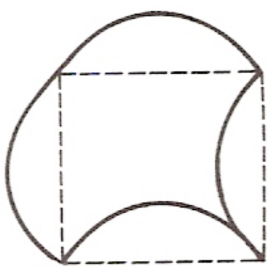
- Προσδορίστε τα μέγιστα συνεκτικά χωρία του ευκλείδειου επιπέδου στα οποία διασφαλίζεται η αμφιδιαφορισιμότητα αυτού του μετασχηματισμού.

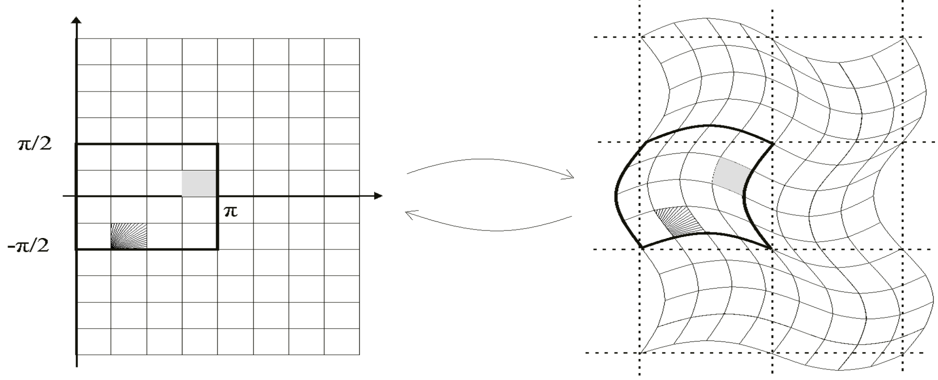








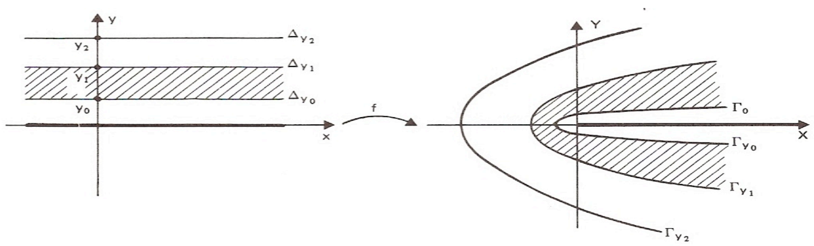


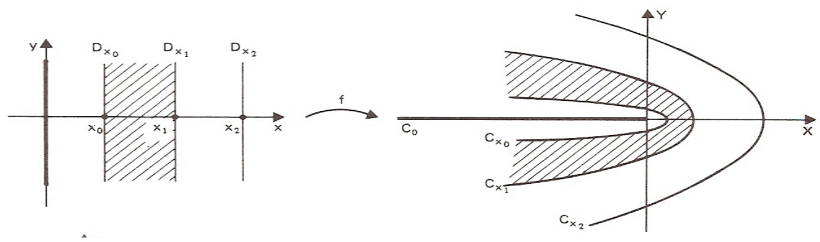


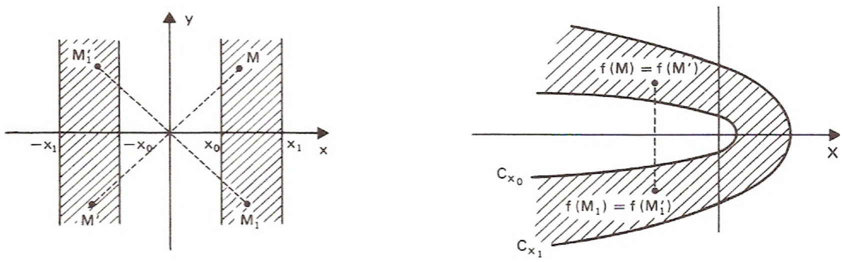
2. Προσδιορίστε την εικόνα που αποδίδει ο ακόλουθος μετασχηματισμός σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη ζώνη του ευκλείδειου επιπέδου και δώστε το συμπέρασμά σας για την εικόνα που αποδίδει σε ένα τετραγωνικό χωρίο και ένα καρτεσιανό πλέγμα του ευκλείδειου επιπέδου:

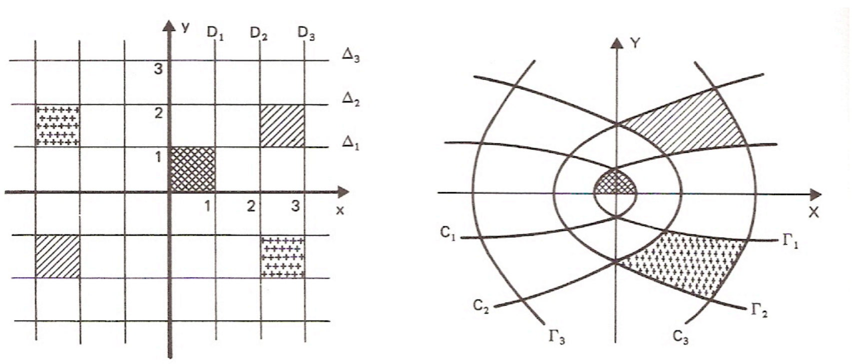
$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(x,y)=\left(x^2-y^2, 2xy\right).$$

- Προσδορίστε τα μέγιστα συνεκτικά χωρία του ευκλείδειου επιπέδου στα οποία διασφαλίζεται η αμφιδιαφορισιμότητα αυτού του μετασχηματισμού.





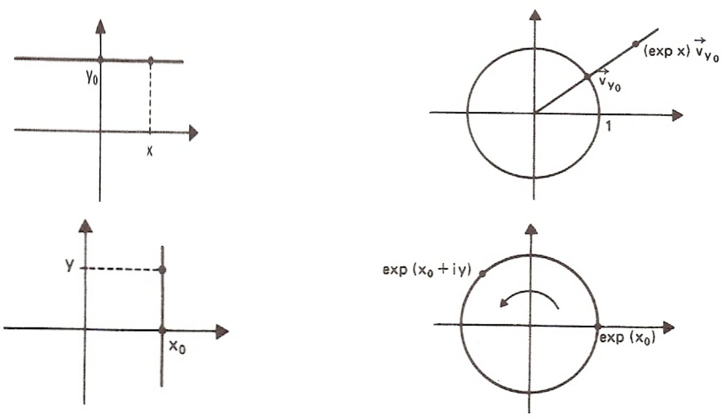




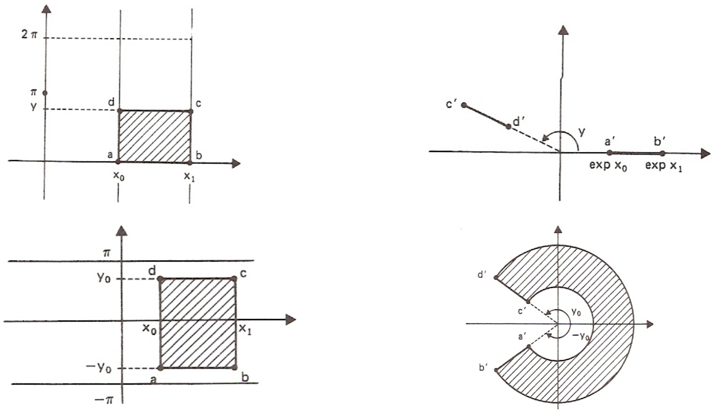
3. Προσδιορίστε την εικόνα που αποδίδει ο ακόλουθος μετασχηματισμός σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη ευθεία και κατόπιν στο περίγραμμα ενός τετραγώνου και ενός τετραγωνικού χωρίου του ευκλείδειου επιπέδου. Επίσης, προσδιορίστε την εικόνα που αποδίσεται σε μια οριζόντια και μια κατακόρυφη ζώνη και δώστε το συμπέρασμά σας για την εικόνα που αποδίδει σε ένα τετραγωνικό χωρίο και ένα καρτεσιανό πλέγμα του ευκλείδειου επιπέδου:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \left(e^x \cos y\,,\, e^x \sin y\right).$$

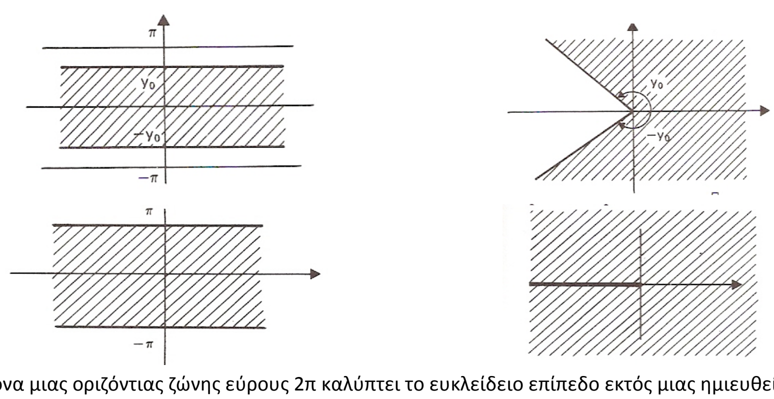
- Προσδορίστε τα μέγιστα συνεκτικά χωρία του ευκλείδειου επιπέδου στα οποία διασφαλίζεται η αμφιδιαφορισιμότητα αυτού του μετασχηματισμού.



Οι οριζόντιες ευθείες μετασχηματίζονται σε ακτινικές ημιευθείες και οι κατακόρυφες σε κυκλικά τόξα.



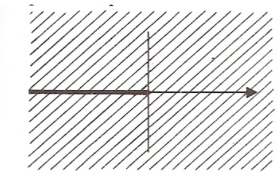
Τα ορθογώνια περιγράμμτα και χωρία μετασχηματίζονται αντίστοιχα σε περιγράμματα και χωρία δακτυλίων.

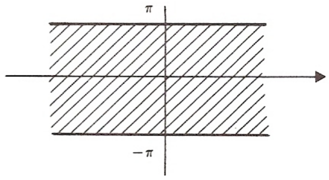


Η εικόνα μιας οριζόντιας ζώνης εύρους 2π καλύπτει το ευκλείδειο επίπεδο εκτός μιας ημιευθείας και προκύπτει ένας αμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός.

4. Προσδιορίστε την εικόνα που αποδίδει ο ακόλουθος μετασχηματισμός στο ευκλείδειο επίπεδο από το οποίο έχει εξαιρεθεί μια ημιευθεία και εξετάστε τι θα συμβεί αν δεν εξαιρεθεί η ημιευθεία αλλά μόνο η αρχή του ευκλείδειου επιπέδου:

$$f(x,y)=\left(\ln(x^2+y^2)^{1/2},\,Arc\tan(y/x)\right).$$

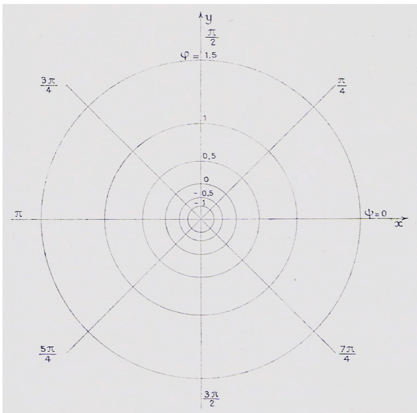




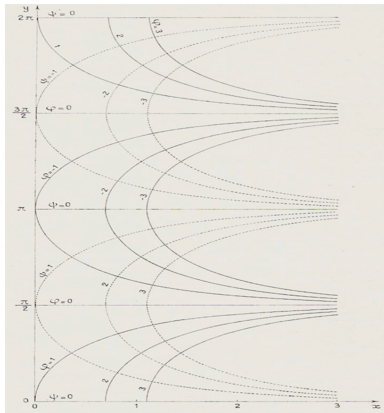
Αν από το ευκλείδειο επίπεδο εξαιρεθεί μια ημιευθεία τότε η εικόνα του καλύπτει μια οριζόντια ζώνη εύρους 2π.

5. Σχεδιάστε στο ευκλείδειο επίπεδο τις καμπύλες που ορίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των πραγματικών σταθερών φ_o, ψ_o :

i) $\ln(x^2+y^2)^{1/2}=\varphi_o$ και $Arc\tan(y/x)=\psi_o$., ii) $e^x\cos y=\varphi_o$ και $e^x\sin y=\psi_o$.



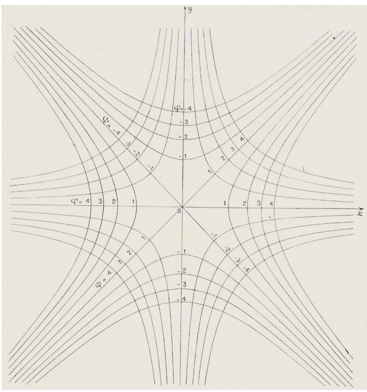
$x^2+y^2=e^{2\varphi_0}$ και $y=(\tan\psi_0)x$

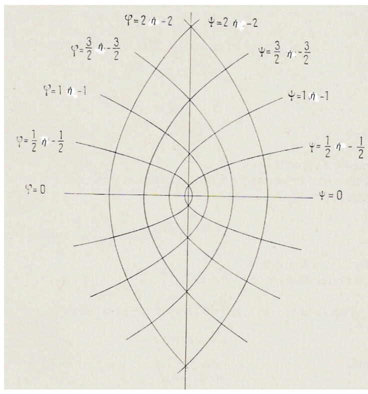


$e^x\cos y=\varphi_o$ και $e^x\sin y=\psi_o$

6. Σχεδιάστε στο ευκλείδειο επίπεδο τις καμπύλες που ορίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των πραγματικών σταθερών φ_o, ψ_o :

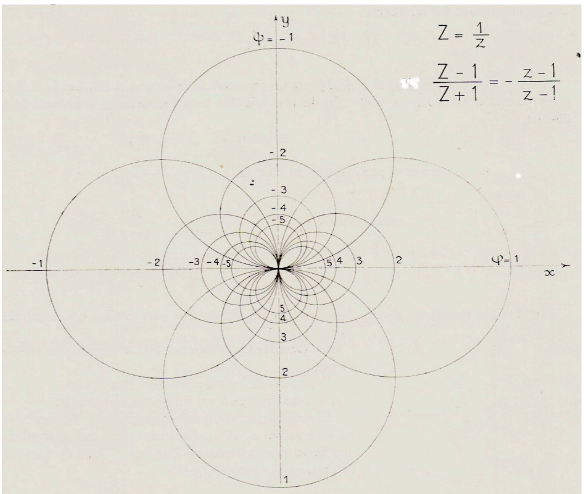
i) $x^2-y^2=\varphi_o$ και $2xy=\psi_0$, ii) $y^2=4\varphi_o^2(\varphi_o^2-1)x$ και $y^2=4\psi_o^2(\psi_o^2+1)x$.





7. Σχεδιάστε στο ευκλείδειο επίπεδο τις καμπύλες που ορίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των πραγματικών σταθερών φ_o, ψ_o:

$$\frac{x}{x^2+y^2}=\varphi_o \quad \text{και} \quad \frac{y}{x^2+y^2}=-\psi_o \,.$$

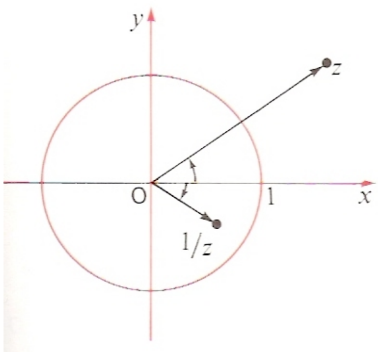


Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν αντίστοιχα από το πραγματικό και φανταστικό μέρος του μιγαδικού μετασχηματισμού αντιστροφής που ορίζεται στο μιγαδικό επίπεδο εκτός της αρχής του:

$$f(z)=1/z \,.$$

- Διαπιστώστε ότι ο μιγαδικός μετασχηματισμός αντιστροφής επιβάλλει στα σημεία του μιγαδικού επιπέδου μια ομοθεσία και μια συμμετρία ως προς τον πραγματικό άξονα:

$$z=\rho e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad 1/z=(1/\rho)e^{-i\theta} \,.$$



Αντιστροφή στο μιγαδικό επίπεδο:

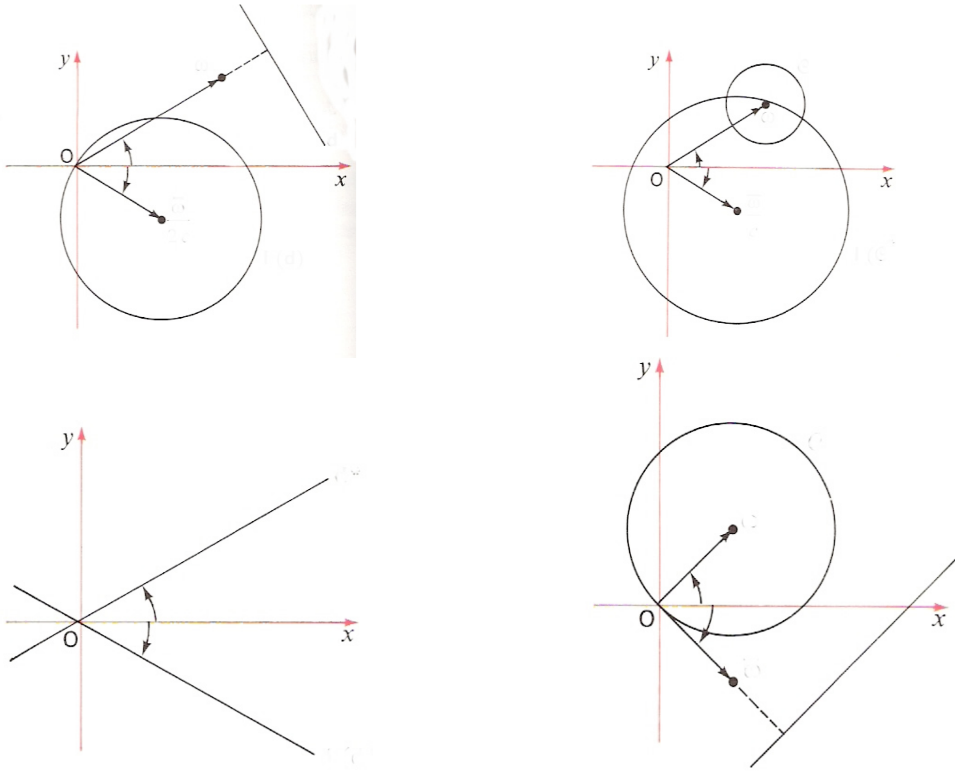
- Αν στο ευκλείδειο επίπεδο μια ευθεία και ένας κύκλος ορίζονται αντίστοιχα από τις εξισώσεις:

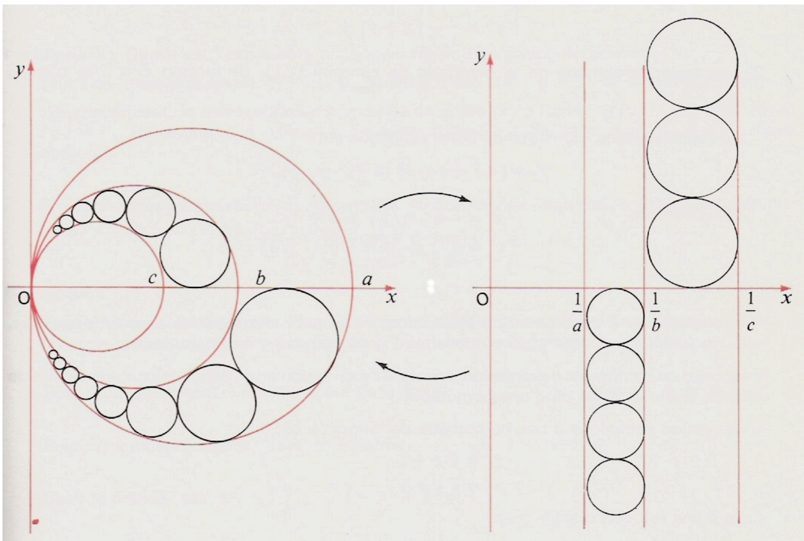
$$ax+by+c=0 \quad \text{και} \quad x^2+y^2+2ax+2by+c=0$$

τότε στο μιγαδικό επίπεδο οι εξισώσεις αυτές διατυπώνονται αντίστοιχα ως εξής:

$$(a-ib)z+(a+ib)\overline{z}+2c=0 \quad \text{και} \quad z\,\overline{z}+(a-ib)z+(a+ib)\overline{z}+c=0 \,.$$

Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία μη διερχόμενη από την αρχή του μιγαδικού επιπέδου μετασχηματίζεται σε κύκλο διερχόμενο από την αρχή του και κάθε κύκλος μη διερχόμενος από την αρχή του μιγαδικού επιπέδου μετασχηματίζεται σε κύκλο μη διερχόμενο από την αρχή του. Επίσης, κάθε ευθεία διερχόμενη από την αρχή του μιγαδικού επιπέδου μετασχηματίζεται στη συμμετρική της ευθεία ως προς τον πραγματικό άξονα και κάθε κύκλος διερχόμενος από την αρχή του μιγαδικού επιπέδου μετασχηματίζεται σε ευθεία μη διερχόμενη από την αρχή του.





Φαινόμενα αντιστροφής στο μιγαδικό επίπεδο.

8. Θεωρούμε το μιγαδικό ομογραφικό μετασχηματισμό:[1]

$$f : \mathfrak{U} \subset \mathbb{C} \to \mathfrak{U}' \subset \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

όπου

$$\mathfrak{U} = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z \neq -d/c \} \quad \text{και} \quad \mathfrak{U}' = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z \neq a/c \}.$$

Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

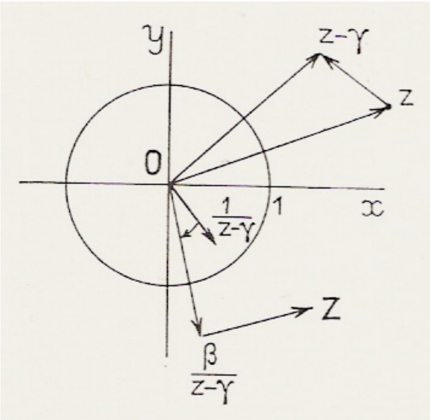
$$f(z) = \alpha + \frac{\beta}{z - \gamma}$$

όπου

$$\alpha = a/c, \; \beta = (bc - ad)/c^2, \; \gamma = -d/c.$$

Άρα, ο μιγαδικός ομογραφικός μετασχηματισμός επιβάλλει σε κάθε σημείο του μιγαδικού επιπέδου διαδοχικά μεταφορά, αντιστροφή, στροφή, ομοθεσία και μεταφορά:

$$Z = f(z) \;\; : \;\; z \to z - \gamma \to \frac{1}{z-\gamma} \to \frac{\beta}{z-\gamma} \to \alpha + \frac{\beta}{z-\gamma} = Z.$$



Αποσύνθεση του ομογραφικού μετασχηματισμού στο μιγαδικό επίπεδο.

- Διαπιστώστε ότι οι ομογραφικοί μιγαδικοί μετασχηματισμοί διαθέτουν ένα ή δυο σταθερά σημεία στο μιγαδικό επίπεδο που είναι οι ρίζες της μιγαδικής εξίσωσης:

$$c\,z^2 + (d-a)z - b = 0.$$

- Διαπιστώστε ότι οι ομογραφικοί μιγαδικοί μετασχηματισμοί μετασχηματίζουν τις ευθείες και τους κύκλους σε ευθείες ή κύκλους.

- Αποδείξτε ότι οι ομογραφικοί μιγαδικοί μετασχηματισμοί διατηρούν αναλλοίωτο τον αναρμονικό λόγο κάθε τετράδας σημείων του μιγαδικού επιπέδου:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_o - z_1}{z_o - z_2}$$

[1] Θα εξαιρέσουμε τις απλουστευμένες περιπτώσεις θέτοντας $c \neq 0$ και $ad - bc \neq 0$.
Η περίπτωση $a = 0, b = 1, c = 1, d = 0$ δίνει τη μιγαδική αντιστροφή $f(z) = 1/z$.

- Διαπιστώστε ότι όταν ο αρμονικός λόγος είναι -1 τότε στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία z_1 και z_2 διαιρούνται αρμονικά από τα σημεία z και z_o.

- Διαπιστώστε ότι στην περίπτωση όπου ο μιγαδικός ομογραφικός μετασχηματισμός διαθέτει δυο σταθερά σημεία $f(z_1)=z_1$ και $f(z_2)=z_2$, θέτοντας $Z{=}f(z)$ και $Z_o{=}f(z_o)$, προκύπτει:

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_o-z_1}{z_o-z_2}=\frac{Z-z_1}{Z-z_2}:\frac{Z_o-z_1}{Z_o-z_2}$$

  άρα

$$\frac{Z-z_1}{Z-z_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

- Διαπιστώστε ότι στην περίπτωση όπου ο μιγαδικός ομογραφικός μετασχηματισμός διαθέτει μόνο ένα σταθερό σημείο $f(z_1)=z_1$ τότε, θεωρώντας με μεταφορά των αξόνων ότι πρόκειται για την αρχή του μιγαδικού επιπέδου, οπότε $b=0$ και $d=a$, προκύπτει:

$$Z=\frac{az}{cz+a}$$

  άρα

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{z}+\frac{c}{a} \quad \text{και} \quad \frac{1}{Z-z_1}=\frac{1}{z-z_1}+h.$$

- Προσδιορίστε τους συντελεστές του ομογραφικού μετασχηματισμού έτσι ώστε:

$$|z|<1\Rightarrow|f(z)|<1,\ \ |z|=1\Rightarrow|f(z)|=1,\ \ |z|>1\Rightarrow|f(z)|>1.$$

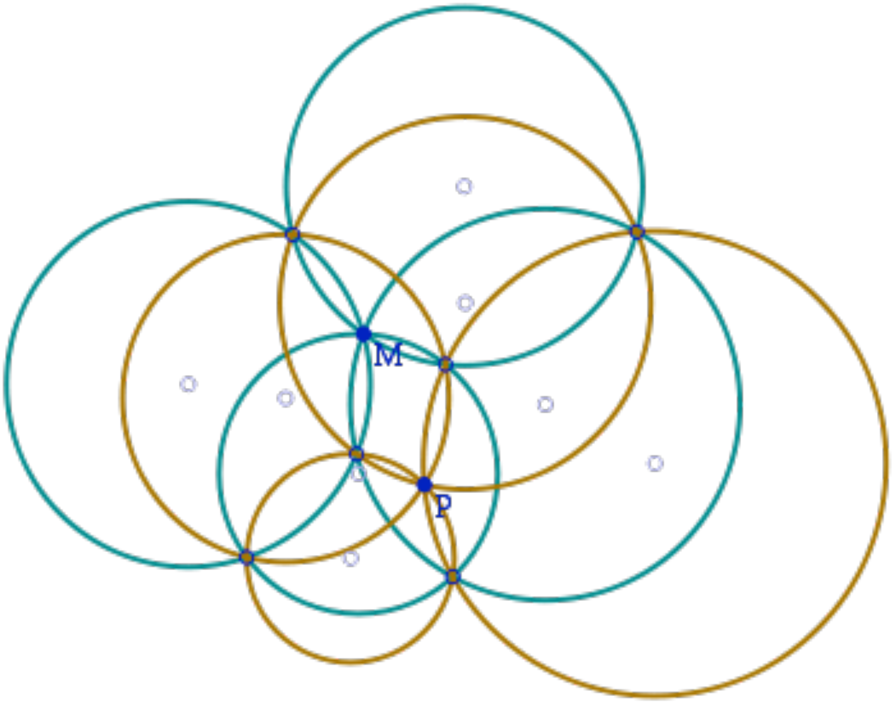
- Προσδιορίστε τους συντελεστές του ομογραφικού μετασχηματισμού έτσι ώστε ένας ανοιχτός δίσκος να μετασχηματίζεται αμφιδιαφορικά και σύμμορφα σε ανοιχτό ημιεπίπεδο.

9. Μελετήστε το μιγαδικό μετασχηματισμό:

$$f(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}).$$

10. Οι κύκλοι του Clifford.

Στο ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε μια ακολουθία κύκλων $C_1,C_2,...,C_n,...$ ίδιας ακτίνας R που όλοι διέρχονται από ένα δεδομένο κοινό σημείο O, αλλά ανά δυο δεν εφάπτονται ούτε ταυτίζονται. Για κάθε ζεύγος κύκλων C_i,C_j, $i\neq j$, σημειώνουμε ij το σημείο τομής τους, εκτός του O, και συμβολίζουμε ijk τον κύκλο που ορίζεται από τα σημεία ij, jk, ki όπου i,j,k είναι διαφορετικοί δείκτες. Αποδείξτε ότι οι κύκλοι 123, 124, 134, 234 διέρχονται από ένα κοινό σημείο που σημειώνουμε 1234 και ότι τα σημεία 1234, 1235, 1245, 1345, 2345 ανήκουν σε ένα κύκλο ακτίνας R που συμβολίζουμε 12345. Αποδείξτε ότι οι C_6^5 κύκλοι 12345, 12346,…,23456 διέρχονται από ένα κοινό σημείο που σημειώνουμε 123456 και συνεχίστε το συλλογισμό για να ανακαλύψετε τον αλγόριθμο που υπέδειξε ο Clifford. Αν τοποθετήσετε το πρόβλημα στο μιγαδικό επίπεδο η απόδειξη είναι εξαιρετικά απλή. Τι άραγε ισχύει για την ακολουθία $f(C_1),f(C_2),...,f(C_n),...$ όπου $f(z)=1/z$;



Οι κύκλοι του Clifford.[2]

[2] Roger Penrose, A la decouverte des lois de l'univers, Science, 2007.
Marcel Berger, Problèmes de Géométrie, Ed, Cedic, 1972.

III. ΔΙΑΣΦΑΛΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΜΦΙΔΙΑΦΟΡΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ