

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Μάθημα 3^ο : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

1. Τελεστής περιστροφής στην περίπτωση σταθερής γωνιακής ταχύτητας.

Ένα στερεό σώμα, ακολουθώντας την κίνηση του αδρανειακού του κέντρου στο χώρο, εκτελεί περιστροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

- Προσδιορίστε στην κανονική βάση του ευκλείδειου χώρου τον πίνακα του τελεστή της γωνιακής του ταχύτητας που προκύπτει από τη σχέση:

$$\mathcal{L}_{\vec{\omega}}(\vec{\xi}) = \vec{\omega} \times \vec{\xi}, \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3.$$

- Προσδιορίστε δυο διανύσματα $\vec{\zeta}$ και $\vec{\zeta}'$ που μαζί με το διάνυσμα $\vec{\omega}$ συγκροτούν βάση του ευκλείδειου χώρου στην οποία ο πίνακας του τελεστή της γωνιακής ταχύτητας εκφράζεται ως εξής:

$$\mathcal{L}'_{\vec{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -|\vec{\omega}| & 0 \\ |\vec{\omega}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Αποδείξτε ότι ο τελεστής περιστροφής του στερεού αυτού σώματος εκφράζεται ως εξής:

$$S(t) = e^{\mathcal{L}'_{\vec{\omega}} t}.$$

- Αποδείξτε ότι κάθε χρονική στιγμή, στο σύστημα αναφοράς που είναι επικεντρωμένο στο αδρανειακό κέντρο του στερεού σώματος και ορίζεται από τη βάση που προσδιορίσατε, η θέση κάθε σημείου του στερεού σώματος, εντοπίζεται ως εξής:

$$(a_i \cos |\vec{\omega}| t - b_i \sin |\vec{\omega}| t) \vec{\zeta} + (a_i \sin |\vec{\omega}| t + b_i \cos |\vec{\omega}| t) \vec{\zeta}' + c_i \vec{\omega}, \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}.$$

- Πώς εντοπίζεται κάθε χρονική στιγμή, στο σύστημα αναφοράς που είναι επικεντρωμένο στο αδρανειακό κέντρο του στερεού σώματος και ορίζεται από την κανονική βάση του ευκλείδειου χώρου, η θέση κάθε σημείου του στερεού σώματος;
- Επαληθεύστε ότι κάθε σημείο του στερεού σώματος περιφέρεται κυκλικά γύρω από τον άξονα του διανύσματος $\vec{\omega}$ με γωνιακή ταχύτητα σταθερού μέτρου $|\vec{\omega}|$.

- Εξετάστε τα προηγούμενα ερωτήματα με το αριθμητικό δεδομένο: $\vec{\omega}(t) = (0, 0, 1)$.
- Προσδιορίστε στο ευκλείδειο σύστημα αναφοράς τη θέση και την ταχύτητα των σημείων του στερεού σώματος όταν το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας δεν είναι σταθερό, π.χ.

$$\vec{\omega}(t) = (0, 0, 2t).$$

2. Τελεστής αδράνειας των στερεών σωμάτων που εμφανίζουν συμμετρίες.

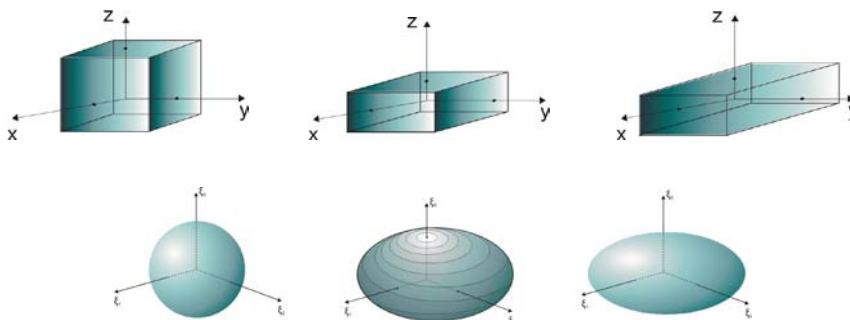
Θεωρούμε ένα ομογενές παραλληλεπίπεδο στερεό σώμα που ορίζεται στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο ως εξής:

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c, \quad a, b, c > 0.$$

- Προσδιορίστε τη συνάρτηση αδράνειας και τον τελεστή αδράνειας του στερεού αυτού σώματος στις ακόλουθες τρεις εκδοχές:

$$a = b = c, \quad a = b \neq c, \quad a \neq b \neq c.$$

- Σε κάθε μια από αυτές τις εκδοχές, ποιες είναι οι ακρότατες τιμές της συνάρτησης αδράνειας και ποια η φυσική ερμηνεία τους;
- Σε κάθε μια από αυτές τις εκδοχές, ποιες είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή αδράνειας και ποια η φυσική ερμηνεία τους;
- Τα αριθμητικά στοιχεία του πίνακα του τελεστή αδράνειας στην κανονική βάση του ευκλείδειου χώρου αλλοιώνονται κατά την μεταφορική και στροφική κίνηση του στερεού σώματος στο χώρο;
- Αν πληρούνται οι προϋποθέσεις ισχύος των αρχών διατήρησης της στροφικής κινητικής ενέργειας και της στροφορμής, προσδιορίστε τα ελλειψοειδή αδράνειας του στερεού αυτού σώματος σε κάθε μια από τις προαναφερόμενες εκδοχές.
- Αν πληρούται η συνθήκη συμβατότητας της σταθερής τιμής της στροφικής κινητικής ενέργειας και της σταθερής τιμής του μέτρου της στροφορμής, προσδιορίστε το γεωμετρικό τόπο των σημείων που μπορεί να διαγράψει το άκρο του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας του στερεού αυτού σώματος σε κάθε μια από τις προαναφερόμενες εκδοχές. Σε ποιες περιπτώσεις ο γεωμετρικός αυτός τόπος αποτελείται από ένα μόνο σημείο και ποια είναι η φυσική ερμηνεία του;

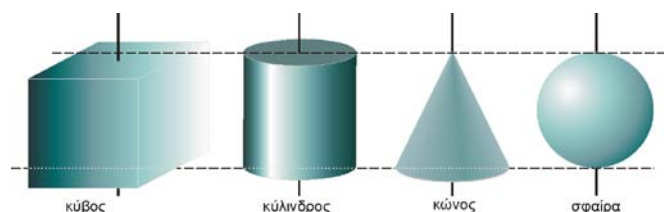


3. Απορίες για τα στερεά σώματα.

- Αν σας έλεγαν ότι ο τελεστής αδράνειας του στερεού σώματος έχει τριπλή ή διπλή μη μηδενική ιδιοτιμή, ποιο θα ήταν το συμπέρασμά σας για τη γεωμετρία του στερεού σώματος;
- Αν σας έλεγαν ότι ο πυρήνας του τελεστή αδράνειας του στερεού σώματος δεν είναι μηδενο-διάστατος αλλά k -διάστατος, $k = 1, 2, 3$, ποιο θα ήταν το συμπέρασμά σας για τη γεωμετρία του στερεού σώματος;
- Αν η γωνιακή ταχύτητα του στερεού σώματος είναι σταθερή, αληθεύει ότι υπάρχει θετικός αριθμός λ τέτοιος ώστε:

$$\mathfrak{I}(\vec{\omega}_0) = \lambda \vec{\omega}_0;$$

- Η προηγούμενη σχέση ισχύει όταν η γωνιακή ταχύτητα του στερεού σώματος δεν είναι σταθερή;
- Πότε τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας και της στροφορμής είναι συγγραμμικά;
- Αν στο στερεό σώμα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, αληθεύει ότι ο παρατηρητής που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς των κύριων αδρανειακών αξόνων βλέπει το πέρας του διανύσματος της στροφορμής να εξελίσσεται σε μια σφαιρική επιφάνεια ενώ, αντίθετα, ο παρατηρητής που βρίσκεται στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς βεβαιώνει ότι το διάνυσμα της στροφορμής είναι σταθερό;
- Αν ένα ομογενές σφαιρικό στερεό σώμα μοναδιαίας ακτίνας περιστρέφονται χωρίς επίδραση εξωτερικών δυνάμεων με μοναδιαία στροφική κινητική ενέργεια και στροφορμή μοναδιαίου μέτρου, μπορούμε να συμπεράνουμε την πυκνότητα της μάζας του;
- Αν τα στερεά σώματα που φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα έχουν ίδια μάζα, ποιο άραγε παρουσιάζει αντίστοιχα μεγαλύτερη ή μικρότερη αδρανειακή ροπή ως προς τον υποδεικνυόμενο άξονα συμμετρίας του; Πώς θα προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις των αδρανειακών τους ροπών και τα ελλειψοειδή αδράνειάς τους;



Η ακτίνα της κυκλικής βάσης του κυλίνδρου και του κώνου είναι ίση με το ύψος τους.