ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2012-13

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΘΕΜΑΤΑ ΜΕΛΕΤΗΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Μάθημα 5^{ο} : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΘΕΣΕΟΓΡΑΦΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

1. ΑΝΑΔΡΟΜΗ ΣΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων βρίσκεται στην απαρχή της συλλογιστικής που οδηγεί στο κεντρικό μαθηματικό νόημα των διαφορικών πολλαπλοτήτων. Για το λόγο αυτό θα ανατρέξουμε στις στοιχειώδεις γεωμετρικές και αλγεβρικές εκφάνσεις του.

Αρχίζουμε με ένα στοιχειώδη προβληματισμό:

Θεωρούμε μια *σχέση* μεταξύ μιας πραγματικής μεταβλητής x και μιας *Ν*-άδας πραγματικών μεταβλητών $u=(u_1,...,u_N)$, (τίποτε δεν σας εμποδίζει προς στιγμή να επιλέξετε $N=1$):

$$f(u,x)=0. \qquad (*)$$

Θέλουμε να ανακαλύψουμε την τοπική συμπεριφορά αυτής της σχέσης στην περιοχή ενός σημείου $(u_o,x_o)\in\mathbb{R}^{N+1}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι:

$$f(u_o,x_o)=0.$$

Συγκεκριμένα, θέλουμε να ανακαλύψουμε αν, στην περιοχή αυτού του σημείου, είναι εφικτή η *τοπική συναρτησιακή έκφραση* της σχέσης (*), δηλαδή αν υπάρχει συνάρτηση *απεμπλοκής* ορισμένη σε μια περιοχή του $u_o\in\mathbb{R}^N$ με τιμές σε μια περιοχή του $x_o\in\mathbb{R}$:

$$h:U\subset\mathbb{R}^N\to I\subset\mathbb{R}$$

τέτοια ώστε να ισχύει τοπικά η ισοδυναμία:

$$f(u,x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=h(u).$$

Ο προβληματισμός έχει λοιπόν να κάνει με τη δυνατότητα απεμπλοκής των μεταβλητών x και u που υπεισέρχονται στη σχέση (*) και το ενδεχόμενο συσχετισμού τους διαμέσου μιας τοπικής συναρτησιακής τους σχέσης. Επιπλέον, σε περίπτωση καταφατικής απάντησης, θα θέλαμε να μάθουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις η συνάρτηση *απεμπλοκής* που ορίζει τη συναρτησιακή σχέση είναι διαφορίσιμη και τότε θα λέμε ότι πρόκειται για *διαφορική συναρτησιακή σχέση*.

- Στην περίπτωση $N=1$, στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ θεωρούμε τις *σχέσεις*:

  $$\text{(i)}\quad x^2-u=0,\qquad \text{(ii)}\quad x^3-u=0,\qquad \text{(iii)}\quad x^3-u^2=0\ .$$

  Εξετάστε αν οι σχέσεις αυτές είναι (α) *συναρτησιακά απεμπλέξιμες*, (β) *διαφορικά συναρτησιακά απεμπλέξιμες*, και προσδιορίστε τη *συνάρτηση απεμπλοκής* και το ευρύτερο *χωρίο απεμπλοκής* και *διαφορικής απεμπλοκής* τους μέσα στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

- Στην περίπτωση $N=1$, στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ θεωρούμε τις *σχέσεις*:

  $$\text{(i)}\quad x^3-x-u=0,\qquad \text{(ii)}\quad x^3-x-u^2=0,\qquad \text{(iii)}\quad x^3-x^2+u=0\ ,$$

  $$\text{(iv)}\quad x^3-x^2+u^2=0,\quad \text{(v)}\quad x^4-x^3+u=0,\quad \text{(vi)}\quad x^4-x^3+u^2=0,$$

  $$\text{(vii)}\quad x^3-x^2+3ux-u=0.$$

  Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις, σχεδιάστε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων του ευκλείδειου επιπέδου την καμπύλη που ορίζεται από την αντίστοιχη σχέση, θεωρώντας τη μεταβλητή u ως τετμημένη και τη μεταβλητή x ως τεταγμένη. Κατόπιν, εντοπίστε στο ευκλείδειο επίπεδο τα σημεία (u_o,x_o) στα οποία πληρούται η αντίστοιχη εξίσωση, εξετάζοντας πρώτα την απλή περίπτωση όπου $u_o=0$. Τοπικά, σε κάθε ένα από αυτά τα σημεία, εξετάστε αν η αντίστοιχη σχέση είναι (α) *συναρτησιακά απεμπλέξιμη*, (β) *διαφορικά συναρτησιακά απεμπλέξιμη*, και προσδιορίστε τη *συνάρτηση απεμπλοκής* και το ευρύτερο *χωρίο απεμπλοκής* και *διαφορικής απεμπλοκής* της μέσα στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Τέλος, διαπιστώστε κατά πόσο στα σημεία αυτά ισχύει η συνθήκη:

  $$\partial_x f(u_o,x_o)\neq 0.$$

- Στα προηγούμενα παραδείγματα, αν δεν το έχετε ήδη πράξει και εφόσον είναι εφικτό, εκφράστε τοπικά τη *σχέση* (*) διαμέσου μιας συνάρτησης g ως εξής:

  $$u=g(x)\quad\Leftrightarrow\quad f(u,x)=0.$$

  Εξετάστε, στις καταφατικές περιπτώσεις, τη σχέση αυτής της συνάρτησης με τη ζητούμενη *συνάρτηση απεμπλοκής* στο χωρίο απεμπλοκής μέσα στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

- Θυμηθείτε την απόδειξη του θεωρήματος *τοπικής αντιστροφής* για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής που δηλώνει ότι κάθε συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη με μη μηδενική παράγωγο σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι τοπικά αντιστρέψιμη στην περιοχή αυτού του σημείου και η αντίστροφη συνάρτηση δέχεται στο αντίστοιχο σημείο του πεδίου ορισμού της παράγωγο ίδιας τάξης. Διαπιστώστε το πώς υπεισέρχεται αυτό το θεώρημα στα προηγούμενα παραδείγματα, στα σημεία όπου είναι εφικτή η εφαρμογή του, ελέγχοντας την τοπική παραγωγισιμότητα της συνάρτησης απεμπλοκής, (περίπτωση $N=1$).

- Στις ακόλουθες εκδοχές προσδιορίστε τα ευρύτερα χωρία του καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ στα οποία βρίσκει εφαρμογή το θεώρημα τοπικής αντιστροφής:

$$\text{(i)} \quad u=\sin x, \qquad \text{(ii)} \quad u=\cos x, \qquad \text{(iii)} \quad u=\tan x,$$

$$\text{(iv)} \quad u=\mathrm{s}h\,x, \qquad \text{(v)} \quad u=\mathrm{c}h\,x, \qquad \text{(vi)} \quad u=\mathrm{t}h\,x.$$

- Ας θεωρήσουμε τώρα τη μεταβλητή u που υπεισέρχεται στη *σχέση* (*) ως παράμετρος και για κάθε τιμή της παίρνουμε τη συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής:

$$f_u(x)=f(u,x).$$

Προσδιορίστε τα σημεία *απλού μηδενισμού* των ακόλουθων *παραμετρικών* συναρτήσεων για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $u=u_o$ και διαπιστώστε ότι τα σημεία αυτά χαρακτηρίζονται ως εξής:

$$f_{u_o}(x_o)=0, \quad f'_{u_o}(x_o)\neq 0.$$

$$\text{(i)} \quad f_u(x)=x^3-x-u, \qquad \text{(ii)} \quad f_u(x)=x^3-x-u^2, \qquad \text{(iii)} \quad f_u(x)=x^3-x^2+u,$$

$$\text{(iv)} \quad f_u(x)=x^3-x^2+u^2, \quad \text{(v)} \quad f_u(x)=x^4-x^3+u, \quad \text{(vi)} \quad f_u(x)=x^4-x^3+u^2,$$

$$\text{(vii)} \quad f_u(x)=x^3-x^2+3ux-u.$$

- Σε κάθε σημείο απλού μηδενισμού των προηγούμενων παραμετρικών συναρτήσεων, διαπιστώστε την ύπαρξη ανοιχτής περιοχής U του u_o και ανοιχτής περιοχής I του x_o τέτοιων ώστε, για κάθε $u\in\mathrm{U}$ υπάρχει ένα μοναδικό σημείο απλού μηδενισμού της συνάρτησης $f_u(x)$ μέσα στο διάστημα I. Επίσης, διαπιστώστε, στα παραδείγματα αυτά, τη διαφορισιμότητα της συνάρτησης που σε κάθε τιμή της παραμέτρου $u\in\mathrm{U}$ προσαρτά το αντίστοιχο σημείο απλού μηδενισμού $x\in\mathrm{U}$ της παραμετρικής συνάρτησης $f_u(x)$:

$$\mu_f:\mathrm{U}\to\mathrm{I}.$$

Εξετάστε την ισχύ του συμπεράσματός σας στα σημεία πολλαπλού μηδενισμού των προηγούμενων παραμετρικών συναρτήσεων, εφόσον υπάρχουν τέτοια σημεία.