ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2015-16

ΜΑΘΗΜΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ης ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Ανασκόπηση προγενέστερων γνώσεων

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Θυμηθείτε το πρώτο ουσιώδες συμπέρασμα που συναντήσατε στη Γραμμική Άλγεβρα Ι :

" Κάθε n-διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος είναι ισόμορφος με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ "

Σκεφτείτε : Με ποιους συλλογισμούς οδηγηθήκατε σε αυτό το συμπέρασμα ; Ποιο είναι το νόημα του όρου "ισομορφισμός" και ποιο σκοπό εξυπηρετεί η θεώρησή του ; Πώς κατασκευάζεται ένας ισομορφισμός και τι σημαίνει ο όρος "κανονικός ισομορφισμός" ;

Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο :

$$E = \left\{ aX^2 + bX + c \,/\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Πρόκειται για 3-διάστατο πραγματικό διανυσματικό χώρο, άρα ισόμορφο με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$. Για να αποδείξετε την ισομορφική αυτή ταύτιση αρκεί να κατασκευάσετε έναν ισομορφισμό και για το σκοπό αυτό σας προτείνουμε να χρησιμοποιήσετε την ακόλουθη γραμμική απεικόνιση :

$$\varphi : E \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(aX^2 + bX + c) = (a,b,c).$$

- Διαπιστώστε ότι διαμέσου αυτού του ισομορφισμού ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^3$ διαμερίζεται σε τρία υποσύνολα τα οποία αντιστοιχούν στα στοιχεία του E που έχουν (i) διπλή ρίζα, (ii) πραγματικές διακριτές ρίζες, (iii) μιγαδικές ρίζες. Τα υποσύνολα αυτά έχουν δομή διανυσματικού υπόχωρου ; Σχεδιάστε το υποσύνολο Σ των σημείων του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ που αναπαριστούν τα στοιχεία του E τα οποία έχουν διπλή ρίζα και προσδιορίστε τα δυο άλλα υποσύνολα του διαμερισμού ως προς το Σ.

- Προσδιορίστε τον πυρήνα και την εικόνα της γραμμικής απεικόνισης που σε κάθε πολυώνυμο του Ε προσαρτά την παράγωγό του:

$$f : E \to E, \quad f(P(x)) = P'(x).$$

Σχεδιάστε τους διανυσματικούς υπόχωρους $\varphi(Kerf)$ και $\varphi(Imf)$ του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$.
Επίσης, σχεδιάστε τα υποσύνολα $\varphi \circ f(\varphi^{-1}(\Sigma))$ και $\varphi \circ f(\varphi^{-1}({}^c\Sigma))$ στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$.

- Προσδιορίστε τις βάσεις Β και Β΄ του διανυσματικού χώρου E που ταυτίζονται με την κανονική βάση του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ διαμέσου των αντίστοιχων ισομορφισμών :

$$\varphi : E \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(aX^2 + bX + c) = (a,b,c) \quad \text{και} \quad \psi : E \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(P(x)) = (P(0), P(1), P(2)).$$

- Γράψτε σε κάθε μια από αυτές τις βάσεις τον αντίστοιχο πίνακα Μ και Μ΄ του ενδομορφισμού:

$$f : E \to E, \quad f(P(x)) = P'(x).$$

Προσδιορίστε τον πίνακα αλλαγής βάσης που οδηγεί στη σχέση:

$$M' = P^{-1} M P.$$

- Υπάρχει βάση του χώρου Ε στην οποία ο πίνακας του ενδομορφισμού f είναι διαγώνιος ;

ΑΣΚΗΣΗ 2. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο Μ των πραγματικών πινάκων 3×3.

- Αποδείξτε ότι ο διανυσματικός χώρος Μ είναι ισόμορφος με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^9$.
- Αποδείξτε ότι το σύνολο S των συμμετρικών πινάκων και το σύνολο Α των αντισυμμετρικών πινάκων 3×3 είναι διανυσματικοί υπόχωροι του Μ, υπολογίστε τις διαστάσεις τους και αποδείξτε ότι:

$$\mathcal{M} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

- Ποια είναι η φύση των ιδιοτιμών των στοιχείων του χώρου S και του χώρου Α ;

ΑΣΚΗΣΗ 3. Θεωρούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο Μ των πραγματικών πινάκων 3×3 και συμβολίζουμε τα στοιχεία του ως εξής :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

- Προσδιορίστε τον πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης:

$$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^3, \quad f(M) = \left(a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3, c_1 + c_2 + c_3\right).$$

- Ποια είναι η διαφορά αυτού του πυρήνα με το υποσύνολο του χώρου Μ που ορίζεται ως εξής:

$$\sum_{i=1,2,3} a_i = 1, \quad \sum_{i=1,2,3} b_i = 1, \quad \sum_{i=1,2,3} c_i = 1 \quad ;$$

- Υπολογίστε τη διάσταση των διανυσματικών υπόχωρων $\mathcal{A} \cap Kerf$ και $\mathcal{S} \cap Kerf$ του Μ.
- Υπολογίστε τη διάσταση του διανυσματικού υπόχωρου $\mathcal{K}$ του Μ που αποτελείται από τους πίνακες:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

- Υπολογίστε τη διάσταση των διανυσματικών υπόχωρων $\mathcal{K} \cap Kerf$, $\mathcal{K} \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{K} \cap \mathcal{A}$ του Μ.
- Προσδιορίστε τον πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης (*ίχνος πίνακα*):

$$Tr : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \quad Tr(M) = a_1 + b_2 + c_3,$$

  και τη σχέση του με τους πυρήνες των γραμμικών απεικονίσεων:

$$Tr : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \quad Tr : \mathcal{S} \to \mathbb{R}, \quad Tr : \mathcal{K} \to \mathbb{R}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4. Αν οι πίνακες $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}$ πληρούν τη συνθήκη $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ αποδείξτε ότι:

$$\left(\mathrm{A} + \mathrm{B}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n-k}.$$

- Εξετάστε αν ο προηγούμενος τύπος του διωνύμου ισχύει για κάθε ζεύγος πινάκων $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}$.
