ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ακαδημαϊκό έτος 2015-16

ΜΑΘΗΜΑ

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Καθηγητής: Σ. Πνευματικός

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11^{ης} ΕΒΔΟΜΑΔΑΣ

Αναγωγή σε πρότυπες τετραγωνικές μορφές (αλγόριθμος Gauss-θεώρημα Sylvester)

Κάθε τετραγωνική μορφή $q : E \to \mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα πραγματικό n-διάστατο διανυσματικό χώρο E, μπορεί να εκφραστεί σε κατάλληλο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων ως εξής:

$$q(X) = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_k^2,\ \ k \le n,\ \ \forall X \in E\ .$$

Σχόλιο 1. Αυτό σημαίνει την ύπαρξη βάσης του δυϊκού χώρου E^* : $\ell_i \in E^*$, $i = 1,\ldots,n$, τέτοιας ώστε:

$$q(x) = \ell_1^2(x) + \ldots + \ell_p^2(x) - \ell_{p+1}^2(x) - \ldots - \ell_k^2(x),\ \ \forall x \in E\ ,$$

Σχόλιο 2. Η αντίστοιχη διγραμμική συμμετρική μορφή:

$$s(X,Y) = \frac{1}{2}\Big(q(X+Y) - q(X) - q(Y)\Big),\ \ \forall X, Y \in E\ ,$$

στη βάση αυτή του δυϊκού χώρου E^* εκφράζεται ως εξής:

$$s(x,y) = \ell_1(x)\ell_1(y) + \ldots + \ell_p(x)\ell_p(y) - \ell_{p+1}(x)\ell_{p+1}(y) - \ldots - \ell_k(x)\ell_k(y),\ \ \forall x, y \in E\ ,$$

και στο αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται στο χώρο E προκύπτει:

$$s(X,Y) = X_1Y_1 + \ldots + X_pY_p - X_{p+1}Y_{p+1} - \ldots - X_kY_k,\ \ k \le n,\ \ \forall X, Y \in E\ .$$

Σχόλιο 3. Αυτό σημαίνει την ύπαρξη βάσης του χώρου E στην οποία ο πίνακας της αντίστοιχης διγραμμικής συμμετρικής μορφής (: της τετραγωνικής μορφής) γράφεται ως εξής:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & 0 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Αναγωγικός αλγόριθμος του Gauss. Η ύπαρξη βάσης στο χώρο Ε στην οποία προκύπτει η κανονική έκφραση μιας τετραγωνικής μορφής αποδεικνύεται επαγωγικά στο πλήθος των μεταβλητών της και η κατασκευή μιας τέτοιας βάσης πραγματοποιείται αλγοριθμικά. Ας δούμε πρώτα μια απλή περίπτωση:

$$q(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2\ .$$

Παρατηρούμε ότι:

$$q(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = a(x_1^2 + \frac{b}{a}x_1x_2) + cx_2^2 = a(x_1 + \frac{b}{2a}x_2)^2 + (c - \frac{b^2}{4a})x_2^2$$

και θέτοντας:

$$X_1 = a^{1/2}(x_1 + \frac{b}{2a}x_2),\ X_2 = (c - b^2/4a)^{1/2}x_2\,,$$

προκύπτει το νέο σύστημα γραμμικών συντεταγμένων στο E όπου:

$$q(X) = X_1^2 + X_2^2\,.$$

Εδώ, για να ισχύσει η συλλογιστική υποθέσαμε $a \neq 0$, διαφορετικά θα κάναμε την ανάλογη διαδικασία υποθέτοντας $c \neq 0$, αλλά ακόμη και αν $a = c = 0$, μπορούμε να γράψουμε:

$$q(x) = bx_1x_2 = \frac{b}{4}((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2) \Rightarrow\ q(X) = X_1^2 - X_2^2,\ \text{με}\ X_1 = \frac{\sqrt{b}}{2}(x_1 + x_2),\ X_2 = \frac{\sqrt{b}}{2}(x_1 - x_2)\,.$$

Άσκηση. Σχεδιάστε στο ευκλείδειο επίπεδο τους νέους άξονες συντεταγμένων επιλέγοντας αριθμητικές τιμές της αρεσκείας σας για τους συντελεστές a, b, c. Το νέο σύστημα είναι ορθοκανονικό;

Θεωρούμε τώρα μια τετραγωνική μορφή στο E και επιλέγοντας μια βάση $e_1, ..., e_n$ του E γράφουμε:

$$q(x) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{1 \le i \le n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij}x_ix_j\ ,\quad a_{ij} = s(e_i, e_j),\ i,j = 1, ..., n\,.$$

Ο αλγόριθμος του Gauss έχει ως ζητούμενο την ελάττωση του πλήθους των μεταβλητών που υπεισέρχονται στην έκφραση της τετραγωνικής μορφής από *n* σε *k*, όπου $k = rank\, q$:

$$q(X) = q(X_1, ..., X_n) = X_1^2 + ... + X_p^2 - X_{p+1}^2 - ... - X_k^2,\ \forall X \in E\,.$$

Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις ανάλογα με το αν στην αρχική έκφραση της τετραγωνικής μορφής εμφανίζεται ή όχι τουλάχιστο ένας όρος x_i^2. Αν ναι, έστω ότι πρόκειται για το $i = 1$, ομαδοποιούμε τους όρους που περιέχουν το x_1:

$$q(x) = a_{11}\left(x_1^2 + x_1\mathrm{A}(x_2, ..., x_n)\right) + C(x_2, ..., x_n) = a_{11}(x_1 + \frac{1}{2}\mathrm{A}(x_2, ..., x_n))^2 - a_{11}\frac{1}{4}\mathrm{A}(x_2, ..., x_n)^2 + C(x_2, ..., x_n)\,.$$

Έτσι προκύπτει ο πρώτος όρος της τετραγωνικής αποσύνθεσης και μια νέα τετραγωνική μορφή q' στην οποία δεν εμφανίζεται πλέον η μεταβλητή x_1:

$$q(x) = a_{11}\ell_1^2(x) + q'(x)\,.$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία τώρα στην q' ως προς x_2 εκτός και αν δεν υπάρχει ο όρος x_2^2 οπότε συνεχίζουμε έως ότου εξαντληθούν όλοι οι όροι x_i^2. Όταν εξαντληθούν οι όροι x_i^2 τότε περνάμε σε άλλη συλλογιστική. Είναι σαν να έχουμε μια τετραγωνική μορφή που στην αρχική της έκφραση δεν υπεισέρχονται όροι x_i^2 αλλά μόνο x_ix_j, οπότε επιλέγουμε έναν τέτοιο όρο, π.χ. x_1x_2, και ομαδοποιούμε τους όρους που περιέχουν x_1 ή x_2 ως εξής:

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{12}\left(x_1x_2 + x_1\mathrm{A}(x_3, ..., x_n) + x_2\mathrm{B}(x_3, ..., x_n)\right) + C(x_3, ..., x_n) = \\ &= a_{12}\left((x_1 + \mathrm{B}(x_3, ..., x_n))(x_2 + \mathrm{A}(x_3, ..., x_n))\right) - a_{12}\mathrm{A}(x_3, ..., x_n)\mathrm{B}(x_3, ..., x_n) + C(x_3, ..., x_n) = \\ &= a_{12}\ell_1'(x)\ell_2'(x) + q'(x) = \frac{a_{12}}{4}\left(\ell_1'(x) + \ell_2'(x)\right)^2 - \frac{a_{12}}{4}\left(\ell_1'(x) - \ell_2'(x)\right)^2 + q'(x)\ . \end{aligned}$$

.

Έτσι προκύπτουν οι δυο πρώτοι όροι της τετραγωνικής αποσύνθεσης και μια νέα τετραγωνική μορφή q' στην οποία δεν εμφανίζεται πλέον οι μεταβλητές x_1, x_2 :

$$q(x) = \frac{a_{12}}{4}\ell_1^2(x) - \frac{a_{12}}{4}\ell_2^2(x) + q'(x) .$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία τώρα στην q' ως προς τις επόμενες μεταβλητές και στα διαδοχικά στάδια χρησιμοποιούμε ανάλογα τη μια ή την άλλη συλλογιστική έως ότου εξαντληθούν όλοι οι όροι.

Σχόλιο 4. Οι γραμμικές μορφές $\ell_i \in E^*$, $i = 1,...,k$, που προκύπτουν από τον αλγόριθμο του Gauss είναι γραμμικά ανεξάρτητες και μπορούν να συμπληρωθούν ώστε να συγκροτηθεί μια βάση του δυϊκού χώρου E^* : $\ell_i \in E^*$, $i = 1,...,n$, και συνακόλουθα μια βάση του E : $\varepsilon_i \in E$ με $\varepsilon_i^* = \ell_i$, $i = 1,...,n$, από την οποία απορρέει το σύστημα των γραμμικών συντεταγμένων που δηλώνεται στο θεώρημα Sylvester και ισχύει:

$$s(X,Y) = {}^t X \mathcal{M} Y = X_1 Y_1 + ... + X_p Y_p - X_{p+1} Y_{p+1} - ... - X_k Y_k, \;\; k \le n, \;\; \forall X, Y \in E .$$

Σχόλιο 5. Ο αριθμός *k* των μη μηδενικών όρων που υπεισέρχονται στην κανονική έκφραση μιας τετραγωνικής μορφής (: διγραμμικής συμμετρικής μορφής) είναι το *rank* του πίνακα $\mathcal{M}$.
Το πλήθος των μηδενικών όρων που δεν εμφανίζονται σε αυτή την κανονική έκφραση, *n-k*, δίνει τη διάσταση του πυρήνα της τετραγωνικής μορφής, δηλαδή την τάξη εκφυλισμού της.
Όταν *k=n*, δηλαδή όταν ο πυρήνας είναι μηδενικός, αυτό δεν σημαίνει ότι η διγραμμική συμμετρική μορφή είναι οπωσδήποτε θετικά ορισμένη, δηλαδή ότι ορίζεται εσωτερικό γινόμενο, γιατί ενδεχομένως ο κώνος ισοτροπίας να μην είναι μηδενικός.
Π.χ. η τετραγωνική μορφή από την οποία απορρέει η *μετρική Minkowski*:

$$q(X) = X_1^2 + ... + X_p^2 - X_{p+1}^2 - ... - X_n^2, \;\; X \in E .$$

Αν *p=n*, τότε προκύπτει η τετραγωνική μορφή από όπου απορρέει η *ευκλείδεια μετρική*:

$$q(X) = X_1^2 + ... + X_n^2, \;\; X \in E .$$

Θα σημειώνουμε p^+, p^-, p^o αντίστοιχα το πλήθος των θετικών, αρνητικών, μηδενικών όρων που υπεισέρχονται στην κανονική έκφραση μιας τετραγωνικής μορφής και θα καλούμε *signum*:

$$sgn(q) = (p^+, p^-, p^o) .$$

Άσκηση. Εφαρμόστε τον αναγωγικό αλγόριθμο του Gauss και διαπιστώστε τη συνέπεια του θεωρήματος Sylvester στις ακόλουθες τετραγωνικές μορφές που ορίζονται στην κανονική βάση του αντίστοιχου ευκλείδειου χώρου ως εξής:

$$q(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 - 8x_2x_3 , \quad q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 , \quad q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_4 .$$

Υπόδειξη:

$\ell_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 - x_2$, $\ell_2(x_1,x_2,x_3) = x_2 + \frac{4}{3}x_3$, $\ell_3(x_1,x_2,x_3) = x_3$, $\quad q = 2\ell_1^2 - 3\ell_2^2 + (16/3)\ell_3^2$, $sgn(q) = (2,1,0)$.

$\ell_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$, $\ell_2(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$, $\quad q = \ell_1^2 - \ell_2^2$, $sgn(q) = (1,1,1)$.

$\ell_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_2 + 2x_3$, $\ell_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 - x_2$, $\ell_3(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_3 - \frac{1}{2}x_4$, $\ell_4(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_4$,

$$q = (1/4)\ell_1^2 - (1/4)\ell_2^2 - \ell_3^2 + (16/3)\ell_4^2 , \quad sgn(q) = (2,2,0) .$$

Προσδιορίστε τον πίνακα αλλαγής βάσης από την κανονική βάση σε εκείνη που υποδεικνύει ο αλγόριθμος του Gauss και συγκεκριμένα εκείνη που εσείς μπορείτε να κατασκευάσετε αξιοποιώντας τον αλγόριθμο του Gauss. Η βάση αυτή είναι ορθογώνια; ορθοκανονική; Είναι μοναδική για κάθε τετραγωνική μορφή; Πώς υπεισέρχεται ο πίνακας αλλαγής βάσης στη σχέση που οδηγεί στην έκφραση την οποία υποδεικνύει το θεώρημα Sylvester;