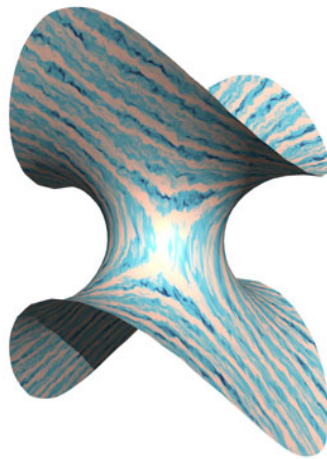


Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Χειμερινό εξάμηνο ακαδημαϊκού έτους 2017-2018,
Διδάσκων: Α.Τόγκας



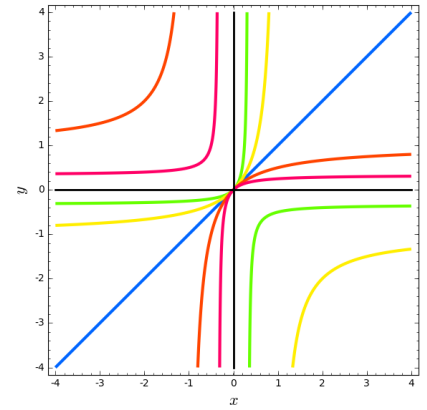
1ο φύλλο προβλημάτων

Όνοματεπώνυμο - ΑΜ: _____

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε την ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ)

$$x^2 u_x + y^2 u_y = (x + y) u, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.1)$$

- α) *i)* Είναι ο y -άξονας ($x = 0$), και ο x -άξονας ($y = 0$) χαρακτηριστικές της ΜΔΕ;
 - ii)* Να βρεθεί μια μονοπαραμετρική σχέση που περιγράφει το σύνολο των χαρακτηριστικών καμπυλών της ΜΔΕ στο xy -επίπεδο, η οποία όμως δεν περιλαμβάνει του άξονες x, y .
 - iii)* Να βρεθεί η χαρακτηριστική που διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.
- β) Στο διπλανό σχήμα απεικονίζονται κάποια ενδεικτικά μέλη του συνόλου των χαρακτηριστικών της ΜΔΕ στο xy -επίπεδο. Να αποδείξετε ότι όλες οι χαρακτηριστικές της ΜΔΕ διέρχονται από το σημείο $(0, 0)$.¹
- γ) Να βρεθεί η γενική λύση της ΜΔΕ (1.1).
- δ) Έχει το ΠΑΤ που απαρτίζεται από την ΜΔΕ (1.1) και την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = 0$ μοναδική λύση; Αν δινόταν η αρχική συνθήκη $u(0, y) = 0$, αλλάζει κάτι στην απάντησή σας; Δικαιολογήστε.²
- ε) Έχει το ΠΑΤ που απαρτίζεται από την ΜΔΕ (1.1) και την αρχική συνθήκη $u(x, x) = x^2$ μοναδική λύση; Δικαιολογήστε.
- στ) Να βρεθεί η μοναδική λύση της ΜΔΕ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(x, -x) = x, -\infty < x < \infty$, και να βρεθεί το χωρίο που ισχύει η λύση που βρήκατε.



Σχήμα 1: Χαρακτηριστικές της ΜΔΕ (1.1).

¹ Αποδείξτε ότι κάθε χαρακτηριστική που βρήκατε στο α.ii) μέρος (εκτός από αυτή που διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$) είναι η ένωση δυο ξένων καμπυλών, που η μια από αυτές διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$.

² Θεωρήστε την μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων $u(x, y) = c x y$, με $c \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2. Θεωρούμε την ακόλουθη ΜΔΕ

$$u (x u_x - y u_y) = (y^2 - x^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

- α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές της ΜΔΕ (2.1) και να σχεδιασθεί ένα αντιπροσωπευτικό υποσύνολό τους στο $x - y$ επίπεδο. Να βρεθεί η χαρακτηριστική που διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.
- β) Να βρεθεί η γενική λύση της ΜΔΕ (2.1).
- γ) Να βρεθεί η ολοκληρωτική επιφάνεια $z = u(x, y)$ της ΜΔΕ (2.1), η οποία διέρχεται από τον κύκλο

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1.$$

Τι παριστάνει γεωμετρικά η επιφάνεια που βρήκατε;

Πρόβλημα 3. Θεωρούμε την ακόλουθη ΜΔΕ

$$x (y^2 + u) u_x - y (x^2 + u) u_y = (x^2 - y^2) u, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.1)$$

- α) Να διατυπωθεί το σύστημα των ΣΔΕ που ορίζουν οι χαρακτηριστικές της ΜΔΕ (3.1) στον \mathbb{R}^3 .

β) Να αποδειχθεί ότι δυο ολοκληρώματα του συστήματος ΣΔΕ των χαρακτηριστικών είναι τα

$$x y z = c_1, \quad x^2 + y^2 - 2 z = c_2.$$

γ) Να βρεθεί μια γενικού τύπου λύση της ΜΔΕ (3.1).

δ) Να βρεθεί η ολοκληρωτική επιφάνεια $z = u(x, y)$ της ΜΔΕ (3.1), η οποία διέρχεται από την ευθεία

$$x + y = 0, \quad z = 1.$$

Πρόβλημα 4. Θεωρούμε την ακόλουθη ΜΔΕ

$$y^2 (x - y) u_x + x^2 (y - x) u_y = (x^2 + y^2) u, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.1)$$

α) Να διατυπωθεί το σύστημα των ΣΔΕ που ορίζουν οι χαρακτηριστικές της ΜΔΕ (4.1) στον \mathbb{R}^3 .

β) Να αποδειχθεί ότι δυο ολοκληρώματα του συστήματος ΣΔΕ των χαρακτηριστικών δίνονται από τις σχέσεις

$$x^3 + y^3 = c_1, \quad x - y = c_2 z.$$

γ) Με την βοήθεια ενός υπολογιστικού προγράμματος να σχεδιάσετε ένα αντιπροσωπευτικό υποσύνολο των χαρακτηριστικών της ΜΔΕ στο $x - y$ επίπεδο. Να βρεθεί η χαρακτηριστική που διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.

δ) Να βρεθεί μια γενικού τύπου λύση της ΜΔΕ (4.1).

ε) Να βρεθεί η μοναδική λύση του ΠΑΤ που απαρτίζεται από την ΜΔΕ (4.1) και την συνθήκη $u(x, 0) = x^{-2}$.

Πρόβλημα 5. Θεωρούμε την ακόλουθη ΜΔΕ

$$(x - y) u_x + (y - x - u) u_y = u, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (5.1)$$

α) Να διατυπωθεί το σύστημα των ΣΔΕ που ορίζουν οι χαρακτηριστικές της ΜΔΕ (5.1) στον \mathbb{R}^3 , και να λυθεί αναλυτικά.

β) Να αποδειχθεί ότι δυο ολοκληρώματα του συστήματος ΣΔΕ των χαρακτηριστικών δίνονται από τις σχέσεις

$$x + y + z = c_1, \quad y = x + z + c_2 z^2.$$

γ) Να βρεθεί μια γενικού τύπου λύση της ΜΔΕ (5.1).

δ) Να βρεθεί η ολοκληρωτική επιφάνεια $z = u(x, y)$ της ΜΔΕ (5.1), η οποία διέρχεται από την ευθεία που δίνεται παραμετρικά από τις σχέσεις

$$x = s, \quad y = s, \quad z = -4s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 6. Θεωρούμε το ακόλουθο ΠΑΤ για την μη-γραμμική ΜΔΕ της μεταφοράς

$$u_t + u u_x = 0, \quad u(x, 0) = \frac{1}{(1 + x^2)^2} \quad (5.1)$$

Παράγει η λύση του ΠΑΤ ένα ωστικό κύμα;

- α) Αν ναι, να βρεθεί η χρονική στιγμή και η χωρική θέση που εκδηλώνεται το ωστικό κύμα.
- β) Αν όχι, εξηγήστε τι συμβαίνει στη λύση καθώς ο χρόνος αυξάνεται θετικά.