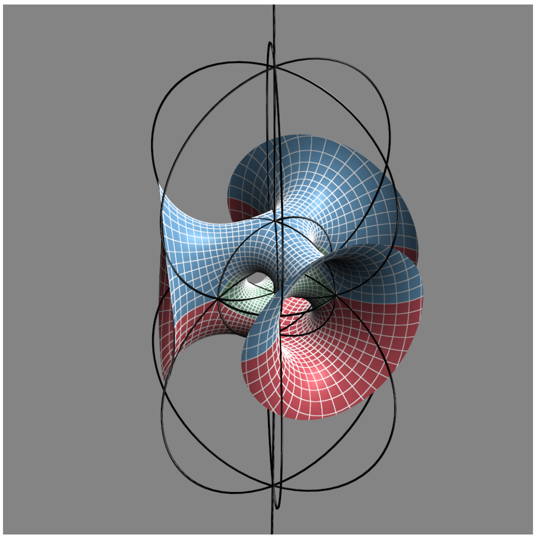
Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Χειμερινό εξάμηνο ακαδημαϊκού έτους 2017-2018,
Διδάσκων Α.Τόγκας

i



2ο φύλλο προβλημάτων

Ονοματεπώνυμο - ΑΜ: ____

Πρόβλημα 1. Θεωρήστε το ακόλουθο ΠΑΤ της κυματικής εξίσωσης για την άπειρη χορδή $(-\infty < x < \infty)$,

$$u_{tt} = u_{xx}\,, \quad u(x,0) = f(x)\,, \quad u_t(x,0) = 0\,,$$

όπου

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|\,, & |x| < 1\,, \\ 0\,, & |x| \geq 1\,. \end{cases}$$

α) Σχεδιάστε και περιγράψτε αναλυτικά τις περιοχές του $x\,t$ - επιπέδου, με $t \geq 0$, στα οποία η λύση $u(x,t)$ του ΠΑΤ είναι μή-μηδενική.

β) Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = u(x,3)$, και σχεδιάστε το γράφημά της.

Πρόβλημα 2.

α) Έστω $F(x,t)$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$, και $\Delta(x,t)$ το χωρίο εξάρτησης του σημείου (x,t), για την κυματική εξίσωση

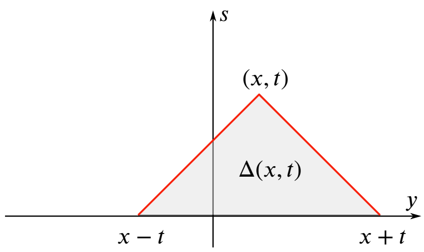
$$u_{tt} = c^2\,u_{xx} + F(x,t)\,, \quad -\infty < x < \infty\,, \quad t > 0\,. \tag{2.1}$$

Χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού αποδείξτε με απ'ευθείας παραγωγίσεις ότι η συνάρτηση

$$u(x,t) = \frac{1}{2\,c}\iint_{\Delta(x,t)} F(y,s)\,dy\,ds\,,$$

ικανοποιεί την ΜΔΕ (2.1) με μηδενικές αρχικές συνθήκες

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0\,.$$



Σχήμα 1: Χωρίο καθορισμού του σημείου (x,t)

β) Βρείτε όλες τις συχνότητες συντονισμού της κυματικής εξίσωσης με ταχύτητα κύματος c, και εξωτερική δύναμη εξαναγκασμού

$$F(x,t) = \sin\omega\,t\,\sin k\,x\,,$$

για δοσμένες πραγματικές σταθερές $\omega, k > 0$.

Συχνότητες συντονισμού είναι εκείνες οι τιμές του ω για τις οποίες η $u(x,t)$ κατ'απόλυτη τιμή αποκλίνει στο άπειρο καθώς ο χρόνος απειρίζεται θετικά.

γ) Υποθέστε ότι η $u(x,t)$ ικανοποιεί το ΠΑΤ

$$u_{tt} = 4\,u_{xx} + \sin\omega\,t\,\sin x\,, \quad -\infty < x < \infty\,, \quad t > 0\,,$$

με αρχικές συνθήκες

$$u(x,t) = u_t(x,0) = 0\,.$$

Είναι η $h(t) = u(0,t)$ περιοδική συνάρτηση του t; Αν ναι, ποιά είναι η περίοδος;

Πρόβλημα 3. Η ΜΔΕ του τελέγραφου

$$u_{tt} + a\,u_t = u_{xx}\,, \qquad a > 0\,, \tag{3.1}$$

μοντελοποιεί την παλμική κίνηση μιας χορδής με απόσβεση λόγω τριβών. Έστω ότι η $u(x,t)$ είναι μια κλασική λύση της (3.1), στο διάστημα $0 < x < \ell$, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann και στα δυο άκρα:

Οι τριβές περιγράφονται από τον όρο $a\,u_t$.

$$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0\,.$$

α) Να αποδειχθεί ότι η *ολική μηχανική ενέργεια* της χορδής

$$E(t) = \int_0^{\ell} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}\,x\,,$$

είναι μια μη-αύξουσα συνάρτηση του t στο διάστημα $[0,\infty)$. [1]

[1] Αποδείξτε ότι $E'(t) \le 0$ για κάθε $t \in [0,\infty)$.

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του α) μέρους, αποδείξτε ότι το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned} u_{tt} + a\,u_t &= u_{xx} + F(x,t)\,, && 0 < x < \ell\,, \quad t > 0\,.\\ u(x,t) = f(x)\,, \quad u_t(x,t) &= g(x)\,, && 0 < x < \ell\,,\\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) &= 0\,, && t > 0\,, \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση.

Υποθέστε ότι υπάρχουν δυο λύσεις του ΠΑΣΤ, οι $u(x,t)$, και $v(x,t)$. Ποιό ΠΑΣΤ ικανοποιεί η διαφορά τους, $w = u - v$; Αποδείξτε ότι αναγκαστικά $w = 0$, και συνεπώς $u = v$.

Πρόβλημα 4. [2] Θεωρήστε το ακόλουθο ΠΑΣΤ για την κυματική εξίσωση για την πεπερασμένη χορδή στο διάστημα $[0,\pi]$.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0\,, && 0 < x < \pi\,, \quad t > 0\,,\\ u(x,0) = f(x) = x^2\,(x-\pi)^2\,, \quad u_t(x,0) &= g(x) = 0\,, && 0 < x < \pi\,,\\ u(0,t) = 0\,, \quad u_x(\pi,t) &= 0\,, && t \ge 0\,. \end{aligned}$$

α) Αποδείξτε ότι θεωρώντας περιττή επέκταση διαμέσου του "άκρου Dirichlet", και άρτια επέκταση των αρχικών δοσμένων διαμέσου του "άκρου Neumann", δηλαδή

$$\widetilde{f}(-x) = -\widetilde{f}(x)\,, \qquad \widetilde{f}(\pi - x) = \widetilde{f}(\pi + x)\,,$$

και αντίστοιχα για την $g(x)$, καταλήγουμε ότι οι επεκτάσεις $\widetilde{f}(x)$ και $\widetilde{g}(x)$ δίνονται από τους τύπους:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -f(2\pi + x)\,, & -2\pi \le x \le -\pi\,,\\ -f(-x)\,, & -\pi < x < 0\,,\\ f(x)\,, & 0 \le x \le \pi\,,\\ f(2\pi - x)\,, & \pi < x \le 2\pi\,, \end{cases} \qquad \widetilde{g}(x) = g(x) = 0\,.$$

β) Θεωρώντας 4π-περιοδική επέκταση της $\widetilde{f}(x)$, βρείτε τις ακόλουθες τιμές της λύσης $u(x,t)$ του ΠΑΣΤ

$$i) \quad u\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)\,, \qquad ii) \quad u\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)\,.$$

[2] Κατεβάστε το Mathematica notebook από την ιστοσελίδα του μαθήματος , εδώ.
"Τρέξτε" όλες τις περιπτώσεις, για το συγκεκριμένο παράδειγμα στο notebook, και δείτε πως διαφοροποιείται σε κάθε περίπτωση η κίνηση της χορδής.
Λύστε το Πρόβλημα 4 και επαληθεύστε ότι οι τιμές που βρήκατε στο υποερώτημα β) είναι ταυτόσημες με αυτές που δίνει η λύση στο notebook, επεμβαίνοντας κατάλληλα στον κώδικα, στην εντολή `Animate[Plot[...]]`, έτσι ώστε αντί να εκτελεί την γραφική παράσταση της λύσης να σας δώσει τις τιμές που σας ζητούνται.
Εναλλακτικά, μπορείτε να δείτε τον αντίστοιχο κώδικα σε Python εδώ και να κατεβάσετε το αντίστοιχο `.ipynb` αρχείο εδώ. Το `jupyter notebook` μπορεί να τρέξει και σε Sage!
Σε κάθε περίπτωση διαβάστε το εισαγωγικό κείμενο και προσπαθήστε να κατανοήσετε τον κώδικα που έχω φτιάξει. Είμαι σίγουρος ότι μπορείτε να φτιάξετε έναν καλύτερο κώδικα! Στείλτε τον κώδικά σας στο `email` μου.

Καλή διασκέδαση!