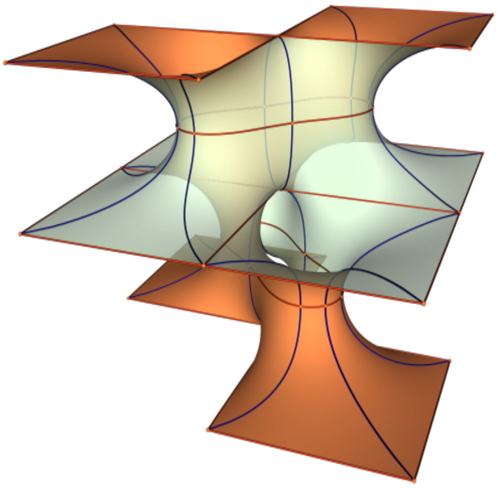
Πανεπιστήμιο Πατρών, Τμήμα Μαθηματικών

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Χειμερινό εξάμηνο ακαδημαϊκού έτους 2017-2018,
Διδάσκων: Α.Τόγκας



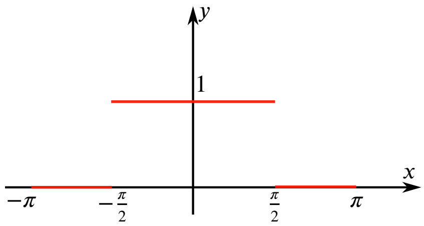
3ο φύλλο προβλημάτων

Ονοματεπώνυμο - ΑΜ: ______________________________

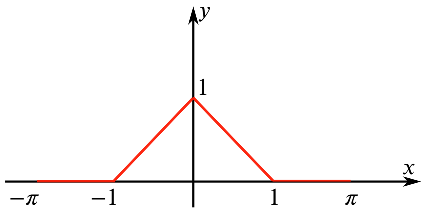
Πρόβλημα 1. Να βρεθεί η σειρά Fourier για κάθε μια από τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$i) \quad f(x) = \begin{cases} 1\,, & |x| < \frac{1}{2}\pi\,, \\ 0\,, & \frac{1}{2}\pi < |x| < \pi\,, \end{cases}$$

$$ii) \qquad f(x) = \begin{cases} 1 - |x|\,, & |x| < 1\,, \\ 0\,, & 1 < |x| < \pi\,, \end{cases}$$



Σχήμα 1: Η συνάρτηση “κουτί”.



Σχήμα 2: Η συνάρτηση “καπέλο”.

Πρόβλημα 2. Να βρεθούν οι σειρές Fourier των ακόλουθων συναρτήσεων[1]

$i) \quad f(x) = \cos x \, \sin^2 x\,, \quad ii) \quad f(x) = \cos^2 x \, \sin x\,, \quad iii) \quad f(x) = \cos^2 x \, \sin^2 x\,.$

[1] Χρησιμοποιήστε τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Πρόβλημα 3. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 1$, ορισμένη στο $[0, 1]$.

α) Να βρεθεί η σειρά Fourier ημιτόνων της $f(x) = 1$ στο $[0, 1]$ και να γραφούν αναλυτικά οι πρώτοι τρεις μη τετριμμένοι όροι της σειράς.[2]

β) Να βρεθεί η σειρά Fourier συνημιτόνων της $f(x) = 1$ στο $[0, 1]$.[3]

[2] Περιττή επέκταση

[3] Άρτια επέκταση, αν και η σειρά Fourier συνημιτόνων της $f(x)$ είναι προφανής.

Πρόβλημα 4. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[0, \pi]$ τέτοια ώστε

$$f(0) = 0\,, \quad \text{και} \quad f(\pi) = 0\,.$$

Έστω ότι b_k είναι ο k-οστός συντελεστής της σειράς Fourier ημιτόνων (περιττή επέκταση) της f, και B_k ο αντίστοιχος συντελεστής της δεύτερης παραγώγου f'' της f, δηλαδή

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, \sin(n\,x)\, d\,x\,, \qquad B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f''(x)\, \sin(n\,x)\, d\,x\,.$$

Να αποδειχθεί ότι $B_k = -n^2\, b_k$.[4]

[4] *Ολοκλήρωση κατά παράγοντες.*

Πρόβλημα 5. Έστω ότι η $y = f(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα I με μέσο το σημείο $x = 0$, και είναι n φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο I.

α) Αν η $y = f(x)$ είναι άρτια, τότε η n-τάξης παράγωγος $f^{(n)}(x)$ της $f(x)$ είναι άρτια; περιττή; τίποτα από τα δύο; μπορεί να είναι και τα δύο;

β) Αν η $y = f(x)$ είναι περιττή, τότε η n-τάξης παράγωγος $f^{(n)}(x)$ της $f(x)$ είναι άρτια; περιττή; τίποτα από τα δύο; μπορεί να είναι και τα δύο;

Εξετάστε την κάθε περίπτωση για n άρτιο και n περιττό θετικό ακέραιο.

Πρόβλημα 6. Θεωρούμε τη ΜΔΕ της *θερμότητας με απώλειες*

$$v_t + v = v_{xx}\,. \tag{6.1}$$

α) Έστω $v(x,t)$ οποιαδήποτε μη-σταθερή, κλασική λύση της ΜΔΕ (6.1) που ικανοποιεί τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες

$$v(-\pi,t) = v(\pi,t)\,, \quad v_x(-\pi,t) = v_x(\pi,t)\,. \tag{6.2}$$

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$N(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(v(x,t)\big)^2\, d\,x\,,$$

είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του t στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Αποδείξτε ότι $N'(t) < 0$ για κάθε t στο διάστημα $[0,\infty)$.

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του α) μέρους αποδείξτε ότι το ΠΑΣΤ

$$v_t + v = v_{xx} + F(x,t)\,.$$

$$v(x,0) = f(x)\,, \quad v(-\pi,t) = v(\pi,t)\,, \quad v_x(-\pi,t) = v_x(\pi,t)\,.$$

έχει μοναδική λύση.

Θεωρήστε δυο λύσεις v_1, v_2 του ΠΑΣΤ, βρείτε ποιο ΠΑΣΤ ικανοποιεί η $w = v_1 - v_2$, και αποδείξτε ότι $v_1 = v_2$.

γ) Να αποδειχθεί ότι η γενική λύση της ΜΔΕ (6.1) δίνεται από την σχέση $v(x,t) = e^{-t}\,u(x,t)$, όπου η $u(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση της θερμότητας $u_t = u_{xx}$.

δ) Χρησιμοποιώντας το γ) μέρος του προβλήματος να βρεθεί η λύση στη μορφή μιας σειράς Fourier του ΠΑΣΤ που απαρτίζεται από την ΜΔΕ (6.1), τις συνοριακές συνθήκες (6.2), και την αρχική συνθήκη

$$v(x,0) = \begin{cases} 1\,, & |x| \le \frac{\pi}{2}\,, \\ 0\,, & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi\,. \end{cases}$$

Μετατρέψτε το ΠΑΣΤ για την $v(x,t)$, σε ένα ΠΑΣΤ για την $u(x,t)$ η οποία ικανοποιεί την ΜΔΕ της θερμότητας. Λύστε το αντίστοιχο ΠΑΣΤ για την $u(x,t)$ και επιστρέψτε μέσω του μετασχηματισμού $v(x,t) = e^{-t}\,u(x,t)$ στην $v(x,t)$.

Για τους συντελεστές της σειράς Fourier χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα του Προβλήματος 1.*i*.

ε) Ποιά είναι η θερμοκρασία ισορροπίας $v(x,t)$ καθώς $t \to \infty$;

Πρόβλημα 7. Θεωρούμε το ακόλουθο ΠΑΣΤ για την εξίσωση της θερμότητας

$$u_t = u_{xx}\,, \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0\,, \quad u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \quad u(x,0) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x \le \frac{1}{2}\,, \\ 1 - x\,, & \frac{1}{2} < x \le 1\,. \end{cases}$$

α) Να γραφεί η λύση του ΠΑΣΤ στην μορφή μιας σειράς Fourier.

β) Χρησιμοποιώντας κατάλληλη τιμή για την μεταβλητή x στο ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της $u(x,0)$ που προκύπτει στο α) μέρος να αποδειχτεί ότι

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(2\,k-1)^2} + \cdots \qquad k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Πρόβλημα 8. Έστω ότι η $u(x,t)$ είναι μια κλασική λύση της εξίσωσης της θερμότητας $u_t = u_{xx}$ στο διάστημα $0 < x < 1$, και στα άκρα $x = 0$, $x = 1$ ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann

$$u_x(0,t) = 0\,, \quad u_x(1,t) = 0\,, \qquad 0 \le t < +\infty\,.$$

Η *θερμική ενέργεια* $\mathscr{T}$ της u στο χρόνο t ορίζεται ως εξής:

$$\mathscr{T}(t) = \int_0^1 u(x,t)\,dx\,.$$

Να δειχθεί ότι με τις παραπάνω υποθέσεις η $\mathscr{T}(t)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Πρόβλημα 9.

α) Έστω ότι η $u(x,t)$ είναι μια κλασική λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{tt} = u_{xx}$, και έστω E και P οι πυκνότητες ενέργειας και ορμής αντίστοιχα

$$E = \frac{1}{2}\left\{(u_t)^2 + (u_x)^2\right\}\,, \qquad P = u_t\,u_x\,.$$

i) Να αποδειχθεί ότι αν η $u(x,t)$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση, τότε ισχύει ότι

$$E_t - P_x = 0\,.$$

ii) Να αποδειχθεί ότι αν η $u(x,t)$ ικανοποιεί την κυματική εξίσωση, τότε και οι συναρτήσεις $E(x,t)$, $P(x,t)$ ικανοποιούν την κυματική εξίσωση.

β) Θεωρούμε το ακόλουθο ΠΑΣΤ

$$u_{tt} = u_{xx}\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad t > 0\,, \qquad u(x,0) = \sin^3 x\,, \qquad u_t(x,0) = 0\,,$$

με συνορικές συνθήκες τύπου Dirichlet στα άκρα

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,.$$

Με την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών να βρεθεί η λύση του παραπάνω ΠΑΣΤ στη μορφή μιας σειράς Fourier. [5]

[5] Χρησιμοποιήστε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\,\sin x - \frac{1}{4}\,\sin 3x\,,$$

για να βρείτε ότι η λύση του ΠΑΣΤ δίνεται σε κλειστή μορφή.

Τροποποιήστε την αρχική συνάρτηση $f(x) = x^2(x-\pi)^2$ στο Mathematica notebook `reflection_waves.nb`, στην $f(x) = \sin^3 x$ του παρόντος προβλήματος και βρείτε γραφικά την λύση του αντίστοιχου ΠΑΣΤ. Να εισαγάγετε μια νέα εντολή `Animate[Plot[...]]` που να απεικονίζει γραφικά την λύση που βρήκατε για το Πρόβλημα 7, και να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά που δίνει η μέθοδος επέκτασης των αρχικών δοσμένων.

Πρόβλημα 10. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ) για την κυματική εξίσωση

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \quad , \quad 0 < x < 1\,, \quad t > 0\,, \quad u(0,t) = 0\,, \quad u(1,t) = 0\,, \quad t \ge 0\,,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x \le \frac{1}{2}\,, \\ 1 - x\,, & \frac{1}{2} < x \le 1\,, \end{cases} \qquad u_t(x,0) = 0\,, \qquad 0 \le x \le 1\,.$$

α) Να γραφεί η λύση του ΠΑΣΤ στην μορφή μιας σειράς Fourier.

β) Ποιά είναι η τιμή $u(1/2, 1)$; (i) $1/2$, (ii) $-1/2$, (iii) 0, (iv) 1.

Πρόβλημα Α. Για κάθε μια από τις ακόλουθες αρχικές τιμές θερμοκρασίας

i) να βρεθεί η λύση στην μορφή μια σειράς Fourier της εξίσωσης της θερμότητας με περιοδικές συνοριακές συνθήκες

$$u_t = u_{xx} \quad -\pi < x < \pi\,, \quad t > 0\,, \qquad u(-\pi,t) = u(\pi,t)\,, \quad u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t)\,, \quad t \geq 0\,.$$

ii) Να βρεθεί η θερμοκρασία ισορροπίας καθώς $t \to \infty$.

$$\text{α)} \quad u(x,0) = \cos x\,, \qquad \text{β)} \quad u(x,0) = \sin x + \sin^2 x\,, \qquad -\pi \leq x \leq \pi\,.$$

Απάντηση:
i) Αναζητούμε λύσεις χωριζομένων μεταβλητών της μορφής

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, \upsilon(x)\,.$$

Εισάγοντας στην εξίσωση της θερμότητας, η τελευταία ανάγεται στην ακόλουθη ΣΔΕ

$$\upsilon''(x) = \lambda\, \upsilon(x)\,, \tag{A.1}$$

κι από την επιβολή των συνοριακών συνθηκών έχουμε ότι θα πρέπει

$$\upsilon(-\pi) = \upsilon(\pi)\,, \quad \upsilon'(-\pi) = \upsilon'(\pi)\,. \tag{A.2}$$

Οι σχέσεις (Α.1), (Α.2), απαρτίζουν το πρόβλημα ιδιοτιμών, μέσω του οποίου θα βρούμε τις αντίστοιχες ιδιολύσεις της ΜΔΕ και κατ' επέκταση θα κατασκευάσουμε την λύση του προβλήματος στην μορφή μιας σειράς Fourier.
$\lambda = 0$. Τότε η λύση της (Α.1) είναι η

$$\upsilon(x) = A\,x + B\,.$$

Επιβάλλοντας την πρώτη συνοριακή συνθήκη παίρνουμε ότι

$$\mathrm{A}\,(-\pi) + B = A\,\pi + B \quad \Rightarrow \quad A = 0\,,$$

ενώ η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (με $A = 0$) ικανοποιείται αυτόματα. Οπότε έχουμε την ιδιοτιμή $\lambda = 0$, με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $\upsilon_0(x) = 1$, κι ιδιολύση $u_0(x,t) = 1$, (η σταθερή παραλείπεται αφού θα την εισάγουμε στο τέλος παίρνοντας έναν άπειρο γραμμικό συνδυασμό των ιδιολύσεων).
$\lambda = \omega^2 > 0\,, \quad (\omega > 0)$. Τότε η λύση της (Α.1) είναι η

$$\upsilon(x) = A\,e^{\omega x} + B\,e^{-\omega x}\,.$$

Επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις για τις παραμέτρους A, B,

$$(A - B)\,\sinh(\omega\,\pi) = 0\,, \qquad (A + B)\,\sinh(\omega\,\pi) = 0\,.$$

Αφού $\omega \neq 0$, τότε $\sinh(\omega\,\pi) \neq 0$, και συνεπώς $A - B = A + B = 0$ και συνακόλουθα $A = B = 0$, οπότε δεν υπάρχει μη τετριμμένη λύση σε αυτήν την περίπτωση, κι άρα δεν υπάρχει ιδιοτιμή κι αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση κι ιδιολύση.

$\underline{\lambda = -\omega^2 < 0\,, \quad (\omega > 0)}$. Τότε η λύση της (Α.1) είναι η

$$v(x) = A\,\cos\,\omega\,x + B\,\sin\,\omega\,x\,,$$

Επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις για τις παραμέτρους A, B,

$$A\,\sin\,\omega\,\pi = 0\,, \qquad B\,\sin\,\omega\,\pi = 0\,.$$

Αν $\sin\,\omega\,\pi \neq 0$, τότε θα πρέπει $A = B = 0$, δηλαδή η τετριμμένη λύση. Οπότε θα πρέπει $\sin\,\omega\,\pi = 0$ δηλαδή $\omega = k$, $k = 1, 2, 3 \ldots$ Δηλαδή έχουμε ιδιοτιμές $\lambda_k = -k^2$, κι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$v_k(x) = A_k\,\cos k\,x + B_k\,\sin k\,x\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

κι ιδιολύσεις

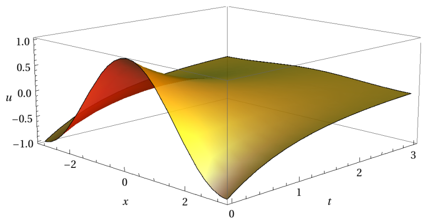
$$u_k(x,t) = A_k\,e^{-k^2\,t}\cos k\,x + B_k\,e^{-k^2\,t}\,\sin k\,x\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Λαμβάνοντας υπόψη και την ιδιοτιμή $\lambda = 0$, παριστάνουμε την λύση στην μορφή μιας άπειρης σειράς

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k\,e^{-k^2\,t}\cos k\,x + B_k\,e^{-k^2\,t}\,\sin k\,x \right)\,,$$

όπου οι σταθερές A_k, B_k, θα προσδιορισθούν από την αρχική συνθήκη.
<u>α)</u> Αν $u(x,0) = \cos x$, τότε θα πρέπει $B_k = 0$ $(k \geq 1)$, $A_0 = 0$, $A_1 = 1$, $A_k = 0$ για $k > 1$, και η λύση του ΠΑΣΤ είναι η

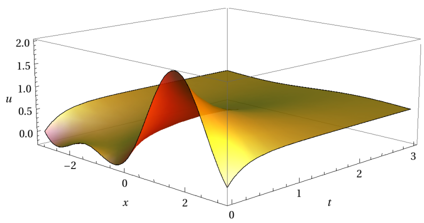
$$u(x,t) = e^{-t}\,\cos\,x\,.$$



Σχήμα 3: Η λύση για τα αρχικά δοσμένα α)

<u>β)</u> Αν $u(x,0) = \sin x + \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\cos 2\,x + \sin x$, τότε θα πρέπει $A_0 = 1$, $A_1 = 0$, $A_2 = -\frac{1}{2}$, $A_k = 0$ για $k > 2$, $B_1 = 0$, $B_k = 0$ για $k > 1$, και η λύση του ΠΑΣΤ σε αυτή την περίπτωση είναι η

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + e^{-t}\sin x - \frac{1}{2}\,e^{-4\,t}\,\cos 2\,x\,.$$



Σχήμα 4: Η λύση για τα αρχικά δοσμένα β)

<u>ii)</u> Σε κάθε περίπτωση η θερμοκρασία ισορροπίας καθώς $t \to \infty$, είναι $\frac{A_0}{2}$ αφού

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{A_0}{2}\,.$$

Οπότε για τα αρχικά δοσμένα του α) μέρους του προβλήματος η θερμοκρασία ισορροπίας είναι 0, ενώ για τα αρχικά δοσμένα του β) μέρους είναι $\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα B. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ) για την εξίσωση της θερμότητας με ομογενείς συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann (μονωμένα άκρα)

$$u_t = u_{xx} \quad -\pi < x < \pi\,, \quad t > 0\,, \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0\,, \quad t \geq 0\,,$$

και αρχική κατανομή θερμοκρασίας

$$u(x,0) = \begin{cases} 1\,, & |x| \leq \dfrac{\pi}{2}\,, \\ 0\,, & \dfrac{\pi}{2} < |x| \leq \pi\,. \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η λύση του ΠΑΣΤ στην μορφή μιας σειράς Fourier.

β) Να βρεθεί η θερμοκρασία ισορροπίας καθώς $t \to \infty$.

Απάντηση:
α) Αναζητούμε λύσεις χωριζομένων μεταβλητών της μορφής

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x)\,.$$

Εισάγοντας στην εξίσωση της θερμότητας, η τελευταία ανάγεται στην ακόλουθη ΣΔΕ

$$v''(x) = \lambda\, v(x)\,, \tag{B.1}$$

κι από την επιβολή των συνοριακών συνθηκών έχουμε ότι θα πρέπει

$$v'(-\pi) = 0\,, \quad v'(\pi) = 0\,. \tag{B.2}$$

Οι σχέσεις (B.1), (B.2), απαρτίζουν το πρόβλημα ιδιοτιμών, μέσω του οποίου θα βρούμε τις αντίστοιχες ιδιολύσεις της ΜΔΕ και κατ' επέκταση θα κατασκευάσουμε την λύση του προβλήματος στην μορφή μιας σειράς Fourier.
$\lambda = 0$. Τότε η λύση της (B.1) είναι η

$$v(x) = A\,x + B\,.$$

Επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε ότι $A = 0$. Οπότε έχουμε την ιδιοτιμή $\lambda = 0$, με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $v_0(x) = 1$, κι ιδιολύση $u_0(x,t) = 1$.
$\lambda = \omega^2 > 0\,, \quad (\omega > 0)$. Τότε η λύση της (A.1) είναι η

$$v(x) = A\,e^{\omega x} + B\,e^{-\omega x}\,.$$

Επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις για τις παραμέτρους A, B,

$$A\,\omega\,e^{-\omega\pi} - B\,\omega\,e^{\omega\pi} = 0\,, \qquad A\,\omega\,e^{\omega\pi} - B\,\omega\,e^{-\omega\pi} = 0\,,$$

ή ισοδύναμα (αφού $\omega \neq 0$)

$$A\,e^{-\omega\pi} - B\,e^{\omega\pi} = 0\,, \qquad A\,e^{\omega\pi} - B\,e^{-\omega\pi} = 0\,,$$

το οποίο είναι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς τις παραμέτρους A, B. Για να υπάρχουν μη-μηδενικές λύσεις αρκεί και πρέπει η ορίζουσα Δ

να είναι μηδέν. Όμως η ορίζουσα είναι $\Delta = e^{2\omega\pi} - e^{-2\omega\pi}$, και είναι μηδέν αν και μόνο αν $\omega = 0$. Άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι $\omega > 0$, συνεπώς δεν υπάρχουν ιδιοτιμές σε αυτήν την περίπτωση και κατ' επέκταση δεν υπάρχουν ιδιοσυναρτήσεις κι ιδιολύσεις.

$\underline{\lambda = -\omega^2 < 0\,, \quad (\omega > 0).}$ Τότε η λύση της (Β.1) είναι η

$$v(x) = A\,\cos\omega x + B\,\sin\omega x\,.$$

Επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις για τις παραμέτρους A, B,

$$-A\,\omega\,\sin(-\omega\pi) + B\,\omega\,\cos(-\omega\pi) = 0\,, \qquad -A\,\omega\,\sin(\omega\pi) + B\,\omega\,\cos(\omega\pi) = 0\,,$$

ή ισοδύναμα

$$A\,\sin(\omega\pi) + B\,\cos(\omega\pi) = 0\,, \qquad -A\,\sin(\omega\pi) + B\,\cos(\omega\pi) = 0\,.$$

Το παραπάνω ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς τις παραμέτρους A, B, έχει λύσεις μη-μηδενικές αν και μόνο αν η ορίζουσα Δ είναι μηδέν. Υπολογίζουμε την ορίζουσα και βρίσκουμε ότι

$$\Delta = 2\,\sin(\omega\pi)\,\cos(\omega\pi) = \sin(2\,\omega\pi)\,.$$

Οπότε

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,\omega\pi = k\,\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{k}{2}\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Δηλαδή έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_k = -\frac{k^2}{4}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

- $k = 2\,n$, άρτιος. Τότε $\omega = n$ και η συνοριακή συνθήκη (οποιαδήποτε από τις δυο αφού είναι γραμμικώς εξαρτημένες) δίνει $B = 0$. Συνεπώς έχουμε ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις - ιδιολύσεις

  $$\lambda_n = -n^2\,, \qquad v_n(x) = \cos n\,x\,, \qquad u_n(x,t) = e^{-n^2 t}\,\cos n\,x\,,$$

  $n = 1, 2, 3, \ldots$

- $k = 2\,n - 1$, περιττός. Τότε $\omega = n - \frac{1}{2}$ και η συνοριακή συνθήκη (οποιαδήποτε από τις δυο αφού είναι γραμμικώς εξαρτημένες) δίνει $A = 0$. Συνεπώς έχουμε ιδιοτιμές και αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις - ιδιολύσεις

  $$\lambda_n = -\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\,, \qquad v_n(x) = \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\,x\,, \qquad u_n(x,t) = e^{-(n-1/2)^2 t}\,\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\,x\,,$$

  $n = 1, 2, 3, \ldots$

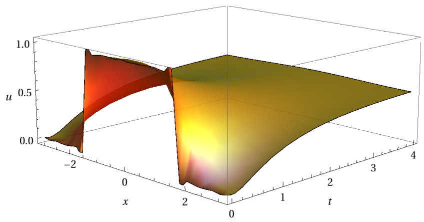
Λαμβάνοντας υπόψη και την ιδιοτιμή $\lambda = 0$, γράφουμε την λύση σαν ένα άπειρο άθροισμα γραμμικών συνδυασμών των ιδιολύσεων κι έχουμε

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\,e^{-n^2 t}\,\cos n\,x + B_n\,e^{-(n-1/2)^2 t}\,\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right]\,,$$

όπου οι συντελεστές A_n, B_n θα προσδιορισθούν από την αρχική συνθήκη. Παρατηρούμε ότι η αρχική συνθήκη $u(x,0) = f(x)$ είναι άρτια συνάρτηση, συνεπώς οι συντελεστές B_n των ημιτόνων (περιττές συναρτήσεις) θα πρέπει να είναι μηδέν, $B_n = 0$. Για τους συντελεστές A_n έχουμε

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,d\,x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} d\,x = 1\,.$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\cos n\,x\,d\,x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos n\,x\,d\,x \\ &= \frac{2}{n\,\pi}\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2\,m \\ -\frac{2(-1)^m}{\pi(2\,m-1)}, & n = 2\,m-1 \end{cases}, \end{aligned}$$



Σχήμα 5: Γραφική παράσταση της λύσης.

$m = 1, 2, 3, \ldots$ Οπότε η λύση του ΠΑΣΤ στην μορφή μιας σειράς Fourier είναι

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, e^{-n^2\,t}\, \cos n\,x\,.$$

β) Παρατηρούμε ότι $u(x,t) \to \frac{1}{2}$ καθώς $t \to \infty$, οπότε η θερμοκρασία ισορροπίας είναι $\frac{1}{2}$.

Πρόβλημα Γ. Θεωρούμε το ακόλουθο ΠΑΣΤ για την κυματική εξίσωση

$$u_{t\,t} - u_{x\,x} = 0\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad t > 0\,,$$

$$u(x,0) = \sin x\,, \quad u_t(x,0) = 0\,, \quad 0 \le x \le \pi\,,$$

$$u_x(0,t) = 0\,, \quad u_x(\pi,t) = 0\,, \qquad t \ge 0\,.$$

α) Να γραφεί η λύση του ΠΑΣΤ στην μορφή μιας σειράς Fourier.

β) Να δειχθεί ότι η $h(t) = u\left(\pi/4, t\right)$ είναι περιοδική συνάρτηση και να βρεθεί η περίοδος.

γ) Ποιά είναι η τιμή $u\left(\pi/4, \pi/2\right)$; (i) 0, (ii) $1/2$, (iii) $1/\sqrt{2}$, (iv) $\sqrt{2}$.

δ) Έχει η $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ ασυνέχειες; Αν ναι, κατά μήκος ποιών καμπυλών διαδίδονται;

Απάντηση:

α) Αναζητούμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης που είναι χωριζομένων μεταβλητών, δηλαδή της μορφής

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)\,.$$

Εισάγουμε στην κυματική εξίσωση $u_{x\,x} = u_{t\,t}$ και παίρνουμε

$$X''(x)\,T(t) = X(x)\,T''(t)\,.$$

Αφού $X(x) \neq 0$ και $T(t) \neq 0$, διαιρώντας την παραπάνω εξίσωση με τον όρο $X(x)\,T(t)$, έχουμε

$$\frac{X(x)''}{X(x)} = \frac{T(t)''}{T(t)}\,,$$

όπου το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση μόνο του x, ενώ το δεξί μέρος συνάρτηση μόνο του t. Για να μπορεί να συμβεί αυτό θα πρέπει και οι δυό όροι να είναι ίσοι με μια σταθερή ποσότητα που την ονομάζουμε $\lambda \in \mathbb{R}$. Οπότε η ΜΔΕ ανάγεται στην επίλυση των ΣΔΕ

$$X''(x) = \lambda\, X(x)\,, \qquad T''(t) = \lambda\, T(t)\,.$$

Από την άλλη, οι συνοριακές συνθήκες $u_x(0,t) = 0$, $u_x(\pi,t) = 0$, δίνουν ότι θα πρέπει $X'(0) = 0$, $X'(\pi) = 0$, αντίστοιχα. Οπότε έχουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$X''(x) = \lambda\, X(x)\,, \qquad X'(0) = X'(\pi) = 0\,.$$

$\underline{\lambda = 0.}$ Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$X(x) = A\,x + B\,,$$

κι οι συνοριακές συνθήκες ικανοποιούνται όταν $A = 0$. Οπότε έχουμε την ιδιοτιμή $\lambda = 0$, με ιδιοσυνάρτηση $X_0(x) = 1$. Από την άλλη, η ΣΔΕ για την συνάρτηση $T(t)$ δίνει ότι

$$T(t) = \Gamma\,t + \Delta\,,$$

οπότε συνολικά έχουμε τις ιδιολύσεις $\{1, t\}$.

$\underline{\lambda = \omega^2 > 0\,, \quad (\omega > 0).}$ Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$X(x) = A\,e^{\omega\,x} + B\,e^{-\omega\,x}\,,$$

κι επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε ότι θα πρέπει

$$A\,\omega - B\,\omega = 0\,, \qquad A\,\omega\,e^{\omega\pi} - B\,\omega^{-\omega\,\pi} = 0\,,$$

ή ισοδύναμα

$$A = B\,, \qquad A\,\sinh(\omega\,\pi) = 0\,.$$

Αφού $\omega \neq 0$, τότε $\sinh(\omega\,\pi) \neq 0$, συνεπώς παίρνουμε μόνο την τετριμμένη λύση $A = B = 0$, και δεν υπάρχουν ιδιοτιμές σε αυτήν την περίπτωση.

$\underline{\lambda = -\omega^2 < 0\,, \quad (\omega > 0).}$ Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$X(x) = A\,\cos\omega\,x + B\,\sin\omega\,x\,,$$

κι επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε ότι θα πρέπει

$$B = 0\,, \qquad A\,\omega\,\sin\omega\pi = 0\,,$$

ή ισοδύναμα

$$B = 0\,, \qquad \sin\omega\,\pi = 0\,.$$

Οπότε έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda = -k^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $X_k(x) = \cos k\,x$. Από την άλλη η ΣΔΕ για την συνάρτηση $T(t)$ για τις τιμές της λ που βρήκαμε δίνει ότι θα πρέπει

$$T(t) = \Gamma\,\cos k\,t + \Delta\,\sin k\,t\,,$$

οπότε έχουμε τις ιδιολύσεις $\{\cos k\,x\,\cos k\,t\,,\ \cos k\,x\,\sin k\,t\}$. Λαμβάνοντας υπόψη και τις ιδιολύσεις της ιδιοτιμής $\lambda = 0$, γράφουμε την λύση σαν ένα άπειρο άθροισμα γραμμικών συνδυασμών των ιδιολύσεων κι έχουμε

$$u(x,t) = A_0 + B_0\,t + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\,\cos k\,x\,\cos k\,t + B_k\,\cos k\,x\,\sin k\,t\right)\,, \qquad (\Gamma.1)$$

όπου οι συντελεστές A_k, B_κ θα προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες $u(x,0) = \sin x$, και $u_t(x,0) = 0$. Για την πρώτη αρχική συνθήκη έχουμε

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\,\cos k\,x = \sin x\,,$$

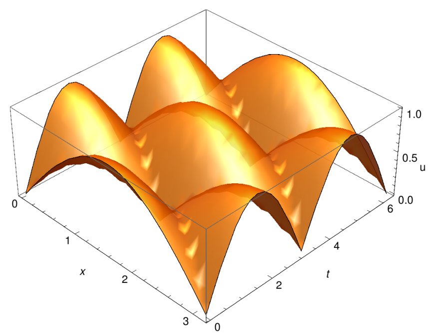
ενώ παραγωγίζοντας την σχέση (Γ.1) ως προς t έχουμε για την δεύτερη αρχική συνθήκη

$$u_t(x,0) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k\,B_k\,\cos k\,x = 0\,.$$

Συνεπώς $B_k = 0$, και

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,d\,x = \frac{2}{\pi} = 0\,,$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\cos k\,x\,d\,x = \ldots = \begin{cases} 0, & k \text{ περιττός,}\\ \frac{4}{\pi(1-k^2)}, & k \text{ άρτιος.}\end{cases}$$



Σχήμα 6: Γραφική παράσταση της λύσης.

Συνεπώς η λύση στη μορφή μιας σειράς Fourier είναι

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4\,n^2)}\,\cos(2\,n\,x)\,\cos(2\,n\,t)\,. \qquad (\Gamma.2)$$

β) Για $x = \frac{\pi}{4}$ έχουμε

$$\begin{aligned} h(t) &= u\left(\frac{\pi}{4},t\right) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4\,n^2)}\,\cos\left(2\,n\,\frac{\pi}{4}\right)\,\cos(2\,n\,t)\\ &= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(1-4\,n^2)}\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)\,\cos(2\,n\,t)\,. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι με n περιττό θετικό ακέραιο δεν συνεισφέρουν στην $h(t)$, αφού τότε $\cos(\frac{n\,\pi}{2}) = 0$, οπότε η συνάρτηση $h(t)$ παίρνει την μορφή

$$h(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\,(-1)^m}{\pi(1-16\,m^2)}\,\cos(4\,m\,t)\,,$$

και αφού $h(t+\frac{\pi}{2}) = h(t)$, η $h(t)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

γ) Ο τύπος του d' Alembert για την άπειρη χορδή $(-\infty < x < \infty)$ είναι

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x-t) + f(x+t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,d\,s\,, \qquad (\Gamma.3)$$

όπου $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$. Για το πρόβλημά μας γνωρίζουμε τις αρχικές τιμές $f(x) = \sin x$ και $g(x) = 0$ μόνο για το διάστημα $0 \le x \le \pi$. Θα πρέπει λοιπόν να επεκτείνουμε τα αρχικά δοσμένα κατάλληλα σε όλο το άξονα των x, έτσι ώστε η λύση που δίνεται από τον τύπο του d' Alembert να ικανοποιεί αυτόματα τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα $x = 0$, $x = \pi$. Επειδή η λύση που δίνεται από την σχέση (Γ.2) είναι άρτια συνάρτηση κάνοντας άρτια 2π-περιοδική επέκταση των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$, παρατηρούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες στην (Γ.3) ικανοποιούνται.
Πράγματι, επεκτείνουμε τα αρχικά δοσμένα έτσι που

$$f(-x) = f(x)\,, \quad g(-x) = g(x),\,, \quad f(2\pi + x) = f(x)\,, \quad g(2\pi + x) = g(x)\,.$$

Παραγωγίζοντας την (Γ.3) ως προς x, παίρνουμε

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}\big(f'(x-t) + f'(x+t)\big) + \frac{1}{2}\big(g(x+t) - g(x-t)\big)\,.$$

Στα άκρο $x = 0$ έχουμε

$$u_x(0,t) = \frac{1}{2}\big(f'(-t) + f'(t)\big) + \frac{1}{2}\big(g(t) - g(-t)\big) = 0\,,$$

αφού $g(-t) = g(t)$ και αν $f(-t) = f(t)$, τότε $-f'(-t) = f'(t)$.
Στο άκρο $x = \pi$ έχουμε

$$u_x(\pi,t) = \frac{1}{2}\big(f'(\pi-t) + f'(\pi+t)\big) + \frac{1}{2}\big(g(\pi+t) - g(\pi-t)\big) = 0\,,$$

αφού ισχύει ότι $g(\pi + t) = g(2\pi - \pi + t) = g(-\pi + t) = g(\pi - t)$, και ομοίως $f(\pi + t) = f(\pi - t)$ και παραγωγίζοντας ως προς t, ισχύει ότι $f'(\pi + t) = -f'(\pi - t)$.
Εφαρμόζοντας λοιπόν τον τύπο του d' Alembert παίρνουμε

$$u\Big(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big[f\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)+f\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{\pi}{4}\Big)+f\Big(\frac{3\pi}{4}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\Big(\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

<u>δ)</u> Η $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, παρουσιάζει ασυνέχειες στα άκρα $x = 0$ και $x = \pi$, οι οποίες διαδίδονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών.
Πράγματι, παραγωγίζοντας την αρχική συνθήκη $u(x,0) = \sin x$ ως προς x έχουμε ότι

$$u_x(x,0) = \cos x\,,$$

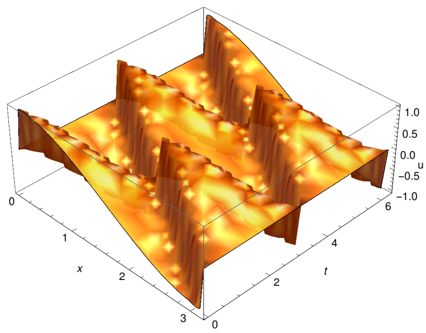
οπότε για το άκρο $x = 0$, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} u_x(x,0) = \cos 0 = 1\,,$$

ενώ από την συνοριακή συνθήκη $u_x(0,t) = 0$ για κάθε $t \ge 0$, άρα για $t = 0$, έχουμε $u_x(0,0) = 0$.
Ομοίως, για το άκρο $x = \pi$, έχουμε

$$\lim_{x\to \pi} u_x(x,0) = \cos \pi = -1\,,$$

ενώ από την συνοριακή συνθήκη $u_x(\pi,t) = 0$ για κάθε $t \ge 0$, άρα για $t = 0$, έχουμε $u_x(\pi,0) = 0$.



Σχήμα 7: Γραφική παράσταση της $u_x(x,t)$.