DATE: / / NO.: SUBJECT:

ΜΑΣ 024 Ασκήσεις 3/4/2013

Άσκηση Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω συστημάτων ΔΕ

1) $x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x$, 2) $t x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x$

Λύση

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Ιδιοτιμές : $\lambda_1 = -1 + i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1 - i\sqrt{2}$.

$\lambda_1 = -1 + i\sqrt{2}$ ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \xi_1$

$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -1 - i\sqrt{2}$ " $\begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{\xi}_1$

Από την θεωρία, γνωρίζουμε ότι το πραγματικό και φανταστικό μέρος της

$$\xi_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1+i\sqrt{2})t} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left(\cos(\sqrt{2}t) + i \sin(\sqrt{2}t) \right) e^{-t}$$

αποτελούν δυο γραμ. ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις του συστήματος ΔΕ, οπότε

$$\xi_1 e^{\lambda_1 t} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) - \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t) \right) e^{-t} + i \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t) + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \right) e^{-t}$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

και η γενική λύση είναι η

$$x(t)=c_1\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}t)-\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}t)\right)e^{-t}+c_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}t)+\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}t)\right)e^{-t}$$

2) Από άσκηση του φροντιστηρίου γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $tx'=Ax$ (η ανάλογη της Euler-Cauchy) επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$x=\xi t^{r}$$

όπου r είναι ιδιοτιμή του A και ξ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Σύμφωνα με το μέρος 1) της άσκησης ξέρουμε ότι

$$r_1=-1+i\sqrt{2} \quad \text{με ιδιοδ.} \quad \begin{pmatrix}i/\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}=\xi_1$$

$$r_2=\bar{r}_1=-1-i\sqrt{2} \quad " \quad " \quad \begin{pmatrix}-i\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}=\xi_2=\bar{\xi}_1$$

Όμως $t^{r_1}=t^{-1+i\sqrt{2}}=t^{-1}t^{i\sqrt{2}}=t^{-1}e^{\ln t^{i\sqrt{2}}}=t^{-1}e^{i\sqrt{2}\ln t}=$

$$=t^{-1}\left(\cos(\sqrt{2}\ln t)+i\sin(\sqrt{2}\ln t)\right)$$

οπότε αναλύοντας την $\xi_1 t^{r_1}$ σε πραγματικό και φανταστικό μέρος όπως προηγουμένως έχουμε ότι η γενική λύση είναι

$$x(t)=c_1\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}\ln t)-\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}\ln t)\right)t^{-1}+c_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}\ln t)+\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}\ln t)\right)t^{-1}$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση: Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω συστημάτων ΔΕ πρώτης τάξης

1) $x' = \begin{pmatrix} -1/4 & 1 & 0 \\ -1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} x$, 2) $x' = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Λύση

1) $A = \begin{pmatrix} -1/4 & 1 & 0 \\ -1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -1/4$, $\lambda_2 = -1/4 + i$, $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = -1/2 - i$

$\lambda_1 = -1/4$ ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \xi_1$

$\lambda_2 = -1/4 + i$ ιδιοδιαν. $\xi_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u + iv$

Άρα από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η γενική λύση του συστήματων είναι η

$$x(t) = c_1 \xi_1 e^{-1/4\, t} + c_2 \xi_2 e^{-1/4\, t} (\cos t + i \sin t) + c_3 \bar{\xi}_2 e^{-1/4\, t} (\cos t - i \sin t)$$

Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της λύσης $\xi_2 e^{-1/4\, t} (\cos t + i \sin t)$ είναι δυο γραμ. ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις του συστήματος. Οπότε

$$\xi_2 e^{-t/4} (\cos t + i \sin t) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] (\cos t + i \sin t)\, e^{-t/4} =$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

$$e^{-t/4}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\sin t\right] + i\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\cos t\right]e^{-t/4}$$

Άρα

$$X(t) = c_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{-\frac{1}{4}t} + c_2 e^{-t/4}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\sin t\right) + c_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\cos t\right)e^{-t/4}$$

2) $A = \begin{pmatrix}1 & -1/4 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3/2$ πολλ. 2.

$\underline{\lambda_1 = 1}$ ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \xi_1$

$\lambda_2 = 3/2$ ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix} = \xi_2$

γενικευ. ιδιοδιαν. $\left(A - \frac{3}{2} I\right)\eta_2 = \xi_2 \Rightarrow$

$\eta_2 = 2 - 2\eta_1$

$\eta_3 = 0$

άρα $\begin{pmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta_1\\2-2\eta_1\\0\end{pmatrix} = \eta_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}}}$

Το μέρος του γεν. ιδιοδ. $\eta_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ είναι γραμ. συνδυασμός του ξ_2 οπότε μπορούμε να το διαγράψουμε.

DATE: / / NO. : SUBJECT:

Άρα η γενική λύση του συστήματος είναι η

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3/2\, t} + c_3 \left(\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{3/2\, t}$$

Άσκηση Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω μη-ομογενών συστημάτων ΔΕ με την μέθοδο προσδιοριστέων των συντελεστών

1) $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$ 2) $x' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}\, e^{-t} \end{pmatrix}$

3) $x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ 4) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{pmatrix}$

5) $x' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$ 6) $x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$ $0<t<\pi$

Λύση

1) Το ομογενές μέρος

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x = A x$$

ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$

ιδιοδιαν. $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

οπότε η γενική λύση είναι

$$x_{o\mu}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

Θεωρούμε τώρα δυο συστήματα τα εξής

α) $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \quad (*)$ β) $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \quad (**)$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

α) Παρατηρούμε ότι ο όρος $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^t$ έχει εξάρτηση με το ομογενές μέρος οπότε θεωρούμε ειδική λύση της μορφής

$$u^{(a)}_{\epsilon\iota\delta} = ate^t + be^t$$ όπου a, b διανύσματα

Εισάγουμε στην (*) κι έχουμε

$$ae^t + ate^t + be^t = Aate^t + Abe^t + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^t$$

εξισώνοντας όρους te^t και e^t παίρνουμε τα συστήματα για τα a, b

$$(A-I)a = 0 \qquad (1)$$

$$(A-I)b = a - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad (2)$$

οπότε το a είναι ιδιοδιαν. της $\lambda = 1$ άρα $a = \mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ και εισάγοντας στην (2) και λύνοντας ως προς b έχουμε

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu-1\\\mu\end{pmatrix}$$

Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί μόνο όταν $3(\mu-1) = \mu \Rightarrow$ $\Rightarrow \mu = 3/2$ οπότε $b_1 - b_2 = 1/2 \Rightarrow b_1 = b_2 + 1/2$

και συνεπώς $$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_2 + 1/2\\b_2\end{pmatrix} = b_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$$

Μπορούμε να πάρουμε $b_2 = 0$ γιατί το μέρος αυτό της λύσης εμφανίζεται στο ομογενές μέρος της λύσης που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 οπότε

DATE: / / NO.: SUBJECT:

$$x^{(\alpha)}_{\varepsilon\iota\delta} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} t e^{t} + \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix} e^{t}$$

β) Παρατηρούμε ότι ο όρος $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} t$ δεν έχει καμία εξάρτηση από το ομογενές κομμάτι της λύσης οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ως $x^{(\beta)}_{\varepsilon\iota\delta}$ την

$$u^{(\beta)}_{\varepsilon\iota\delta} = ct + d \qquad \text{όπου } c, d \text{ διανύσματα}$$

Εισάγουμε στην (**) κι έχουμε

$$c = \underline{Act} + Ad + \underline{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} t}$$

Εξισώνοντας όρους με t και t^0 έχουμε

$$Ac = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$Ad = c = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

Άρα

$$x^{(\beta)}_{\varepsilon\iota\delta} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

Συνολικά, τη γενική λύση είναι η

$$\vec{x} = \vec{x}_{o\mu} + \vec{x}^{(\alpha)}_{\varepsilon\iota\delta} + \vec{x}^{(\beta)}_{\varepsilon\iota\delta} =$$

$$= c_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} e^{t} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} t e^{t} + \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

8α

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Προσδιορισμός της ειδικής λύσης με την μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

1) $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{t} \\ 3e^{-t} & e^{t} \end{pmatrix}$ $\quad \det \Psi(t) = -2$

Η λύση του μη-ομογενούς συστήματος είναι

$$x = \Psi(t)\cdot u(t)$$

όπου η $u(t)$ ικανοποιεί το σύστημα των ΔΕ

$$\Psi(t)\, u'(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow u'(t) = \Psi^{-1}(t)\begin{pmatrix} e^{t} \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-1}(t) = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ -3e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Άρα

$$u'(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t} & -e^{t} \\ -3e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} \\ t \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t} - te^{t} \\ -3 + te^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}\int te^{t}dt \\ +\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\int te^{-t}dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{t}(t-1) + c_1 \\ \frac{1}{2}e^{-t}(1+t) + \frac{3}{2}t + c_2 \end{pmatrix}$$

$c_1 = c_2 = 0$ διότι ζητάμε μια ειδική.

$$x = \Psi\, u(t) = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{t} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

DATE: / /	NO.:	SUBJECT:

2) Το ομογενές μέρος της ΔΕ είναι:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} x$$

ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$

ιδιοδιαν. $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

οπότε η γενική λύση της ομογενούς ΔΕ είναι

$$x_{ομ} = c_1 \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Παρατηρούμε ότι κανένας όρος από τους e^{t}, e^{-t} που θα εμφανίζεται στο όρο εξωτερικού δεν έχει εξάρτηση με το ομογ. μέρος οπότε σπάμε το σύστημα στα εξής

a) $x' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}$ β) $x' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-t}$

και θεωρούμε $x^{(a)}_{ειδ} = a e^{t}$, $x^{(β)}_{ειδ} = b e^{-t}$ a, b διαν.

a) Εισάγουμε στην μη-ομογενή ΔΕ κι έχουμε

$$a e^{t} = A a e^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} \Rightarrow (A - I) a = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

β) Εισάγουμε στην μη-ομογενή ΔΕ κι έχουμε:

$$-be^{-t} = Abe^{-t} + \begin{pmatrix}0\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} e^{-t} \Rightarrow (A+I)b = \begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2b_1 + \sqrt{3}\, b_2 = 0 \qquad b_2 = 2/\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\, b_1 = -\sqrt{3} \Rightarrow b_1 = -1$$

Άρα η γενική λύση του συστήματος ΔΕ είναι

$$\vec{X}(t) = X_{ομ} + X^{\alpha}_{ειδ} + X^{(\beta)}_{ειδ} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix}2/3\\ 1/\sqrt{3}\end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix}-1\\ 2/\sqrt{3}\end{pmatrix} e^{-t}$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Ειδική λύση με την μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

2) $\Psi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-2t} & \sqrt{3} e^{2t} \\ e^{-2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$ $\qquad \det \Psi = -4/\sqrt{3}$

Η λύση του μη-ομογενούς συστήματος είναι

$$x = \Psi(t) \cdot u(t)$$

όπου

$$\Psi(t)\, u'(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ \sqrt{3} e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow u'(t) = \Psi^{-1}(t) \begin{pmatrix} e^{t} \\ \sqrt{3} e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^{-1}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \begin{pmatrix} e^{2t} & -\sqrt{3} e^{2t} \\ -e^{-2t} & -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Άρα

$$u'(t) = \Psi^{-1}(t) \begin{pmatrix} e^{t} \\ \sqrt{3} e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{4} e^{t} - \frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{3t} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{-3t} + \frac{1}{4}\sqrt{3}\, e^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-3e^{t} + \frac{e^{3t}}{3}\right) + c_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{1}{3} e^{-3t} - e^{-t}\right) + c_2 \end{pmatrix} \qquad c_1 = c_2 = 0$$

$$x = \Psi\, u(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} - \frac{2}{3} e^{t} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{t} - 2 \cdot e^{-t}\right) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-t}.$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

3) Ομογενής ΔΕ

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x = Ax$$

Ιδιοτ. $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i = \bar{\lambda}_1$

Ιδιοδ. $\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$

οπότε το πραγμ. και φανταστικό μέρος της

$$\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[\cos t + i \sin t \right]$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right) + i \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t \right)$$

είναι 2 γραμ. ανεξάρτητες λύσεις του συστ. ΔΕ δηλ.

$$x_{ομ} = c_1 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right) + c_2 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t \right)$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος έξω έχει γραμ. εξάρτηση από την λύση της ομογενούς ΔΕ, οπότε θεωρούμε ειδική λύση της μορφής

$$x_{ειδ} = t\left(a \cos t + b \sin t\right) + \left(c \cos t + d \sin t\right)$$ όπου a, b, c, d διανύσμ.

εισάγοντας στην ΔΕ έχουμε:

DATE: / / NO.: SUBJECT:

$a\cos t + b\sin t + t(-a\sin t + b\cos t) + (-c\sin t + d\cos t) =$

$= tA(a\cos t + b\sin t) + Ac\cos t + Ad\sin t +$

$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin t$

Εξισώνοντας όρους με $t\cos t$, $t\sin t$, $\cos t$, $\sin t$ έχουμε:

$-a = Ab$ ① $(A+I)a = 0$

$b = Aa$ ② $(A-I)b = 0.$

$a + d = Ac + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ ③

$b - c = Ad + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ④

③ $\Rightarrow$ $d = -a + Ac + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ και εισάγοντας στην ④ έχουμε

$b - c = -Aa + A^2c + A\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ όμως $A^2 = -I$ και ① $Aa = b$ συνεπώς

$b - \cancel{c} = -b - \cancel{c} + \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$2b = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow b = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ ⑤

Εισάγοντας την ⑤ στην ① έχουμε $a = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

(ίδιες)

Οι ③, ④ είναι συμβιβαστές οπότε μπορούν να δώσουν θέλοντας αυθαίρετες τιμές στο διάνυσμα c ή d. Για παράδειγμα $c=0$ οπότε από την ③

$$d = -a + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Και συνεπώς η $x_{ειδ}$ είναι

$$x_{ειδ} = t\left(\begin{pmatrix} ? \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right) + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} \sin t.$$

και η γενική λύση της μη-ομογενούς ΔΕ είναι

$$\vec{x} = x_{ομ} + x_{ειδ}.$$

Ειδική λύση με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων

3) $$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t & 2\sin t + \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \qquad \det \Psi = -1.$$

$$\Psi^{-1}(t) = -\begin{pmatrix} \sin t & -2\sin t - \cos t \\ -\cos t & 2\cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

Η λύση του μη-ομογενούς συστήματος είναι

$$x = \Psi(t)\, u(t)$$

όπου $\Psi u' = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow u' = \Psi^{-1} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin t(\cos t + \sin t) \\ -\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}$

$c_1 = c_2 = 0$

$$x = \Psi u = t\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right) + \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \sin t$$

DATE: / /   NO.:   SUBJECT:

4) Το ομογ. μέρος

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x = A x$$

Ιδιοτ. $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$x_{ομ} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Για την εύρεση της ειδικής λύσης της μη-ομογ. ΔΕ. Στον όρο εξαναγκασμού και οι δυο συνιστώσες δεν έχουν γραμμ. εξάρτηση, οπότε σπάμε το πρόβλημα στα δυο

$$a)\; x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad (*), \qquad β)\; x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{t} \quad (**)$$

α) Υποθέτουμε ότι

$$x_{ειδ}^{(α)} = a e^{-2t}$$

Εισάγουμε στην (*) κι έχουμε:

$$-2a e^{-2t} = A a e^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} \Rightarrow (A + 2I) a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{aligned} 3a_1 + a_2 &= -1 \\ 4a_1 &= 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= -1 \end{aligned}$$

άρα

$$x_{ειδ}^{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

β) Υποθέτουμε ότι

$$x^{(\beta)}_{\varepsilon\iota\delta} = b e^t$$

εισάγουμε στην (*) κι έχουμε:

$$be^t = Abe^t + \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}e^t \Rightarrow (A-I)b = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} b_2 = 0 \\ 4b_1 - 3b_2 = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} b_2 = 0 \\ b_1 = 1/2 \end{array} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}$$

άρα $x^{(\beta)}_{\varepsilon\iota\delta} = \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}e^t$

Και συνολικά η γενική λύση δίνεται από την σχέση

$$x = c_1\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-2t} + \begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}e^{t}.$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

5) Η ομογενής ΔΕ

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x = A x$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 0$ πολλ 2.

ιδιοδιαν $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Για να βρούμε μια δεύτερη ανεξάρτητη λύση θεωρούμε

$$x = a t + b \Rightarrow x' = a t \qquad a, b \text{ διαν.}$$

οπότε εισάγουμε στην ΔΕ έχουμε

$$a = A a t + A b$$

οπότε θα πρέπει

$$A a = 0 \Rightarrow a \text{ ιδιοδ. με ιδιοτιμή } 0$$
$$A b = a$$

οπότε $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$A b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 2b_1 - 1/2 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Το όρος με το b_1 μπορεί να παραλειφθεί αφού θα εμφανισθεί στην λύση από το μέρος $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

οπότε

$$X_{o\mu} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\-1/2\end{pmatrix}\right]$$

Για την μη-ομογενή θεωρούμε ότι υπάρχει ειδική λύση της μορφής:

$$X_{ειδ} = t^s\left(at^2 + bt + c\right) = at^{s+2} + bt^{s+1} + ct^s$$

a, b, c διαν.

Εισάγουμε στην μη-ομογ ΔΕ κι έχουμε:

$$\underset{=}{a}(s+2)t^{s+1} + b(s+1)t^s + cst^{s-1} =$$

$$= \underbrace{Aat^{s+2}}_{} + \underline{\underline{Ab}}t^{s+1} + Act^s + t^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad (*)$$

Παρατηρούμε ότι $A^2=0$ και ο όρος με την μεγαλύτερη δύναμη είναι ο

$$Aat^{s+2}$$

άρα θα πρέπει $Aa=0$. Πολλαπλασιάζουμε την $(*)$ με A και λαμβάνοντας υπόψη ότι $Aa=0$ έχουμε

$$(s+1)Abt^s + sAct^{s-1} = A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}t^2 - A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}t$$

Από αυτήν την σχέση συμπεραίνουμε ότι $s=2$ και συνεπώς

$$3Ab = A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow Ab = \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad ①$$

$$2Ac = -A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow Ac = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad ②$$

DATE: / /	NO. :	SUBJECT:

Για $s=2$ ο όρος με την μεγαλύτερη δύναμη στην (*) είναι ο

$$Aa=0 \quad \text{οπότε} \quad a=k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

και οι όροι με την αμέσως μικρότερη δύναμη δίνουν

$$a(2+2)t^3 = Abt^3 \Rightarrow Ab = 4a \quad (3)$$

οι όροι με t^2 δίνουν

$$3b = Ac + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \overset{(2)}{=} 3b = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$b = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

και ο όροι με t δίνουν

$$2c = -\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow c = -1/2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Από (1), (3) έχουμε ότι

$$Ab = 4a = 4k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \text{άρα} \quad k = 1/3$$

κι συνεπώς:

$$a = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad b = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad c = -1/2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Δηλαδή

$$x_{ειδ} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t^4 + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t^3 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}t^2$$

και συνολική

$$x = x_{ομ} + x_{ειδ} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\-1/2\end{pmatrix}\right] + x_{ειδ}$$

6) Η ομογ. ΔΕ είναι

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x = Ax$$

Ιδιοτ. $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = -i$

Ιδιοδ. $\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$

Άρα το πραγμ. και φανταστικό μέρος της

$$\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[\cos t + i \sin t \right]$$

είναι δυο γραμμ. ανεξ. λύσεις δηλ οι

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t.$$

συνεπώς

$$x_{ομ} = c_1 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin t \right] + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t \right]$$

Για την μη-ομογενή παρατηρούμε ότι ο όρος εξαναγκασμού περιέχει συνάρτηση που είναι γραμμ. εξαρτημένη με λύσεις της ομογενούς, οπότε θεωρούμε ότι η $X_{ειδ}$ της μη-ομογενούς έχει την μορφή

$$X_{ειδ} = at\cos t + bt\sin t + c\cos t + d\sin t$$

εισάγουμε στην μη-ομογ και έχουμε:

DATE: / / NO.: SUBJECT:

$$a\cos t - at\sin t + b\sin t + bt\cos t - c\sin t + d\cos t =$$

$$= Aat\cos t + Abt\sin t + Ac\cos t + Ad\sin t + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cos t$$

Εξισ. όρους με $t\cos t$, $t\sin t$, $\cos t$, $\sin t$ κι έχουμε

$Aa = b$ (1)

$Ab = -a$ (2)

$d + a = Ac + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (3)

$-c + b = Ad$ (4)

Παρατηρούμε ότι $A^2 = -I$.
Πολλ. την (3) με A και προσθέτουμε στην (4) οπότε παίρνουμε

$$Aa + b = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \overset{(1)}{\Rightarrow} 2b = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$b = -\begin{pmatrix}5/2\\1\end{pmatrix}$ και εισάγοντας στην (2) $a = \begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$

και οι (3), (4) είναι ουσιαστικά ίδιες οπότε θέτουμε $c=0$ και παίρνουμε από την (3)

$$d = \begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}$$

Συνεπώς η $x_{ειδ}$ είναι

$$x_{ειδ} = \begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix} t\cos t - \begin{pmatrix}5/2\\1\end{pmatrix} t\sin t + \begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}\sin t.$$

και η συνολική λύση είναι

$$\vec{x} = x_{ομ} + x_{ειδ}.$$