DATE: / / NO.: SUBJECT:

ΜΑΣ024 Ασκήσεις 6/2/2013

Ασκηση 1

Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω αυτόνομων ΔΕ.

i) $x' = 4x^2$, ii) $x' = -(x-3)^2$, iii) $x' = (1-x)(x-2)$

Λύση

i) $x'(t) = 4\,x(t)^2 \Rightarrow \dfrac{x'}{x^2} = 4 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{x'}{x^2}\,dt = \int 4\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{x} = 4t + c \Rightarrow x(t) = \dfrac{-1}{4t+c}$

ii) $x' = -(x-3)^2 \Rightarrow \dfrac{x'}{(x-3)^2} = -1 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{x'}{(x-3)^2}\,dt = \int -\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = -t + C \Rightarrow -\frac{1}{x-3} = -t + C \Rightarrow \frac{1}{x-3} = t - C \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 3 = \dfrac{1}{t-C} \Rightarrow x(t) = 3 + \dfrac{1}{t-C}$

iii) $x' = (1-x)(x-2) \Rightarrow \dfrac{x'}{(1-x)(x-2)} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{x'\,dt}{(1-x)(x-2)} = \int dt \Rightarrow$

$\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x)(x-2)} = t + c \Rightarrow -\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{1-x} = t + C \Rightarrow -\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-1} = t + C \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| = t + C \Rightarrow \dfrac{x-1}{x-2} = e^{t+c} \Rightarrow x(t) = \dfrac{2e^{t+c} - 1}{e^{t+c} - 1}$.

DATE: / / NO.: SUBJECT:

<u>Άσκηση 2</u>: Για κάθε μία από τις παρακάτω ΔΕ να βρεθεί η λύση $x(t)$ που σέβεται την συνθήκη $x(t_0)=x_0$

i) $x' = \sqrt{x}$ $\quad x(1) = 1$, ii) $x' = (x+2)(x-3)$ $\quad x(0)=0$

<u>Λύση</u>

i) $x' = \sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{x'}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{x'}{\sqrt{x}}\,dt = \int dt \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = t + c \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{x} = t + c \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{t+c}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}(t+c)^2$

Επιβάλλουμε την συνθήκη $x(1)=1$ και έχουμε:

$x(1) = \dfrac{1}{4}(c+1)^2 = 1 \Rightarrow (c+1)^2 = 4 \Rightarrow c+1 = \pm 2 \Rightarrow c=1$ ή $c=-3$

Άρα έχουμε δυό συναρτήσεις που ικανοποιούν την ΔΕ και την αρχική συνθήκη

$$x_1(t) = \frac{1}{4}(t+1)^2 \quad \text{και} \quad x_2(t) = \frac{1}{4}(t-3)^2$$

ii) $x' = (x+2)(x-3) \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)(x-3)} = \int dt \Rightarrow \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| = t + c \Rightarrow$

$\dfrac{x-3}{x+2} = e^{5(x+c)} \Rightarrow x = \dfrac{-2e^{5(x+c)} - 3}{-1 + e^{5(x+c)}}$

Επιβάλουμε την συνθήκη $x(0)=0$ κι έχουμε

$0 = \dfrac{-2e^{5c} - 3}{-1 + e^{5c}} \Rightarrow e^{5c} = -3/2$ οπότε δεν υπάρχει συνάρτηση (αδύνατον) που ~~και~~ ικανοποιεί την ΔΕ και την αρχική συνθήκη.

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

Άσκηση 3

Να λυθούν οι παρακάτω ΔΕ.

i) $x' = (t-2)(2x-1)$ ii) $x' = 2t^2 x^2$

Λύση

Και οι δυο ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών.

i)

$$x' = (t-2)(2x-1) \Rightarrow \int \frac{x'}{2x-1}\,dt = \int (t-2)\,dt \Rightarrow \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{(t-2)^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln|2x-1| = \frac{(t-2)^2}{2} + c \Rightarrow \ln|2x-1| = (t-2)^2 + c' \qquad \tilde{c} = 2c$$

$$\Rightarrow 2x-1 = e^{(t-2)^2} e^{\tilde{c}} \qquad e^{\tilde{c}} = 2C \qquad x(t) = \frac{1}{2} + C e^{(t-2)^2}$$

ii)

$$x' = 2t^2x^2 \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int 2t^2\,dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{2}{3}t^3 + C \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x} = -\frac{2}{3}t^3 + C \Rightarrow x(t) = \frac{1}{C - \frac{2}{3}t^3} = \frac{3}{3C - 2t^3}$$

Άσκηση 4

Να λυθεί το ΠΑΤ και να προσδιορισθεί το διάστημα της ανεξ. μεταβλητής για το οποία ισχύει η λύση:

$$x' = 2t^2(x-1)^2 \qquad x(0) = -2$$

Λύση

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int 2t^2\,dt \Rightarrow \ldots \quad x(t) = \frac{-3 + 2t^3 + 3C}{2t^3 + 3C} \qquad x(0) = \frac{3C-3}{3C} = 0 \Rightarrow C = 1$$

Άρα $x(t) = \dfrac{2t^3}{2t^3+3}$ Θα πρέπει $2t^3 + 3 \neq 0$ $t \neq -(3/2)^{1/3}$

(οι άλλες δυο ρίζες είναι μιγαδικές).

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 5:

Να λυθούν οι ακόλουθες ομογενείς ΔΕ.

i) $x' = \dfrac{2t+x}{x}$, ii) $x' = \dfrac{2t+x}{t+x}$, iii) $tx' = \sqrt{t^2+x^2}$

iv) $tx' = x - \sqrt{t^2+x^2}$

Λύση

i) $x' = 2\dfrac{t}{x} + 1$ θέτουμε $x = ty \Rightarrow x' = y + ty'$ οπότε

$$x' = 2\frac{t}{x} + 1 \Rightarrow y + ty' = \frac{2}{y} + 1 \Rightarrow ty' = \frac{2}{y} + 1 - y \Rightarrow$$

$\Rightarrow y' = \left(\dfrac{2}{y} + 1 - y\right)\dfrac{1}{t}$ η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών.

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\frac{2}{y} + 1 - y} = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow -\frac{2}{3} \ln|2-y| - \frac{1}{3} \ln|1+y| = \ln t + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|(2-y)^2(1+y)\right| = \ln(t^3 c') \Rightarrow (2-y)^2(1+y) = c't^3$$

Σε πεπλεγμένη μορφή η λύση είναι:

$$\left(2 - \frac{x}{t}\right)^2\left(1 + \frac{x}{t}\right) = c't^3 \Rightarrow$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

ii) $x' = \dfrac{4t+x}{t+x} = \dfrac{x/t+4}{x/t+1} = f(t/t).$

Θέτουμε $x = ty \Rightarrow x' = y + ty'$ κι έχουμε:

$$y + ty' = \frac{y+4}{y+1} \Rightarrow ty' = \frac{y+4}{y+1} - y = \frac{y+4}{y+1} - \frac{y(y+1)}{y+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ty' = \frac{\cancel{y}+4-y^2-\cancel{y}}{y+1} = \frac{4-y^2}{y+1} \Rightarrow y' = \frac{4-y^2}{y+1}\,\frac{1}{t}.$$ χωρ. μετ.

$$\int \frac{y+1}{4-y^2}\,dy = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow -\frac{3}{4}\ln|2-y| - \frac{1}{4}\ln|2+y| = \ln t + c$$

$$\Rightarrow \ln\left|(2-y)^3(2+y)\right| = \ln|c' t^4| \Rightarrow (2-y)^3(2+y) = c' t^4$$

Οπότε η λύση σε πεπλεγμένη μορφή είναι:

$$\left(2 - \frac{x}{t}\right)^3\left(2 + \frac{x}{t}\right) = c' t^4.$$

iii) $x' = \dfrac{\sqrt{x^2+t^2}}{t} = \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1} \Rightarrow x' = \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1}$

$x = ty \Rightarrow x' = y + ty'$

$$y + ty' = \sqrt{y^2+1} \Rightarrow y' = \left(\sqrt{y^2+1} - y\right)\frac{1}{t}. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(y\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) + \sinh^{-1}(y)\right) = \ln t + c \\ y = x/y \end{cases}$$

άπλα αν δεν έχεις χρόνο.

DATE: / /   NO.:   SUBJECT:

iv) Με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε στην

$$y' = -\sqrt{1+y^2}\,\frac{1}{t} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int -\frac{1}{t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsinh} y = -\ln t + c \Rightarrow$$

$$y(t) = \sinh(c - \ln t) \Rightarrow \quad (y = x/t)$$

$$x(t) = x \sinh(c - \ln t).$$

Άσκηση 6: Να λυθεί το ΠΑΤ.

$$x' = \frac{t-x}{t+2x} \qquad x(0) = 1$$

Λύση:

$$x' = \frac{1 - x/t}{1 + 2x/t} \overset{x=yt}{\Rightarrow} y + ty' = \frac{1-y}{1+2y} \Rightarrow ty' = \frac{1-y}{1+2y} - y = -\frac{-1+2y+2y^2}{1+2y}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{-1+2y+2y^2}{1+2y}\,\frac{1}{t} \Rightarrow \int \frac{1+2y}{-1+2y+2y^2}\,dy = -\int \frac{dt}{t} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{(-1+2y+2y^2)'}{(-1+2y+2y^2)}\,dy = \ln t^{-1} + c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|-1+2y+2y^2| = \ln|c\,t^{-1}| \Rightarrow$$

$$\ln|-1+2y+2y^2| = \ln|t^{-2}c| \Rightarrow 2y^2 + 2y - 1 = c\,t^{-2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{3 + 2c\,t^{-2}}\right) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\left(-t \pm \sqrt{3t^2 + 2c}\right)$$

$x(0) = 1 \Rightarrow \pm\frac{1}{2}\sqrt{2c} = 1 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2$ Άρα $x(t) = \frac{1}{2}\left(-t + \sqrt{3t^2+4}\right)$

μόνο η (+) λύση!!

Άσκηση 7

Να λυθούν τα ΠΑΤ:

i) $t x' + x + t x^2 = 0 \quad x(1)=1$, ii) $x' - x = e^t x^{3/2} \quad x(0)=1$

Λύση

Και οι δυο είναι τύπου Bernoulli

i) Θέτουμε $v = x^{1-\gamma}(t)$ $\quad \underline{\gamma=2}$ η δύναμη!

$v = x^{-1}$

$v' = -\frac{x'}{x^2} \Rightarrow x' = -x^2 v' = x' = -\frac{v'}{v^2}$ κι έχουμε

$-t\frac{v'}{v^2} + \frac{1}{v} + \frac{t}{v^2} = 0 \Rightarrow -tv' + v + t = 0$ (γραμμική).

$\Rightarrow v' - \frac{1}{t}v = 1 \Rightarrow e^{\int -\frac{1}{t}dt} v' - \frac{1}{t} e^{\int(-\frac{1}{t})dt} = e^{\int -\frac{1}{t}dt} \Rightarrow \left(e^{-\ln t} v\right)' = e^{-\ln t} + c$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{t}v\right)' = \frac{1}{t} + c \Rightarrow \frac{1}{t}v = \ln t + c \Rightarrow v = t(\ln t + c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{t(\ln t + c)}$

Επιβάλουμε την αρχική συνθήκη $x(1)=1$ κι έχουμε.

$x(1) = \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow c=1$ άρα

$$x(t) = \frac{1}{t(\ln t+1)}$$

DATE: / /	NO.:	SUBJECT:

ii) Θέτουμε $v = x^{1-\gamma}$ $\quad \gamma = 3/2$ ή $v = x^{-1/2}$.

οπότε $v' = -\frac{1}{2}\frac{x'}{x^{3/2}} \Rightarrow x' = -2\, v'/v^3$ και η ΔΕ γίνεται,

$$-2\frac{v'}{v^3} - \frac{1}{v^2} = e^t \frac{1}{v^3} \Rightarrow -2v' - v = e^t \Rightarrow$$

$$v' + \frac{1}{2} v = -\frac{1}{2} e^t \Rightarrow e^{\int 1/2\, dt} v' + \frac{1}{2} e^{\int 1/2\, dt} v = -\frac{1}{2} e^t e^{\int 1/2\, dt} \Rightarrow$$

$$\left(e^{t/2} v\right)' = -\frac{1}{2} e^t e^{t/2} \Rightarrow e^{t/2} v = -\frac{1}{2}\int e^{3t/2} dt + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{t/2} v = -\frac{1}{3} e^{3t/2} + c \Rightarrow v = \frac{-e^{3t/2} + 3c}{3e^{t/2}}$$

$$x = \frac{1}{v^2} \Rightarrow \quad x(t) = \frac{9e^t}{(-e^{3t/2} + 3c)^2}$$

Επιβάλουμε την αρχική συνθήκη $x(0) = 1$

$$x(0) = \frac{9}{(3c-1)^2} = 1 \Rightarrow 3c - 1 = \pm 3 \Rightarrow c = -\frac{2}{3}, \; c = \frac{4}{3}$$

οπότε έχουμε δυο λύσεις.

$$x_1(t) = \frac{9e^t}{(-e^{3t/2} + 2)^2}, \quad x_2(t) = \frac{9e^t}{(-e^{3t/2} + 4)^2}.$$

DATE: / /	NO.:	SUBJECT:

Άσκηση 8

Να λυθεί η παρακάτω ΔΕ τύπου Ricatti αφού πρώτα αποδειχθεί ότι η $x_1(t)$ αποτελεί ειδική λύση της

$$x' = e^{t} + x - e^{-t}x^{2} \qquad x_1 = e^{t}.$$

Λύση

x_1 είναι λύση αντικ. ...

$x(t) = e^{t} + \frac{1}{v(t)} \Rightarrow x' = e^{t} - \frac{v'}{v^{2}}$ ... η ΔΕ γίνεται

$$v' - v = -e^{-t} \Rightarrow e^{-t}v' - e^{-t}v = -e^{-t}e^{-t} \Rightarrow$$

$$(e^{-t}v)' = e^{-2t} \Rightarrow e^{-t}v = -\frac{1}{2}e^{-2t} + c. \Rightarrow$$

$$v = -\frac{1}{2}e^{-t} + c\,e^{t}$$ άρα

$$x(t) = e^{t} + \frac{1}{ce^{t} - \frac{1}{2}e^{-t}}$$