DATE: / / NO.: SUBJECT: ΜΑΣ 024 Ασκήσεις 6/03/2013.

Άσκηση 1

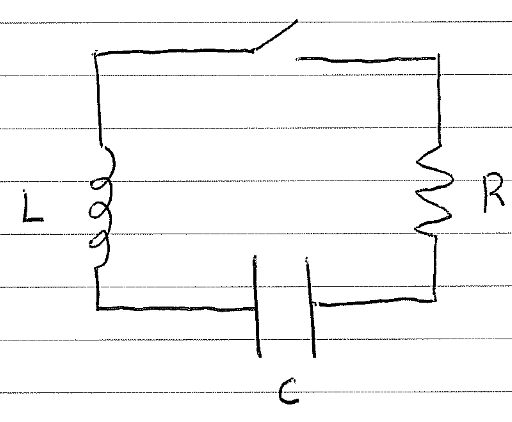
Να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ, τα οποία αφορούν την διάταξη του επόμενου σχήματος - ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RLC χωρίς πηγή - αλλά με τον διακόπτη κλειστό. Για όλα τα ΠΑΤ, $L = 50\ mH$, $R = 10\ \Omega$, ενώ η χωρητικότητα C του πυκνωτή δίνεται κατά περίσταση.

Σε κάθε περίπτωση, να δοθεί η γραφική παράσταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα για το χρονικό διάστημα $t \geq 0$.

A) $C = 400\ \mu F$
- i) $I(0) = 0.3\ A$, $I'(0) = 0.1\ A/sec$
- ii) $I(0) = 0.3\ A$, $I'(0) = 0$
- iii) $I(0) = 0$, $I'(0) = 0.1\ A/sec$

B) $C = 2000\ \mu F$
- i) $I(0) = 0.3\ A$, $I'(0) = 0.1\ A/sec$
- ii) $I(0) = 0.3\ A$, $I'(0) = 0$
- iii) $I(0) = 0$, $I'(0) = 0.1\ A/sec$

Γ) $C = 3.125\ \mu F$
- i) $I(0) = 0.3\ A$, $I'(0) = 0.1\ A/se$
- ii) $I(0) = 0.3\ A$, $I'(0) = 0.$
- iii) $I(0) = 0$, $I'(0) = 0.\ A/sec.$



DATE: / / NO.: SUBJECT:

Λύση

Η ΔΕ που διέπει την δυναμική του ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα είναι η

$$L I''(t) + R I'(t) + \frac{1}{C} I(t) = 0 \qquad (*)$$

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι οι λύσεις της (*) χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες όπου

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad k = \frac{R}{2L}$$

1) $\omega_0 > k \iff R^2 < 4L/C$ (φθίνουσα αρμονική ταλάντωση)

$$I(t) = e^{-kt}\left(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$$

2) $\omega_0 = k \iff R^2 = 4L/C$ (κρίσιμη απόσβεση)

$$I(t) = (c_1 t + c_2)\, e^{-kt}$$

3) $\omega_0 < k \iff R^2 > 4L/C$ (υπερκρίσιμη απόσβεση)

$$I(t) = c_1 e^{-(k+v)t} + c_2 e^{-(k-v)t} \qquad v = \sqrt{k^2 - \omega_0^2}$$

Παρατηρούμε ότι όταν $C = 400\,\mu F$ τότε $R^2 < 4L/C$.
όταν $C = 2000\,\mu F$ τότε $R^2 = 4L/C$
όταν $C = 3125\,\mu F$ τότε $R^2 > 4L/C$.

οπότε έχουμε αντίστοιχες λύσεις.

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

A) $C = 400 \mu F$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των σταθερών βρίσκουμε

$$\boxed{I(t) = e^{-100t}\left(c_1 \cos(200t) + c_2 \sin(100t)\right)}$$

i) $I(0) = 0.3A$, $I'(0) = 0.1\ A/sec$. $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.1505$.

ii) $I(0) = 0.3$, $I'(0) = 0$ $c_1 = 0.3$, $c_2 = 0.15$.

iii) $I(0) = 0$, $I'(0) = 0.1\ A/sec$ $c_1 = 0$, $c_2 = 0.0005$

B) $C = 2000 \mu F$

$$\boxed{I(t) = (c_2 t + c_1) e^{-100t}}$$

i) $I(0) = 0.3A$, $I'(0) = 0.1\ A/sec$ $c_1 = 0.3$, $c_2 = 30.1$

ii) $I(0) = 0.3A$, $I'(0) = 0$ $c_1 = 0.3$ $c_2 = 30.$

iii) $I(0) = 0$, $I'(0) = 0.1$ $c_1 = 0$ $c_2 = 0.1$

Γ) $C = 3.125 \mu F$

$$I(t) = c_1 e^{-160t} + c_2 e^{-40t}$$

i) $I(0) = 0.3A$, $I'(0) = 0.1\ A/sec$ $c_1 = -0.100833$, $c_2 = 0.400833$

ii) $I(0) = 0.3A$, $I'(0) = 0$ $c_1 = -0.1$, $c_2 = 0.4$

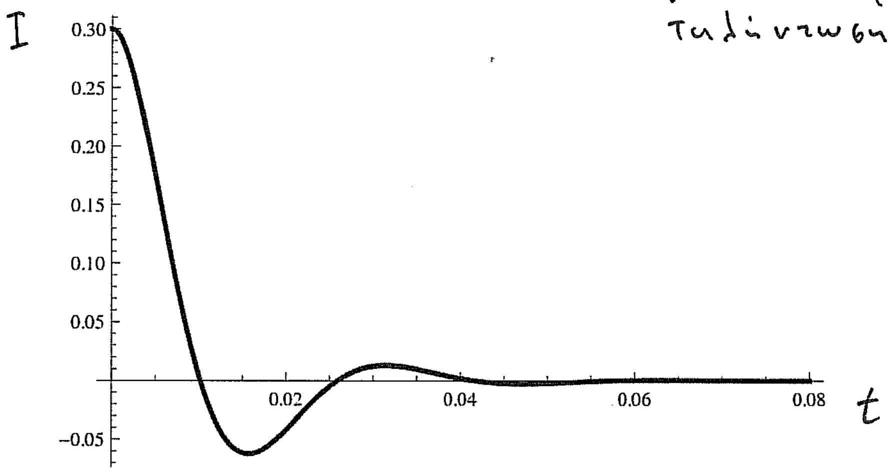
iii) $I(0) = 0$ $I'(0) = 0.1\ A/sec$ $c_1 = -0.0008333$, $c_2 = 0.0008333$

$R^2 < 4L/C$

(φθίνουσα αρμονική ταλάντωση)

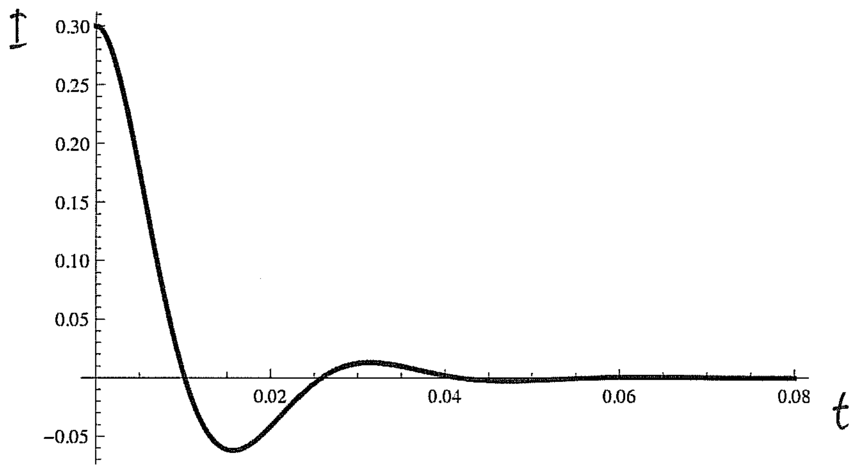
$I(0) = 0.3\ A$

$I'(0) = 0.1\ A/sec$



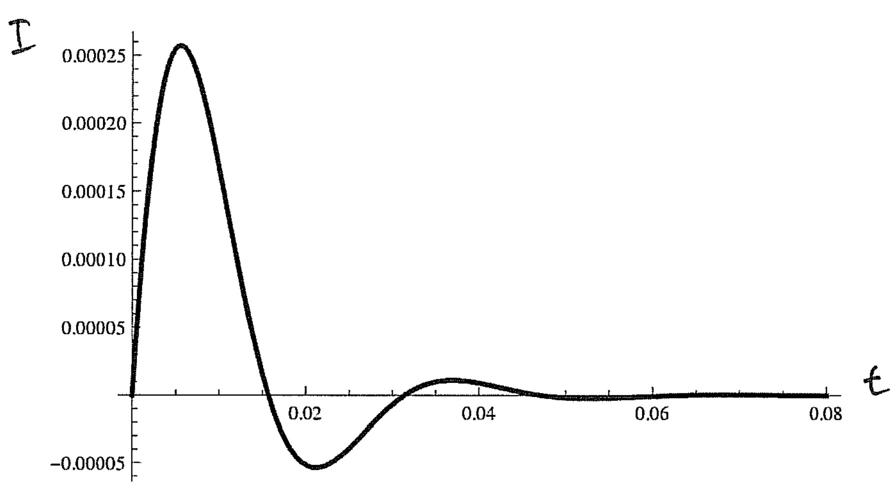
$I(0) = 0.3\ A$

$I'(0) = 0.$



$I(0) = 0$

$I'(0) = 0.1\ A/sec$

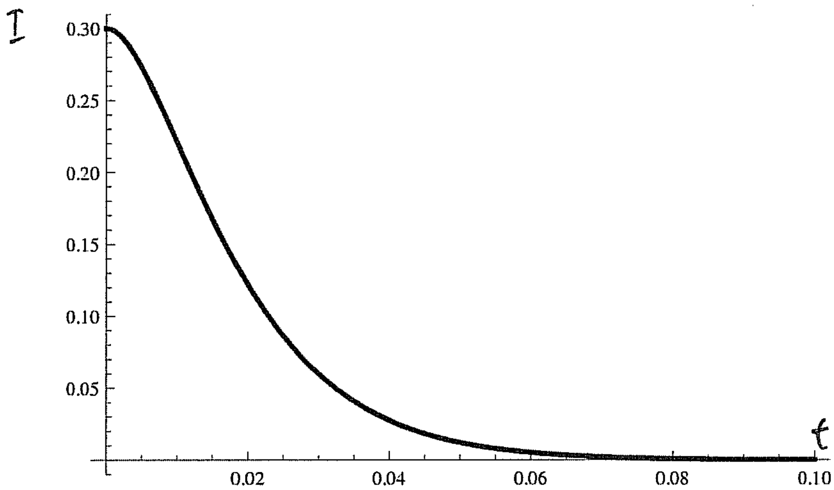


$R^2 = 4L/C$

(κρίσιμη απόσβεση)

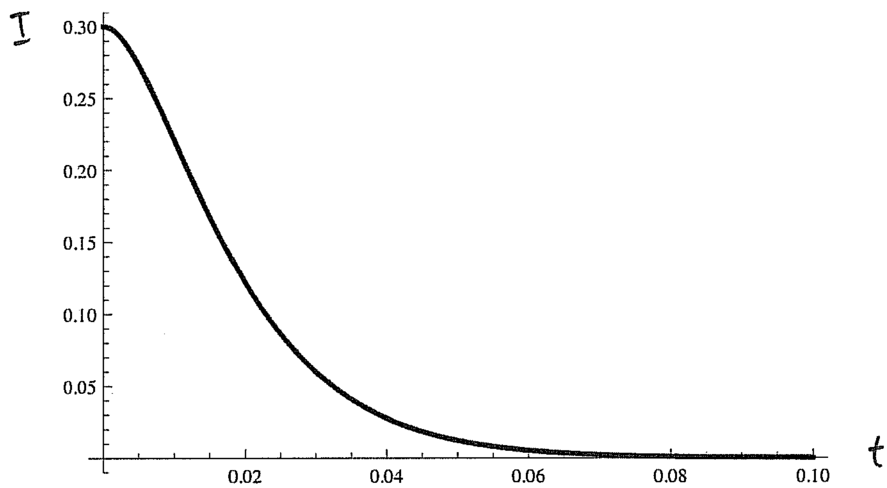
$I(0) = 0.3$ A

$I'(0) = 0.1$ A/sec



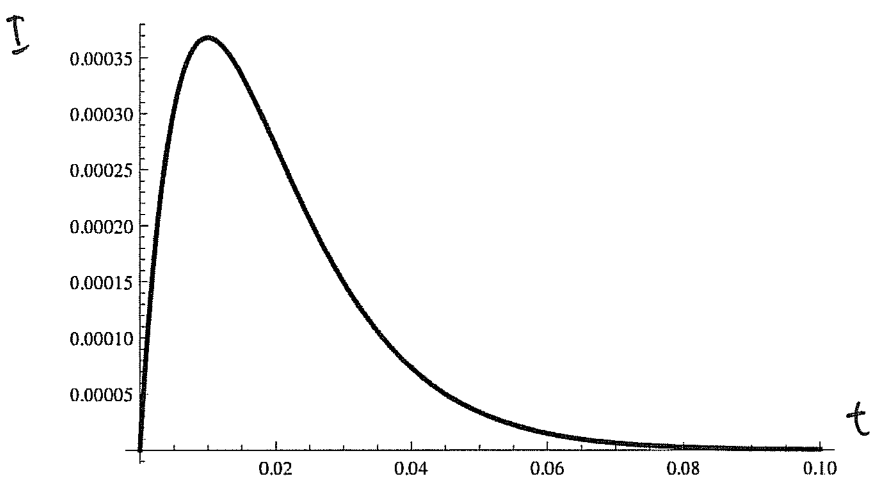
$I(0) = 0.3$ A

$I'(0) = 0$



$I(0) = 0$

$I'(0) = 0.1$ A/sec

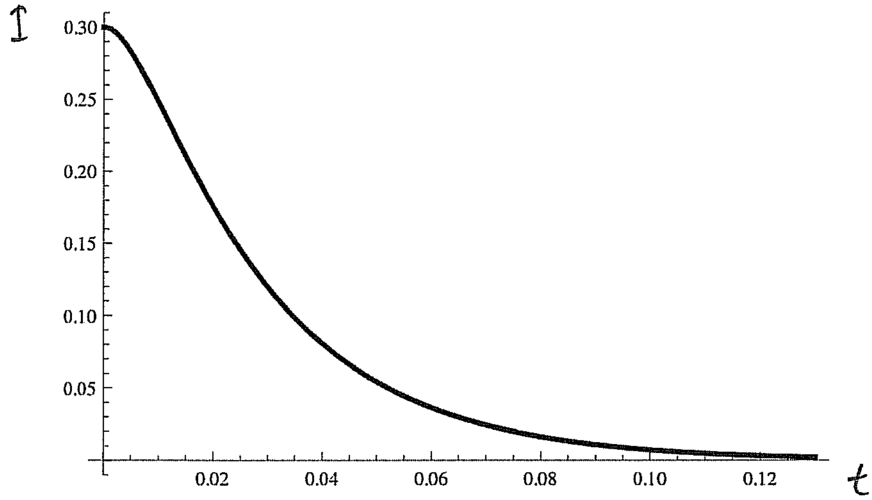


$R^2 > 4L/C$

(υπερκρίσιμη απόσβεση)

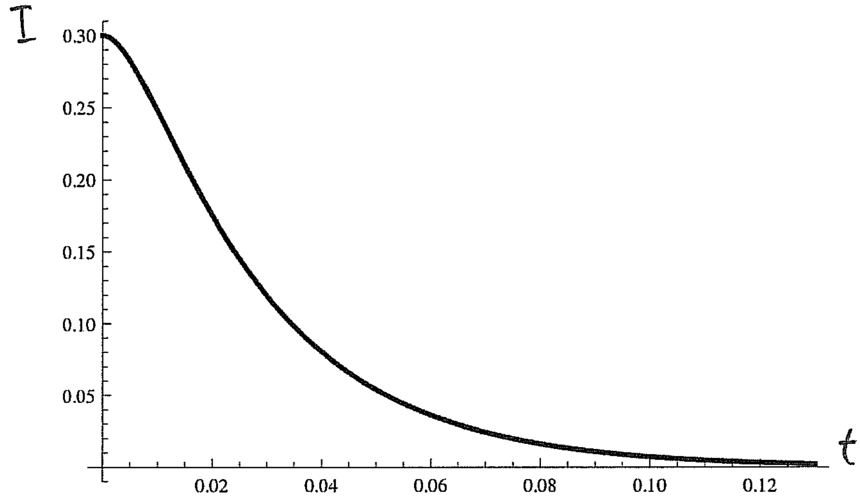
$I(0) = 0.3$ A

$I'(0) = 0.1$ A/sec



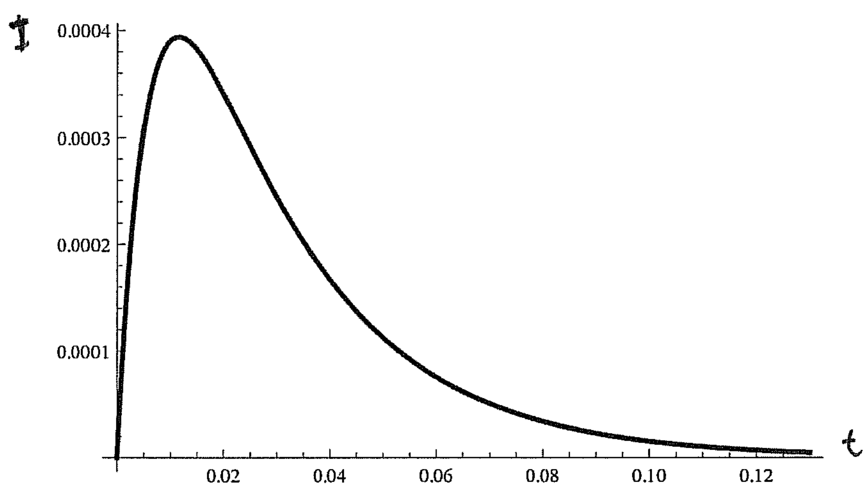
$I(0) = 0.3$ A

$I'(0) = 0$



$I(0) = 0$

$I'(0) = 0.1$ A/sec



DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 2

Για καθεμία από τις επόμενες ΔΕ

α) Επαληθεύσετε ότι η αντίστοιχη $u_1(t)$ αποτελεί λύση της

β) Βρείτε μια δεύτερη λύση της ίδιας ΔΕ, γραμμικά ανεξάρτητη από την $u_1(t)$

i) $t^2u''+4tu'+2u=0$ $u_1(t)=t^{-1}$

ii) $t^2u''-tu'-3u=0$ $u_1(t)=t^{-1}$

iii) $(1-t^2)u''-2tu'+6u=0$ $u_1(t)=3t^2-1$

Λύση

Για το α' μέρος απλή αντικατάσταση

i) Μια δεύτερη λύση $u_2(t)$ μπορεί να προσδιοριστεί με την μέθοδο υποβιβασμού τάξης κάνοντας την υπόθεση ότι η $u_2(t)$ είναι της μορφής

$$u_2(t)=v(t)\cdot u_1(t)=v(t)/t.$$

Τότε ή αντικαθιστούμε στον τύπο αν ~~τον~~ θυμόμαστε ή προχωράμε σε παραγωγίσεις της $u_2(t)$ και εισάγουμε στην ΔΕ (i)

Έχουμε $u_2'(t)=\dfrac{v'(t)}{t}-\dfrac{v(t)}{t^2}$ $u_2''(t)=\dfrac{v''(t)}{t}-\dfrac{2v'}{t^2}+\dfrac{2v}{t^3}$

Αφού η $u_2(t)$ θα είναι λύση της ΔΕ (i) εισάγουμε τις παραπάνω στην (i) κι τελικά έχουμε ότι η $v(t)$ θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$tv''(t)+2v'(t)=0.$$

Θέτοντας $w(t)=v'(t)$ έχουμε

$$tw'(t)+2w(t)=0 \Rightarrow w(t)=\frac{c_1}{t^2}$$

DATE: / / | NO. : | SUBJECT:

Οπότε $v'(t) = w(t) = \frac{c_1}{t^2} \Rightarrow v(t) = c_2 - \frac{c_1}{t}$

Προφανώς μπορούμε να πάρουμε $c_2 = 0$ αφού το κομμάτι αυτό δεν μας δίνει δεύτερη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση και $c_1 = -1$. Οπότε η

$$u_2(t) = \frac{1}{t^2}$$

είναι μια δεύτερη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση από την $u_1(t)$ και η γενική λύση της ΔΕ I είναι

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2}$$

ii) Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι μια δεύτερη γραμμ. ανεξάρτητη λύση είναι η

$$u_2(t) = t^3$$

οπότε

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) = c_1/t + c_2 t^3$$

iii) $u_2(t) = (3t^2 - 1)v(t)$ και καταλήγουμε στην

(έχει αρκετές ολοκληρώσεις ρητών συναρτήσεων)

$$v(t) = \frac{6t}{-1+3t^2} + \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 3

Να βρεθεί η γενική λύση καθεμιάς από τις παρακάτω ΔΕ και να λυθεί το αντίστοιχο ΠΑΤ

$$u(t_0)=A, \quad u'(t_0)=B$$

i) $t^2u''-tu'+2u=0$ $\quad t_0=1,\ A=1,\ B=2$

ii) $9t^2u''+3tu'-8u=0$ $\quad t_0=1,\ A=1,\ B=-1$

iii) $t^2u''-3tu'+5u=0$ $\quad t_0=1,\ A=0,\ B=-2$

iv) $4t^2u''+u=0$ $\quad t_0=1,\ A=2,\ B=-1$

v) $t^2u''-5tu'+8u=0$ $\quad t_0=-2,\ A=-2,\ B=3$

vi) $4t^2u''+17u=0$ $\quad t_0=-1,\ A=-3,\ B=0$

Λύση

Όλες οι ΔΕ είναι τύπου Euler-Cauchy.

i)

Η υπόθεση ότι $u(t)=t^s$ οδηγεί στην εξίσωση

$$(s^2-2s+3)t^s=0 \Rightarrow s^2-2s+3=0 \Rightarrow$$

$$s_1=1+i\sqrt{2},\ s_2=1-i\sqrt{2}$$

Άρα το θεμ. σύνολο λύσεων είναι το

$$\{t\cos(\sqrt{2}\ln t),\ t\sin(\sqrt{2}\ln t)\}$$

αφού $t^{1+i\sqrt{2}}=t\cdot t^{i\sqrt{2}}=t\,e^{i\sqrt{2}\ln t}\ \ldots\ t^{1-i\sqrt{2}}=t\,e^{-i\sqrt{2}\ln t}$.

οπότε

$$u(t)=c_1\,t\cos(\sqrt{2}\ln t)+c_2\,t\sin(\sqrt{2}\ln t)$$

DATE: / / NO. : SUBJECT:

$u(1) = c_1 = 1 \qquad u'(1) = \sqrt{2}\, c_2 + c_1 = 2$

Άρα $\sqrt{2}\, c_2 + 1 = 2 \Rightarrow \sqrt{2}\, c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1/\sqrt{2}$

(ii) Με παρόμοιο τρόπο

$$9s^2 - 6s - 8 = 0 \Rightarrow s_1 = -2/3,\ s_2 = 4/3$$

οπότε

$$\{u_1, u_2\} = c_1 t^{-2/3} + c_2 t^{4/3}$$

$$\left.\begin{aligned} u(1) &= c_1 + c_2 = 1 \\ u'(1) &= \tfrac{4}{3} c_2 - \tfrac{2}{3} c_1 = -1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= 7/6 \\ c_2 &= -1/6. \end{aligned}$$

(iii) $\{u_1, u_2\} = \{ t^2 \cos(\ln t),\ t^2 \sin(\ln t) \}$

$u = c_1 t^2 \cos(\ln t) + c_2 t^2 \sin(\ln t)$

$$\left.\begin{aligned} u(1) &= c_1 = 0 \\ u'(1) &= c_2 + 2c_1 = 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 2. \end{aligned}$$

(iv) Για την ΔΕ βρίσκουμε διπλή ρίζα $s = 1/2$ οπότε με την μέθοδο υποβιβασμού τάξης γνωρίζουμε ότι μια δεύτερη γραμμ. ανεξ. λύση της

$u_1 = t^{1/2}$ είναι η $u_2 = t^{1/2} \ln t$. άρα

$u(t) = c_1 t^{1/2} + c_2 t^{1/2} \ln t$

$u(1) = c_1 = 2$ $\quad\Big\}\quad$ $c_1 = 2$

$u'(1) = \dfrac{c_1}{2} + \dfrac{c_2}{2} = -1$ $\quad\Big\}\quad$ $c_2 = -4$

v). $\{u_1, u_2\} = \{t^2, t^4\}$ $\quad u(t) = c_1 t^2 + c_2 t^4$

$u(-2) = 4c_1 + 16c_2 = -2$ $\quad\Big\}\quad$ $c_1 = 1/12$

$u'(-2) = -4c_1 - 32c_2 = 3$ $\quad\Big\}\quad$ $c_2 = -5/48$

vi) $\{u_1, u_2\} = \left\{\sqrt{|t|}\cos(2\ln|t|),\ \sqrt{|t|}\sin(2\ln|t|)\right\}$

Προσοχή! οι τύποι ισχύουν με απόλυτα έτσι που να έχουν νόημα οι συναρτήσεις.

$$u(t) = c_1\sqrt{|t|}\cos(2\ln|t|) + c_2\sqrt{|t|}\sin(2\ln|t|).$$

Αφού θέλουμε $t_0 = -1$ που είναι αρνητικό τότε έχουμε για $t < 0$

$$u(t) = c_1\sqrt{-t}\cos(2\ln(-t)) + c_2\sqrt{-t}\sin(2\ln(-t)).$$

$u(-1) = c_1 = -3$ $\quad\Big\}\quad$ $c_1 = -3$

$u'(-1) = -2c_2 - \dfrac{c_1}{2} = 0$ $\quad\Big\}\quad$ $c_2 = 3/4.$