DATE: / /	NO.:	SUBJECT:

ΜΑΣ024 Ασκήσεις 10/04/2013

<u>Άσκηση 1.</u> Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace γνωστών συναρτήσεων να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων. (Ίσως είναι απαραίτητη μια προκαταρκτική ολοκλήρωση κατά μέρη).

1) $f(t)=\sqrt{t}+3t$ 2) $f(t)=3t^{5/2}-4t^3$ 3) $f(t)=t-2e^{3t}$

4) $f(t)=t^{3/2}-e^{-10t}$ 5) $f(t)=1+\cosh 5t$ 6) $f(t)=\sin 2t+\cos 2t$

7) $f(t)=\cos^2(2t)$ 8) $f(t)=\sin 3t\cos 3t$ 9) $f(t)=(1+t)^3$

10) $f(t)=te^{t}$ 11) $f(t)=t\cos 2t$ 12) $f(t)=\sinh^2 3t$

<u>Λύση</u>

1) $\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(\sqrt{t}+3t)=\mathcal{L}(t^{1/2}+3t)=\mathcal{L}(t^{1/2})+3\mathcal{L}(t)$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}+\frac{3}{s^2}$$

2) $\mathcal{L}(3t^{5/2}-4t^3)=3\mathcal{L}(t^{5/2})-4\mathcal{L}(t^3)=\dfrac{45\sqrt{\pi}}{8s^{7/2}}-\dfrac{24}{s^4}$

3) $\mathcal{L}(t-2e^{3t})=\mathcal{L}(t)-2\mathcal{L}(e^{3t})=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{2}{s-3}$

4) $\mathcal{L}(t^{3/2}-e^{-10t})=\mathcal{L}(t^{3/2})-\mathcal{L}(e^{-10t})=\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}}-\dfrac{1}{s+10}$

5) $\mathcal{L}(1+\cosh(5t))=\mathcal{L}(1)+\mathcal{L}(\cosh(5t))=\dfrac{1}{s}+\dfrac{s}{s^2-25}$

6) $\mathcal{L}(\sin 2t+\cos 2t)=\mathcal{L}(\sin 2t)+\mathcal{L}(\cos 2t)=\dfrac{2}{s^2+4}+\dfrac{s}{s^2+4}=\dfrac{s+2}{s^2+4}$.

DATE: / / NO.: SUBJECT:

7) $\mathcal{L}(\cos^2 2t) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(1)+\mathcal{L}(\cos 4t)\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+16}\right)$$

8) $\mathcal{L}(\sin 3t \cos 3t) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}\sin 6t\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(\sin(6t)) =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{6}{s^2+36}.$$

9) $\mathcal{L}((1+t)^3) = \mathcal{L}(1+3t+3t^2+t^3) = \mathcal{L}(1)+3\mathcal{L}(t)+3\mathcal{L}(t^2)+\mathcal{L}(t^3)$

$$= \frac{1}{s}+\frac{3}{s^2}+\frac{6}{s^3}+\frac{6}{s^4}$$

10) $\mathcal{L}(te^t) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, t e^t\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\, de^t = e^{-st}e^t t\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^t (e^{-st}t)'\,dt$

$$= e^{(1-s)t}\,t\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^t\left(-s e^{-st} t + e^{-st}\right)dt$$

$$\overset{s>1}{=} (0-0) + s\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t e^t\, dt - s\int_0^{+\infty} e^{-st} e^t =$$

$$= s\,\mathcal{L}(te^t) - \mathcal{L}(e^t) \Rightarrow (1-s)\,\mathcal{L}(te^t) = -\mathcal{L}(e^t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s-1)\,\mathcal{L}(te^t) = \frac{1}{s-1} \Rightarrow \mathcal{L}(te^t) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

Γενική

$$\mathcal{L}(t^a e^{bt}) = \frac{\Gamma(a+1)}{(s-b)^{a+1}} \qquad (s>b).$$

DATE: / / NO. : SUBJECT:

11) $\mathcal{L}(t\cos 2t) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-st}\, t\, (\sin 2t)'\, dt$

$$= \frac{1}{2} e^{-st}\, t\sin 2t \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \sin 2t\,(-se^{-st}t + e^{-st})\,dt$$

$$= (0-0) + \frac{s}{2}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(2t)\, t\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin 2t\, dt$$

$$= \frac{s}{2}\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin(2t)\, t\, dt - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\sin 2t)$$

$$= -\frac{s}{4}\int_0^{\infty} e^{-st}\, t\, d\cos(2t) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\sin 2t) =$$

$$= -\frac{s}{4}\left[e^{-st}\, t \cos 2t \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \cos 2t\,(-se^{-st}t + e^{-st})\, dt\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\sin 2t)$$

$$= -\frac{s}{4}\left[s\,\mathcal{L}(t\cos 2t) - \mathcal{L}(\cos 2t)\right] - \frac{1}{2}\,\frac{2}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{s^2}{4}\right)\mathcal{L}(t\cos 2t) = \frac{s}{4}\,\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4} \Rightarrow (s^2+4)\,\mathcal{L}(t\cos 2t) = \frac{s^2-4}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(t\cos 2t) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

12) $\mathcal{L}(\sinh^2 3t) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(-1 + \cosh(6t)\right)\right] = \frac{1}{2}\left(-\mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(\cosh 6t)\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2-36}\right)$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 2 Χρησιμοποιώντας γνωστούς μετασχηματισμούς Laplace δοσμένων συναρτήσεων, να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων

1) $F(s)=\frac{3}{s^4}$ 2) $F(s)=s^{-3/2}$, 3) $F(s)=\frac{1}{s}-\frac{2}{s^{5/2}}$

4) $F(s)=\frac{1}{s+5}$ 5) $F(s)=\frac{3}{s-4}$, 6) $F(s)=\frac{3s+1}{s^2+4}$

7) $F(s)=\frac{5-3s}{s^2+9}$ 8) $F(s)=\frac{2+s}{4-s^2}$, 9) $F(s)=\frac{10s-3}{25-s^2}$

10) $F(s)=2s^{-1}e^{-3s}$

Λύση

1) $\mathcal{L}^{-1}(F(s))=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^4}\right)=\frac{t^3}{2}$ αφού $\mathcal{L}\left(\frac{t^3}{2}\right)=\frac{1}{2}\mathcal{L}(t^3)=\frac{1}{2}\frac{6}{s^4}=\frac{3}{s^4}$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left(s^{-3/2}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{1/2}$ αφού $\mathcal{L}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{1/2}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}(t^{1/2})=\frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{\pi}}}\frac{\cancel{\sqrt{\pi}}}{\cancel{2}}\frac{1}{s^{3/2}}$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s^{5/2}}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{5/2}}\right)=1-\frac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{3/2}$

4) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right)=e^{-5t}$

5) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s-4}\right)=3\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-4}\right)=3e^{4t}$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

6) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+1}{s^2+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}\right) =$

$= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

$= 3\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)$

7) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5-3s}{s^2+9}\right) = 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9}\right) - 3\mathcal{L}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

$= \frac{5}{3}\sin(3t) - 3\cos(3t)$

8) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{9+s}{4-s^2}\right) = -9\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-4}\right) =$

$= -\frac{9}{2}\sinh(2t) - \cosh(2t)$

9) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{10s-3}{25-s^2}\right) = -10\mathcal{L}\left(\frac{s}{s^2-25}\right) + 3\mathcal{L}\left(\frac{1}{s^2-25}\right)$

$= -10\cosh 5t + \frac{3}{5}\sinh(5t).$

10) $\mathcal{L}^{-1}\left(2s^{-1}e^{-3s}\right) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(s^{-1}e^{-3s}\right) =$

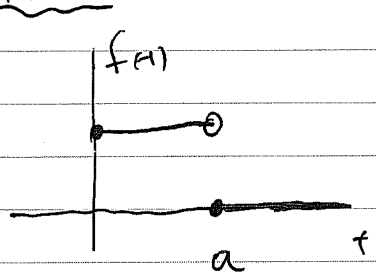
$= 2u(t-3)$

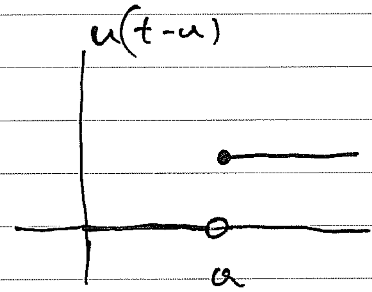
όπου $u(t-3) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

<u>Άσκηση 3</u>. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ και $f(t) = 1$ αν $0 \le t < \alpha$ και $f(t) = 0$ αν $t \geq \alpha$. Να γραφεί η $f(t)$ στην μορφή γνωστών συναρτήσεων και της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης $u(t-\alpha)$. Να βρεθεί ο μετασχ. Laplace της $f(t)$

<u>Λύση</u>





$$u(t-\alpha) = \begin{cases} 0, & t < \alpha \\ 1, & t \geq \alpha \end{cases}$$

$$1 - u(t-\alpha) = \begin{cases} 1-0 & t < \alpha \\ 1-1 & t \geq \alpha \end{cases} = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \alpha \\ 0 & t \geq \alpha \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι οι τιμές της $f(t)$ και της $1-u(t-\alpha)$ είναι ταυτόσημες παντού εκτός από το σημείο $t=\alpha$, οπότε

$$f(t) = \begin{cases} 1 - u(t-\alpha) & t \neq \alpha \quad t > 0 \\ 1 & t = \alpha \end{cases}$$

Άρα και οι συναρτήσεις $e^{-st} f(t)$ και $e^{-st}(1-u(t-\alpha))$ έχουν τις ίδιες τιμές εκτός από $t=\alpha$, όμως έχουν το ίδιο ολοκλήρωμα στο διάστημα $t \in [0,+\infty)$ οπότε

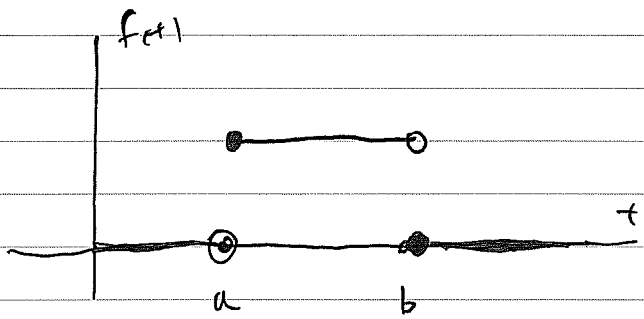
$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(1-u(t-\alpha)) = \mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(u(t-\alpha)) = \frac{1}{s} - s^{-1}e^{-as}$$

$$= \frac{1}{s}\left(1 - e^{-as}\right)$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 4 Έστω $0<a<b$ και $f(t)=1$ αν $a \le t < b$, $f(t)=0$ αν $t<a$ ή $t \geq b$. Να γραφεί η $f(t)$ σαν συνάρτηση γνωστών συναρτήσεων και της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης σε κατάλληλα διαστήματα και να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$.

Λύση



$$f(t) = u(t-a) - u(t-b) \quad t \neq a, b$$

$$f(t) = 0 \quad \text{όταν} \quad t=a \text{ ή } t=b$$

Επειδή οι συναρτήσεις $e^{-st} f(t)$, $e^{-st}\big(u(t-a) - u(t-b)\big)$ έχουν ταυτόσημες τιμές (εκτός από τις $t=a$, $t=b$) από το θεώρημα του ολοκλ. Riemann έχουν ίδιο ολοκλήρωμα στο διάστημα ολοκλ. $[0,+\infty)$ οπότε

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\big(u(t-a) - u(t-b)\big) = \mathcal{L}(u(t-a)) - \mathcal{L}(u(t-b))$$

$$= \frac{1}{s} e^{-as} - \frac{1}{s} e^{-bs} = \frac{1}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right).$$

DATE: / / NO. : SUBJECT:

<u>Άσκηση 5</u>: Η μοναδιαία κλιμακωτή συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$f(t) = n \quad \text{αν} \quad n-1 \leq t < n \qquad n=1,2,\ldots$$

ή ισοδύναμα

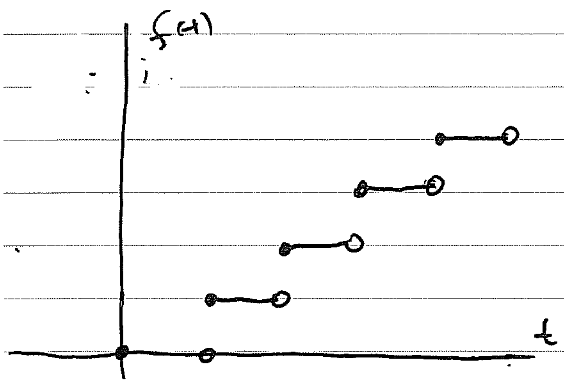
$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(t-n) \qquad t \geq 0. \qquad (*)$$

Ας υποθέσουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $(*)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα άπειρο άθροισμα των επιμέρους μετασχηματισμών δηλ.

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}(u(t-n)) \qquad (**)$$

Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{L}(f(t)) = \dfrac{1}{s(1-e^{-s})}$

<u>Λύση</u>



$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u(t-n)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}(u(t-n))$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} \mathcal{L}(u(t-k))\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-t} + \frac{1}{s}e^{-2s} + \cdots \frac{1}{s}e^{-ns}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\lim_{n\to+\infty}\left(1 + e^{-t} + e^{-2s} + \cdots e^{-ns}\right)$$

Αν $A = 1 + \cancel{e^{-s}} + \cancel{e^{-2s}} + \cdots + \cancel{e^{-ns}}$ τότε

$e^{-s}A = \cancel{e^{-s}} + \cancel{e^{-2s}} + \cancel{e^{-3s}} + \cdots e^{-(n+1)s}$

οπότε $(e^{-s}-1)A = e^{-(n+1)s} - 1 \Rightarrow A = \dfrac{1-e^{-(n+1)s}}{1-e^{-s}} \Rightarrow$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

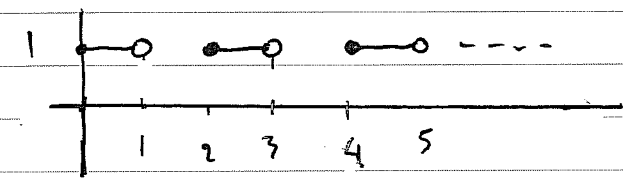
$$\lim_{n \to +\infty} A = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \cancel{e^{-(n+1)s}}^{\to 0}}{1 - e^{-s}} = \frac{1}{1 - e^{-s}}$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 - e^{-s}}$$

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

<u>Άσκηση 6</u> Το γράφημα της συνάρτησης f δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η συνάρτηση αυτή γράφεται ως $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u(t-n)$

Να αποδειχθεί ότι $\mathcal{L}(f(t))=\dfrac{1}{s(1+e^{-s})}$

<u>Λύση</u>

$$\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n u(t-n)\right)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mathcal{L}\left(u(t-n)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-2s}-\frac{1}{s}e^{-3s}+\cdots\right)=\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+\cdots\right)$$

Αν $A=1-\cancel{e^{-s}}+\cancel{e^{-2s}}+e^{-3s}+\cdots(-1)^n\cancel{e^{-ns}}$ τότε

$$e^{-s}A=\cancel{e^{-s}}-\cancel{e^{-2s}}+\cancel{e^{-3s}}-e^{-4s}+\cdots(-1)^n e^{-(n+1)s}$$

$$(1+e^{-s})A=1+(-1)^n e^{-(n+1)s}\Rightarrow A=\frac{1+(-1)^n e^{-(n+1)s}}{1+e^{-s}}$$

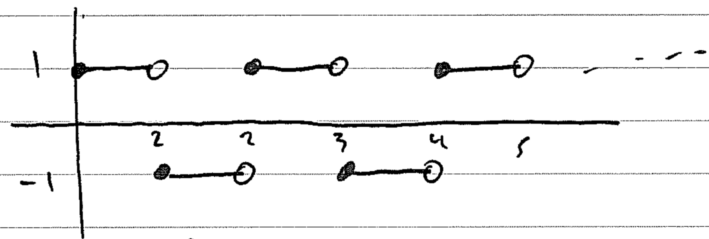
και $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}A=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+(-1)^n\cancelto{0}{e^{-(n+1)s}}}{1+e^{-s}}=\frac{1}{1+e^{-s}}$

Άρα

$$\mathcal{L}(f(t))=\frac{1}{s}\,\frac{1}{1+e^{-s}}$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 7. Η τετραγωνική κυματική συνάρτηση $g(t)$ δείχνεται στο σχήμα



Να σκεφτεί η $g(t)$ σε σχέση με την συνάρτηση της άσκησης 6 και να αποδειχθεί ότι

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} = \frac{1}{s}\tanh\left(\frac{s}{2}\right)$$

Λύση

Προφανώς

$$g(t) = u(t) - 2u(t-1) + 2u(t-2) - 2u(t-3) \cdots 2(-1)^n u(t-n)$$

(προσθαφαιρέσαμε $u(t)$)

$$= 2u(t) - 2u(t-1) + \dots + 2(-1)^n u(t-n) + \dots - u(t)$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u(t-n) - u(t) = 2f(t) - u(t)$$

Άρα $g(t) = 2f(t) - u(t)$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(2f(t) - u(t)) = 2\mathcal{L}(f(t)) - \mathcal{L}(u(t)) =$$

$$= \frac{2}{s}\frac{1}{1+e^{-s}} - \frac{1}{s} =$$

$$= \frac{1}{s}\left(\frac{2}{1+e^{-s}} - 1\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{2-1-e^{-s}}{1+e^{-s}}\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}\right) =$$

$$= \frac{1}{s}\frac{\cancel{e^{-s/2}}\left(e^{s/2}-e^{-s/2}\right)}{\cancel{e^{-s/2}}\left(e^{s/2}+e^{-s/2}\right)} = \frac{1}{s}\tanh(s/2).$$