DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

ΜΑΣ024 Ασκήσεις 13/02/2013

Άσκηση 1

Κάθε μια από τις παρακάτω ΔΕ να ελεγχθεί αν είναι ακριβείς ή όχι. Για εκείνες που είναι ακριβείς, να βρεθεί μια οικογένεια λύσεων με τη μορφή της συνθήκης $\varphi(x,y)=c$. Όπου είναι δυνατό, η λύση να εκφραστεί ρητά στη μορφή $y=f(x,c)$.

i) $(x+y)y' + y+2x = 0$

ii) $(x-3y^2)y' + y+2x = 0$

iii) $(2x-y)y' + y+2x = 0$

iv) $2yy' = \frac{x+1}{x}$

v) $(x-2y)y' + y+\cos x = 0$

vi) $(x-2y)y' - 2y+\cos x = 0$

vii) $3x^2+y+xy' = 0$

viii) $2e^{-(x^2+y^2)}(x+yy') = 1$

Λύση

i) $A + By' = 0$ Η ΔΕ είναι ακριβής αν και μόνο αν $A_y = B_x$

$A = y+2x$, $B = x+y$ $\left.\begin{matrix} A_y = 1 \\ B_x = 1 \end{matrix}\right\}$ άρα η ΔΕ είναι ακριβής

Υπάρχει $\varphi(x,y)$ τ.ω. $\varphi_x = A$, $\varphi_y = B$ δηλαδή:

$$\left.\begin{matrix} \varphi_x = y+2x \Rightarrow \varphi = xy + x^2 + g(y) \\ \varphi_y = x+y \qquad \varphi_y = x+y \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \varphi_y = x+g'(y) \\ \parallel \\ \varphi_y = x+y \end{matrix}\right\} g'(y) = y \Rightarrow$$

$g(y) = y^2/2$ δηλαδή οι λύσεις της ΔΕ δίνονται από την σχέση $\varphi(x,y) = c \Rightarrow y^2/2 + xy + x^2 = c. \Rightarrow$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

$$y = -x \pm \sqrt{2c - x^2}$$

ii) $\left.\begin{array}{l} A = y + 2x \\ B = x - 3y^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A_y = 1 \\ \quad \shortparallel \\ B_x = 1 \end{array}$ άρα η ΔΕ είναι ακριβής.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_x = A \\ \varphi_y = B \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \varphi_x = y + 2x \\ \varphi_y = x - 3y^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \varphi(x,y) = xy + x^2 + g(y) \\ \varphi_y = x - 3y^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_y = x + g'(y) \\ \varphi_y = x - 3y^2 \end{array}\right\} \quad g'(y) = -3y^2 \Rightarrow g(y) = -y^3$$

άρα οι λύσεις της ΔΕ δίνονται από την σχέση

$$\varphi(x,y) = c \Leftrightarrow -y^3 + xy + x^2 = c.$$

iii) $\left.\begin{array}{l} A = y + 2x \\ B = 2x - y \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A_y = 1 \\ \quad \neq \\ B_x = 2 \end{array}$ Η ΔΕ δεν είναι ακριβής

iv) δες παρακάτω:

v) $\left.\begin{array}{l} A = y + \cos x \\ B = x - 2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} A_y = 1 \\ B_x = 1 \end{array}\right\}$ Η ΔΕ είναι ακριβής

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_x = A \\ \varphi_y = B \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \varphi_x = y + \cos x \\ \varphi_y = x - 2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \varphi = xy + \sin x + g(y) \\ \varphi_y = x - 2y \end{array}\right\}$$

DATE: / /	NO.:	SUBJECT:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_y = x + g'(y) \\ \quad \| \\ \varphi_y = x - 2y\end{array}\right\} \qquad g'(y) = -2y \Rightarrow g = -y^2.$$

Άρα οι λύσεις της ΔΕ δίνονται από τη σχέση

$$\varphi(x,y) = C \Rightarrow -y^2 + xy + \sin x = C \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{-4C + x^2 + 4\sin x}\right)$$

iv) ~~[illegible]~~ $2yy' = \dfrac{x+1}{x} \Rightarrow 2yy' - \dfrac{x+1}{x} = 0$

$$\left.\begin{array}{l}A = -\dfrac{x+1}{x} \\ B = 2y\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}A_y = 0 \\ B_x = 0\end{array}\right\} \text{ Η ΔΕ είναι ακριβής.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_x = A \\ \varphi_y = B\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\varphi_x = -\dfrac{x+1}{x} \\ \varphi_y = 2y\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\varphi_x = -\dfrac{x+1}{x} \\ \varphi = y^2 + g(x)\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\varphi_x = -\dfrac{x+1}{x} \\ \varphi_x = g'(x)\end{array}\right\}$$

$$g'(x) = -1 - \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = -x - \ln|x|$$

Άρα $\varphi(x,y) = C \Rightarrow y^2 - x - \ln|x| = C \Rightarrow$

$$y = \pm\sqrt{C + x + \ln|x|}.$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

vi) $A = -2y + \cos x$, $B = x - 2y$ $\Bigg\}$ $A_y = -2$, $B_x = 1$ $\Bigg\}$ όχι ακριβής

vii) $A = 3x^2 + y$, $B = x$ $\Bigg\}$ $A_y = 1$, $B_x = 1$ $\Bigg\}$ η ΔΕ είναι ακριβής.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_x = A\\ \varphi_y = B\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\varphi_x = 3x^2 + y\\ \varphi_y = x\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\varphi_x = 3x^2 + y\\ \varphi = xy + g(x)\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\varphi_x = 3x^2 + y\\ \varphi_x = y + g'(x)\end{array}\right\}$$

$g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g = x^3$ άρα

$$\varphi(x,y) = c \Rightarrow xy + x^3 = c \Rightarrow y = \frac{c - x^3}{x}. \quad \underline{x \neq 0}$$

Η ΔΕ είναι και γραμμική!

viii) $2e^{-(x^2+y^2)}(x + yy') = 1 \Rightarrow 2(x + yy') = e^{x^2+y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - e^{x^2+y^2} + 2y\,y' = 0$

$A = 2x - e^{x^2+y^2}$, $B = 2y$ $\Bigg\}$ $A_y = -2y\,e^{x^2+y^2}$, $B_x = 0$ $\Bigg\}$ η ΔΕ $\underline{\text{δεν}}$ είναι ~~δεν~~ ακριβής.

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 2

Δείξτε ότι οι παρακάτω ΔΕ επιδέχονται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $E(x,y)=f(x)$ και $E(x,y)=f(y)$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας έναν παράγοντα αυτού του είδους να κατασκευασθούν οι λύσεις των ΔΕ ρητά ή έμμεσα.

i) $2y^2+3x+2xyy'=0$ ii) $y+3+(3y-2x)y'=0.$

Λύση

i) $\left.\begin{array}{l} A = 2y^2+3x \\ B = 2xy \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} A_y = 4y \\ B_x = 2y \end{array}\right\}$ η ΔΕ δεν είναι ακριβής

όμως

$$\frac{A_y - B_x}{B} = \frac{4y-2y}{2xy} = \frac{2y}{2xy} = \frac{1}{x}$$

που είναι συνάρτηση μόνο του x. Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι τότε η ΔΕ επιδέχεται έναν πολ/στή της μορφή $E(x,y)=f(x)$ όπου

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{x} \Rightarrow \quad f(x) = x.$$

Τότε η $2xy^2+3x^2+2x^2yy'$ είναι ακριβής

Πράγματι:

$\left.\begin{array}{l} A = 2xy^2+3x^2 \\ B = 2x^2y \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} A_y = 4xy \\ B_x = 4xy \end{array}$

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_x &= A\\ \varphi_y &= B\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\varphi_x &= 2xy^2+3x^2\\ \varphi_y &= 2x^2y\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\varphi_x &= 2xy^2+3x^2\\ \varphi &= x^2y^2+g(x)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi_x &= 2xy^2+3x^2\\ \varphi_x &= 2xy^2+g'(x)\end{aligned}\right\} \quad g'(x)=3x^2 \Rightarrow g(x)=x^3$$

Άρα οι λύσεις δίνονται από την σχέση

$$\varphi(x,y)=C \Rightarrow x^2y^2+x^3=C.$$

ii)

$$\left.\begin{aligned}A &= y+3\\ B &= 3y-2x\end{aligned}\right\} \quad A_y = 1 \neq B_x = -2$$

η ΔΕ <u>δεν</u> είναι ακριβής.

Όμως

$$\frac{B_x - A_y}{A} = \frac{-3}{y+3}$$

που είναι συνάρτηση μόνο του y κι από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η ΔΕ επιδέχεται έναν ολοκλ. παράγοντα της μορφής $E(x,y)=f(y)$ που δίνεται από την σχέση

$$\frac{f'}{f} = -\frac{3}{y+3} \Rightarrow \ln f = -3\ln y+3 \Rightarrow f = \frac{1}{(y+3)^3}$$

Παρατήρηση: η ΔΕ γίνεται

$$\frac{1}{(y+3)^2} + \frac{3y-2x}{(y+3)^3}\,y' = 0.$$

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

$$\partial_y\left(\frac{1}{(y+3)^2}\right) = \partial_x\left(\frac{3y-2x}{(y+3)^3}\right) = -\frac{2}{(y+3)^3}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_x &= A \\ \varphi_y &= B \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \varphi_x &= \frac{1}{(y+3)^2} \Rightarrow \varphi = \frac{x}{(y+3)^2} + g(y) \\ \varphi_y &= \frac{3y-2x}{(y+3)^3} \Rightarrow \varphi_y = \frac{3y-2x}{(y+3)^3} \end{aligned}$$

$$\frac{-3y + (y+3)g'(y)}{(y+3)^3} = 0 \Rightarrow g'(y) = \frac{3y}{y+3} \Rightarrow g(y) = -\frac{3}{2}\,\frac{3+2y}{(y+3)^2}$$

Κι συνεπώς οι λύσεις της ΔΕ δίνονται από την σχέση

$$\varphi(x,y) = c \Rightarrow \frac{x}{(y+3)^2} - \frac{3}{2}\,\frac{3+2y}{(y+3)^2} = c$$