DATE: / / NO.: SUBJECT: ΜΑΣ 024 Ασκήσεις 13/03/2013

Άσκηση 1

Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω ΔΕ, με την μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων

i) $u'' + 4u = 4\sin 2t$ ii) $u'' + 4u = 9(t+1)\sin t$.

Λύση

i) Η ομογ. ΔΕ είναι $u'' + 4u = 0$.
Χαρακτ. πολ. $\rho^2 + 4 = 0 \Rightarrow \rho = \pm 2i$ άρα το θεμ. σύνολο λύσεων είναι $\{u_1, u_2\} = \{\cos 2t, \sin 2t\}$

$$W(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = 2.$$

Γνωρίζουμε ότι μια ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ με την μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων είναι η

$$u_{\varepsilon\iota\delta} = -u_1 \int \frac{u_2\, 4\sin 2t}{2}\, dt + u_2 \int u_1 \frac{4\sin 2t}{2}\, dt$$

$$= -\cos 2t \int 2\sin^2 2t\, dt + \sin 2t \int 2\sin 2t \cos 2t\, dt$$

$$= -\cos 2t \int (1 - \sin 4t)\, dt + \sin 2t \int \sin 4t\, dt$$

$$= -\cos 2t \left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right) + \sin 2t \left(-\frac{1}{4}\cos 4t\right) =$$

$$= -t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$u(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t.$$

DATE: / /   NO.:   SUBJECT:

ii) Όπως στην i) το θεμ. σύνολο λύσεων της ομογενούς ΔΕ είναι το $\{u_1, u_2\} = \{\cos 2t, \sin 2t\}$

Η ειδική λύση είναι

$$u_{\varepsilon\iota\delta}(t) = -\cos 2t \int \frac{9}{2}(t+1)\sin t \sin 2t \, dt + \sin 2t \int \frac{9}{2}(t+1)\sin t \cos 2t \, dt$$

$$= -\cos 2t \left[\frac{9}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos 3t + 3(1+t)\sin^3 t \right]$$

$$+ \sin 2t \left[-\frac{9}{4}\sin t + \frac{1}{4}\sin 3t + \frac{9}{4}(t+1)\cos t - \frac{3}{4}(t+1)\cos 3t \right]$$

$$= -2\cos t + 3(1+t)\sin t.$$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι η

$$u(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t - 2\cos t + 3(1+t)\sin t$$

Εδώ θα πρέπει να τονισθεί ότι ο υπολογισμός των ολοκλ. είναι αρκετά επίπονος οπότε θα ήταν προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο προσδιορισμού των συντελεστών, σύμφωνα με την οποία αναζητούμε $u_{\varepsilon\iota\delta}$ της μορφής.

$$u_{\varepsilon\iota\delta}(x) = (b_0 + b_1 t)\cos t + (\gamma_0 + \partial_1 t)\sin t$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 2. Να λυθεί η άσκηση 1 ii) με την μέθοδο του προσδιορισμού των συντελεστών και μετά το ΠΑΤ $u'(0)=0$, $u''(0)=3$.

Λύση

Αναζητούμε $u_{ειδ}(x)$ της μη-ομογενούς ΔΕ της μορφής

$$u_{ειδ}(x)=(b_0+b_1 t)\cos t+(\gamma_0+\gamma_1 t)\sin t.$$

Βρίσκουμε $u''_{ειδ}$ και αφού αντικαταστήσουμε στην ΔΕ και ομαδοποιήσουμε όρους με $\sin t$, $\cos t$ έχουμε

$$(3b_0+2\gamma_1+3b_1 t)\cos t+(-2b_1+3(\gamma_0+\gamma_1 t))\sin t=$$
$$=9(t+1)\sin t.$$

Συνεπώς θα πρέπει $3b_0+2\gamma_1+3b_1 t=0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 3b_0+2\gamma_1&=0\\ b_1&=0 \end{aligned}$$

και $-2b_1+3(\gamma_0+\gamma_1 t)=9(t+1) \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} -2b_1+3\gamma_0&=9\\ 3\gamma_1&=9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \gamma_0&=3\\ \gamma_1&=3 \end{aligned}$$

και από την $3b_0+2\gamma_1=0 \Rightarrow 3b_0+6=0 \Rightarrow b_0=-2$

άρα η $u_{ειδ}=-2\cos t+3(t+1)\sin t$. όπως προηγουμένως. Για το ΠΑΤ έχουμε:

$u(0)=C_1-2=0 \Rightarrow C_1=2$ $\quad u'(0)=3+2C_2=0 \Rightarrow C_2=0$ Άρα

$$u(t)=-2\cos t+2\cos 2t+3(1+t)\sin t.$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 3

Να βρεθεί μία ειδική λύση των παρακάτω ΔΕ με τη μέθοδο του προσδιορισμού των συντελεστών

i) $u'' - 4u = 8t(t-1)$ ii) $u'' - 4u = 1 - e^{-2t}$

iii) $u'' + 9u = 1 - \sin 3t$ iv) $u'' + 9u = 4(1-3t)^2 \sin t$

Λύση

i) Πρώτα βρίσκουμε και πάλι το θεμ. σύνολο της ομογενούς ΔΕ. $u'' - 4u = 0$

χαρ. πολ. $\rho^2 - 4 = 0 \Rightarrow \rho = \pm 2$ άρα

$\{u_1, u_2\} = \{e^{2t}, e^{-2t}\}$

Παρατηρούμε ότι ο όρος εξαναγκασμού δεν έχει κανένα κομμάτι που να είναι γραμμική εξαρτημένη με το σύνολο των θεμελιωδών λύσεων οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $u_{ειδ}$ έχει την μορφή

$u_{ειδ}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$

Αντικαθιστούμε και έχουμε

$2b_2 - 4b_0 - 4b_1 t - 4b_2 t^2 = -8t + 8t^2$

εξισώνουμε συντελεστές δυνάμεων του t κι έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} 2b_2 - 4b_0 = 0 \\ -4b_1 = -8 \\ -4b_2 = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b_0 = -1 \\ b_1 = 2 \\ b_2 = -2 \end{array}$$ άρα $u_{ειδ} = -1 + 2t - 2t^2$.

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

ii) Στην περίπτωση αυτή υπάρχει στον όρο εξαναγκασμού η $-e^{-2t}$ η οποία έχει γραμμική εξάρτηση με μία από τις λύσεις του θεμ. συνόλου $\{e^{-2t}, e^{2t}\}$

Άρα υποθέτουμε ότι η μία $u_{ειδ}$ έχει την μορφή

$u^{(1)}_{ειδ}(t) = t^{s} e^{-2t} b_0$ και $u^{(2)}_{ειδ}(t) = b_0'$ για τις ΔΕ

$u'' - 4u = -e^{-2t}$ και $u'' - 4u = 1$ αντίστοιχα

Για την $u^{(1)}_{ειδ}$ έχουμε όταν εισάγουμε στην αντίστοιχη ΔΕ

$$e^{-2t} + b_0 e^{-2t}(s-1)s t^{s-2} - 4 b_0 e^{-2t} s t^{s-1} = 0 \quad (*)$$

οπότε $s=1$ και γίνεται η (*)

$(1-4b_0)e^{-2t} = 0 \Rightarrow b_0 = 1/4$. άρα $u^{(1)}_{ειδ}(t) = \frac{1}{4} t e^{-2t}$

Για την $u^{(2)}_{ειδ}$ έχουμε

$-4b_0' = 1 \Rightarrow b_0' = -1/4$ άρα $u^{(2)}_{ειδ}(t) = -1/4$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

iii) Το χαρ. πολυώνυμο είναι $\rho^2+9=0 \Rightarrow \rho=\pm 3$ άρα

$$\{u_1, u_2\}=\{\cos(3t), \sin(3t)\}$$

Χωρίζουμε την ΔΕ στις εξής δυο

$u''+9u=1$ και $u''+9u=-\sin 3t$

Για την πρώτη υποθέτουμε την $u_{\varepsilon\iota\delta}$ της μορφής

$u^{(1)}_{\varepsilon\iota\delta}(t)=b_0$ και εισάγοντας στην ΔΕ έχουμε

$9b_0=1 \Rightarrow b_0=1/9$

Για την δεύτερη, επειδή υπάρχει ο όρος $-\sin 3t$ που έχει γραμμ. εξάρτηση με μια από τις συναρτήσεις του θεμελ. συνόλου $\{\cos 3t, \sin 3t\}$ υποθέτουμε ότι

$u^{(2)}_{\varepsilon\iota\delta}(t)=\gamma_0 t^s \sin 3t+\delta_0 t^s \cos 3t$

Εισάγοντας στην ΔΕ και παραγοντοποιώντας ως $\cos 3t$, $\sin 3t$ έχουμε:

$$\cos 3t\left(\delta_0(s-1)+6\gamma_0 t\right)s t^{s-2}+\left(-\gamma_0 s+\gamma_0 s^2-6\delta_0 s t\right)t^{s-2}\sin 3t = -\sin 3t$$

οπότε (αφού $s\neq 0$) θα πρέπει

$s=1$, $\gamma_0=0$ και οι όροι με τα $\sin 3t$ δίνουν

$-6\delta_0=-1 \Rightarrow \delta_0=1/6$ άρα $u^{(2)}_{\varepsilon\iota\delta}=\frac{1}{6}t\cos 3t$

Άρα $u_{\varepsilon\iota\delta}=u^{(1)}_{\varepsilon\iota\delta}(t)+u^{(2)}_{\varepsilon\iota\delta}(t)=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}t\cos 3t.$

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

iv) Το θεμ. σύνολο λύσεων είναι το ίδιο με το (iii) σκέλος της άσκησης. Όμως καμμία συνάρτηση του όρου εξαναγκασμού δεν έχει γραμμ. εξάρτηση με τις συναρτήσεις του θεμ. συνόλου λύσεων, οπότε υποθέτουμε ότι

$$u_{\mu\delta} = (b_0 + b_1 t + b_2 t^2)\sin t + (\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2)\cos t$$

Εισάγοντας στην ΔΕ και μαζεύοντας όρους με $\cos t$, $\sin t$ έχουμε:

$$2\left(b_1 + 4\gamma_0 + \gamma_2 + (2b_2 + 4\gamma_1)t + 4\gamma_2 t^2\right)\cos t +$$

$$2\left(4b_0 + b_2 - \gamma_1 + (4b_1 - 2\gamma_2)t + 4b_2 t^2\right)\sin t = \left(4 - 24t + 36t^2\right)\sin t.$$

Άρα θα πρέπει

$$\begin{aligned} &\gamma_2 = 0 \qquad && 8b_0 + 2b_2 - 2\gamma_1 = 4 \\ &2b_2 + 4\gamma_1 = 0 && 8b_1 - 4\gamma_2 = -24 \\ &b_1 + 4\gamma_0 + \gamma_2 = 0 && 8b_2 = 36 \end{aligned}$$

$b_0 = -\frac{19}{16}$, $b_1 = -3$, $b_2 = \frac{9}{2}$, $\gamma_0 = \frac{3}{4}$, $\gamma_1 = -\frac{9}{4}$, $\gamma_0 = 0$

Άρα

$$u_{\mu\delta} = \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{4}t\right)\cos t + \left(-\frac{19}{16} - 3t + \frac{9}{2}t^2\right)\sin t. \;!!!$$