DATE: / / NO.: SUBJECT:

ΜΑΣ 024 Ασκήσεις 17/04/2013

Άσκηση 1 Γνωρίζουμε ότι αν ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ είναι $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, τότε $\mathcal{L}(t\,f(t)) = -F'(s)$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα αυτή να δειχθεί ότι:

i) $\mathcal{L}(t e^{at}) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$ ii) $\mathcal{L}(t\cos kt) = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$

iii) $\mathcal{L}(t\sin kt) = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$, iv) $\mathcal{L}(t\cosh(kt)) = \dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$

v) $\mathcal{L}(t\sinh(kt)) = \dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι $\mathcal{L}(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}$, οπότε

$$\mathcal{L}(t e^{at}) = -\left(\frac{1}{s-a}\right)' = \frac{1}{(s-a)^2}$$

ii) $\mathcal{L}(\cos kt) = \dfrac{s}{s^2+k^2} \Rightarrow \mathcal{L}(t\cos kt) = -\left(\dfrac{s}{s^2+k^2}\right)' = -\left(\dfrac{(s^2+k^2)-2s^2}{(s^2+k^2)^2}\right) =$

$$= -\frac{(k^2-s^2)}{(s^2+k^2)^2} = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$$

iii) $\mathcal{L}(\sin kt) = \dfrac{k}{s^2+k^2} \Rightarrow \mathcal{L}(t\sin kt) = -\left(\dfrac{k}{(s^2+k^2)}\right)' = \dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$

iv) $\mathcal{L}(\cosh kt) = \dfrac{s}{s^2-k^2} \Rightarrow \mathcal{L}(t\cosh kt) = -\left(\dfrac{s}{s^2-k^2}\right)' = -\dfrac{s^2-k^2-2s^2}{(s^2-k^2)^2} = \dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$

v) $\mathcal{L}(\sinh kt) = \dfrac{k}{s^2-k^2} \Rightarrow \mathcal{L}(t\sinh kt) = -\left(\dfrac{k}{s^2-k^2}\right)' = \dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$

DATE: / /	NO. :	SUBJECT:

Άσκηση 2 Να δειχθεί ότι

i) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right) = \frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt)$

ii) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+k^2)^2}\right) = \frac{t\sin kt}{2k}$, iii) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+k^2)^2}\right) = \frac{t}{2}\cos kt + \frac{1}{2k}\sin kt$

iv) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^3}{(s^2+k^2)^2}\right) = \cos kt - \frac{1}{2}kt\sin kt.$

Λύση

i) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt)\right) = \frac{1}{(s^2+k^2)^2}$$

Πράγματι, από προηγούμενη άσκηση γνωρίζουμε ότι $\mathcal{L}(t\cos kt) = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$, οπότε

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt)\right] = \frac{1}{2k^3}\mathcal{L}(\sin kt) - \frac{1}{2k^2}\mathcal{L}(t\cos kt)$$

$$= \frac{1}{2k^3}\frac{k}{s^2+k^2} - \frac{1}{2k^2}\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2k^2}\frac{s^2+k^2}{(s^2+k^2)^2} - \frac{1}{2k^2}\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)} = \frac{2k^2}{2k^2(s^2+k^2)^2} = \frac{1}{(s^2+k^2)^2}.$$

ii) Αφού $\mathcal{L}(t\sin kt) = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2} \Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{t}{2k}\sin kt\right) = \frac{s}{(s^2+k^2)^2}.$

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

iii) Θα αποδείξουμε την iii) με ανάλυση της ρητής συνάρτησης σε απλούς όρους και χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα των προηγούμενων υποερωτημάτων

$$\frac{s^2}{(s^2+k^2)^2} = \frac{s^2+k^2-k^2}{(s^2+k^2)^2} = \frac{1}{s^2+k^2} - \frac{k^2}{(s^2+k^2)^2}$$

οπότε $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+k^2)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+k^2}\right) - k^2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right) =$

$$= \frac{1}{k}\sin kt - k^2\left(\frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt)\right)$$

$$= \frac{1}{2k}\sin kt + \frac{t}{2}\cos kt.$$

iv) Ομοίως όπως με την iii) έχουμε ότι

$$\frac{s^3}{(s^2+k^2)^2} = \frac{s}{s^2+k^2} - \frac{k^2 s}{(s^2+k^2)^2}$$ συνεπώς

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^3}{(s^2+k^2)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+k^2}\right) - k^2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+k^2)^2}\right) =$$

$$= \cos kt - k^2\frac{t\sin kt}{2k} = \cos kt - \frac{kt}{2}\sin kt.$$

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

Άσκηση 3. Με την μέθοδο του μετ. Laplace να λυθεί το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$u''(t)+4u(t)=9(t+1)\sin t. \quad u(0)=0,\ u'(0)=3.$$

Λύση. Μετασχηματίζουμε την ΔΕ κι έχουμε:

$$\mathcal{L}(u''(t))+4\mathcal{L}(u(t))=9\mathcal{L}(\sin t)+9\mathcal{L}(t\sin t)\Rightarrow$$

$$s^2\mathcal{L}(u(t))-s\,\cancel{u(0)}^{\,0}-u'(0)+4\mathcal{L}u(t)=9\frac{1}{s^2+1}+\frac{18s}{(s^2+1)^2}\Rightarrow$$

$$(s^2+4)\mathcal{L}(u(t))=3+\frac{9}{s^2+1}+\frac{18s}{(s^2+1)^2}\Rightarrow \mathcal{L}(u(t))=\frac{3}{s^2+4}+\frac{9}{(s^2+1)(s^2+4)}+\frac{18s}{(s^2+1)^2(s^2+4)}$$

Αναλύουμε τις ρητές συναρτήσεις $\frac{9}{(s^2+1)(s^2+4)}$, $\frac{18s}{(s^2+1)^2(s^2+4)}$ σε απλούς λόγους:

$$\frac{9}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{3}{s^2+1}-\frac{3}{s^2+4},\quad \frac{18s}{(s^2+1)^2}=\frac{6s}{(s^2+1)^2}-\frac{2s}{s^2+1}+\frac{2s}{s^2+4}$$

κι έχουμε

$$\mathcal{L}(u(t))=\cancel{\frac{3}{s^2+4}}+\frac{3}{s^2+1}-\cancel{\frac{3}{s^2+4}}+\frac{6s}{(s^2+1)^2}-\frac{2s}{s^2+1}+\frac{2s}{s^2+4}+\quad\Rightarrow$$

$$u(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+1}\right)+6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)^2}\right)-2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)+2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)=$$

$$=3\sin t+3t\sin t-2\cos t+2\cos 2t$$

Άσκηση 4 Με την μέθοδο του μετ. Laplace να λυθεί το ακόλουθο ΠΑΤ.

$$x'' + 3x' + 2x = t, \qquad x(0)=0, \quad x'(0)=2.$$

Λύση Μετασχηματίζουμε την ΔΕ κι έχουμε:

$$\mathcal{L}(x'') + 3\mathcal{L}(x') + 2\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(t) \Rightarrow$$

$$s^2\mathcal{L}(x(t)) - s\cancelto{0}{u(0)} - u'(0) + 3\left(s\mathcal{L}(x) - \cancelto{0}{x(0)}\right) + 2\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$(s^2+3s+2)\mathcal{L}(x(t)) = \frac{1}{s^2} + 2 \Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) = \frac{1}{s^2(s^2+3s+2)} + \frac{2}{s^2+3s+2}$$

Παρατηρούμε ότι το s^2+3s+2 έχει δυο ρίζες τις $-1, -2$ οπότε $s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$. Στην συνέχεια αναλύουμε τις ρητές συναρτήσεις

$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}, \quad \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

σε απλούς λόγους κι έχουμε

$$\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2s^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4(s+2)}, \quad \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

οπότε

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{s} + \frac{3}{s+1} - \frac{9}{4}\frac{1}{s+2} \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) - \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{9}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} + 3e^{-t} - \frac{9}{4}e^{-2t}.$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 5

Να λυθεί το Π.Α.Τ. $u''-u'=te^t$ $u(0)=u'(0)=0$ με την μέθοδο μετ. Laplace.

Λύση Μετασχηματίζουμε την ΔΕ κι έχουμε:

$$\mathcal{L}(u'')-\mathcal{L}(u)=\mathcal{L}(te^t) \Rightarrow s^2\mathcal{L}(u)-s\cancel{u(0)}^{\,0}-\cancel{u'(0)}^{\,0}-\mathcal{L}(u)=\frac{1}{(s-1)^2}\Rightarrow$$

$$(s^2-1)\,\mathcal{L}(u)=\frac{1}{(s-1)^2}\Rightarrow \mathcal{L}(u)=\frac{1}{(s-1)^2(s^2-1)}=\frac{1}{(s-1)^3(s+1)}$$

Αναλύουμε την ρητή συνάρτηση $\frac{1}{(s-1)^3(s+1)}$ σε απλούς λόγους κι έχουμε

$$\frac{1}{(s-1)^3(s+1)}=\frac{1}{8}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^3}-\frac{1}{8}\frac{1}{(s+1)}$$

οπότε

$$\mathcal{L}(u)=\frac{1}{8}\frac{1}{s-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)^3}-\frac{1}{8}\frac{1}{(s+1)}\Rightarrow$$

$$u(t)=\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)-\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right)+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^3}\right)-\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}e^{t}-\frac{1}{4}te^{t}+\frac{1}{4}t^2e^{t}-\frac{1}{8}e^{-t}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\mathcal{L}(te^{at})=-\left(\mathcal{L}(e^{at})\right)'=-\left(\frac{1}{s-a}\right)'=\frac{1}{(s-a)^2},\quad \mathcal{L}(t^2e^{at})=(-1)^2\left(\mathcal{L}(e^{at})\right)''=\frac{1}{(s-a)^2}$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 6 Με την μέθοδο του μετ. Laplace να λυθεί το ακόλουθο ΠΑΤ.

$$x' = x + 2y, \quad y' = x + e^{-t}, \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Λύση

Μετασχηματίζουμε το σύστημα των ΔΕ κι έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(x) + 2\mathcal{L}(y) \\ \mathcal{L}(y') = \mathcal{L}(x) + 2\mathcal{L}(e^{-t}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s\mathcal{L}(x) - \cancel{x(0)}^{\,0} = \mathcal{L}(x) + 2\mathcal{L}(y) \\ s\mathcal{L}(y) - \cancel{y(0)}^{\,0} = \mathcal{L}(x) + \dfrac{1}{s+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} (s-1)\mathcal{L}(x) - 2\mathcal{L}(y) = 0 \\ \mathcal{L}(x) - s\mathcal{L}(y) = -\dfrac{1}{s+1} \end{array}\right. \quad (1)$$

Λύνουμε το γραμμικό σύστημα (1) ως προς $\mathcal{L}(x)$, $\mathcal{L}(y)$ κι έχουμε

$$\mathcal{L}(x) = \frac{2}{(s-2)(s+1)^2}, \quad \mathcal{L}(y) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)^2}$$

Αναλύουμε τις ρητές συναρτήσεις σε απλούς λόγους κι έχουμε

$$\frac{2}{(s-2)(s+1)^2} = \frac{2}{9}\frac{1}{s-2} - \frac{2}{9}\frac{1}{s+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\frac{s-1}{(s-2)(s+1)^2} = \frac{1}{9}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{9}\frac{1}{s+1} + \frac{2}{3}\frac{1}{(s+1)^2}$$

οπότε $x(t) = \frac{2}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{2}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) = \frac{2}{9}e^{2t} - \frac{2}{9}e^{-t} - \frac{2}{3}te^{-t}$

$$y(t) = \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \frac{1}{9}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) = \frac{1}{9}e^{2t} - \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{2}{3}te^{-t}.$$

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

Άσκηση 7. Να λυθεί με την μέθοδο του μετ. Laplace το ακόλουθο ΠΑΤ:

$$x' = x + z, \quad y' = x + y, \quad z' = -2x - z, \quad x(0)=1, \; y(0)=0, \; z(0)=0$$

Λύση Μετασχηματίζουμε το σύστημα των ΔΕ κι έχουμε:

$$s\mathcal{L}(x) - x(0) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(z) \Rightarrow (s-1)\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(z) + 1$$

$$s\mathcal{L}(y) - y(0) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y) \Rightarrow (s-1)\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(x) \qquad (1)$$

$$s\mathcal{L}(z) - z(0) = -2\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(z) \Rightarrow (s+1)\mathcal{L}(z) = -2\mathcal{L}(x)$$

Λύνουμε το σύστημα (1) ως προς $\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y), \mathcal{L}(z)$ κι έχουμε

$$\mathcal{L}(x) = \frac{s+1}{s^2+1}, \quad \mathcal{L}(y) = \frac{s+1}{(s-1)(s^2+1)}, \quad \mathcal{L}(z) = -\frac{2}{s^2+1}$$

Αναλύουμε τις ρητές συναρτήσεις σε απλούς λόγους κι έχουμε

$$\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}, \quad \frac{s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1}, \quad -\frac{2}{s^2+1} = -\frac{2}{s^2+1}$$

Οπότε

$$x = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \cos t + \sin t$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = e^{t} - \cos t$$

$$z = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2}{s^2+1}\right) = -2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = -2\sin t.$$