DATE: / /    NO.:    SUBJECT:

ΜΑΣ 024 Ασκήσεις 20/02/2013

**Άσκηση 1:** Να δειχθεί ότι η συνθήκη

$$xy(\partial_y A - \partial_x B) = r y B - s x A$$

εξασφαλίζει την ύπαρξη πολλαπλασιαστή Euler της μορφής $E(x,y) = x^r y^s$ για την ΔΕ $A(x,y) + B(x,y)\, y' = 0$.

**Λύση**

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι για να επιδέχεται η ΔΕ $A(x,y) + B(x,y)\, y' = 0$ πολλ. Euler $E(x,y)$ η συνάρτηση $E(x,y)$ πρέπει και αρκεί να ικανοποιεί την ΜΔΕ

$$B\,\partial_x E - A\,\partial_y E = (\partial_y A - \partial_x B)\, E \qquad (*)$$

Αν λοιπόν $E = x^r y^s$ τότε η (*) γίνεται

$$r x^{r-1} y^s B - A s x^r y^{s-1} = (\partial_y A - \partial_x B)\, x^r y^s \Rightarrow$$

$$r \cancel{x^{r-1}} \cancel{y^{s-1}}\, y B - s \cancel{x^{r-1}} \cancel{y^{s-1}}\, A x = (\partial_y A - \partial_x B)\, x y\, \cancel{x^{r-1}} \cancel{y^{s-1}} \Rightarrow$$

$$r y B - s x A = (\partial_y A - \partial_x B)\, x y. \quad \blacksquare$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 2 Να λυθούν οι παρακάτω ΔΕ μέσω ενός πολλ. Euler

i) $(x+2)\sin y + \cos y \, y' = 0$

ii) $\sin y - 2y e^{-x} \sin x + (\cos y + 2e^{-x}\cos x) y' = 0$

iii) $x^2 y^3 + x(\cancel{x}\cdot 1 + y^2) y' = 0$

iv) $y(x+y)\cos x + ((x-y)\sin x - 2) y' = 2(1 + y\sin x)$

Λύση

i) Η ΔΕ επιδέχεται του πολλ. Euler $E(x,y) = \dfrac{1}{\sin y}$ ο οποίας την μετατρέπει στην ακριβή ΔΕ

$$(x+2) + \cot y \, y' = 0$$

που οι λύσεις της δίνονται από την

$$\varphi(x,y) = \ln|\sin y| + 2x + x^2/2 = c.$$

(Να γίνει αναλυτικά η εύρεση του $E(x,y)$!)

ii) Επιδέχεται του πολλ. Euler $E(x,y) = e^{x}$ που μετατρέπει την ΔΕ στην ακριβή

$$e^x \sin y - 2y\sin x + (2\cos x + e^x \cos y) y' = 0.$$

που οι λύσεις της δίνονται από την

$$\varphi(x,y) = e^x \sin y + 2\cos x \, y = c.$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

iii) Η ΔΕ επιδέχεται πολλ/στή Euler $E(x,y) = x^{-1} y^{-3}$

που μετατρέπει την ΔΕ στην

$$x + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3}\right) y' = 0$$

της οποίας οι λύσεις της δίνονται από την

$$\varphi(x,y) = -\frac{1}{2y^2} + \frac{x^2}{2} + \ln y = c$$

iv) Η ΔΕ επιδέχεται πολλ/στή Euler $E(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^3}$

που μετατρέπει την ΔΕ στην ακριβή

$$\frac{y\cos x}{(x+y)^2} + \frac{\left((x-y)\sin x - 2\right)}{(x+y)^3}\, y' = \frac{2(1+y\sin x)}{(x+y)^3}$$

που η λύση της δίνεται από την

$$\varphi(x,y) = \frac{(1+y\sin x)}{(x+y)^2} = c.$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 3: Να βρεθούν οι λύσεις της ΔΕ $u'' = f(t)$ που σέβονται τις αρχικές συνθήκες

$$u(t_0) = a, \quad u'(t_0) = b$$

για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

i) $f(t) = 12t(1-t)$ $\quad t_0 = 0, \ a = 1, \ b = -1$

ii) $f(t) = 2(1 - e^{-t})$ $\quad t_0 = 0, \ a = 0, \ b = 1$

iii) $f(t) = 4\cos(2t)$ $\quad t_0 = \pi/2, \ a = 2, \ b = 0$

iv) $f(t) = 6t + \sinh t$ $\quad t_0 = 0, \ a = -1, \ b = -2$

v) $f(t) = \begin{cases} 2, & t < 0 \\ 1 + \cos t, & t \geq 0 \end{cases}$ $\quad t_0 = -1, \ a = 0, \ b = 1$

vi) $f(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}$ $\quad t_0 = 0, \ a = 2, \ b = -1.$

Λύση

i) $u'' = 12t - 12t^2 \Rightarrow u' = 6t^2 - 4t^3 + c_1 \Rightarrow$

$$u(t) = 2t^2 - t^3 + c_1 t + c_2.$$

$u(0) = c_2$, $u'(0) = c_1$ άρα $c_1 = -1$, $c_2 = 1$ και η λύση του ΠΑΤ είναι

$$u(t) = 2t^2 - t^3 - t + 1$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

ii) $u'' = 2 - 2e^{-t} \Rightarrow u(t) = t^2 - 2e^{-t} + c_1 t + c_2$

$u(0) = -2 + c_2 \qquad u'(0) = 2 + c_1$

Θα πρέπει $-2 + c_2 = 0$, $2 + c_1 = 1$ άρα

$c_2 = 2 \qquad c_1 = -1$

Και η λύση του ΠΑΤ είναι:

$u(t) = t^2 - 2e^{-t} - t + 2.$

iii) $u''(t) = 4\cos(2t) \Rightarrow u(t) = -\cos 2t + c_1 t + c_2$

$$\left.\begin{aligned} u(\pi/2) &= 1 + c_2 + \frac{\pi}{2} c_1 = 2 \\ u'(\pi/2) &= c_1 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c_2 &= 1 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι

$u(t) = -\cos(2t) + 1$

iv) $u''(t) = 6t + \sinh t \Rightarrow u(t) = t^3 + \sinh t + c_1 t + c_2$

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= c_2 = -1 \\ u'(0) &= 1 + c_1 = -2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} c_2 &= -1 \\ c_1 &= -3 \end{aligned}$$

άρα η λύση του ΠΑΤ είναι

$u(t) = t^3 + \sinh t - t - 3.$

DATE: / / | NO. : | SUBJECT:

v) $u'' = \begin{cases} 2 & t<0 \\ 1+\cos t & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow u' = \begin{cases} 2t+c_1, & t<0 \\ t+\sin t + c_2, & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$u = \begin{cases} t^2 + c_1 t + c_3 & t<0 \\ \frac{t^2}{2} - \cos t + c_2 t + c_4 & t \geq 0 \end{cases}$$

Η $u$ θα πρέπει να είναι δύο φορές διαφορίσιμη οπότε η $u$ και η $u'$ οφείλουν να είναι συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους. Προφανώς οι $u, u'$ είναι συνεχείς στα διαστήματα $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ απομένει να δούμε για $x=0$ αν είναι συνεχείς

$$\lim_{t\to 0^-} u(t) = \lim_{t \to 0^-} (t^2 + c_1 t + c_3) = c_3$$

$$\lim_{t\to 0^+} u(t) = \lim_{t\to 0^+} \left( \frac{t^2}{2} - \cos t + c_2 t + c_4 \right) = c_4 - 1 = u(0)$$

Θα πρέπει $\lim_{t\to 0^-} u(t) = \lim_{t\to 0^+} u(t) = u(0) \Rightarrow \boxed{c_3 = c_4 - 1}$

Για την $u'$

$$\lim_{t\to 0^-} u'(t) = \lim_{t\to 0^-} (2t + c_1) = c_1$$

$$\lim_{t\to 0^+} u'(t) = \lim_{t\to 0^+} (t + \sin t + c_2) = c_2 = u'(0)$$

Θα πρέπει $\lim_{t\to 0^-} u'(t) = \lim_{t\to 0^+} u'(t) = u'(0) \Rightarrow \boxed{c_1 = c_2}$

άρα η $u$ και η $u'$ ~~είναι~~ για $c_3 = c_4 - 1$, $c_1 = c_2$ είναι

συνεχείς στο $t=0$ και είναι:

DATE: / / NO. : SUBJECT:

$$u(t)=\begin{cases} t^2+c_1t+c_3 & , t<0 \\ \frac{t^2}{2}-\cos t+c_1t+c_3+1 & , t\geq 0 \end{cases}, \quad u'(t)=\begin{cases} 2t+c_1 & , t<0 \\ t+\sin t+c_1 & , t\geq 0 \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες $u(-1)=0, u'(-1)=1$ κι έχουμε

$$\left.\begin{aligned} u(-1) &= 1-c_1+c_3=0 \\ u'(-1) &= -2+c_1=1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_3&=2 \\ c_1&=3 \end{aligned}$$

άρα η λύση του ΠΑΤ είναι

$$u(t)=\begin{cases} t^2+3t+2 & t<0 \\ \frac{t^2}{2}-\cos t+3t+3 & t\geq 0. \end{cases}$$

vi) $u''(t)=\begin{cases} 1 & , t<0 \\ e^{-t} & , t\geq 0 \end{cases} \Rightarrow u'(t)=\begin{cases} t+c_1 & t<0 \\ -e^{-t}+c_2 & t\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$u(t)=\begin{cases} \frac{t^2}{2}+c_1t+c_3 & t<0 \\ e^{-t}+c_2t+c_4 & t\geq 0. \end{cases}$$

Με ίδιους συλλογισμούς όπως προηγουμένως θα πρέπει

$$\lim_{t\to 0^-} u(t)=\lim_{t\to 0^+} u(t)=u(0) \Rightarrow c_3=c_4+1 \Rightarrow c_4=c_3-1$$

$$\lim_{t\to 0^-} u'(t)=\lim_{t\to 0^+} u'(t)=u'(0) \Rightarrow c_1=-1+c_2 \Rightarrow c_2=c_1+1$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άρα για $c_4 = c_3 - 1$ και $c_2 = c_1 + 1$ οι $u, u'$ είναι συνεχείς στο $t=0$ και είναι:

$$u(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_3 & t < 0 \\ e^{-t} + (c_1+1)t + c_3 - 1 & t \geq 0 \end{cases} \qquad u'(t) = \begin{cases} t + c_1, & t < 0 \\ -e^{-t} + c_1 + 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$u(0) = e^{0} + (c_1+1)0 + c_3 - 1 = 1 + c_3 - 1 = 2 \Rightarrow \underline{c_3 = 2}$$

$$u'(0) = -e^{-0} + c_1 + 1 = -1 + c_1 + 1 = -1 \Rightarrow \underline{c_1 = -1}$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι η

$$u(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - t + 2, & t < 0 \\ e^{-t} + 1, & t \geq 0 \end{cases}$$