Λύσεις των Θεμάτων της ενδιάμεσης εξέτασης.

DATE: / / NO.: SUBJECT:

ΜΑΣ 024 Ασκήσεις 20/03/2013

Θέμα 1ο (Γραμμικές ΔΕ $1^{ης}$ τάξης, Bernoulli, Riccati)

α) Να βρεθεί η γενική λύση $x(t)$, της ΔΕ

$$x' - 4x = \begin{cases} e^t, & t<0 \\ 1, & t\geq 0 \end{cases}$$

και να προσδιορισθεί η ειδική λύση που σέβεται την συνθήκη $x(0)=0$

β) Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ τύπου Bernoulli

$$x' + tx = tx^3$$

Λύση

α) Για $t<0$ έχουμε

$$x' - 4x = e^t \Rightarrow e^{-4t}x' - 4xe^{-4t} = e^{-4t}e^t \Rightarrow$$

$$(e^{-4t}x)' = e^{-4t}e^t \Rightarrow e^{-4t}x = \int e^{-3t}\,dt \Rightarrow$$

$$e^{-4t}x = -\frac{1}{3}e^{-3t} + c_1 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{3}e^{-3t}e^{4t} + c_1e^{4t} \Rightarrow$$

$$x(t) = -\frac{1}{3}e^{t} + c_1e^{4t}.$$

Για $t\geq 0$ έχουμε με παρόμοιο τρόπο

$$x' - 4x = 1 \Rightarrow e^{-4t}x' - 4xe^{-4t} = e^{-4t} \Rightarrow (e^{-4x}x)' = e^{-4t} \Rightarrow$$

$$e^{-4t}x = \int e^{-4t}\,dt \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{4} + e^{4t}c_2.$$

DATE: / / NO. : SUBJECT:

Άρα

$$x(t)=\begin{cases} -\frac{1}{3}e^{t}+c_1e^{4t}, & t<0 \\ -\frac{1}{4}+c_2e^{4t}, & t\geq 0 \end{cases}$$

Επειδή η $x(t)$ είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα πρέπει αναγκαστικά να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Προφανώς για $t<0$, $t>0$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Για $t=0$ έχουμε

$$\lim_{t\to 0^-} x(t)=\lim_{t\to 0^-}\left(-\frac{1}{3}e^{t}+c_1e^{4t}\right)=-\frac{1}{3}+c_1 \qquad (*)$$

$$\lim_{t\to 0^+} x(t)=\lim_{t\to 0^+}\left(-\frac{1}{4}+c_2e^{4t}\right)=-\frac{1}{4}+c_2 \qquad (**)$$

Θα πρέπει $\lim_{t\to 0^-} x(t)=\lim_{t\to 0^+} x(t)=x(0)=-\frac{1}{4}+c_2$ $\quad (***)$

Από $(*)$, $(**)$, $(***)$ έχουμε $-\frac{1}{3}+c_1=-\frac{1}{4}+c_2 \Rightarrow$

$$c_2=c_1-\frac{1}{12}$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$x(t)=\begin{cases} -\frac{1}{3}e^{t}+c_1e^{4t} & t<0 \\ -\frac{1}{4}+\left(c_1-\frac{1}{12}\right)e^{4t} & t\geq 0. \end{cases}$$

Η $x(t)$ που σέβεται την συνθήκη $x(0)=0$ είναι

$$x(0)=-\frac{1}{4}e^{t}+\left(c_1-\frac{1}{12}\right)e^{4t}\Big|_{t=0}=-\frac{1}{4}+c_1-\frac{1}{12}=0 \Rightarrow c_1=\frac{1}{3},$$ συνεπώς

DATE: / / NO.: SUBJECT:

$$x(t)=\begin{cases} -\frac{1}{3}e^{t}+\frac{1}{3}e^{4t}, & t<0 \\ -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{4t}, & t\geq 0\end{cases}$$

β) Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η ΔΕ Bernoulli

$$x'+p(t)x=q(t)x^{\gamma} \qquad \gamma\neq 0,1$$

με την εισαγωγή νέας μεταβλητής

$$v(t)=x^{1-\gamma}(t)$$

μετατρέπεται στην γραμμική ΔΕ

$$v'+(1-\gamma)p(t)v=(1-\gamma)q(t) \qquad (*)$$

Στο συγκεκριμένο θέμα $\gamma=3$, $p(t)=t$, $q(t)=t$, άρα η $(*)$ γίνεται

$$v'-2tv=-2t \Rightarrow e^{\int -2t\,dt}v'-2te^{\int -2t\,dt}v=-2te^{\int -2t\,dt} \Rightarrow$$

$$e^{-t^2}v'-2te^{-t^2}v=-2te^{-t^2} \Rightarrow \left(e^{-t^2}v\right)'=-2te^{-t^2} \Rightarrow$$

$$e^{-t^2}v=\int -2te^{-t^2}dt \Rightarrow e^{-t^2}v=\int e^{-t^2}d(-t^2) \Rightarrow e^{-t^2}v=e^{-t^2}+c \Rightarrow$$

$$v(t)=1+ce^{t^2}$$

Αφού $v(t)=x^{-2}(t) \Rightarrow x(t)=\pm 1/\sqrt{v(t)} \Rightarrow$

$$x(t)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+ce^{t^2}}}$$

DATE: / / NO. : SUBJECT:

Θέμα 2ο (Ακριβείς ΔΕ - Ολοκληρωτικοί παράγοντες).

Να κατασκευασθούν γενικού τύπου λύσεις των παρακάτω ΔΕ, αφού διερευνηθεί αν είναι ακριβείς

α) $(x+y^2)y' = 2x-y$, β). $1-4x-12y^2+6yy'=0$.

Λύση

Έχουμε αναπτύξει την θεωρία για πρώτης τάξης ΔΕ στην μορφή

$$A(x,y) + B(x,y)\,y' = 0 \qquad (*)$$

άρα θα πρέπει να φέρουμε πρώτα της ΔΕ στην μορφή (*)

α) $$2x-y-(x+y^2)\,y'=0$$

οπότε $A(x,y) = 2x-y$, $B(x,y) = -x-y^2$ κι έχουμε

$$\left.\begin{aligned} A_{,y} &= -1 \\ B_{,x} &= -1 \end{aligned}\right\} \quad A_{,y} = B_{,x} \quad \text{και η ΔΕ είναι ακριβής}$$

οπότε υπάρχει $\varphi(x,y)$ τέτοια ώστε

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{,x} &= A = 2x-y \\ \varphi_{,y} &= B = -x-y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \varphi &= x^2 - xy + g(y) \\ \varphi_{,y} &= -x-y^2 \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} \varphi_{,y} &= -x + g'(y) \\ \varphi_{,y} &= -x-y^2 \end{aligned}\right\}$$

$$g'(y) = -y^2 \Rightarrow g(y) = -\frac{1}{3}y^3$$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ δίνεται από τον γενικό τύπο

$$\varphi(x,y) = c \Rightarrow x^2 - xy - \frac{1}{3}y^3 = c.$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

β) $A=(1-4x-12y^2)$, $B=6y$

$$\left.\begin{aligned} A_{,y} &= -24y \\ &\neq \\ B_{,x} &= 0 \end{aligned}\right\}$$ άρα η ΔΕ δεν είναι ακριβής.

Όμως $\dfrac{A_{,y}-B_{x}}{B} = -\dfrac{24y}{6y} = -4$

οπότε από την θεωρία η ΔΕ επιδέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα που είναι συνάρτηση μόνο του x και βρίσκεται ολοκληρώνοντας την

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -4 \Rightarrow f(x) = E(x,y) = e^{-4x}$$

και η $e^{-4x}(1-4x-12y^2) + 6y\,e^{-4x}\,y' = 0$ θα πρέπει να είναι ακριβής, πράγματι

$$\left.\begin{aligned} \tilde{A}_{,y} &= -24y\,e^{-4x} \\ &\parallel \\ \tilde{B}_{,x} &= -24y\,e^{-4x} \end{aligned}\right\}$$ οπότε υπάρχει $\varphi(x,y)$ τέτοια ώστε

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{,x} &= \tilde{A} = e^{-4x}(1-4x-12y^2) \\ \varphi_{,y} &= 6y\,e^{-4x} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \varphi_{,x} &= e^{-4x}(1-4x-12y^2) \\ \varphi &= 3y^2 e^{-4x} + g(x) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{,x} &= e^{-4x} - 4x e^{-4x} - 12y^2 e^{-4x} \\ \varphi_{,x} &= -12y^2 e^{-4x} + g'(x) \end{aligned}\right\} \quad g'(x) = e^{-4x} - 4x e^{-4x} \Rightarrow$$

$$g(x) = x e^{-4x}$$

οπότε η γενική λύση δίνεται από τον τύπο

$$\varphi(x,y) = c \Rightarrow 3y^2 e^{-4x} + x e^{-4x} = c \Rightarrow \underline{3y^2 + x = c\,e^{4x}}.$$

Θέμα 3ο (μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών).

Να λυθεί το ΠΑΤ : $u''+2u'+5u=25t$, $u(0)=0$, $u'(0)=3$

Λύση

Μας ζητείται να λύσουμε την ΔΕ $u''+2u'+5u=25t$ και μετά να προσδιορίσουμε την συνάρτηση εκείνη που σέβεται τις αρχικές συνθήκες $u(0)=0$, $u'(0)=3$.

Η ΔΕ είναι μη-ομογενής γραμμική δεύτερης τάξης ΔΕ με σταθερούς συντελεστές. Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε είναι να λύσουμε πρώτα την ομογενή ΔΕ. Μετά θα βρούμε μια ειδική λύση της ΔΕ με τον όρο εξαναγκασμού οπότε

$$u(t)=u_{ομ.}(t)+u_{ειδ}(t).$$

Η ομογενής ΔΕ είναι

$$u''+2u'+5u=0$$

Χαρ. πολυώνυμο $\rho^2+2\rho+5=0 \Rightarrow \rho_1=-1+2i$, $\rho_2=-1-2i$ οπότε το θεμ. σύνολο λύσεων είναι

$$\{u_1(t), u_2(t)\}=\{e^{-t}\cos(2t), e^{-t}\sin(2t)\}.$$

και συνεπώς

$$u_{ομ}(t)=c_1e^{-t}\cos(2t)+c_2e^{-t}\sin(2t).$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος εξαναγκασμού $25t$ είναι μια συνάρτηση που είναι γραμμικά ανεξάρτητη και με τις δυο λύσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$, γιατί

DATE: / / NO.: SUBJECT:

$$W(25t, u_1) = \begin{vmatrix} 25t & e^{-t}\cos 2t \\ (25t)' & (e^{-t}\cos 2t)' \end{vmatrix} = -25e^{-t}\left((1+t)\cos 2t + 2t\sin 2t\right) \neq 0$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

$$W(25t, u_2) = \begin{vmatrix} 25t & e^{-t}\sin 2t \\ 25t' & (e^{-t}\sin(2t))' \end{vmatrix} = -25e^{-t}\left(-(1+t)\sin t + 2t\cos(2t)\right) \neq 0$$

$\forall t \in \mathbb{R}$.

οπότε μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι μια ειδική λύση της μη-ομογενούς ΔΕ

$$u'' + 2u' + 5u = 25t \quad (*)$$

είναι της μορφής $u_{ειδ}(t) = At + B$. Εισάγοντας στην $(*)$ έχουμε

$$(2A + 5B) + 5At = 25t \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5A = 25 \\ 2A + 5B = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} A = 5 \\ B = -2 \end{matrix}$$

Άρα

$u_{ειδ} = 5t - 2$ και η γεν. λύση της ΔΕ είναι

$$u(t) = u_{ομ}(t) + u_{ειδ}(t) = C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\sin(2t) + 5t - 2. \quad (**)$$

Επιβάλλουμε τις αρχικές συνθήκες στην $(**)$ κι έχουμε

$$u(0) = C_1 - 2 = 0 \Rightarrow C_1 = 2$$

$$u'(0) = 5 - C_1 + 2C_2 = 3 \Rightarrow 3 + 2C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = 0$$

Άρα η λύση του ΠΑΤ είναι

$$u(t) = 2e^{-t}\cos 2t + 5t - 2.$$

DATE: / /	NO.:	SUBJECT:

Θέμα 4ο (μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων).

Να λυθεί το ΠΑΤ $t^2u''-3tu'+3u=3-t^2$, $u(1)=u'(1)=3$.

Λύση

Η ΔΕ είναι μη-ομογενής γραμμική 2ης τάξης ΔΕ. Το ομογενές κομμάτι της είναι

$$t^2u''-3tu'+3u=0$$

που αναγνωρίζεται εύκολα ότι είναι τύπου Euler-Cauchy. Οπότε θα λύσουμε την ομογενή πρώτα προσδιορίζοντας δυο γραμ. ανεξάρτητες λύσεις της $u_1(t)$, $u_2(t)$. Έπειτα θα βρούμε την W_{u_1,u_2} και με αυτή αντικατάσταση στον τύπο

$$u_{\varepsilon\iota\delta}(t) = -u_1(t)\int \frac{u_2\cdot f}{W(u_1,u_2)}\,dt + u_2(t)\int \frac{u_1\cdot f}{W(u_1,u_2)}\,dt \quad (*)$$

θα βρούμε μια ειδική λύση της μη-ομογενούς. ΠΡΟΣΟΧΗ!! Ο τύπος (*) ισχύει για την μη-ομογενή ΔΕ στην κανονική μορφή

$$u''=f(t)+g(t)u+h(t)u'$$

οπότε για f στην (*) θα πρέπει να πάρουμε την συνάρτηση που προκύπτει διαιρώντας την ΔΕ που θέλουμε να λύσουμε με t^2, δηλαδή

$$f(t)=\frac{3-t^2}{t^2}, \quad g(t)=-\frac{3}{t^2}, \quad h(t)=\frac{3t}{t^2}.$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Για την ομογενή ΔΕ $t^2u''-3tu'+3u=0$ η οποία είναι Euler-Cauchy,
χαρ. πολυ.

$$s(s-1)-3s+3=0 \Rightarrow s^2-4s+3=0 \Rightarrow \begin{cases} s=1 \\ s=3 \end{cases}$$

άρα το θεμ. σύνολο λύσεων είναι

$$\{u_1,u_2\}=\{t,\ t^3\}$$

και συνεπώς

$$u_{ομ}(t)=c_1t+c_2t^3$$

$$W(u_1,u_2)=\begin{vmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{vmatrix} = 3t^3-t^3=2t^3\neq 0 \quad \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

Οπότε $\forall t\neq 0$ έχουμε στον τύπο (*)

$$u_{ειδ}(t)=-t\int\frac{t^3}{2t^3}\cdot\frac{3-t^2}{t^2}\,dt+t^3\int\frac{t}{2t^3}\cdot\frac{3-t^2}{t^2}\,dt=$$

$$=-\frac{t}{2}\int\left(\frac{3}{t^2}-1\right)dt+\frac{t^3}{2}\int\frac{1}{t^2}\,\frac{3-t^2}{t^2}\,dt=-\frac{t}{2}\left(-\frac{3}{t}-t\right)+\frac{t^3}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)=$$

$= 1+t^2$ άρα $u_{ειδ}(t)=1+t^2$ και συνεπώς η γενική λύση της ΔΕ που θέλουμε να λύσουμε είναι

$$u=c_1t+c_2t^3+1+t^2 \quad (**)$$

Επιβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες στην (**) κι έχουμε

$$\left.\begin{aligned} u(1)&=c_1+c_2+2=3 \\ u'(1)&=c_1+3c_2+2=3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1&=1 \\ c_2&=0 \end{aligned}$$

άρα η συνάρτηση που ικανοποιεί η ΔΕ και της αρχ. συνθήκες είναι

$$u(t)=1+t+t^2.$$