DATE: / / NO.: SUBJECT:

ΜΑΣ 024 27/02/2013

Άσκηση 1

Για καθένα από τα παρακάτω ζευγάρια συναρτήσεων $\{u_1(t), u_2(t)\}$ $t \in I$

α) Επαληθεύσετε ότι αποτελεί λύση της αντίστοιχης ΔΕ

β) Ελέγξτε ότι είναι και θεμελιώδες σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ΔΕ.

i) $\{\sinh t, e^t\}$ $t \in \mathbb{R}$ $u'' = u$

ii) $\{2\sin(2t) - 3\cos(2t), 3\cos(2t-1)\}$ $I = \mathbb{R}$, $u'' + 4u = 0$

iii) $\{t(t+1), t^2\}$ $I = \mathbb{R}$, $t^2u'' - 2tu' + 2u = 0$

iv) $\{\sqrt{t}, t + 2\sqrt{t}\}$ $I = (0, +\infty)$ $2t^2u'' - tu' + u = 0$

v) $\{t, te^t\}$ $I = \mathbb{R}$ $t^2u'' - t(t+2)u' + (t+2)u = 0$

vi) $\{t, \cos t\}$ $I = \mathbb{R}$ $(1 + t\tan t)u'' - tu' + u = 0$

Λύση

α) Παραγωγίζουμε την κάθε μια από τις λύσεις και εισάγουμε στην ΔΕ για να ελέγξουμε ότι όντως είναι λύσεις

β) Ελέγχουμε την ορίζουσα Wronski για το αν.

$$W_{(u_1,u_2)}(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

~~Αν~~ ~~Wa~~, οπότε θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις.

Άσκηση 2: Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Abel υπολογίστε την μορφή της ορίζουσας Wronski κάθε θεμελιώδους συνόλου λύσεων των παρακάτω ΔΕ

i) $u'' = 4u + u'$

ii) $u'' = tu$

iii) $u'' - tu' + 2u = 0$

iv) $t^2u'' + 2tu' - 3u = 0$

v) $(1+t^2)u'' - tu' + (t+1)u = 0$

vi) $(2+\cos t)u'' - \sin t\, u' + u = 0$

vii) $(1-t^2)u'' - 2tu' + 6u = 0$

viii) $4t^2u'' + 4tu' - (4t^2+1)u = 0$

Λύση

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η μορφή της ορίζουσας Wronski κάθε θεμ. λύσεων της ΔΕ

$$u'' = g(t)u + h(t)u'$$

είναι της μορφής $W_{u_1,u_2}(t) = C_{(u_1,u_2)} \exp\left[\int h(t)dt\right]$

πολ/ζει την u' και είναι στο δεξί μέλος της ΔΕ

i) $h(t) = 1$ άρα

$$W_{u_1,u_2}(t) = C \exp\left[\int dt\right] = C e^t$$

ii) $W_{u_1,u_2}(t) = C \exp 0 = C$.

κ.τ.λ.

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 3

Να βρεθεί η γενική λύση καθεμιάς από τις παρακάτω ΔΕ. Στη συνέχεια, να προσδιορισθεί η ειδική λύση που ικανοποιεί τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες

$$u(0) = A, \quad u'(0) = B$$

i) $4u'' + 4u' + 5u = 0 \qquad A=1, \quad B=0$

ii) $4u'' - 4u' + 5u = 0 \qquad A=1, \quad B=0$

iii) $u'' - 2u' + 5u = 0 \qquad A=0, \quad B=2$

iv) $u'' - 2u' + u = 0 \qquad A=2, \quad B=-2.$

(v) $16u'' - 2u' - 3u = 0 \qquad A=-3, \quad B=2$

(vi) $16u'' + 8u' - 3u = 0 \qquad A=0, \quad B=0$

Λύση

i) Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$4\rho^2 + 4\rho + 5 = 0 \Rightarrow \rho_1 = -\frac{1}{2} + i, \quad \rho_2 = -\frac{1}{2} - i$$

οπότε το θεμ. σύνολο λύσεων είναι

$$\{u_1, u_2\} = \{e^{-t/2} e^{it}, e^{-t/2} e^{-it}\} \text{ ή αλλιώς}$$

$$= \{e^{-t/2} \cos t, e^{-t/2} \sin t\}$$

οπότε η γενική λύση είναι η

$$u(t) = c_1 e^{-t/2} \cos t + c_2 e^{-t/2} \sin t$$

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= c_1 = 1 \\ u'(0) &= c_2 - c_1/2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1/2.$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

ii) Χαρ. πολυώνυμο

$$4\rho^2 - 4\rho + 5 = 0 \Rightarrow \rho_1 = \frac{1}{2} + i, \quad \rho_2 = \frac{1}{2} - i.$$

$$\{u_1, u_2\} = \{e^{t/2}\cos t, \ e^{t/2}\cos t\}$$

$$u(t) = c_1 e^{t/2}\cos t + c_2 e^{t/2}\sin t.$$

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= c_1 = 1 \\ u'(0) &= c_2 + \frac{c_1}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1/2. \end{aligned}$$

iii) Χαρ. πολυώνυμο

$$\rho^2 - 2\rho + 5 = 0 \Rightarrow \rho_1 = 1 + 2i, \quad \rho_2 = 1 - 2i$$

$$\{u_1, u_2\} = \{e^t\cos 2t, \ e^t\sin 2t\}$$

$$u(t) = c_1 e^t\cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)$$

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= c_1 = 0 \\ u'(0) &= 2c_2 + c_1 = 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$u(t) = e^t \sin(2t).$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

iv) Χαρ. πολυώνυμο

$$\rho^2-2\rho+1=0 \Rightarrow \rho=1 \text{ πολ. } 2.$$

Θεμ. σύνολο λύσεων

$$\{u_1, u_2\} = \{e^t, te^t\}$$

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= c_1 &= 2 \\ u'(0) &= c_1 + c_2 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= 2 \\ c_2 &= -4 \end{aligned}$$

$$u(t) = 2e^t - 4te^t.$$

v) Χαρ. πολυώνυμο $\rho^2-2\rho-3=0 \Rightarrow \rho_1=-1,\ \rho_2=3$

$$\{u_1, u_2\} = \{e^{-t}, e^{3t}\}$$

$$u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= c_1 + c_2 &= -3 \\ u'(0) &= -c_1 + 3c_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \quad c_1 = -11/4, \quad c_2 = -1/4.$$

vi) Χαρ. πολ. $16\rho^2+8\rho-3=0 \Rightarrow \rho_1=-3/4 \quad \rho_2 = 1/4$

$$\{u_1, u_2\} = \{e^{-3t/4}, e^{t/4}\} \qquad u(t) = c_1 e^{-3t/4} + c_2 e^{t/4}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0) &= c_1 + c_2 &= 0 \\ u'(0) &= -\frac{3}{4}c_1 + \frac{c_2}{4} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0. \end{aligned}$$