DATE: / / NO.: SUBJECT:

ΜΑΣ 024 Ασκήσεις 27/03/2013

Άσκηση 1

Θεωρούμε την εξίσωση $ay''+by'+cy=0$ (*) a,b,c σταθερές
Γνωρίζουμε ότι η γενική λύση της ΔΕ εξαρτάται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$a\rho^2+b\rho+c=0. \qquad (**)$$

1) Να γραφεί η (*) σαν ένα σύστημα ΔΕ 1ης τάξης θέτοντας $x_1=y$, $x_2=y'$ δηλαδή στην μορφή

$$\vec{x}\,' = A\vec{x}$$

για κατάλληλο πίνακα A.

2) Να βρεθεί η εξίσωση που καθορίζει τις ιδιοτιμές του πίνακα A και να δειχθεί ότι οι ιδιοτιμές καθορίζονται από την χαρ. εξίσωση (**)

Λύση

1) Θέτουμε $x_1=y$, $x_2=y'$ οπότε $\boxed{x_1'=y'=x_2}$ (1)
και

$$x_2'=y''$$

Από την ΔΕ $ay''+by'+cy=0 \Rightarrow y''=-\frac{b}{a}y'-\frac{c}{a}y \Rightarrow$

($a\neq 0$, διαφορ. δεν θα ήταν 2ης τάξης) $\boxed{x_2'=-\frac{b}{a}x_2-\frac{c}{a}x_1}$

Άρα

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2) Ιδιοτιμές:

$$\begin{vmatrix} -\rho & 1 \\ -c/a & -b/a-\rho \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \rho^2+\frac{b}{a}\rho+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow \boxed{a\rho^2+b\rho+c=0}$$

χαρ. εξίσωση!

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 2: Το σύστημα $t\vec{x}'=A\vec{x}$ είναι ανάλογο της δεύτερης τάξης Euler-Cauchy. Υποθέτοντας ότι $\vec{x}=\vec{\xi}t^{r}$, όπου $\vec{\xi}$ είναι σταθερό διάνυσμα στήλη, να δειχθεί ότι θα πρέπει να ισχύει $(A-rI)\vec{\xi}=0$ για να υπάρχουν μη-τετριμμένες λύσεις του συστήματος των ΔΕ.

Λύση

Η εξίσωση Euler-Cauchy

$$a t^2 x'' + b t x' + \gamma x = 0 \qquad (*)$$

μπορεί να γραφεί σαν σύστημα ΔΕ 1ης τάξης θέτοντας

$$x_1 = t x \Rightarrow x_1' = t x' + x \Rightarrow t x_1' = t^2 x' + t x \Rightarrow t x_1' = x_2 + x_1$$

$$x_2 = t^2 x' \Rightarrow x_2' = 2t x' + t^2 x'' \Rightarrow t x_2' = 2\underbrace{t^2 x'} + t\left(-\frac{b}{a} t x' - \frac{\gamma}{a} x\right) \Rightarrow$$

$$t x_2' = 2 x_2 - \frac{b}{a} x_2 - \frac{\gamma}{a} x_1 \qquad \text{Άρα}$$

$$t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\gamma/a & 2-\frac{b}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Άρα πραγματικά το σύστημα

$$t\vec{x}' = A x'$$

είναι το ανάλογο της εξίσωσης Euler-Cauchy $(*)$

DATE: / /	NO.:	SUBJECT:

Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα

$$t\vec{x}' = A\vec{x} \quad (**)$$

επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$\vec{x} = \vec{\xi}\, t^{r}$$

Τότε $\vec{x}' = r\vec{\xi}\, t^{r-1}$ και εισάγοντας στην $(**)$ έχουμε

$$r\vec{\xi} t^{r} = A\vec{\xi} t^{r} \Rightarrow A\vec{\xi} t^{r} - r\vec{\xi} t^{r} = 0 \Rightarrow$$

$$t^{r}(A - rI)\vec{\xi} = 0.$$

Αφού $t^{r} \neq 0$ τότε θα πρέπει

$$(A - rI)\vec{\xi} = 0$$

δηλαδή το r θα πρέπει να είναι ιδιοτιμή του A και το $\vec{\xi}$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην τιμή r.

Double A

DATE: / /	NO.:	SUBJECT:

Άσκηση 3 Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω συστημάτων ΔΕ και να περιγραφεί η συμπεριφορά της λύσης τους καθώς $t \to +\infty$.

1) $x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$ 2) $x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x$

3) $x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x$ 4) $x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x$

5) $x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x$ 6) $x' = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix} x$

Λύση

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι θα πρέπει να βρούμε δυο γραμ. ανεξάρτητες λύσεις $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ οπότε η γενική λύση για το παραπάνω σύστημα ΔΕ θα είναι

$$\vec{X} = c_1 \vec{X}_1 + c_2 \vec{x}_2$$

Η επίλυση γίνεται με την εύρεση των ιδιοτιμών του πίνακα A και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων

1) $$\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad *$$

Το ομογενές σύστημα (*) για να έχει μη-τετριμμένες λύσεις θα πρέπει

(5)

DATE: / / NO.: SUBJECT:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+2)+4=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-2=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=-1, \quad \lambda_2=2$$

Για $\lambda=-1$

$$\begin{pmatrix} 3-(-1) & -2 \\ 2 & -2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 4\xi_1 - 2\xi_2 &= 0 \\ 2\xi_1 - \xi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 2\xi_1 - \xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_2 = 2\xi_1$$

Άρα το τυχαίο ιδιοδιάνυσμα είναι

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 2\xi_1 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ άρα το $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ είναι το ιδιοδιάνυσμα.

Για $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi_1 - 2\xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = 2\xi_2$$

Άρα $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και το ιδιοδ. είναι το $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Για $t \to +\infty$ συμπεριφέρεται με τρόπο:

$$\vec{x} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

2) Ιδιοτιμές $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-1$ και αντίστοιχα ιδιοδιαν.

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = c_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t}, \quad t\to+\infty.\ \vec{x}\sim c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t}.$$

3) Ιδιοτιμές $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ και αντίστοιχα ιδιοδ.

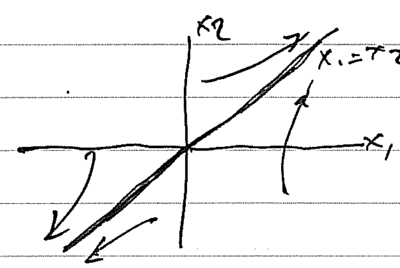
$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Άρα

$$\vec{X} = c_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t}, \quad t\to+\infty,\ \vec{x}\approx c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t}$$

4) $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$,

$$\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$



$$\vec{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t}, \quad t\to+\infty,\ \vec{x}\approx c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t}$$

5) $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-1$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t} \qquad t\to+\infty \quad \vec{x}\approx c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t}.$$

6) $\lambda_1=1/2$, $\lambda_2=2$

$$\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{X} = c_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}e^{t/2} + \underbrace{c_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t}}_{t\to+\infty}$$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

Άσκηση 4: Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω συστημάτων ΔΕ:

1) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$ 2) $X' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} X$

Λύση

1) Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$.

ιδιοδιαν. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

2) Ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$ (διπλή) $\lambda_2 = 8$.

Θα πρέπει όμως να προσεχθεί το γεγονός ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός και γι'αυτό υπάρχει πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων για την διπλή ιδιοτιμή

$\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \Rightarrow$

$\xi_2 = -2\xi_1 - 2\xi_3$ άρα

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -2\xi_1 - 2\xi_3 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ άρα $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

DATE: / / NO.: SUBJECT:

$\underset{\sim}{\lambda = 8}$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\gamma + 3\gamma} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -1 & \xi_1+\xi_3 \\ 2 & -8 & 2 & \xi_2 \\ 4 & 2 & -5 & \xi_3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} (-1)1\eta \\ \longrightarrow \\ (1/2)2\eta \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 1 & -\xi_1-\xi_3 \\ 1 & -4 & 2 & \xi_2/2 \\ 4 & 2 & -5 & \xi_3 \end{array}\right) \longrightarrow \cdots \qquad \xi_1 = \xi_3 = 2\xi_2.$$

Άρα $$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi_2 \\ \xi_2 \\ 2\xi_2 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t}$$

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

Άσκηση 5:

Να βρεθεί η γενική λύση των συστημάτων ΔΕ:

1) $x' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} x$ 2) $x' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x$

Λύση

1) ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2) ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

Εδώ θα πρέπει να προσεχθεί ότι μια ιδιοτιμή είναι το 0.

DATE: / / | NO.: | SUBJECT:

Άσκηση 6 Να λυθούν τα ΠΑΤ:

1) $x' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) $x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Λύση

$\lambda = 2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 4 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ 3c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = -3/2, \quad c_2 = 7/2$

Άρα

$$x(t) = -3/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + 7/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

DATE: / /	NO.:	SUBJECT:

2) $\lambda_1 = -1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -4 \\ c_3 = 1 \end{array}$$

Συνεπώς

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - 4 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} e^{4t}.$$