Ασκήσεις 30/11/2013 ΜΑΣ024

Άσκηση 1

Να βρεθεί η γενική λύση κάθε μιας από τις επόμενες ΔΕ. Σε κάθε περίπτωση, να προσδιοριστεί και η συνάρτηση που ικανοποιεί την αντίστοιχη αρχική συνθήκη.

α) $x' = 2t^3 - tx$, $t \in \mathbb{R}$, $x(0) = 0$.

β) $x' + x = 2(t-1)^2$, $t \in \mathbb{R}$, $x(0) = 12$

γ) $x' + (\sin t)\, x = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$, $x(\pi/2) = 2$

Λύση

Όλες οι ΔΕ είναι γραμμικές μη-ομογενείς ΔΕ πρώτης τάξης της μορφής

$$x + s(t)\, x = f(t) \qquad \text{όπου}$$

$s(t)$, $f(t)$ συνεχείς συναρτήσεις στο πεδίο ορισμού τους.

Για την εύρεση της γενικής λύσης θα ακολουθήσουμε την μέθοδο που πολλαπλασιάζουμε την ΔΕ με κατάλληλη συνάρτηση την $\exp\left[\int s(t)\,dt\right]$ που το αριστερό μέλος της ΔΕ σε μια ολική παράγωγο και στην συνέχεια η λύση προκύπτει με απλή ολοκλήρωση του αριστερού μέλους.

(2)

a) $x' + tx = 2t^3 \qquad \exp\left[\int t\,dt\right] = e^{t^2/2}$.

οπότε πολλ/με την ΔΕ με την $e^{t^2/2}$ κι έχουμε.

$$e^{t^2/2}x' + te^{x^2/2}x = 2t^3 e^{t^2/2} \Rightarrow$$

$$\left(e^{t^2/2}x\right)' = 2t^3 e^{t^2/2}. \qquad (*)$$

Ολοκληρώνουμε και τα δυο μέλη της $(*)$ ως προς t

$$\int \left(e^{t^2/2}x\right)' dt = \int 2t^3 e^{t^2/2}\,dt \Rightarrow$$

$$e^{t^2/2}x = \int 2t^3 e^{t^2/2}\,dt + C$$

$$= 2\int t^2\left(e^{t^2/2}\right)' dt + c = 2\left[t^2 e^{t^2/2} - \int 2t\,e^{t^2/2}\,dt\right] + c =$$

$$= 2\left[t^2 e^{t^2/2} - 2\int \left(e^{t^2/2}\right)' dt\right] + c =$$

$$= 2\left[t^2 e^{t^2/2} - 2e^{t^2/2}\right] + C \Rightarrow$$

$$e^{t^2/2}x = 2(t^2-2)e^{t^2/2} + C \Rightarrow \boxed{x = 2(t^2-2) + Ce^{-t^2/2}}.$$

Επιβάλουμε την αρχική συνθήκη $x(0)=0$ κι έχουμε

$$x(0) = -4 + C = 0 \Rightarrow C = 4$$

Άρα η συνάρτηση που ικανοποιεί την Δ.Ε και την αρχική συνθήκη είναι η

$$x = 2(t^2-2) + 4e^{-t^2/2}.$$

β). $x' + x = 2(t-1)^2 \qquad \exp[\int dt] = e^t$

οπότε πολλ/ντας την ΔΕ με e^x έχουμε

$$e^t x' + e^t x = 2(t-1)^2 e^t \Rightarrow$$

$$(e^t x)' = 2(t-1)^2 e^t \Rightarrow$$

$$\int (e^t x)' dt = \int 2(t-1)^2 e^t dt \Rightarrow$$

$$e^t x = \int 2(t-1)^2 e^t dt + c$$

$$= 2 \int (t-1)^2 (e^t)' dt + c =$$

$$= 2\left[(t-1)^2 e^t - 2\int (t-1) e^t dt \right] + c$$

$$= 2\left[(t-1)^2 e^t - 2\left[(t-1)e^t - \int e^t dt \right]\right] + c$$

$$= 2\left[(t-1)^2 e^t - 2(t-1)e^t + 2e^t \right] + c$$

$$= 2\left((t-1)^2 - 2(t-1) + 2 \right) e^t + c$$

$$= 2\left(t^2 - 2t + 1 - 2t + 2 + 2 \right) e^t + c$$

$$= 2(t^2 - 4t + 5) e^t + c \Rightarrow$$

$\boxed{x = 2(t^2 - 4t + 5) + ce^{-t}}$ γενική λύση της ΔΕ.

Επιβάλλουμε την συνθήκη $x(0) = 12$ κι έχουμε

$x(0) = 10 + c = 12 \Rightarrow \boxed{c = 2}$ άρα

$$x(t) = 2(t^2 - 4t + 5) + 2e^{-t}.$$

γ) $x' + (\sin t)\, x = \sin t \qquad \exp\left(\int \sin t\, dt\right) = e^{-\cos t}$.

Πολλ/με την ΔΕ με $e^{-\cos t}$ κι έχουμε

$$e^{-\cos t} x' + \sin t\, e^{-\cos t} x = \sin t\, e^{-\cos t} \Rightarrow$$

$$\left(e^{-\cos t} x\right)' = \sin t\, e^{-\cos t} \Rightarrow$$

$$e^{-\cos t} x = \int \sin t\, e^{-\cos t}\, dt + c$$

$$= \int e^{-\cos t}\, d(-\cos t) + c.$$

$$= e^{-\cos t} + c \Rightarrow.$$

$$x = 1 + c\, e^{\cos t}$$ γενική λύση.

Επιβάλλουμε την συνθήκη $x(\pi/2) = 2$ κι έχουμε

$$x(\pi/2) = 1 + c\, e^{\cos \pi/2} = 1 + c\, e^{0} = 1 + c = 2 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

Άρα η συνάρτηση που ικανοποιεί την ΔΕ και την αρχική συνθήκη είναι η

$$x = 1 + e^{\cos t}$$

Άσκηση 2

Να λυθούν τα παρακάτω ΠΑΤ, αφού πρώτα βρεθεί η γενική λύση της αντίστοιχης ΔΕ

α) $x' - x = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ 1-t & t > 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$

β) $x' + x = f(t)$, $f(t) = \begin{cases} t & t \leq 0 \\ t^2 & t > 0 \end{cases}$ $x(0) = 2$

γ) $x' = t + g(t)x$, $g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$ $x(0) = 1$

δ) $x' = \cos t - g(t)x$, $g(t) = \begin{cases} 1 & t \leq 0 \\ \cos t & t > 0 \end{cases}$ $x(-\pi) = 0.$

Λύση

α) Αν $t \leq 0$ έχουμε $x' - x = 1$ πολ. με e^{-t} κι έχουμε

$e^{-t}x' - e^{-t}x = e^{-t} \Rightarrow (e^{-t}x)' = e^{-t} \Rightarrow \int (e^{-t}x)' dt = \int e^{-t} dt \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-t}x = \int e^{-t} dx + c_1 \Rightarrow e^{-t}x = -e^{-t} + c_1 \Rightarrow$

$x = -1 + c_1 e^{t}$

Αν $t > 0$ έχουμε $x' - x = 1 - t \Rightarrow (e^{-t}x)' = (1-t)e^{-t} \Rightarrow$

$e^{-t}x = \int (1-t)e^{-t} dt + c_2 \Rightarrow e^{-t}x = -\int (1-t)(e^{-t})' dt + c_2 \Rightarrow$

$e^{-t}x = -\left[(1-t)e^{-t} - \int e^{-t}(-1) dt\right] + c_2 \Rightarrow e^{-t}x = -\left[1 - t + 1\right]e^{-t} + c_2 \Rightarrow$

$$e^{-t} x = t e^{-t} + c_2 \Rightarrow \quad x = t + c_2 e^{t}$$

Άρα η λύση είναι

$$x(t) = \begin{cases} -1 + c_1 e^{t}, & t \leq 0 \\ t + c_2 e^{t}, & t > 0 \end{cases}$$

Επειδή η $x(t)$ θα πρέπει να είναι διαφορίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ αναγκαστικά η $x(t)$ θα πρέπει να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για $t \lessgtr 0$ η $x(t)$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $t=0$, δηλαδή

$$\lim_{t \to 0^-} x(t) = \lim_{x \to 0^+} x(t) = x(0).$$

$$\lim_{x \to 0^-} x(t) = \lim_{x \to 0^-} (-1 + c_1 e^{t}) = -1 + c_1 = x(0) \qquad (*)$$

$$\lim_{x \to 0^+} x(t) = \lim_{x \to 0^+} (t + c_2 e^{t}) = c_2 \qquad (**)$$

Από $(*)$, $(**)$ έχουμε ότι θα πρέπει $c_2 = c_1 - 1$ άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$x(t) = \begin{cases} -1 + c_1 e^{t} & t \leq 0 \\ t + (c_1 - 1) e^{t} & t > 0. \end{cases}$$

Επιβάλουμε την αρχική συνθήκη $x(0)=1$ κι έχουμε $x(0) = -1 + c_1 e^{0} = c_1 - 1 = 1 \Rightarrow c_1 = 2$ άρα

$$x(t) = \begin{cases} -1 + 2e^{t}, & t \leq 0 \\ t + e^{t}, & t > 0 \end{cases}$$ η συνάρτηση που ικανοποιεί την ΔΕ και την αρχική συνθήκη.

β). Αν $t \leq 0$ $\quad x' + x = t \Rightarrow e^t x' + e^t x = t e^t \Rightarrow$

$$(e^t x)' = t e^t \Rightarrow e^t x = \int t e^t \, dt + c_1 \Rightarrow$$

$$e^t x = \int t (e^t)' \, dt + c_1 \Rightarrow e^t x = t e^t - \int e^t \, dt + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^t x = t e^t - e^t + c_1 \Rightarrow \quad x = t - 1 + c_1 e^{-t}$$

Αν $t > 0$ $\quad x' + x = t^2 \Rightarrow (e^t x)' = t^2 e^t \Rightarrow$

$$e^t x = \int t^2 e^t \, dt + c_2 \Rightarrow e^t x = \ldots = (t^2 - 2t + 2) e^t + c_2 \Rightarrow$$

$$x = t^2 - 2t + 2 + c_2 e^{-t}.$$

Άρα

$$x(t) = \begin{cases} t - 1 + c_1 e^{-t}, & t \leq 0 \\ t^2 - 2t + 2 + c_2 e^{-t}, & t > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{t \to 0^-} x(t) = \lim_{x \to 0^-} (t - 1 + c_1 e^{-t}) = c_1 - 1 = x(0). \quad (*)$$

$$\lim_{t \to 0^+} x(t) = \lim_{x \to 0^+} (t^2 - 2t + 2 + c_2 e^{-t}) = c_2 + 2 \quad (**)$$

Από $(*)$, $(**)$ θα πρέπει $c_1 - 1 = c_2 + 2 \Rightarrow c_2 = c_1 - 3$ και συνεπώς

$$x(t) = \begin{cases} t - 1 + c_1 e^{-t} & t \leq 0 \\ t^2 - 2t + 2 + (c_1 - 3) e^{-t} & t > 0. \end{cases}$$

Επιβάλουμε την συνθήκη $x(0) = 2$ κι έχουμε

$x(0) = -1 + c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = 3$ οπότε η x που ικανοποιεί την DE και την αρχική συνθήκη είναι η

$$x(t) = \begin{cases} t - 1 + 3 e^{-t} & t \leq 0 \\ t^2 - 2t + 2 & t > 0. \end{cases}$$

γ). Αν $t \le 0$ $\quad x' = t \Rightarrow x = \frac{t^2}{2} + c_1$

Αν $t > 0$ $\quad x' - tx = t \Rightarrow e^{-t^2/2}x' - te^{-t^2/2}x = te^{-t^2/2}$

$$\Rightarrow \left(e^{-t^2/2}x\right)' = te^{-t^2/2} \Rightarrow$$

$$e^{-t^2/2}x = \int te^{-t^2/2}\,dt + c_2$$

$$e^{-t^2/2}x = -e^{-t^2/2} + c_2 \Rightarrow x = -1 + c_2 e^{t^2/2}$$

Άρα

$$x(t) = \begin{cases} t^2/2 + c_1 & t \le 0 \\ -1 + c_2 e^{t^2/2} & t > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} x(t) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{t^2}{2} + c_1\right) = c_1 = x(0) \quad (*)$$

$$\lim_{x \to 0^+} x(t) = \lim_{x \to 0^+} \left(-1 + c_2 e^{t^2/2}\right) = c_2 - 1 \quad (**)$$

Από $(*)$, $(**)$ θα πρέπει $c_1 = c_2 - 1 \Rightarrow c_2 = c_1 + 1$ άρα

$$x(t) = \begin{cases} t^2/2 + c_1 & , t \le 0 \\ -1 + (c_1+1)e^{t^2/2} & , t > 0 \end{cases}$$

Η επιβολή της αρχικής συνθήκης $x(0) = 1$ δίνει $x(0) = c_1 = 1$ συνεπώς η

$$x(t) = \begin{cases} 1 + t^2/2 & t \le 0 \\ -1 + 2e^{t^2/2} & t > 0 \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση που ικανοποιεί την ΔΕ και την αρχική συνθήκη.

δ) Αν $t \le 0$ $\quad x' + x = \cos t \Rightarrow e^{t}x' + e^{t}x = \cos t\, e^{t} \Rightarrow$

$$(xe^{t})' = \cos t\, e^{t} \Rightarrow x e^{t} = \int \cos t\, e^{t} dt + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x e^{t} = \dots = \frac{1}{2}((\cos t + \sin t)e^{t} + c_1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + c_1 e^{-t}$$

Αν $t > 0$ $\quad x' + \cos t\, x = \cos t \Rightarrow$

$$e^{\sin t} x' + \cos t\, e^{\sin t} x = e^{\sin t} \cos t \Rightarrow$$

$$(e^{\sin t} x)' = e^{\sin t} \cos t \Rightarrow e^{\sin t} x = \int e^{\sin t} d\sin t + c_2 \Rightarrow$$

$$e^{\sin t} x = e^{\sin t} + c_2 \Rightarrow x = 1 + c_2 e^{-\sin t}$$ Άρα

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}((\cos t + \sin t) + c_1 e^{-t} & t \le 0 \\ 1 + c_2 e^{-\sin t} & t > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} x(t) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{2}((\cos t + \sin t) + c_1 e^{-t}\right) = c_1 + 1/2 \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0^+} x(t) = \lim_{x\to 0^+} \left(1 + c_2 e^{-\sin t}\right) = 1 + c_2 \quad (**)$$

Από $(*)$, $(**)$ $\quad c_1 + 1/2 = c_2 + 1 \Rightarrow c_2 = c_1 - 1/2$

Άρα

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) + c_1 e^{-t} & t \le 0 \\ 1 + (c_1 - 1/2)\, e^{-\sin t} & t > 0 \end{cases}$$

είναι η γενική λύση της ΔΕ.

Επιβάλουμε τώρα την αρχική συνθήκη $x(-\pi) = 0$.

$$x(-\pi) = \frac{1}{2}\left(\cos(-\pi) + \sin(-\pi)\right) + c_1 e^{\pi} = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} + c_1 e^{\pi} = 0 \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2} e^{-\pi}$$

και η

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\cos t + \sin t\right] + \frac{1}{2} e^{-(t+\pi)} & t \le 0 \\ 1 + \frac{1}{2}\left(e^{-\pi} - 1\right) e^{-\sin t} & t > 0 \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση που ικανοποιεί την ΔΕ και την αρχική συνθήκη.