1.1 Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης

Οι ΔΕ Bernoulli και Ricatti

Η εξίσωση ***Bernoulli***

$$x' + p(t)\,x = q(t)\,x^{\gamma} \qquad \gamma \neq 0, 1\,,$$

με την εισαγωγή νέας εξαρτημένης μεταβλητής

$$v(t) = x^{1-\gamma}(t)$$

μετατρέπεται στην γραμμική ΔΕ

$$v' + (1-\gamma)\,p(t)\,v = (1-\gamma)\,q(t)$$

Αν για την ΔΕ ***Ricatti***

$$x' = f(t) + g(t)\,x + h(t)\,x^2$$

γνωρίζουμε μια ειδική λύση $u(t)$, τότε με την αντικατάσταση

$$x(t) = u(t) + \frac{1}{v(t)} \qquad v(t) \neq 0$$

η ΔΕ Ricatti μετατρέπεται στην γραμμική ΔΕ

$$v' + \Big(g(t) + 2\,h(t)u(t)\Big)v + h(t) = 0$$

Ολοκληρωτικοί παράγοντες - Συναρτήσεις Euler

Διάφορες μορφές ολοκληρωτικών παραγόντων $E(x,y)$ για την ΔΕ $A(x,y) + B(x,y)\,y' = 0$

$E(x,y) = f(x)$	$E(x,y) = f(y)$	$E(x,y) = f(x+y)$	$E(x,y) = f(x\,y)$	$E(x,y) = f(x^2+y^2)$
$\frac{f'}{f} = \frac{\partial_y A - \partial_x B}{B}$	$\frac{f'}{f} = \frac{\partial_y A - \partial_x B}{(-A)}$	$\frac{f'}{f} = \frac{\partial_y A - \partial_x B}{B - A}$	$\frac{f'}{f} = \frac{\partial_y A - \partial_x B}{y\,B - x\,A}$	$\frac{f'}{f} = \frac{\partial_y A - \partial_x B}{2(x\,B - y\,A)}$

Υποβιβασμός τάξης

Αν η συνάρτηση $u_1(t)$ αποτελεί λύση της ομογενούς γραμμικής ΔΕ $u'' = g(t)\,u + h(t)\,u'$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, όπου $g(t)$, $h(t)$ δοσμένες συναρτήσεις, συνεχείς στο διάστημα I, τότε η γενική λύση της ΔΕ δίνεται από την 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $u = c_1\,u_1(t) + c_2\,u_2(t)$, όπου

$$u_2(t) = u_1(t)\int\left[\frac{1}{\big(u_1(t)\big)^2}\exp\left(\int h(t)\,dt\right)\right]dt\,.$$

Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

Ας υποτεθεί ότι (i) οι συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$ και $h(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, και (ii) οι συναρτήσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς ΔΕ $u'' = g(t)\,u + h(t)\,u'$. Τότε η γενική λύση της μή-ομογενούς ΔΕ $u'' = f(t) + g(t)\,u + h(t)\,u'$ δίνεται από την 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

$$u = c_1\,u_1(t) + c_2\,u_2(t) - u_1(t)\int\frac{u_2\,f}{W_{(u_1,u_2)}}\,dt + u_2\int\frac{u_1\,f}{W_{(u_1,u_2)}}\,dt\,.$$

όπου $W_{(u_1,u_2)} = u_1\,u_2{}' - u_1{}'\,u_2$.
Ειδικότερα, οι συναρτήσεις $u_0 = c_1\,u_1(t) + c_2\,u_2(t)$ αποτελούν την γενική λύση της ομογενούς ΔΕ, ενώ η συνάρτηση $u_{\text{ειδ}} = -u_1(t)\int\frac{u_2\,f}{W_{(u_1,u_2)}}\,dt + u_2\int\frac{u_1\,f}{W_{(u_1,u_2)}}\,dt$ αποτελεί μιαν ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ. $\mathcal{L}(f(t)$

Μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών

Όρος εξαναγκασμού	Μορφή ειδικής λύσης
$a_0 + a_1\,t + \cdots a_n\,t^n$	$t^s\,(b_0 + b_1\,t + \cdots + b_n\,t^n)$
$(a_0 + a_1\,t + \cdots a_n\,t^n)\,e^{k\,t}$	$t^s\,(b_0 + b_1\,t + \cdots + b_n\,t^n)\,e^{k\,t}$
$(a_0 + a_1\,t + \cdots a_n\,t^n)\,e^{k\,t}\,\cos(\lambda\,t)$ ή $(a_0 + a_1\,t + \cdots a_n\,t^n)\,e^{k\,t}\,\sin(\lambda\,t)$	$t^s\,(b_0 + b_1\,t + \cdots + b_n\,t^n)\,e^{k\,t}\,\cos(\lambda\,t) + t^s\,(\gamma_0 + \gamma_1\,t + \cdots + \gamma_n\,t^n)\,e^{k\,t}\,\sin(\lambda\,t)$

Γραμμικά συστήματα ΔΕ πρώτης τάξης.

Έστω ότι $\{\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{x}$, και

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix},$$

ο θεμελιώδης πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$. Τότε η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος ΔΕ $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\,\mathbf{c} + \mathbf{\Psi}(t) \int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\mathrm{d}\,s\,,$$

όπου $\mathbf{c}$ ένα σταθερό διάνυσμα-στήλη και $\mathbf{\Psi}^{-1}$ ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα $\mathbf{\Psi}$.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace.

Γενικές ιδιότητες

$f(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad t \geq 0$	$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\,t} f(t)\,\mathrm{d}t$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^{(k)}(t)$	$s^k\,F(s) - s^{k-1}f(0) - \cdots - s\,f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$
$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$G(s) = \dfrac{F(s)}{s}$
$f(\lambda\,t)\,, \quad \lambda > 0$	$\dfrac{1}{\lambda}\,F(\dfrac{s}{\lambda})$
$e^{\lambda\,t}\,f(t)$	$F(s-\lambda)$
$t\,f(t)$	$-F'(s)$
$t^k\,f(t)$	$(-1)^k\,F^{(k)}(s)$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$

Ειδικά

$f(t)$	$F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n\,, \quad n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$t^a\,, \quad a \in \mathbb{R}$, $a > -1$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
$e^{a\,t}$	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos k\,t$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
$\sin k\,t$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
$e^{a\,t}\cos k\,t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{a\,t}\sin k\,t$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$\cosh k\,t$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
$\sinh k\,t$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-a\,s}}{s}$

Ανάλυση ρητών συναρτήσεων σε απλούς λόγους

Κάθε πολυώνυμο $p(x) = b_n\,x^n + b_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + b_1\,x + b_0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων

$$p(x) = b_n\,x^n + \cdots b_0 = b_n(x-a)^k \cdots (x-\gamma)^\lambda \Big((x-\mu)^2 + \nu^2\Big)^\rho \cdots \Big((x-\epsilon)^2 + \delta^2\Big)^\tau$$

Κάθε ρητή συνάρτηση $r(x) = \dfrac{q(x)}{p(x)}$ όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο με βαθμό μικρότερο ($< n$) από τον βαθμό n του πολυωνύμου $p(x)$ αναλύεται σε απλούς λόγους ως εξής

$$\begin{aligned} r(x) = &\left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots \frac{A_k}{(x-a)^k}\right) + \cdots \left(\frac{\Gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\Gamma_2}{(x-\gamma)^2} + \cdots \frac{\Gamma_k}{(x-\gamma)^\lambda}\right) \\ &+ \left(\frac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \frac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\right) + \cdots \\ &\cdots + \left(\frac{E_1(x-\epsilon)+\Delta_1}{(x-\epsilon)^2+\delta^2} + \cdots + \frac{E_\tau(x-\epsilon)+\Delta_\tau}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}\right). \end{aligned}$$