Γραμμικά συστήματα ΔΕ πρώτης τάξης.

Έστω ότι $\{\mathbf{x}^{(1)}(t),\ldots,\mathbf{x}^{(n)}(t)\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $\mathbf{x}'=\mathbf{P}(t)\,\mathbf{x}$, και

$$\mathbf{\Psi}(t)=\begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t)\end{pmatrix},$$

ο θεμελιώδης πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα $\mathbf{x}^{(1)}(t),\ldots,\mathbf{x}^{(n)}(t)$. Τότε η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος ΔΕ $\mathbf{x}'=\mathbf{P}(t)\,\mathbf{x}+\mathbf{g}(t)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{x}=\mathbf{\Psi}(t)\,\mathbf{c}+\mathbf{\Psi}(t)\int_{t_0}^{t}\mathbf{\Psi}^{-1}(s)\,\mathbf{g}(s)\mathrm{d}\,s\,,$$

όπου $\mathbf{c}$ ένα σταθερό διάνυσμα-στήλη και $\mathbf{\Psi}^{-1}$ ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα $\mathbf{\Psi}$.

Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace.

Γενικές ιδιότητες

$f(t)\,,\quad t\in\mathbb{R}\,,\quad t\geq 0$	$F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-s\,t}f(t)\,\mathrm{d}t$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f^{(k)}(t)$	$s^k\,F(s)-s^{k-1}f(0)-\cdots-s\,f^{(k-2)}(0)-f^{(k-1)}(0)$
$g(t)=\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$G(s)=\dfrac{F(s)}{s}$
$f(\lambda\,t)\,,\quad\lambda>0$	$\dfrac{1}{\lambda}\,F(\dfrac{s}{\lambda})$
$e^{\lambda\,t}\,f(t)$	$F(s-\lambda)$
$t\,f(t)$	$-F'(s)$
$t^k\,f(t)$	$(-1)^k\,F^{(k)}(s)$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$

Ειδικά

$f(t)$	$F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n\,,\quad n\in\mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$t^a\,,\quad a\in\mathbb{R}$, $a>-1$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
$e^{a\,t}$	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos k\,t$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
$\sin k\,t$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
$e^{a\,t}\cos k\,t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{a\,t}\sin k\,t$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$\cosh k\,t$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
$\sinh k\,t$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-a\,s}}{s}$

Ανάλυση ρητών συναρτήσεων σε απλούς λόγους
Κάθε πολυώνυμο $p(x)=b_n\,x^n+b_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+b_1\,x+b_0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων

$$p(x)=b_n\,x^n+\cdots b_0=b_n(x-a)^k\cdots(x-\gamma)^\lambda\Big((x-\mu)^2+\nu^2\Big)^\rho\cdots\Big((x-\epsilon)^2+\delta^2\Big)^\tau$$

Κάθε ρητή συνάρτηση $r(x)=\dfrac{q(x)}{p(x)}$ όπου $q(x)$ είναι πολυώνυμο με βαθμό μικρότερο ($<n$) από τον βαθμό n του πολυωνύμου $p(x)$ αναλύεται σε απλούς λόγους ως εξής

$$\begin{aligned} r(x)=&\left(\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots\frac{A_k}{(x-a)^k}\right)+\cdots\left(\frac{\Gamma_1}{x-\gamma}+\frac{\Gamma_2}{(x-\gamma)^2}+\cdots\frac{\Gamma_k}{(x-\gamma)^\lambda}\right)\\ &+\left(\frac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2}+\cdots+\frac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}\right)+\cdots\\ &\cdots+\left(\frac{E_1(x-\epsilon)+\Delta_1}{(x-\epsilon)^2+\delta^2}+\cdots+\frac{E_\tau(x-\epsilon)+\Delta_\tau}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}\right). \end{aligned}$$