1 Ορισμός ακολουθίας πραγματικών αριθμών

Ορισμός 1.1. Ονομάζουμε ακολουθία πραγματικών αριθμών κάθε απεικόνιση του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μια ακολουθία θα είναι ορισμένη αν γνωρίζουμε ποιός πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε κάθε φυσικό αριθμό. Συμβολικοί τρόποι που μας εξασφαλίζουν αυτό είναι οι εξής:

α) Να δίνεται *ο νιοστός όρος της ακολουθίας* συναρτήσει του n, έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να έχουμε την τιμή του αντίστοιχου όρου π.χ. να λέμε: Δίνεται η ακολουθία

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Τότε μπορούμε να πάρουμε

$$a_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4}, \quad a_3 = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}, \ldots\ a_n = \frac{n}{n+2}, \ldots$$

Αν δεν πρόκειται για μια συγκεκριμένη ακολουθία, αλλά για μια τυχαία, θέλοντας να δηλώσουμε ότι γνωρίζουμε το νόμο βάσει του οποίου κάθε $n \in \mathbb{N}$ αντιστοιχεί σ' έναν και μόνο πραγματικό αριθμό γράφουμε:

“ δίνεται η ακολουθία $\{a_n\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$”

“ δίνεται η ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$”

“ δίνεται η ακολουθία $a_n | n \in \mathbb{N}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$” ή πιο απλά

“ δίνεται η ακολουθία $(a_n), \quad n \in \mathbb{N}$.”

Επιπλέον, αφού η ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και τιμές στο $\mathbb{R}$, μπορούμε να γράψουμε

“ δίνεται η ακολουθία, $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ” ή

“ δίνεται η ακολουθία, $\mathbb{N} \ni n \to a_n \in \mathbb{R}$ ”

β) Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορεί να ορισθεί μια ακολουθία είναι με τον *αναδρομικό τύπο*, δηλαδή να μας δίνουν τον πρώτο όρο της ακολουθίας και ένα νόμο μέσου του οποίου μπορεί να υπολογισθεί ο τυχαίος όρος της ακολουθίας από τον προηγούμενό του. Τότε από την γνωστή επαγωγική μέθοδο μπορούμε να υπολογίσουμε τον κάθε όρο της ακολουθίας, γιατί ο πρώτος είναι γνωστός και με την υπόθεση ότι γνωρίζουμε τον όρο τάξης k μπορούμε να υπολογίσουμε τον όρο τάξης $k+1$. Π.χ. δίνεται η ακολουθία με πρώτο όρο τον $a_1 = 1/2$ και $a_{n+1} = 2a_n + 3$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε λέμε ότι η ακολουθία ορίζεται από *αναδρομικό τύπο πρώτης τάξης*. Αν γνωρίζουμε τους δυο πρώτους όρους κι έναν νόμο με το οποίο μπορεί να υπολογιστεί ο τυχαίος όρος της ακολουθίας από τους δύο προηγούμενούς του, π.χ. αν έχουμε $a_1 = 1, a_2 = 1/2$ και $a_{n+2} = a_{n+1} - 2a_n + 3$, $n \in \mathbb{N}$, τότε λέμε ότι η ακολουθία (a_n) ορίζεται από *αναδρομικό τύπο δεύτερης τάξης*, και με όμοιο τρόπο μπορεί να γενικευθεί σε αναδρομικό τύπο τρίτης, τέταρτης τάξης κ.ο.κ.

2 Μονοτονία και φράγμα ακολουθίας

2.1 Μονοτονία

Ορισμός 2.1. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται *γνήσια αύξουσα* αν και μόνο αν $a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά έχουμε

$$(a_n) \updownarrow \quad \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} \quad a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν μια ακολουθία (a_n) είναι γνήσια αύξουσα τότε ο τυχαίος όρος της ακολουθίας είναι μεγαλύτερος από κάθε προηγούμενό του, οπότε ένας ισοδύναμος ορισμός είναι

$$(a_n) \updownarrow \quad \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \text{με} \quad m > n \quad \Rightarrow \quad a_m > a_n.$$

Ορισμός 2.2. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται *γνήσια φθίνουσα* αν και μόνο αν $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμβολικά έχουμε

$$(a_n) \updownarrow \quad \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} \quad a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Σε μια γνήσια φθίνουσα ακολουθία ο τυχαίος όρος αυτής είναι μικρότερος από κάθε προηγούμενό του, οπότε έχουμε τον ισοδύναμο ορισμό

$$(a_n) \updownarrow \quad \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \text{με} \quad m > n \quad \Rightarrow \quad a_m < a_n\,.$$

Αν στους προηγούμενους ορισμούς ισχύει η ισότητα $a_{n+1} = a_n$ για τουλάχιστον μια τιμή του n τότε θα έχουμε $a_{n+1} \geq a_n$ (ή $a_{n+1} \leq a_n$), $n \in \mathbb{N}$, οπότε η ακολουθία θα λέγεται αύξουσα (ή φθίνουσα), αντίστοιχα, και σημειώνουμε $(a_n) \uparrow$, ή $(a_n) \downarrow$ αναλόγως.

Αν μια ακολουθία ικανοποιεί έναν από τους παραπάνω ορισμούς λέγεται μονότονη.

Για να διαπιστώσουμε την μονοτονία μιας δοσμένης ακολουθίας (a_n), εργαζόμαστε με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

- Σχηματίζουμε την διαφορά $a_{n-1} - a_n$. Αν $a_{n-1} - a_n > 0$ (< 0), $\forall n \in \mathbb{N}$, η (a_n) είναι γνήσια αύξουσα (γνήσια φθίνουσα), αντίστοιχα. Αν για τουλάχιστο ενα n στις παραπάνω ανισότητες έχουμε ισότητα τότε η (a_n) είναι αύξουσα (φθίνουσα), αντίστοιχα.

- Αν οι όροι της ακολουθίας διατηρούν πρόσημο μπορούμε να θεωρήσουμε τον λόγο $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ και να τον συγκρίνουμε με την μονάδα, οπότε βγάζουμε συμπέρασμα για την μονοτονία.

- Αν θέλουμε να δείξουμε ένα συγκεκριμένο είδος μονοτονίας τότε ξεκινάμε από αυτό που θέλουμε να δείξουμε και με ισοδυναμίες καταλήγουμε σε σχέση που ισχύει.

- Αν η ακολουθία μας δίνεται από αναδρομικό τύπο, τότε συνήθως διαπιστώνουμε την μονοτονία χρησιμοποιώντας την επαγωγική μέθοδο.

2.2 Φράγμα

Ορισμός 2.3. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται *άνω φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός B τέτοιος ώστε $a_n \leq B$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ο B λέγεται ένα άνω φράγμα της (a_n).

Προφανώς το άνω φράγμα B της (a_n) δεν καθορίζεται μονοσήμαντα αφού κάθε $B' > B$ θα είναι κι αυτός ένα άνω φράγμα. Αν η (a_n) είναι (γνήσια) φθίνουσα τότε $(a_n) \leq a_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ οπότε ένα άνω φράγμα είναι ο πρώτος όρος της ακολουθίας.

Κατ' αναλογία έχουμε

Ορισμός 2.4. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται *κάτω φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός b τέτοιος ώστε $b \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Το b λέγεται ένα κάτω φράγμα της (a_n).

Ορισμός 2.5. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται *φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί B, b τέτοιοι ώστε $b \leq a_n \leq B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.6. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται *απόλυτα φραγμένη* αν και μόνο αν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός A τέτοιος ώστε $|a_n| \leq A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Η παρακάτω πρόταση αποδεικνύει ότι οι ορισμοί (2.5) (2.6) είναι ισοδύναμοι.

Πρόταση 2.7. *Η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απόλυτα φραγμένη.*

Απόδειξη:
($\Rightarrow$) Έστω ότι η (a_n) είναι φραγμένη. Τότε $b \leq a_n \leq B$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $A = \max\{|b|, |B|\}$ κι έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} |B| \leq A \\ |b| \leq A \\ b \leq a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -A \leq B \leq A \\ -A \leq b \leq A \\ b \leq a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \ -A \leq b \leq a_n \leq B \leq A$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq A$, δηλαδή η (a_n) απόλυτα φραγμένη.

($\Leftarrow$) Το αντίστροφο είναι φανερό αφού αν η (a_n) είναι απόλυτα φραγμένη τότε $-A \leq a_n \leq A$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και συνεπώς η (a_n) είναι και φραγμένη. $\square$

Αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια ακολουθία είναι φραγμένη αρκεί να δείξουμε ότι είναι απόλυτα φραγμένη.

3 Υπακολουθίες πραγματικών αριθμών

Ορισμός 3.1. Ονομάζουμε υπακολουθία, μιας ακολουθίας (a_n), κάθε ακολουθία (b_n) με $b_n = a_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου (k_n) είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

Παράδειγμα 3.2. Αν από την ακολουθία (a_n) λάβουμε τους όρους που έχουν άρτιους δείκτες $2, 4, 6 \dots 2n \dots$ δηλαδή τους όρους $a_2, a_4, a_6 \dots a_{2n} \dots$ σχηματίζεται η ακολουθία $b_n = a_{2n}$. Η b_n είναι υπακολουθία της a_n. Με όμοιο τρόπο για $k_n = 2n - 1$ μπορούμε να σχηματίσουμε την υπακολουθία $b_n = a_{2n-1}$ με τους περιττούς δείκτες, δηλαδή την υπακολουθία $a_1, a_3, a_5 \dots a_{2n-1} \dots$

Παράδειγμα 3.3. Αν $k_n = 3n$ τότε, η (k_n) είναι γνήσια αύξουσα και σχηματίζεται η υπακολουθία (a_{3n}) δηλαδή η $a_3, a_6, a_9 \dots a_{3n} \dots$. Όμοια, μπορούμε να σχηματίσουμε τις υπακολουθίες (a_{3n-1}) και (a_{3n-2}) δηλαδή τις $a_2, a_5, a_8 \dots a_{3n-1} \dots$ και $a_1, a_4, a_7 \dots a_{3n-2} \dots$ αντίστοιχα.

Παράδειγμα 3.4. Αν $k_n = 2^n$, η (k_n) είναι γνήσια αύξουσα και σχηματίζεται η υπακολουθία (a_{2^n}), δηλαδή η $a_2, a_4, a_8, a_{16} \dots a_{2^n} \dots$

Ας προσέξουμε ότι για να σχηματισθούν τις υπακολουθίες (a_{2n}) και (a_{2n-1}) του παραδείγματος (3.2), χρησιμοποιούμε όλους τους όρους την ακολουθίας (a_n), γι αυτό λέμε ότι η ακολουθία (a_n) *διαμερίζεται* στις ακολουθίες (a_{2n}), (a_{2n-1}). Όμοια, στο παράδειγμα (3.3) η (a_n) διαμερίζεται στις υπακολουθίες (a_{3n}), (a_{3n-2}), (a_{3n-1}). Γενικότερα, ένας τρόπος να διαμερίσουμε την ακολουθία (a_n) είναι να θεωρήσουμε τις υπακολουθίες $(a_{r\,n})$, $(a_{r\,n-(r-1)})$, $\dots$ $(a_{r\,n-1})$, $r \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, για τις υπακολουθίες ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις: [1]

Πρόταση 3.5. *Αν η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη τότε κάθε υπακολουθία αυτής (a_{k_n}) είναι φραγμένη.*

Όμοια, αν η ακολουθία (a_n) είναι άνω (κάτω) φραγμένη τότε κάθε υπακολουθία της είναι άνω (κάτω) φραγμένη. Η αντιθετοαντιστροφή της προηγούμενης πρότασης είναι

Πρόταση 3.6. *Αν τουλάχιστον μια υπακολουθία, έστω (a_{k_n}), της ακολουθίας (a_n) δεν είναι φραγμένη τότε και η ακολουθία (a_n) δεν είναι φραγμένη.*

Όμοια, αν τουλάχιστον μια υπακολουθία της (a_n) δεν είναι άνω (κάτω) φραγμένη τότε και η ακολουθία (a_n) δεν είναι άνω (κάτω) φραγμένη.

Πρόταση 3.7. *Αν η ακολουθία (a_n) είναι γνήσια αύξουσα τότε κάθε υπακολουθία αυτής (a_{k_n}) είναι γνήσια αύξουσα.*

Όμοια, αν η ακολουθία (a_n) είναι γνήσια φθίνουσα (αύξουσα ή φθίνουσα) τότε κάθε υπακολουθία αυτής (a_{k_n}) είναι γνήσια φθίνουσα (αύξουσα ή φθίνουσα).

Πρόταση 3.8. *Αν (k_n) είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε $k_n \geq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

[1] οι αποδείξεις παρουσιάσθηκαν στις διαλέξεις

4 Σύγκλιση ακολουθιών στο $\mathbb{R}$

4.1 Η έννοια της περιοχής

Ονομάζουμε περιοχή ενός πραγματικού αριθμού x_0, κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) που περιέχει το x_0. Για την σύγκλιση ακολουθιών ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι περιοχές του x της μορφής $(x_0 - \varepsilon, x + \varepsilon)$ όπου ε θετικός πραγματικός αριθμός. Σε μια περιοχή αυτής της μορφής το x_0 λέγεται *κέντρο* και ο θετικός ε η *ακτίνα* της περιοχής. Αν $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ τότε

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon\,.$$

Πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε την έκφραση "τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν στην οποιαδήποτε περιοχή του x_0". Με αυτό εννοούμε ότι "όλοι οι όροι της ακολουθίας, εκτός από πεπερασμένου πλήθους όροι, ανήκουν στην οποιαδήποτε περιοχή του x_0". Έτσι αν τελικά όλοι οι όροι της (a_n) ανήκουν στην οποιαδήποτε περιοχή του x_0, θα υπάρχει δείκτης n_0 τέτοιος ώστε $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$, να έχουμε $x_0 - \varepsilon < a_n < x_0 + \varepsilon$, για κάθε $\varepsilon > 0$, αφού ισχύει για την οποιαδήποτε περιοχή του x_0.

4.2 Μηδενικές ακολουθίες

Περιγραφικά, μια ακολουθία a_n λέγεται μηδενική αν τελικά όλοι οι όροι αυτής ανήκουν στην οποιαδήποτε περιοχή του μηδενός. Κάθε ακολουθία με αυτή την ιδιότητα θα λέγεται *μηδενική* ή θα λέμε ότι έχει όριο το μηδέν ή ότι τείνει στο μηδέν και θα σημειώνουμε $\lim a_n = 0$ ή $a_n \to 0$. Πιο αυστηρά

Ορισμός 4.1. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται μηδενική αν και μόνο αν για κάθε ε θετικό υπάρχει δείκτης n_0, που εξαρτάται από το ε, έτσι ώστε $|a_n| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0(\varepsilon)$. Συμβολικά γράφουμε

$$\boxed{\lim a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n| < \varepsilon}$$

Παραδείγματα μηδενικών ακολουθιών είναι οι

$$a_n = \frac{1}{n}\,, \quad b_n = \frac{1}{n+1}\,, \quad c_n = \frac{1}{n^k}\,,\ k \text{ θετικός ρητός}$$

Θυμηθείτε από τις διαλέξεις ότι για να αποδείξουμε με τον ορισμό (4.1) ότι $a_n \to 0$, ξεκινάμε από την σχέση $|a_n| < \varepsilon$ και με ισοδυναμίες οδηγούμαστε σε σχέση της μορφής $n > f(\varepsilon)$. Σημειώνουμε τον δείκτη $n_0(\varepsilon) = [f(\varepsilon)] + 1$, ο οποίος είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός από τον οποίο και μετά ισχύει $|a_n| < \varepsilon$. Οπότε βγαίνει το συμπέρασμα ότι η (a_n) είναι μηδενική ακολουθία.

4.3 Συγκλίνουσες ακολουθίες σε πραγματικό αριθμό

Αν μια ακολουθία a_n έχει την ιδιότητα τελικά όλοι οι όροι της να βρίσκονται στην οποιαδήποτε περιοχή του πραγματικού αριθμού a, λέμε ότι η ακολουθία a_n συγκλίνει στο a ή ότι έχει όριο το a και σημειώνουμε $\lim a_n = a$, ή $a_n \to a$.

Ορισμός 4.2. Μια ακολουθία (a_n) λέμε ότι συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$, ή ότι έχει όριο το $a \in \mathbb{R}$, ή ότι τείνει στον πραγματικό αριθμό a, αν και μόνο αν για κάθε ε θετικό υπάρχει δείκτης n_0, που εξαρτάται από το ε, έτσι ώστε $|a_n - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0(\varepsilon)$.
Συμβολικά γράφουμε

$$\boxed{\lim a_n = a \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon}$$

Άν θέλουμε να αποδείξουμε με τον ορισμό ότι μια ακολουθία (a_n) έχει όριο τον πραγματικό a, τότε εργαζόμαστε όπως με τις μηδενικές ακολουθίες αφού είναι προφανές ότι $\lim a_n = a \Leftrightarrow \lim(a_n - a) = 0$.

4.4 Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε συγκεντρωτικά τις βασικές ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών. Οι αποδείξεις τους παρουσιάσθηκαν αναλυτικά ή σκιαγραφήθηκαν στις διαλέξεις.

Ιδιότητα 1η Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ έχει ένα και μόνο όριο.

Ιδιότητα 2η Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$ είναι φραγμένη.

Από την ιδιότητα αυτή συνάγουμε ότι *αν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$.

Ιδιότητα 3η Αν για μια ακολουθία (a_n) έχουμε $a_n \to a$ τότε και κάθε υπακολουθία αυτής έχει όριο το a.

Από την ιδιότητα αυτή συμπεραίνουμε ότι *αν δυο υπακολουθίες της* a_n *δεν έχουν το ίδιο όριο τότε η* a_n *δεν συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$.
Επιπλέον, αν η μια ακολουθία διαμερίζεται σ' ένα πλήθος υπακολουθιών που όλες έχουν κοινό όριο το a, τότε και η ακολουθία a_n έχει όριο το a.

Ιδιότητα 4η Αν για μια ακολουθία (a_n) έχουμε $a_n \to a$, τότε $|a_n| \to |a|$.

Αν $a \neq 0$, το αντίστροφο δεν ισχύει, γενικά. Π.χ. για την $a_n = (-1)^n$ έχουμε ότι $|a_n| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lim |a_n| = 1$, όμως η a_n δεν συγκλίνει αφού οι υπακολουθίες της a_{2n} και a_{2n-1} έχουν διαφορετικά όρια

$$\lim a_{2n} = 1 \neq -1 = \lim a_{2n-1}.$$

Αν $a = 0$ ισχύει και το αντίστροφο, αφού $\lim a_0 = 0 \Leftrightarrow \lim(-a_0) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_0| = 0$.

Ιδιότητα 5η Αν για την ακολουθία (a_n) έχουμε $a_n \to a$, τότε $-a_n \to -a$.

Ιδιότητα 6η Αν για τις ακολουθίες (a_n), (b_n) έχουμε $|a_n| \leq |b_n|$ ή μόνο $|a_n| < |b_n|$ για κάθε $n > n_1$ και $b_n \to 0$, τότε και $a_n \to 0$.

Ιδιότητα 7η Αν για τις ακολουθίες (a_n), (b_n) έχουμε $a_n \leq b_n$ ή μόνο $a_n < b_n$ για κάθε $n > n_1$ και $a_n \to a$, $b_n \to b$, τότε $a \leq b$.

Ιδιότητα 8η Αν οι ακολουθίες (a_n), (b_n), (c_n) ικανοποιούν την $b_n \leq a_n \leq c_n$ για κάθε $n > n_1$ ή μόνο την $b_n < a_n < c_n$, $\forall n > n_1$, και $\lim b_n = \lim c_n = a$, τότε $\lim a_n = a$.

Ιδιότητα 9η Το γινόμενο μηδενικής ακολουθίας επί φραγμένη ακολουθία είναι μηδενική ακολουθία, δηλαδή αν $a_n \to 0$ και b_n φραγμένη τότε $a_n\, b_n \to 0$.

Ιδιότητα 10η *(όριο αθροίσματος ακολουθιών).*

Αν οι ακολουθίες (a_n), (b_n) συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$, με $a_n \to a$, $b_n \to b$, τότε και η $(a_n + b_n)$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και $a_n + b_n \to a + b$. Με άλλα λόγια $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.

Ιδιότητα 11η *(όριο γινομένου ακολουθιών).*

Αν οι ακολουθίες (a_n), (b_n) συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$, με $a_n \to a$, $b_n \to b$, τότε και η $(a_n\, b_n)$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και $a_n\, b_n \to a\, b$. Με άλλα λόγια $\lim(a_n\, b_n) = \lim a_n\, \lim b_n$.

Ιδιότητα 12η Αν η ακολουθία (a_n) με $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, με $a_n \to a$, $a \neq 0$, τότε η ακολουθία $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ συγκλίνει στο $\dfrac{1}{a}$.

Ιδιότητα 13η *(όριο πηλίκου ακολουθιών)*

Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ με $a_n \to a$ και η $(b_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ με $b_n \to b \neq 0$, τότε η $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}\,.$$

Ιδιότητα 14η *(όριο τετραγωνικής ρίζας ακολουθιών)*

Αν η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ με $a_n \to a$, τότε η ακολουθία $(\sqrt{|a_n|})$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ και

$$\lim \sqrt{|a_n|} = \sqrt{\lim |a_n|} = \sqrt{|a|}$$

4.5 Βασικά όρια

Τα παρακάτω όρια τα χαρακτηρίζουμε ως βασικά γιατί μπορούμε να τα θεωρούμε γνωστά όταν αντιμετωπίζουμε θέματα σύγκλισης ακολουθιών.

1. Αν $a_n = \dfrac{1}{n^k}$, όπου k θετικός ρητός αριθμός, τότε $a_n \to 0$.

2. Αν $a_n = \sqrt[n]{a}$, όπου a θετικός πραγματικός αριθμός, τότε $a_n \to 1$.

3. Αν $a_n = \omega^n$, με $|\omega| < 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, τότε $a_n \to 0$.

4. *(κριτήριο για μηδενικές ακολουθίες)*

Αν για την ακολουθία (a_n) έχουμε $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $\lim \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \partial$, με $\partial < 1$, τότε $\lim a_n = 0$.

5 Κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών στο $\mathbb{R}$

Σε διάφορα προβλήματα που η μαθηματική τους διατύπωση τους οδηγεί σε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι να γνωρίζουμε αν η ακολουθία συγκλίνει ή όχι. Κι αυτό γιατί αν γνωρίζουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει τότε τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας θα βρίσκονται πολύ κοντά στο όριό της. Οπότε για να βρούμε την τιμή του ορίου αρκεί να πάρουμε την τιμή ενός όρου της ακολουθίας, και μάλιστα αν η ακολουθία είναι μονότονη τόσο καλύτερη προσέγγιση του ορίου θα έχουμε όσο πιο μεγάλη είναι η τάξη του όρου που επιλέγουμε.

Οπότε είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε κάποια κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών σε πραγματικό αριθμό.

5.1 Ικανό κριτήριο σύγκλισης στο $\mathbb{R}$

Πρόταση 5.1. *Αν μια ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, και μάλιστα αν είναι αύξουσα συγκλίνει στο ελάχιστο άνω φράγμα, ενώ αν είναι φθίνουσα στο μέγιστο κάτω φράγμα.*

Απόδειξη: Θα δώσουμε την απόδειξη για την περίπτωση που μια τυχαία ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη.

Έστω ότι η ακολουθία πραγματικών (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Τότε το σύνολο των πραγματικών αριθμών $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, και από το αξίωμα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών, υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα,ας το πούμε $a = \sup A$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to a$.
Πράγματι. Επειδή $a = \sup A$, τότε

$$a_n \leq a, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Rightarrow \quad a_n < a_n + \varepsilon \leq a + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad (*)$$

Επιπλέον, $a - \varepsilon < a$, $\forall \varepsilon > 0$, κι επειδή το a είναι το ελάχιστο άνω φράγμα, τότε το $a - \varepsilon$ δεν μπορεί να είναι άνω φράγμα της (a_n). Συνεπώς, υπάρχει κάποιος όρος της ακολουθίας a_{n_0} με δείκτη n_0 τέτοιος που $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Αλλά, αφού η (a_n) είναι αύξουσα, $\forall n \geq n_0$ έχουμε $a_n \geq a_{n_0}$. Οπότε έχουμε

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \qquad (**)$$

Συνολικά, οι σχέσεις $(*)$ και $(**)$ δίνουν

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

δηλαδή $\lim a_n = a$.
Παρόμοια αποδεικνύεται η περίπτωση που η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. □

Παράδειγμα 5.2. Η ακολουθία a_n με τύπο

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

είναι αύξουσα και άνω φραγμένη [2] με ένα άνω φράγμα το 3, δηλαδή

$$a_{n+1} \geq a_n\,, \quad \text{και} \quad a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς από το προηγούμενο κριτήριο η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό. Ο πραγματικός αριθμός $\lim a_n$ είναι ο γνωστός μας $e = 2.71828....$ Θέτοντας $n = 1000$ στην ακολουθία a_n παίρνουμε $a_{1000} = 2.71692$, που ταυτίζεται με τον e μέχρι τα δύο πρώτα δεκαδικά ψηφία. Όσο μεταλύτερο n πάρουμε τόσο καλύτερα προσεγγίζουμε τον e, που δεν είναι άλλο από το να λέμε $\lim a_n = e$.

5.2 Ικανό και αναγκαίο κριτήριο σύγκλισης στο $\mathbb{R}$

Για λόγους πληρότητας της παρούσας διαπραγμάτευσης των ακολουθιών θα αναφέρουμε (χωρίς απόδειξη) ένα ικανό και αναγκαίο κριτήριο σύγκλισης σε πραγματικό αριθμό. Το κριτήριο αυτό βασίζεται στην έννοια της ακολουθίας Cauchy η οποία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 5.3. *(Ακολουθίες Cauchy)*
Μια ακολουθία (a_n) λέγεται ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $n_0(\varepsilon)$ που εξαρτάται από το ε, τέτοιος ώστε $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ και $\forall m \geq n_0(\varepsilon)$, να έχουμε $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Αυτό που λέει ο παραπάνω ορισμός είναι ότι, σε μια ακολουθία Cauchy τελικά όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν ο καθένας στην οποιαδήποτε περιοχή του κάθε άλλου. *Ουσιαστικά, η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα σύγκλισης στο $\mathbb{R}$ και διατυπώνεται στην παρακάτω*

Πρόταση 5.4. (Ικανό και αναγκαίο κριτήριο σύγκλισης στο $\mathbb{R}$)
Μια ακολουθία για να συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ πρέπει και αρκεί να είναι ακολουθία Cauchy.

[2] Δες την παράγραφο ασκήσεις.

6 Αποκλίνουσες ακολουθίες

Στα προηγούμενα ασχοληθήκαμε με ακολουθίες που έχουν όριο πραγματικό αριθμό a, δηλαδή με μια τυχαία ακολουθία που έχει την ιδιότητα τελικά όλοι οι όροι της να ανήκουν σε μια οποιαδήποτε περιοχή του a. Στο παρόν εδάφιο θα ασχοληθούμε με μια ακολουθία a_n που τελικά όλοι οι όροι της βρίσκονται στην οποιαδήποτε περιοχή του $+\infty$, οπότε και θα λέμε ότι η a_n *αποκλίνει στο* $+\infty$, και θα σημειώνουμε $\lim a_n = +\infty$ ή $a_n \to +\infty$. Όμοια, αν τελικά όλοι οι όροι της a_n βρίσκονται στην οποιαδήποτε περιοχή του $-\infty$, θα λέμε ότι η a_n αποκλίνει στο $-\infty$, και θα σημειώνουμε $\lim a_n = -\infty$ ή $a \to -\infty$.

Ορισμός 6.1. Λέμε ότι μια ακολουθία (a_n) έχει όριο το $+\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει δείκτης $n_0(M)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0(M)$, να έχουμε $a_n > M$. Συμβολικά γράφουμε

$$\boxed{\lim a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \quad \exists\, n_0(M) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0(M) \quad \Rightarrow \quad a_n > M}$$

Ορισμός 6.2. Λέμε ότι μια ακολουθία (a_n) έχει όριο το $-\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει δείκτης $n_0(M)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0(M)$, να έχουμε $a_n < -M$. Συμβολικά γράφουμε

$$\boxed{\lim a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M > 0 \quad \exists\, n_0(M) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0(M) \quad \Rightarrow \quad a_n < -M}$$

Είναι προφανές από τους προηγούμενους ορισμούς ότι έχουμε την ισοδυναμία

$$\boxed{\lim a_n = +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim(-a_n) = -\infty}$$

6.1 Ιδιότητες αποκλινουσών ακολουθιών

Αναφέρουμε τώρα τις κύριες ιδιότητες αποκλινουσών ακολουθιών και ποιές “πράξεις” μεταξύ του $\pm\infty$ και πραγματικών αριθμών είναι επιτρεπτές με την έννοια του ορίου.

Ιδιότητα 1η Αν για μια ακολουθία (a_n) έχουμε $\lim a_n = +\infty$ (ή $\lim a_n = -\infty$), τότε και για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) ισχύει $\lim a_{k_n} = +\infty$ (ή $\lim a_{k_n} = -\infty$).

Ιδιότητα 2η Έστω ότι για τις ακολουθίες (a_n), (b_n) ισχύει $a_n \leq b_n$ ή μόνο $a_n < b_n$, $\forall n \geq n_1$, τότε
(α) Αν $\lim a_n = +\infty$ συνεπάγεται ότι $\lim b_n = +\infty$
(β) Αν $\lim b_n = -\infty$ συνεπάγεται ότι $\lim a_n = -\infty$.

Ιδιότητα 3η Έστω ότι για τις ακολουθίες (a_n), (b_n), (c_n) ισχύει $b_n \leq a_n \leq c_n$ ή μόνο $b_n < a_n < c_n$, $\forall n \geq n_1$ και $\lim b_n = \lim c_n = +\infty$(ή $-\infty$), τότε $\lim a_n = +\infty$(ή $-\infty$).

Ιδιότητα 4η Αν για την ακολουθία (a_n) ισχύει $\lim a_n = +\infty$, τότε η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

Όμοια, αν για την ακολουθία (a_n) ισχύει $\lim a_n = -\infty$, τότε η (a_n) δεν είναι κάτω φραγμένη.

Ιδιότητα 5η Αν η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη τότε η (a_n) αποκλίνει στο $+\infty$.

Όμοια, αν η ακολουθία (a_n) είναι φθίνουσα και δεν είναι κάτω φραγμένη τότε η (a_n) αποκλίνει στο $-\infty$.

Ιδιότητα 6η *(όριο αθροίσματος αποκλινουσών ακολουθιών)*

Αν $\lim a_n = a$, όπου a πραγματικός αριθμός ή $\pm\infty$ και $\lim b_n = b$, όπου b πραγματικός αριθμός ή $\pm\infty$, τότε

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b,$$

εκτός από τις περιπτώσεις όπου $(a = +\infty, b = -\infty)$ και $(a = -\infty, b = +\infty)$.

Έτσι με την έννοια του ορίου είναι επιτρεπτές οι παρακάτω πράξεις:

$$\begin{array}{rr}
a + (+\infty) = +\infty & (+\infty) + a = +\infty \\
a + (-\infty) = -\infty & a + (-\infty) = -\infty \\
(+\infty) + (+\infty) = +\infty & (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\
a - (+\infty) = -\infty & (+\infty) - a = +\infty \\
a - (-\infty) = +\infty & (-\infty) - a = -\infty \\
(+\infty) - (-\infty) = +\infty & (-\infty) - (+\infty) = -\infty
\end{array}$$

όπου a πραγματικός αριθμός.

Επιπλέον, με την έννοια του ορίου δεν μπορούμε να ορίσουμε τις εξής πράξεις

$$(+\infty) + (-\infty) \qquad (-\infty) + (+\infty) \qquad (+\infty) - (+\infty) \qquad (-\infty) - (-\infty)$$

και λέμε ότι έχουμε όριο απροσδιόριστης μορφής του αντίστοιχου τύπου.

Ιδιότητα 7η *(όριο γινομένου αποκλινουσών ακολουθιών)*

Αν $\lim a_n = a$, όπου a πραγματικός αριθμός ή $\pm\infty$ και $\lim b_n = b$, όπου b πραγματικός αριθμός ή $\pm\infty$, τότε

$$\lim(a_n\, b_n) = \lim a_n\, \lim b_n = a\, b\,,$$

εκτός από τις περιπτώσεις όπου $(a = 0, b = \pm\infty)$ και $(a = \pm\infty, b = 0)$.

Με βάση την ιδιότητα αυτή μπορούμε να ορίσουμε τις εξής γενικευμένες πράξεις για τον πολλαπλασιασμό

$$x\,(+\infty) = +\infty\,, \qquad (+\infty)\,x = +\infty\,, \qquad x\,(-\infty) = -\infty\,, \qquad (-\infty)\,x = -\infty$$

αν $x > 0$, είναι θετικός πραγματικός αριθμός,

$$x\,(+\infty) = -\infty\,, \qquad (+\infty)\,x = -\infty\,, \qquad x\,(-\infty) = +\infty\,, \qquad (-\infty)\,x = +\infty$$

αν $x < 0$, είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός, και

$$(+\infty)\,(+\infty) = +\infty\,, \quad (+\infty)\,(-\infty) = -\infty\,, \quad (-\infty)\,(+\infty) = -\infty\,, \quad (-\infty)\,(-\infty) = +\infty$$

Αν κάποιος από τους a, b είναι μηδέν και ο άλλος $\pm\infty$, τότε το όριο $\lim a_n\, b_n$, μπορεί να δώσει πραγματικό αριθμό, $\pm\infty$, ή να μην υπάρχει. Για παράδειγμα:
Αν $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$, $b_n = n^2 \to +\infty$, τότε $a_n\, b_n = n \to +\infty$.
Αν $a_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0$, $b_n = n \to +\infty$, τότε $a_n\, b_n = \dfrac{1}{n} \to 0$
Αν $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$, $b_n = n \to +\infty$, τότε $a_n\, b_n = (-1)^n$, που δεν υπάρχει το όριό της.
Γι αυτό λέμε ότι οι πράξεις

$$0\,(\pm\infty)\,, \qquad (\pm\infty)\,0$$

δεν είναι γενικά επιτρεπτές, ή ότι το όριο είναι της αντίστοιχης απροσδιόριστης μορφής.

Ιδιότητα 8η Έστω η ακολουθία (a_n) με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\lim a_n = +\infty$ ή $\lim a_n = -\infty$, τότε $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$.

Ιδιότητα 9η Έστω η ακολουθία (a_n) με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\lim a_n = 0$ και $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\lim \dfrac{1}{a_n} = +\infty$. Αν $\lim a_n = 0$ και $a_n < 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\lim \dfrac{1}{a_n} = -\infty$.

Πρέπει να επισημάνουμε το εξής σχετικά με την παραπάνω ιδιότητα. Αν $\lim a_n = 0$ και οι όροι της (a_n) *δεν διατηρούν πρόσημο τότε δεν υπάρχει το όριο* $\lim \dfrac{1}{a_n}$. Για παράδειγμα η ακολουθία $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει στο 0, $a_n \to 0$, αλλά οι όροι της δεν διατηρούν πρόσημο αφού οι άρτιοι όροι a_{2n} είναι θετικοί ενώ οι περιττοί όροι a_{2n-1} είναι αρνητικοί.
Συνεπώς, η ακολουθία $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{n}{(-1)^n}$ δεν έχει όριο, αφού οι υπακολουθίες

$$\frac{1}{a_{2n}} = 2n \to +\infty \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{a_{2n-1}} = -2n + 1 \to -\infty$$

έχουν διαφορετικό όριο.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η πράξη $\frac{1}{0}$, γενικά, *δεν ορίζεται ή δεν είναι επιτρεπτή.* Επειδή οι γενικεύσεις των πράξεων στο $\mathbb{R}$ μαζί με το $\pm\infty$ γίνονται με την βοήθεια ορίων ή αλλιώς όπως λέμε είναι οριακές πράξεις, για το $\frac{1}{0}$ μπορούμε να γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση *που ο παρονομαστής γίνεται μηδέν ως όριο ακολουθίας θετικών όρων* δίνει $+\infty$, ενώ στην περίπτωση *που ο παρανομαστής γίνεται μηδέν ως όριο αρνητικών όρων* δίνει $-\infty$. Γενικά όμως, δεν είναι επιτρεπτή η πράξη $\frac{1}{0}$.

Ιδιότητα 10η *(όριο πηλίκου αποκλινουσών ακολουθιών)*

Έστω οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $b_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\lim a_n = a$, όπου $a = \{\text{πραγματικός, ή } \pm\infty\}$ και $\lim b_n = b$, όπου $b = \{\text{πραγματικός, ή } \pm\infty\}$, τότε

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$$

εκτός από τις περιπτώσεις όπου $(a = \pm\infty, b = \pm\infty)$, $(a = \pm\infty, b = 0)$ και
$(a = \text{πραγματικός}, b = 0)$
Οπότε, για την διαίρεση δεν είναι επιτρεπτές οι εξής πράξεις

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{\pm\infty}{0}, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{1}{0}$$

Σημειώνουμε και πάλι ότι η πράξη $\frac{1}{0}$ είναι επιτρεπτή στις δυο περιπτώσεις που αναφέραμε στην 9η ιδιότητα των αποκλινουσών ακολουθιών.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι **δεν** είναι επιτρεπτές οι εξής πράξεις:

$$\begin{array}{lll}
(+\infty)+(-\infty), & (-\infty)+(-\infty)\,, & \text{για την πρόσθεση} \\
(+\infty)-(+\infty), & (-\infty)-(-\infty)\,, & \text{για την αφαίρεση} \\
 & & \\
0\,(\pm\infty)\,, & (\pm\infty)\,0\,, & \text{για τον πολλαπλασιασμό} \\
 & & \\
\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{\pm\infty}{0}, & \frac{0}{0}, \quad \frac{1}{0}, & \text{για την διαίρεση}
\end{array}$$

6.2 Εφαρμογή

Δίνεται η ακολουθία $a_n = \omega^n$, $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι

(1) Αν $|\omega| < 1$, τότε $\lim a_n = 0$

(2) Αν $\omega = 1$, τότε $\lim a_n = 1$

(3) Αν $\omega > 1$, τότε $\lim a_n = +\infty$

(4) Αν $\omega \leq -1$, τότε το $\lim a_n$ δεν υπάρχει.

7 Ασκήσεις

Άσκηση 7.1. Να δειχθεί με τον ορισμό ότι οι ακολουθίες με γενικούς τύπους

$$i)\quad a_n = \frac{1}{n}\,, \qquad ii)\quad b_n = \frac{1}{2^n}\,, \qquad iii)\quad c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

είναι μηδενικές ακολουθίες.

Λύση:

i) Θα πρέπει να δείξουμε με τον ορισμό ότι $\lim a_n = 0$, *δηλαδή*

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n| < \varepsilon$. *Έχουμε*

$$|a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1/\varepsilon \quad \textit{οπότε αν πάρουμε} \quad n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1 \quad \textit{τότε} \quad \forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

άρα $\lim a_n = 0$

ii) Αποδείξτε πρώτα επαγωγικά ότι $2^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$

$$|b_n| = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{οπότε αν πάρουμε} \quad n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1 \quad \text{τότε} \quad \forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

συνεπώς $b_n \to 0$.

iii) Με όμοιο τρόπο όπως στο *i)* αν πάρουμε $n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon^2] + 1$ έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 7.2. Να δειχθεί με τον ορισμό ότι οι ακολουθίες με γενικούς τύπους

$$i)\quad a_n = \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}\,, \qquad ii)\quad b_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\,, \qquad iii)\quad c_n = \frac{n \sin n!}{n^2+1}$$

συγκλίνουν στο μηδέν.

Λύση:

i) Έχουμε

$$|a_n| = \left|\frac{n}{n^3+n^2+1}\right| = \frac{n}{n^3+n^2+1} < \frac{n}{n^3+n^2} = \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

οπότε αν πάρουμε $n_0(\varepsilon) = [1/\sqrt{\varepsilon}] + 1$ *τότε* $\forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n| < \frac{1}{n^2} < \varepsilon$. *Συνεπώς* $\lim a_n = 0$.

ii) Έχουμε

$$|b_n| = \left|\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}\right| = \left|\frac{(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1})\,(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}}\right| = \left|\frac{(n^2+2)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

οπότε αν πάρουμε $n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$, *τότε* $\forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |b_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. *Συνεπώς* $\lim b_n = 0$.

ii) Γνωρίζουμε ότι $|sinx| \leq 1\,, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, *οπότε έχουμε*

$$|c_n| = \left|\frac{n \sin n!}{n^2+1}\right| = \frac{|n|\,|\sin n!|}{|n^2+1|} \leq \frac{|n|}{|n^2+1|} = \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

οπότε αν πάρουμε $n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$, *τότε* $\forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |c_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon$. *Συνεπώς* $\lim c_n = 0$.

Άσκηση 7.3. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι

$$i)\quad \frac{n^2-n}{n^2+n} \to 1\,, \qquad ii)\quad \frac{1+2+\cdots n}{n+2} - \frac{n}{2} \to -\frac{1}{2}\,.$$

Λύση:
i) Έχουμε

$$\left|\frac{n^2-n}{n^2+n} - 1\right| = \left|\frac{n^2-n-n^2-n}{n^2+n}\right| = \left|\frac{-2n}{n(n+1)}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} < \varepsilon$$

οπότε αν πάρουμε $n_0(\varepsilon) = [2/\varepsilon]+1$, *τότε* $\forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{n^2-n}{n^2+n} - 1\right| < \frac{2}{n} < \varepsilon$. *Συνεπώς* $\lim \frac{n^2-n}{n^2+n} = 1$.
ii) Γνωρίζουμε ότι $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. *Οπότε έχουμε*

$$\left|\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n(n+1)}{2(n+2)} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{n+2}\right| = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

οπότε αν πάρουμε $n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon]+1$, *τότε* $\forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$.
Συνεπώς $\lim(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}) = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 7.4. Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

$$i)\quad a_n = \frac{2n^2+1}{n^2+3n+2}\,, \quad n\in\mathbb{N} \qquad ii)\quad b_n = \frac{3n+2}{n^2+n+1}\,, \quad n\in\mathbb{N}\,.$$

Λύση:
i) Έχουμε

$$a_n = \frac{2n^2+1}{n^2+3n+2} = \frac{n^2(2+\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \quad \text{οπότε} \quad \lim a_n = \frac{\lim(2+\frac{1}{n^2})}{\lim(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} = \frac{2+0}{1+0+0} = 2.$$

ii) Έχουμε

$$b_n = \frac{3n+2}{n^2+n+1} = \frac{n(3+\frac{2}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{n}\,\frac{3+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \quad \text{οπότε} \quad \lim a_n = \lim\frac{1}{n}\,\frac{\lim(3+\frac{2}{n})}{\lim(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = 0\,\frac{3}{1} = 0.$$

Άσκηση 7.5. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\,, \qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, *οπότε*

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{1\cdot 2} = 1 - \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} a_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{οπότε} \quad \lim a_n = 1 - \lim\frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

Άσκηση 7.6. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Λύση: Παρατηρούμε ότι

$$\frac{n}{n^2+n} \le \frac{n}{n^2+(n-1)} \le \cdots \le \frac{n}{n^2+2} \le \frac{n}{n^2+1}$$

οπότε από τους n προσθετέους της a_n ο μεγαλύτερος είναι ο $\frac{n}{n^2+1}$ και ο μικρότερος είναι ο $\frac{n}{n^2+n}$. Άρα, $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$n\,\frac{n}{n^2+n} \le a_n \le n\,\frac{n}{n^2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2}{n^2+n} \le a_n \le \frac{n^2}{n^2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n^2}{n^2(1+\frac{1}{n})} \le a_n \le \frac{n^2}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \le a_n \le \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}.$$

Για τις ακολουθίες $b_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$, και $c_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$ έχουμε ότι $\lim b_n = \lim c_n = 1$, οπότε από την 8η ιδιότητα συγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι και $\lim a_n = 1$.

Άσκηση 7.7. Αν

$$a_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί A, B τέτοιοι ώστε $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n+1)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και στη συνέχεια να υπολογισθεί το $\lim a_n$.

Λύση: Αν $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n}{n!\,(n+1)} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{n!\,(n+1)} \Rightarrow \frac{n}{(n+1)} = A + \frac{B}{(n+1)} \Rightarrow$ $\frac{n}{(n+1)} = \frac{A(n+1)+B}{(n+1)} \Rightarrow n = An + A + B \Rightarrow 0 = (A-1)n + A + B$. *Για να ισχύει η τελευταία σχέση* $\forall n \in \mathbb{N}$ *θα πρέπει* $(A = 1, B = -A) \Rightarrow (A = 1, B = -1)$. *Έτσι έχουμε*

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2!} &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \\ \frac{2}{3!} &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \\ &\vdots \\ \frac{n}{(n+1)!} &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{οπότε} \quad \lim a_n = 1 - \lim \frac{1}{(n+1)!} = 1 - 0 = 1$$

Άσκηση 7.8. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

συγκλίνει.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι η a_n είναι μονότονη και φραγμένη. Έχουμε

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

οπότε η a_n είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία. Επιπλέον, $\forall n \geq 2$ ισχύει $n! \geq 2^{n-1}$ (επαγωγικά). Οπότε

$$\left.\begin{array}{l} 1 \leq 1 \\ \frac{1}{1!} \leq 1 \\ \frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \quad a_n = 1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{γεωμετρική πρόοδος}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2(1 - \frac{1}{2^n}) < 3\,,$$

οπότε η a_n είναι άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα το 3. Η a_n είναι γνήσια αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει.

Άσκηση 7.9. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, συγκλίνει.

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία a_n είναι μονότονη και φραγμένη. Επειδή οι όροι είναι όλοι θετικοί θα ελέγξουμε το λόγο $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ή ισοδύναμα τον $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Έχουμε

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1-\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1-\frac{1}{n-1})^n}\frac{n}{n-1} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \quad (*)$$

Από την ανισότητα του Bernoulli ξέρουμε ότι αν $1 + a > 0$, τότε $(1+a)^n \geq 1 + na$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με ισότητα για $n = 1$, οπότε

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + n(-\frac{1}{n^2}) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \qquad (**)$$

για $n = 2, 3, \ldots$. Συνεπώς οι σχέσεις $(*)$, $(**)$ δίνουν

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} > \frac{n-1}{n}\frac{n}{n-1} = 1$$

για $n = 2, 3, \ldots$ Άρα $a_n > a_{n-1}$ και η a_n είναι γνήσια αύξουσα. Θα δείξουμε τώρα ότι είναι και άνω φραγμένη. Από το διωνυμικό ανάπτυγμα της a_n, παίρνουμε

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{1}{n^n} \qquad (\sharp)$$

Όμως $n(n-1)\cdots(n-k+1) \leq n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k$, και άρα $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} \leq 1$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση στην σχέση $(\sharp)$ παίρνουμε $a_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{k!} + \cdots \frac{1}{n!}$, το οποίο βάσει της προηγούμενης άσκησης είναι < 3, οπότε η a_n είναι φραγμένη με ένα άνω φράγμα το 3 (και κάτω φραγμένη με ένα κάτω φράγμα τον $a_1 = 2$). Άρα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ο οποίος προσδιορίζεται σαν όριο ακολουθιών, όπως η a_n, και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα e, δηλαδή $\lim a_n = e = 2.71828....$

Άσκηση 7.10. Δείξτε ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Λύση: Για κάθε $n \geq 1$ *έχουμε* $\sqrt[2n]{n} \geq \sqrt[2n]{1} = 1$. *Οπότε υπάρχει ακολουθία θετικών όρων* $b_n > 0$, *τέτοια ώστε* $\sqrt[2n]{n} = 1 + b_n \Rightarrow \sqrt[n]{n} = (1+b_n)^2$. *Αρκεί να δείξουμε ότι* $b_n \to 0$. *Πράγματι,*

$$\sqrt[2n]{n} = 1 + b_n \Rightarrow \sqrt{n} = (1+b_n)^n \geq 1 + nb_n > nb_n \Rightarrow \sqrt{n} > nb_n > 0 \Rightarrow 0 < b_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Όμως, $\lim 0 = 0$ *και* $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, *και από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (ιδιότητα 8η συγκλινουσών ακολουθιών) έχουμε ότι και* $\lim b_n = 0$. *Οπότε* $\lim \sqrt[n]{n} = \lim(1+b_n)^2 = (1+0)^2 = 1$.

Γενικά, με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύουμε ότι η νιοστή ρίζα οποιοδήποτε πολυωνύμου του n *έχει όριο την μονάδα. Για παράδειγμα, αν είχαμε την ακολουθία με γενικό τύπο* $\sqrt[n]{n^2+1}$, *τότε παίρνουμε* kn *ρίζα όπου* k *φυσικός ένα βαθμό παραπάνω από το βαθμό του πολυωνύμου που είναι στην υπόριζο ποσότητα, δηλαδή* $k = 3$ *για το* n^2+1, *και θέτουμε* $\sqrt[3n]{n^2+1} = 1 + b_n \Rightarrow \sqrt[n]{n^2+1} = (1+b_n)^3$ *κι αποδεικνύουμε ότι* $b_n \to 0$.

$$\sqrt[3n]{n^2+1} = 1 + b_n \Rightarrow \sqrt[3]{n^2+1} = (1+b_n)^n \geq 1 + nb_n > nb_n \Rightarrow \sqrt[3]{n^2+1} > nb_n > 0 \Rightarrow 0 < b_n < \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n}$$

$$\Rightarrow 0 < b_n < \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3}} \Rightarrow 0 < b_n < \sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}$$

κι αφού $\lim \sqrt[3]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = \lim 0 = 0$, *τότε* $\lim b_n = 0$. *Συνεπώς,* $\lim \sqrt[n]{n^2+1} = \lim(1+b_n)^3 = (1+0)^3 = 1$.

Άσκηση 7.11. Δείξτε ότι $a_n = \dfrac{n!}{n^n} \to 0$.

Λύση: Α' τρόπος: Για κάθε $k = 1, 2, \ldots n-1$ *έχουμε ότι* $1 \leq k < n \Rightarrow 1 < n - k + 1 \leq n \Rightarrow n - k + 1 \leq n$. *Έτσι, στην τελευταία ανισότητα, καθώς το* k *διατρέχει τους φυσικούς από 1 μέχρι* $n-1$, *παίρνουμε*

$$\left.\begin{array}{ll} n & \leq n \\ n-1 & \leq n \\ n-2 & \leq n \\ \vdots & \\ 2 & \leq n \end{array}\right\} \overset{(\times)}{\Rightarrow} \quad (n!) \leq n^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

Αφού $\lim \frac{1}{n} = 0$, *από την ιδιότητα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε ότι* $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$

Β' τρόπος: Από το κριτήριο του λόγου για μηδενικές ακολουθίες αρκεί να δείξουμε ότι $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell < 1$. *Αφού* $a_n > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *έχουμε*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\dfrac{1}{n})^n} \Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{\lim (1+\dfrac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Άρα $a_n \to 0$.

Άσκηση 7.12. Αν για την ακολουθία (a_n) έχουμε ότι $a_n \to a \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι $A_n \to a$, όπου

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Η (A_n) λέγεται η ακολουθία του μέσου αριθμητικού των όρων της (a_n).

Λύση: *Αφού* $a_n \to a$ *σημαίνει* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - a| < \varepsilon$.. *Άρα* $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$, $|a_{n_0+1} - a| < \varepsilon, \ldots |a_n - a| < \varepsilon$ *για κάθε* $n \geq n_0$. *Από την άλλη θέλουμε να δείξουμε* $|A_n - a| < \varepsilon'$ *για κάθε* $n \geq n_0'$. *Έχουμε*

$$\begin{aligned}
|A_n - a| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| = \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \frac{na}{n} \right| = \\
&= \left| \frac{(a_1 - 1) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{n_0-1} - a) + (a_{n_0} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\
&\leq \frac{|(a_1 - 1) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{n_0-1} - a)|}{n} + \frac{|a_{n_0} - a|}{n} + \cdots + \frac{|a_n - a|}{n} \\
&< \frac{|(a_1 - 1) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{n_0-1} - a)|}{n} + \frac{\varepsilon}{n} + \cdots + \frac{\varepsilon}{n} \\
&= \frac{K}{n} + \frac{(n - n_0 + 1)\varepsilon}{n} \qquad\qquad (\sharp)
\end{aligned}$$

όπου θέσαμε $K = |(a_1 - 1) + (a_2 - a) + \cdots + (a_{n_0-1} - a)|$. *Επειδή* $\frac{K}{n} \to 0$ *και* $\frac{K}{n} > 0$ *θα έχουμε* $\frac{K}{n} < \varepsilon_1$ *για κάθε* $n \geq n_1$. *Επιπλέον* $\frac{(n-n_0+1)\varepsilon}{n} < \frac{n\varepsilon}{n} = \varepsilon$ *κι έτσι το δεξί μέλος της σχέσης* $(\sharp)$ *γίνεται* $\frac{K}{n} + \frac{(n-n_0+1)\varepsilon}{n} < \varepsilon + \varepsilon_1 = \varepsilon'$. *Συνεπώς για κάθε* $n \geq n_0' = \max\{n_0, n_1\} \Rightarrow |A_n - a| < \varepsilon'$ *για κάθε* $\varepsilon' > 0$. *Άρα* $\lim A_n = 0$.

Άσκηση 7.13. Αν (a_n) ακολουθία θετικών όρων με $a_n \to a \neq 0$, να δειχθεί ότι $B_n \to a$, όπου

$$b_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Η (B_n) λέγεται η ακολουθία του μέσου αρμονικού των όρων της (a_n).

Λύση: *Αφού* $a_n \to a \neq 0$, *τότε* $\dfrac{1}{a_n} \to \dfrac{1}{a}$ *και από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι*

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \to \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to a \Rightarrow B_n \to a\,.$$

Άσκηση 7.14. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_n = \dfrac{n+2}{3^n}$.

Λύση: *Από τα βασικά όρια γνωρίζουμε ότι αν* $\lim \left| \dfrac{a_n + 1}{a_n} \right| = \vartheta < 1$, *τότε* $\lim a_n = 0$. *Για την* a_n *της άσκησης έχουμε ότι* $a_n > 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+3}{3^{n+1}}}{\frac{n+2}{3^n}} = \frac{3^n(n+3)}{3^{n+1}(n+2)} = \frac{1}{3}\frac{n+3}{n+2} = \frac{1}{3}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} \Rightarrow \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim \frac{1}{3}\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \lim \frac{1}{3}\frac{1+0}{1+0} = \frac{1}{3} < 1$$

οπότε $\lim a_n = 0$.

Άσκηση 7.15. Δίνεται η (a_n) με $a_n = \dfrac{a^n}{n^n}$, όπου $a > 0$ $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι $\lim a_n = 0$.

Λύση: Έχουμε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right| = \left|\frac{a}{n+1}\right| = \frac{a}{n+1} \Rightarrow \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

συνεπώς, $\lim a_n = 0$.

Άσκηση 7.16. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_n = \dfrac{5^n + 2^n}{2\cdot 5^n + 3^n}$, $n \in \mathbb{N}$

Λύση: Μπορούμε να δείξουμε χρησιμοποιώντας την Αρχιμήδεια ιδιότητα των φυσικών ότι οι ακολουθίες $2^n, 3^n, 5^n$ *δεν είναι φραγμένες, άρα δεν συγκλίνουν. Συνεπώς, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα του ορίου πηλίκου. Όμως αν διαιρέσουμε αριθμητή παρανομαστή με την δύναμη του όρου με την μεγαλύτερη βάση, δηλαδή τον* 5^n, *έχουμε*

$$a_n = \frac{1 + (\frac{2}{5})^n}{2 + (\frac{3}{5})^n} \qquad (*)$$

Οπότε από τα βασικά όρια γνωρίζουμε ότι $a^n \to 0$ *με* $a < 1$. *Άρα,* $(\frac{2}{5})^n \to 0$ *και* $(\frac{3}{5})^n \to 0$, *και τελικά από την* $(*)$ *έχουμε ότι* $\lim a_n = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 7.17. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_n \neq -1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι $\lim \dfrac{1-a_n}{1+a_n} = 0$ αν και μόνο άν $a_n \to 1$.

Λύση

$(\Rightarrow)$ *Θα δείξουμε πρώτα ότι αν* $\lim \dfrac{1-a_n}{1+a_n} = 0$, *τότε* $a_n \to 1$. *Θέτουμε* $b_n = \dfrac{1-a_n}{1+a_n}$ *κι έχουμε*

$$b_n(1+a_n) = 1 - a_n \Rightarrow b_n + b_n a_n = 1 - a_n \Rightarrow (1+b_n)a_n = 1 - b_n \Rightarrow a_n = \frac{1-b_n}{1+b_n} \qquad (*)$$

επειδή $\lim b_n = 0$, *τελικά όλοι οι όροι* $b_n \neq -1$ *και από την* $(*)$, *έχουμε*

$$\lim a_n = lim \frac{1-b_n}{1+b_n} = \frac{\lim(1-b_n)}{\lim(1+b_n)} = \frac{1-0}{1+0} = 1\,.$$

$(\Leftarrow)$ *Έστω τώρα ότι* $a_n \to 1$, *τότε*

$$\lim b_n = \lim\frac{1-a_n}{1+a_n} = \frac{\lim(1-a_n)}{\lim(1+a_n)} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Άσκηση 7.18. Δίνεται η ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}}$. Να δειχθεί ότι $\lim a_n = 1$.

Λύση: Έχουμε

$$1 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \overbrace{1 + 1 + 1 \ + \cdots + 1}^{n-\text{φορές}} = n \Rightarrow \sqrt[n]{1} < \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n} \Rightarrow 1 < a_n < \sqrt[n]{n}$$

Έχουμε $\lim 1 = 1$ *και* $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. *Οπότε από το θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών (ιδιότητα 8η συγκλινουσών ακολουθιών) έχουμε ότι και* $\lim a_n = 1$

Άσκηση 7.19. Να εξεταστεί ως προς την σύγκλιση η ακολουθία $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$, $a_1 = 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Λύση: Παρατηρούμε ότι $a_2 = \frac{1}{2} + 1 > 1 = a_1$. Θα δείξουμε επαγωγικά ότι η a_n είναι γνήσια αύξουσα. Πράγματι

- *Ισχύει για $n = 1$ αφού $a_2 > a_1$.*
- *Υποθέτουμε ότι ισχύει $n = k$, δηλ. $a_{k+1} > a_k$.*
- *Με βάση τα προηγούμενα θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλ. $a_{k+2} > a_{k+1}$.*

$$a_{k+1} > a_k \Rightarrow \frac{1}{2}a_{k+1} > \frac{1}{2}a_k \Rightarrow \frac{1}{2}a_{k+1} + 1 > \frac{1}{2}a_k + 1 \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$$

Οπότε η a_n είναι γνήσια αύξουσα ακολουθία. Αν είναι και φραγμένη τότε από το κριτήριο σύγκλισης, η a_n θα συγκλίνει. Ένα κάτω φράγμα είναι προφανώς ο πρώτος όρος της ακολουθίας $a_1 = 1$ οπότε αρκεί να βρούμε ένα άνω φράγμα της a_n. Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι η a_n είναι όντως φραγμένη. Οπότε θα συνέκλινε και μάλιστα στο ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $A = \{a_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$, ας το πούμε a, $\lim a_n = a = \sup A$. Οπότε $lima_n = lima_{n+1} = a$. Άρα $\lim a_{n+1} = \frac{1}{2}\lim a_n + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}a + 1 \Rightarrow a = 2$. Θα δείξουμε (επαγωγικά) ότι το 2 είναι άνω φράγμα της a_n, δηλ. $a_n \leq 2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- *Ισχύει για $n = 1$, αφού $a_1 = 1 \leq 2$.*
- *Υποθέτουμε ότι ισχύει $n = k$, δηλ. $a_k \leq 2$.*
- *Με βάση τα προηγούμενα θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k + 1$, δηλ. $a_{k+1} \leq 2$*

$$a_k \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2}a_k \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2}a_k + 1 \leq 2 \Rightarrow a_{k+1} \leq 2$$

Οπότε πραγματικά η a_n είναι άνω φραγμένη από το 2. Αφού είναι μονότονη και φραγμένη άρα συγκλίνει και όπως είδαμε $\lim a_n = 2$.

Άσκηση 7.20. Δίνεται η ακολουθία (a_n), με $a_1 = a > 0$ και $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{b + a_n}$, $b > 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Να δειχθεί ότι η (a_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Αφού ο πρώτος όρος της ακολουθίας είναι θετικός και $b > 1 > 0$, τότε όλοι οι όροι είναι θετικοί $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε

$$a_n > 0 \Rightarrow a_n + b > 1 \Rightarrow \frac{1}{a_n + b} < 1 \Rightarrow \frac{a_n}{a_n + b} < a_n \Rightarrow a_{n+1} < a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

άρα η a_n είναι γνήσια φθίνουσα ακολουθία. Επιπλέον είναι κάτω φραγμένη από το 0, αφού $0 < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς συγκλίνει. Επειδή λοιπόν $\lim a_{n+1} = \lim a_n = x$, τότε θα πρέπει

$$\lim a_{n+1} = lim\frac{a_n}{b + a_n} \Rightarrow x = \frac{x}{b + x} \Rightarrow x(b + x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 - b < 0 \end{cases}$$

Επειδή όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και η ακολουθία συγκλίνει δεν είναι δυνατόν να συγκλίνει σε αρνητικό αριθμό. Άρα συγκλίνει στο 0, δηλ. $\lim a_n = 0$.

Άσκηση 7.21. Δίνεται η ακολουθία (a_n), με $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Να δειχθεί ότι η (a_n) συγκλίνει με $\lim a_n = 3$.

Λύση: *Θα δείξουμε επαγωγικά ότι η ακολουθία* (a_n) *είναι άνω φραγμένη με ένα άνω φράγμα το 3, δηλ.* $a_n < 3$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.
- *Ισχύει για* $n = 1$ *αφού* $a_1 = 2 < 3$.
- *Υποθέτουμε ότι ισχύει* $n = k$, *δηλ.* $a_k < 3$.
- *Με βάση τα προηγούμενα θα δείξουμε ότι ισχύει για* $n = k+1$, *δηλ.* $a_{k+1} < 3$.

$$a_k < 3 \Rightarrow a_k + 6 < 9 \Rightarrow \sqrt{a_k + 6} < 3 \Rightarrow a_{k+1} < 3$$

Άρα $a_n < 3$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Επιπλέον η* (a_n) *είναι γνήσια αύξουσα (επαγωγικά)*
- *Ισχύει για* $n = 1$ *αφού* $a_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 2 = a_1$
- *Υποθέτουμε ότι ισχύει* $n = k$, *δηλ.* $a_{k+1} > a_k$.
- *Με βάση τα προηγούμενα θα δείξουμε ότι ισχύει για* $n = k+1$, *δηλ.* $a_{k+2} > a_{k+1}$.

$$a_{k+1} > a_k \Rightarrow 6 + a_{k+1} > 6 + a_k \Rightarrow \sqrt{6 + a_{k+1}} > \sqrt{6 + a_k} \Rightarrow a_{k+2} > a_{k+1}$$

Αφού η a_n *μονότονη (γνήσια αύξουσα) και φραγμένη* $(a_1 = 2 < a_n < 3)$, *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *τότε συγκλίνει. Και μάλιστα συγκλίνει στο ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου* $A = \{a_n,\ n = 1, 2 \ldots\}$, $\lim a_n = \sup A = x$. *Αλλά θα πρέπει*

$$x = \sqrt{6 + x} \Rightarrow x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Επειδή το -2 *δεν είναι άνω φράγμα της* (a_n) *(μάλιστα όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί μεγαλύτεροι του 2), τότε* $\sup A = 3$ *και* $\lim a_n = 3$

Άσκηση 7.22. Να δειχθεί με τον ορισμό ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n}$ έχει όριο το $+\infty$.

Λύση: *Θα πρέπει να δείξουμε ότι* $\forall\, M > 0 \quad \exists\, n_0(M) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0(M) \quad \Rightarrow \quad a_n > M$. *Έχουμε*

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{2n} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} > M \Leftrightarrow n > 2M$$

Άρα να πάρουμε $n_0(M) = [2M] + 1$ *έχουμε το ζητούμενο.*

Άσκηση 7.23. Αν μια ακολουθία a_n είναι αύξουσα να δειχθεί ότι θα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ή θα αποκλίνει στο $+\infty$. Με βάση αυτή την πρόταση να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ έχει $\lim a_n = +\infty$. [3]

Λύση: *Έστω ακολουθία* $(a_n) \uparrow$ *αύξουσα. Η* (a_n) *θα είναι φραγμένη ή δεν θα είναι φραγμένη. Αν είναι φραγμένη, τότε θα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, αν δεν είναι φραγμένη, τότε θα αποκλίνει στο* $+\infty$.

Η $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ *είναι* $\updownarrow$ *γιατί*

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} > 0\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

[3] Η ακολουθία a_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της αρμονικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$. Όπως θα δούμε στις σειρές πραγματικών αριθμών, η άσκηση αυτή δείχνει ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει.

όμως δεν είναι φραγμένη. Πράγματι, λαμβάνουμε την υπακολοθία $a_{2^n} = a_{2^n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$, *κι έχουμε*

$$\left.\begin{array}{ll} 1+\frac{1}{2} & > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4} & > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} & > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\ \vdots & \\ \frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n} & > \frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \quad a_{2^n} > \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2}}_{n \text{ φορές}} = \frac{n}{2} \qquad (*)$$

οπότε $a_{2^n} > \frac{n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Ας υποθέσουμε τώρα ότι η* a_{2^n} *είναι άνω φραγμένη. Τότε υπάρχει πραγματικός* φ, *τέτοιος που* $a_{2^n} \le \varphi$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Όμως από την* $(*)$ *θα πρέπει* $\frac{n}{2} < a_{2^n} \le \varphi \Rightarrow n < 2\varphi$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Άτοπο, γιατί το* $\mathbb{N}$ *δεν είναι φραγμένο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *(Αρχιμήδεια ιδιότητα των φυσικών). Συνεπώς, η* a_{2^n} *δεν είναι άνω φραγμένη κι έτσι ούτε η* a_n *είναι άνω φραγμένη. Οπότε* $\lim a_n = +\infty$.

Άσκηση 7.24. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει το όριο (πραγματικός αριθμός ή $\pm\infty$), για την ακολουθία $a_n = \dfrac{1-(-1)^n n^2}{n+2}$.

Λύση: Διαμερίζουμε την ακολουθία a_n *στις υπακολουθίες* a_{2n} *και* a_{2n-1}, *κι έχουμε*

$$a_{2n} = \frac{1-(-1)^{2n}(2n)^2}{2n+2} = \frac{1-4\,n^2}{2n+2} = \frac{n^2(\frac{1}{n^2}-4)}{2n(1+\frac{1}{n})} = \frac{n}{2}\,\frac{\frac{1}{n^2}-4}{1+\frac{1}{n}}$$

οπότε

$$\lim a_n = \lim \frac{n}{2} \cdot \lim \frac{\frac{1}{n^2}-4}{1+\frac{1}{n}} = +\infty \cdot (-4) = -\infty$$

Από την άλλη

$$a_{2n-1} = \frac{1-(-1)^{2n-1}(2n-1)^2}{2n-1+2} = \frac{1+4n^2-4n+1}{2n+1} = \frac{n^2(\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n}+4)}{n(2+\frac{1}{n})} = n \cdot \frac{\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n}+4}{2+\frac{1}{n}}$$

οπότε

$$\lim a_{2n-1} = \lim n \cdot \lim \frac{\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n}+4}{2+\frac{1}{n}} = +\infty \cdot 2 = +\infty$$

Αφού $\lim a_{2n} \ne \lim a_{2n-1}$, *το όριο της* a_n *δεν υπάρχει.*

Άσκηση 7.25. Δείξτε ότι $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.

Λύση: $\forall\, k = 1, 2, \ldots n$ *έχουμε ότι* $(k-1)(n-k) \ge 0 \Rightarrow kn^2 - k^2 - n + k \ge 0 \Rightarrow (n-k+1)\,k \ge n$. *Έτσι, στην τελευταία ανισότητα, καθώς το* k *διατρέχει τους φυσικούς από* 1 *μέχρι* n, *παίρνουμε*

$$\left.\begin{array}{ll} n\cdot 1 & \ge n \\ (n-1)\cdot 2 & \ge n \\ (n-2)\cdot 3 & \ge n \\ & \vdots \\ 2\cdot(n-1) & \ge n \\ 1\cdot n & \ge n \end{array}\right\} \overset{(\times)}{\Rightarrow} \quad (n!)^2 \ge n^n \quad \Rightarrow \quad (n!) \ge n^{n/2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{n!} \ge n^{1/2} = \sqrt{n}$$

Επομένως, $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$ *και γνωρίζουμε ότι* $\sqrt{n} \to +\infty$. *Συνεπώς, από την 2.α. ιδιότητα των αποκλινουσών ακολουθιών, συμπεραίνουμε ότι* $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$

Άσκηση 7.26. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_n = \dfrac{n^2 x^2 + n}{n^2 x + x^2 + 1}$ $n \in \mathbb{N}$. Να βρεθεί το $\lim a_n$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του x.

Λύση: Έχουμε

$$\frac{n^2 x^2 + n}{n^2 x + x^2 + 1} = \frac{n^2(x^2 + \frac{1}{n})}{n^2(x + \frac{x^2+1}{n^2})} = \frac{x^2 + \frac{1}{n}}{x + \frac{x^2+1}{n^2}}$$

Αν $x \neq 0$, *τότε*

$$\lim a_n = \lim \frac{x^2 + \frac{1}{n}}{x + \frac{x^2+1}{n^2}} = \frac{\lim(x^2 + \frac{1}{n})}{\lim(x + \frac{x^2+1}{n^2})} = \frac{x^2}{x} = x$$

Αν $x = 0$, *τότε*

$$\lim a_n = \lim \frac{n}{1} = +\infty$$

Άσκηση 7.27. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_n = \dfrac{x^n}{(n+1)(n+2)}$ $n \in \mathbb{N}$. Να μελετηθεί η a_n ως προς την σύγκλιση (απόκλιση) για τις διάφορες τιμές του πραγματικού x.

Λύση:
1) Αν $|x| < 1$, *τότε* $x^n \to 0$ *κι έτσι*

$$\lim a_n = \lim x^n \, \lim \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0 \cdot 0 = 0.$$

2) Αν $x = 1$, *τότε* $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \lim a_n = 0$.

3) Αν $x = -1$, *τότε* $a_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \lim a_n = 0$.

4) Αν $x > 1$, *τότε η* $b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{(n+1)(n+2)}{x^n}$ *έχει όλους τους όρους θετικούς και χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου έχουμε*

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{(n+2)(n+3)}{x^{n+1}}}{\frac{(n+1)(n+2)}{x^n}} = \frac{x^n(n+1)(n+2)}{x^{n+1}(n+2)(n+3)} = \frac{1}{x}\frac{n+1}{n+3} \Rightarrow \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{x} \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = \frac{1}{x} < 1$$

συνεπώς $b_n \to 0$ *ή αλλιώς* $\dfrac{1}{a_n} \to 0$, *οπότε* $a_n \to +\infty$.

5) Αν $x < -1$, *θεωρούμε τις υπακολουθίες* a_n, a_{2n-1}. *Τότε* $x^{2n} = (-x)^{2n}$ *κι αφού* $x < -1$, *τότε* $-x > 1$ *και από την προηγούμενη περίπτωση 4) έχουμε ότι* $a_{2n} \to +\infty$. *Από την άλλη*

$$a_{2n-1} = \frac{x^{2n-1}}{2n(2n+1)} = \frac{1}{x}\frac{x^{2n}}{2n(2n+1)} \Rightarrow \lim a_{2n-1} = \frac{1}{x} \lim \frac{(-x)^{2n}}{2n(2n+1)} = \frac{1}{x}(+\infty) = -\infty$$

αφού $x < -1 < 0$ *και* $-x > 1$. *Συνεπώς,* $\lim a_{2n} = +\infty \neq -\infty = \lim a_{2n-1}$, *και το* $\lim a_n$ *δεν υπάρχει.*