Άσκηση 1

Να βρεθεί η σειρά Fourier που παριστάνει την λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών συνοριακών τιμών

$$u_t = u_{xx} \quad 0<x<1, \qquad u(x,0)=\begin{cases} 2x^2 & 0\le x\le 1/2 \\ 2(x-1)^2 & 1/2\le x\le 1 \end{cases}$$

$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0$.

Ποια είναι η θερμοκρασία που ισορροπεί για $t\to\infty$ η ράβδος?

Λύση

Και οι δυο συν. συνθήκες στα άκρα $x=0$, $x=1$ είναι τύπου Neumann (η ράβδος είναι μονωμένη στα άκρα).

Επιπλέον ικανοποιούνται οι συνθήκες συμβατότητας των αρχικών-συνοριακών τιμών στα άκρα για $t=0$

$$u_x(x,0)\big|_{x=0} = 0 = u_x(0,0), \qquad u_x(x,0)\big|_{x=1} = 0 = u_x(1,0).$$

Θεωρούμε ότι

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, v(x)$$

Εισάγοντας την μορφή αυτή στην εξίσωση της θερμότητας θα πρέπει

$$v''(x) = \lambda\, v(x) \qquad (*)$$

κι επιβάλλοντας τις συν. συνθήκες θα πρέπει

$$v'(0)=0, \quad v'(1)=0 \qquad (**)$$

Οι $(*)$, $(**)$ απαρτίζουν το πρόβλημα ιδιοτιμών.

1) $\lambda=0$ $\quad v(x)=Ax+B$

$v'(x)=B \qquad v'(0)=v'(1)=B=0$

Άρα η $\lambda=0$ είναι ιδιοτιμή με ιδιοσυνάρτηση $v_0(x)=1$.

2) $\lambda=k^2>0 \quad (k>0)$

$$v(x)=Ae^{\omega x}+Be^{-\omega x}$$

$v'(x)=A\omega e^{\omega x}-B\omega e^{-\omega x} \qquad \left.\begin{array}{l} v'(0)=0 \Rightarrow A-B=0 \\ v'(1)=0 \Rightarrow Ae^{\omega}-Be^{-\omega}=0 \end{array}\right\} \; e^{2\omega}=1 \Rightarrow \omega=0$ άτοπο! $(\omega>0)$

3) $\lambda=-k^2<0 \quad (k>0)$

$$v(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$$

$v'(x)=-A\omega\sin\omega x+B\omega\cos\omega x \qquad v'(0)=0 \Rightarrow B=0$

$v'(1)=0 \Rightarrow A\sin\omega=0 \Rightarrow \omega=n\pi$

$n=1,2,\dots$

Άρα ιδιοτιμές $\lambda_n=n\pi$, ιδιοσυν. $v_n(x)=\cos n\pi x$

Οι αντίστοιχες ιδιολύσεις είναι

$$u_n(x,t)=e^{-n^2\pi^2 t}\cos n\pi x$$

Γράφουμε την λύση σαν μια άπειρη σειρά γραμμικών συνδυασμών των ιδιολύσεων

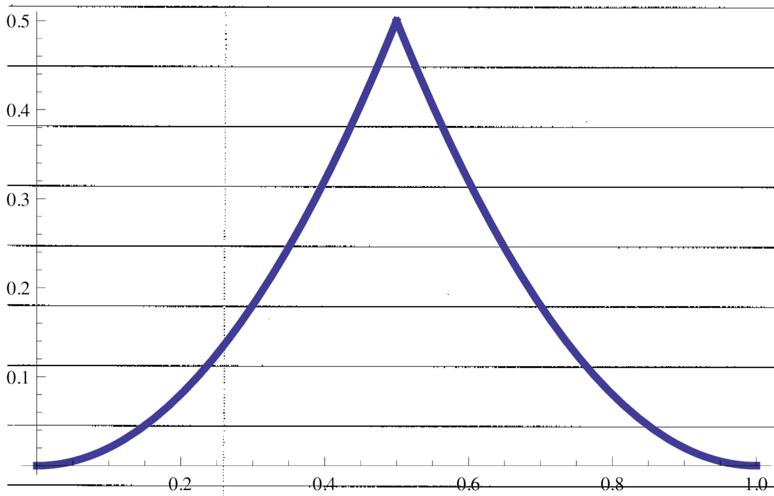
$$u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-n^2\pi^2 t}\cos n\pi x$$

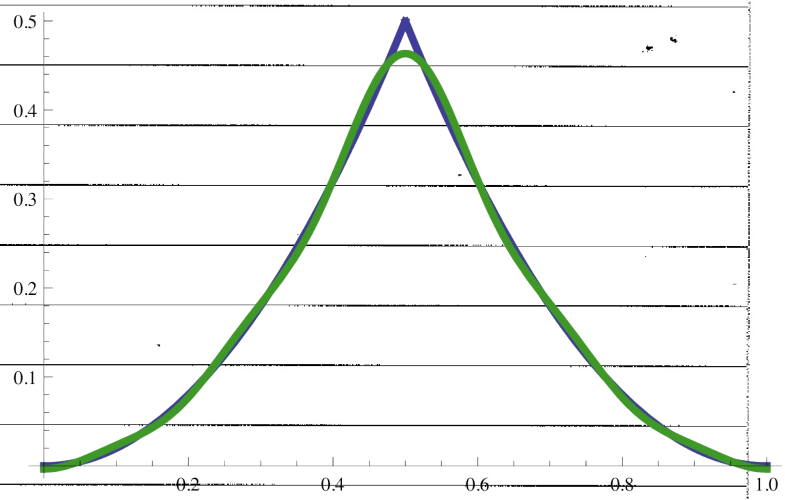
όπου τα A_n θα προσδιορισθούν από την αρχική συνθήκη:

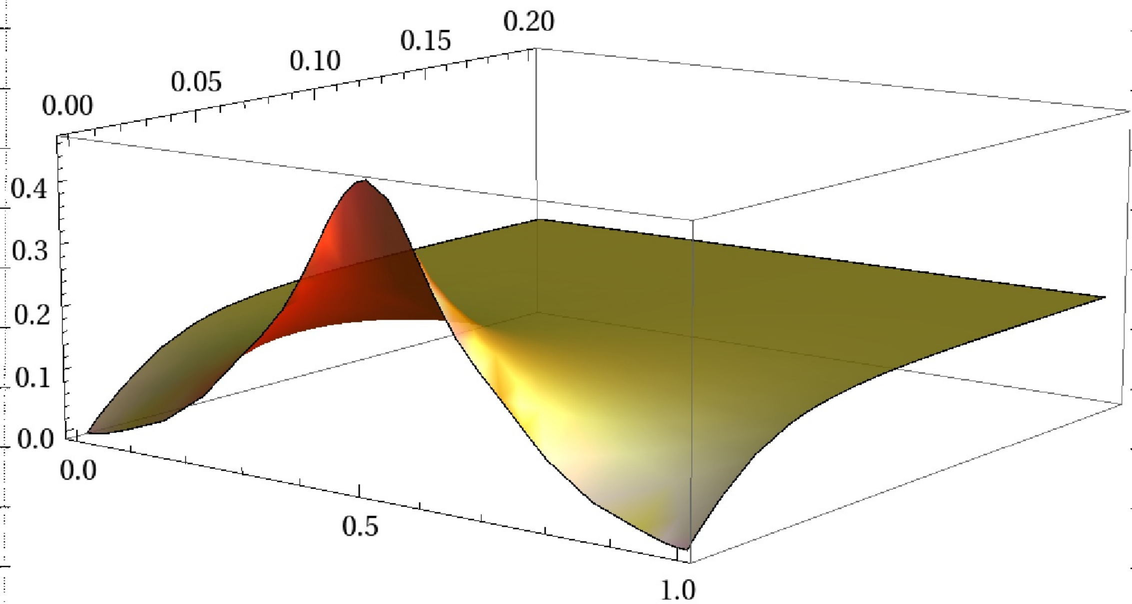
$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$$

$$A_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = 8\,\frac{\cos(n\pi/2)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} \dfrac{8(-1)^k}{k^2\pi^2} & n \text{ άρτιος} \quad k=1,2,\dots \\ 0 & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{1}{6}$$







Άσκηση 2

Να βρεθεί μια λύση με την μορφή σειράς για το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών - συνοριακών τιμών

$$u_t = u_{xx} \quad 0<x<1, \quad u(0,t)=0 \quad u_x(1,t)=0 \quad t\geq 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x & 0\leq x\leq 1/2 \\ 2(1-x)^2 & 1/2\leq x\leq 1 \end{cases}$$

Λύση

Η συνοριακή συνθήκη $u(0,t)=0$ στο άκρο $x=0$ είναι τύπου Dirichlet, ενώ η $u_x(1,t)$ στο άλλο άκρο $x=1$ είναι τύπου Neumann.

Θεωρούμε ότι η εξίσωση της θερμότητας έχει λύσεις χωριζομένων μεταβλητών

$$u(x,t) = e^{\lambda t} v(x)$$

οπότε θα πρέπει

$$v''(x) = \lambda v(x)$$

και $\quad u(0,t) = e^{\lambda t} v(0) = 0 \Rightarrow \quad v(0)=0$

$\quad u_x(0,t) = e^{\lambda t} v'(1) = 0 \Rightarrow \quad v'(1)=0.$

οπότε έχουμε το εξής πρόβλημα ιδιοτιμών

$$v''(x) - \lambda v(x) = 0 \quad , \quad v(0)=0, \quad v'(1)=0.$$

1) $\underline{\lambda=0}$ οπότε $\quad v''(x)=0 \Rightarrow \quad v(x) = Ax+B$

Εφαρμόζουμε τις συν. συνθήκες κι έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} v(0) = A\cdot 0 + B = 0 \Rightarrow B=0 \\ v'(x)\big|_{x=0} = A = 0 \Rightarrow A=0 \end{array}\right\}$$ οπότε δεν υπάρχει μη τετριμμένη λύση στην περίπτωση αυτή.

2) $\lambda = \omega^2 > 0$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας $\omega > 0$). Τότε

$$v(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$$

$$\left.\begin{array}{l} v(0) = A + B = 0 \\ v'(x)\Big|_{x=1} = \omega A e^{\omega x} - \omega B e^{-\omega x}\Big|_{x=1} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A + B = 0 \\ e^{\omega} A - e^{-\omega} B = 0. \end{array}$$

Το παραπάνω ομογ. γραμμικό σύστημα ως προς A, B για να έχει λύση διαφορετική από την $A = B = 0$ θα πρέπει και αρκεί

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega} & -e^{-\omega} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -e^{-\omega} - e^{\omega} = 0 \Rightarrow e^{\omega} = -e^{-\omega} \Rightarrow e^{2\omega} = -1 \quad \text{Άτοπο!!}$$

Άρα έχει μόνο την τετριμμένη λύση $A = B = 0$, οπότε κι αυτή η περίπτωση δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις.

3) $\lambda = -\omega^2 < 0$ $(\omega > 0)$. Τότε

$$v(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

$$\left.\begin{array}{l} v(0) = A = 0 \\ v'(x)\Big|_{x=1} = -\omega A\sin\omega x + \omega B\cos\omega x\Big|_{x=1} = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B\cos\omega = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 0 \\ \cos\omega = 0 \end{array}$$

γιατί $B \neq 0$, αλλιώς θα έχουμε μόνο την τετριμμένη λύση πάλι.
Οπότε

$$\omega = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

Δηλαδή έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_n = -\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2$ με αντίστοιχες

ιδιοσυναρτήσεις $\quad v_n(x) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)x\right),\ n = 0, 1, 2, \ldots$

Οι ιδιολύσεις είναι

$$u_n(x,t) = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2 t} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x\right) \qquad n=0,1,2,\dots$$

Οπότε αναζητούμε την λύση σαν μια άπειρη σειρά γραμμ. συνδυασμών των ιδιολύσεων

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x \qquad n=0,1,2,\dots$$

όπου τα B_n θα καθοριστούν από την αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1/2 \\ 2(1-x)^2 & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} = f(x)$$

Παρατηρούμε ότι οι αρχικές συνοριακές συνθήκες είναι συμβατές γιατί

$$u(0,0) = 0 \quad \text{και} \quad u_x(x,0)\Big|_{x=1} = 0 = u_x(1,0)$$

Επιβάλλοντας την αρχική συνθήκη έχουμε

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x = f(x)$$

πολλαπλ. με $\sin\left(\frac{\pi}{2}+m\pi\right)x$ κι ολοκλ. από 0, 1 κι έχουμε

$$B_n = 2\int_0^1 f(x) \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)x \, dx.$$

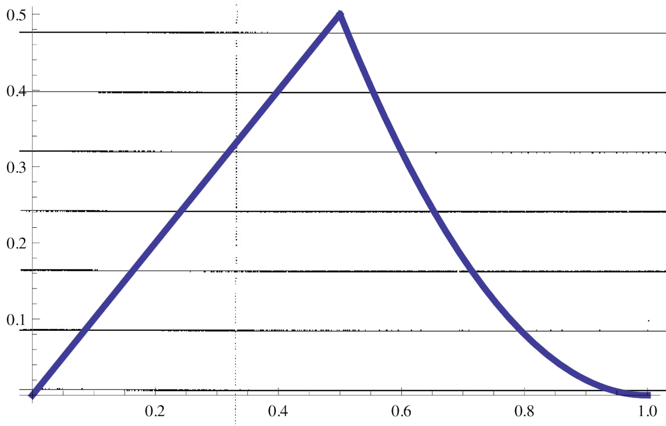
όπου έχουμε χρησιμοποιήσει της σχέσης ορθογωνιότητας

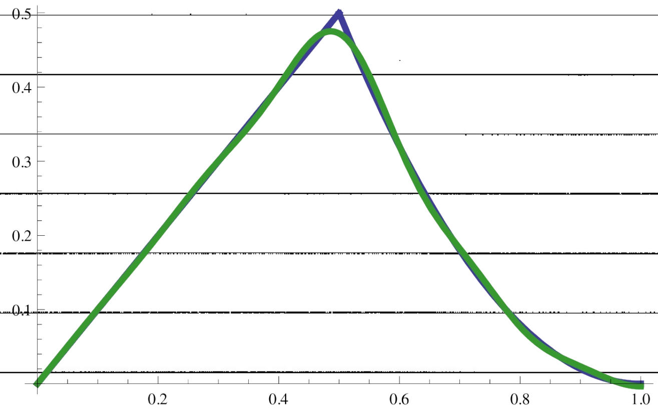
$$\int_{-1}^{1} \sin\left(m\pi x + \frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(n\pi x + \frac{\pi}{2}x\right) dx = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n \neq m. \end{cases}$$

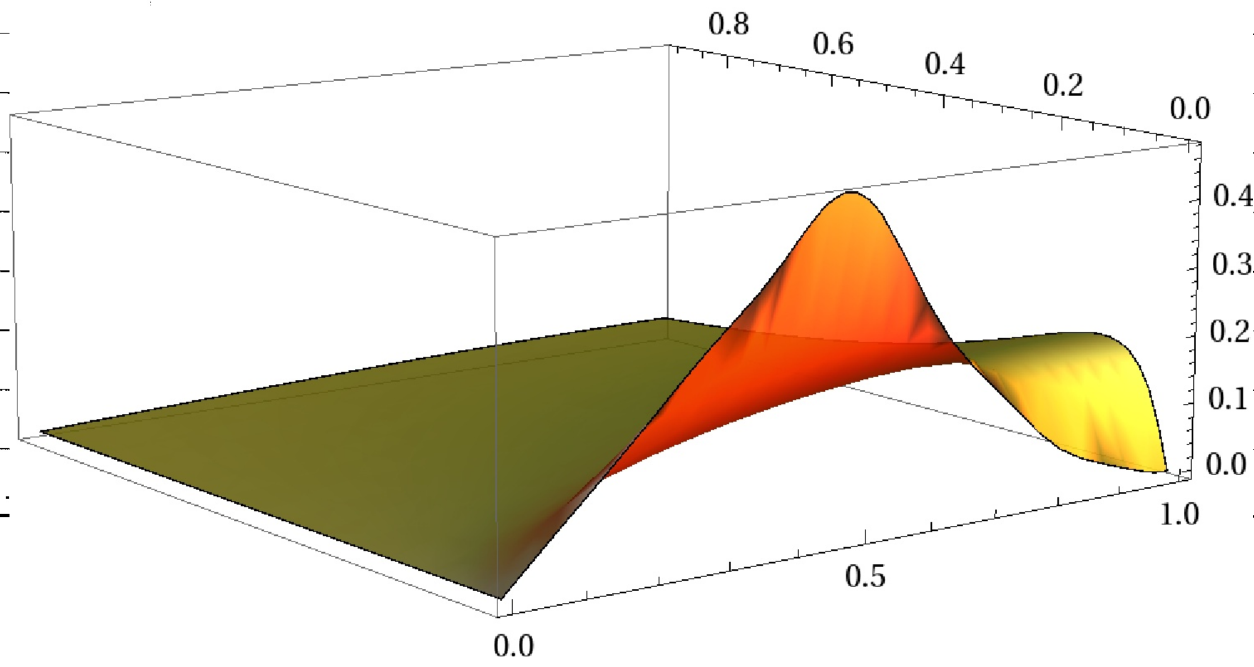
Επειδή η sin είναι περιττή θεωρούμε την περιττή επέκταση της $f(x)$ στο $[-1,0]$, $g = -f(-x)$.

$$B_n = \frac{8}{(\pi+2n\pi)^3}\left(3(2n+1)\pi \sin\left(\frac{\pi}{4}(2n+1)\right) - 8\cos\left(\frac{\pi}{4}(2n+1)\right)\right)$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.







Άσκηση 3

Να βρεθεί η λύση με τη μορφή σειρών της εξίσωσης της θερμότητας $u_t = u_{xx}$ στο $-2 < x < 2$, $t > 0$ με τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet $u(-2,t) = u(2,t) = 0$ και αρχικής συνθήκη

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Λύση

$$v''(x) = \lambda v(x) \qquad v(2) = v(-2) = 0.$$

1) $\lambda = 0$ $\quad v(x) = Ax + B$ $\quad \left.\begin{aligned} v(-2) &= -2A + B = 0 \\ v(2) &= 2A + B = 0 \end{aligned}\right\}$ $A = B = 0$

2) $\lambda = \omega^2 > 0$ $\quad (\omega > 0)$

$$v(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x} \qquad \left.\begin{aligned} v(-2) &= Ae^{-2\omega} + Be^{2\omega} = 0 \\ v(2) &= Ae^{2\omega} + Be^{-2\omega} = 0 \end{aligned}\right\} \underline{A = B = 0}$$

3) $\lambda = -\omega^2 < 0$ $\quad (\omega > 0)$

$$v(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

$$\left.\begin{aligned} v(-2) &= A\cos 2\omega - B\sin 2\omega = 0 \\ v(2) &= A\cos 2\omega + B\sin 2\omega = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} \cos 2\omega & -\sin 2\omega \\ \cos 2\omega & \sin 2\omega \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2\cos 2\omega \sin 2\omega = \sin 4\omega = 0 \Rightarrow$$

$$4\omega = k\pi \Rightarrow \omega = \frac{k\pi}{4} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

α) $\kappa = 2n$ άρτιος $n = 1, 2, \ldots$

$$A\cos \frac{\cancel{2}\cdot 2n\pi}{4} - B \sin \frac{\cancel{2}\,2n\pi}{4} = 0 \Rightarrow A = 0$$

άρα έχουμε ιδιοτιμές

$\lambda_n = \frac{n\pi}{2}$ με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $v_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{2}$

β) $\kappa = 2n-1$ περιττός $n = 1, 2, \ldots$

$$A\cos\left[2\frac{(2n-1)\pi}{4}\right] - B\sin\left[2\frac{(2n-1)\pi}{4}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$A\cos(n\pi - \pi/2) - B\sin(n\pi - \pi/2) = 0 \Rightarrow$$

$$B\cos n\pi + A\cancel{\sin n\pi}^{0} = 0 \Rightarrow B = 0.$$

άρα έχουμε ιδιοτιμές

$\lambda_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $v_n(x) = \cos\left[\frac{n\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}x\right]$

Οπότε οι ιδιολύσεις μας δίνουν την μορφή της λύσης μας

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)^2 t}\cos\left(\frac{n\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) + B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{4}t}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$$

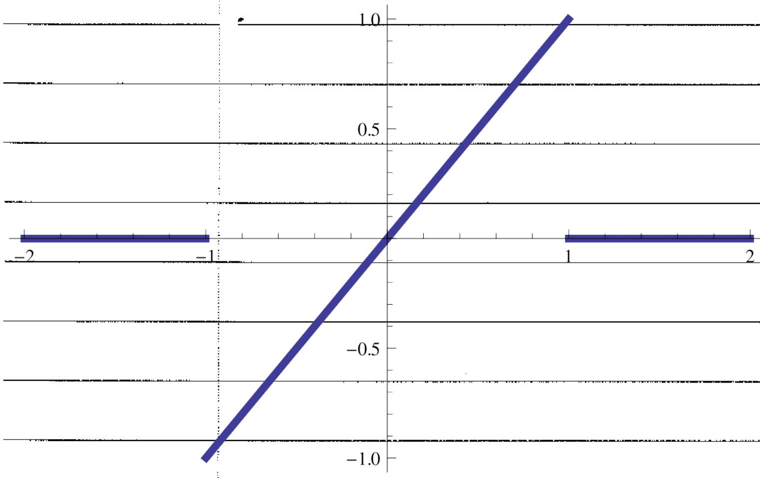
όπου τα A_n, B_n θα προσδιορισθούν από την αρχική συνθήκη.

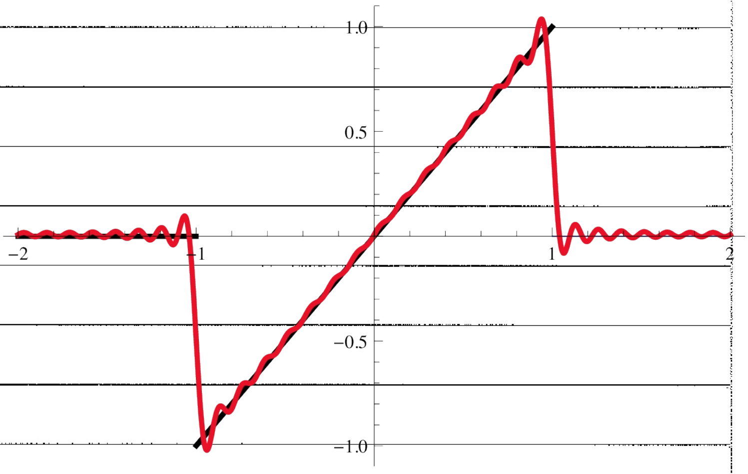
$$u(x,0) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$ που είναι περιττή στο $[-2, 2]$.

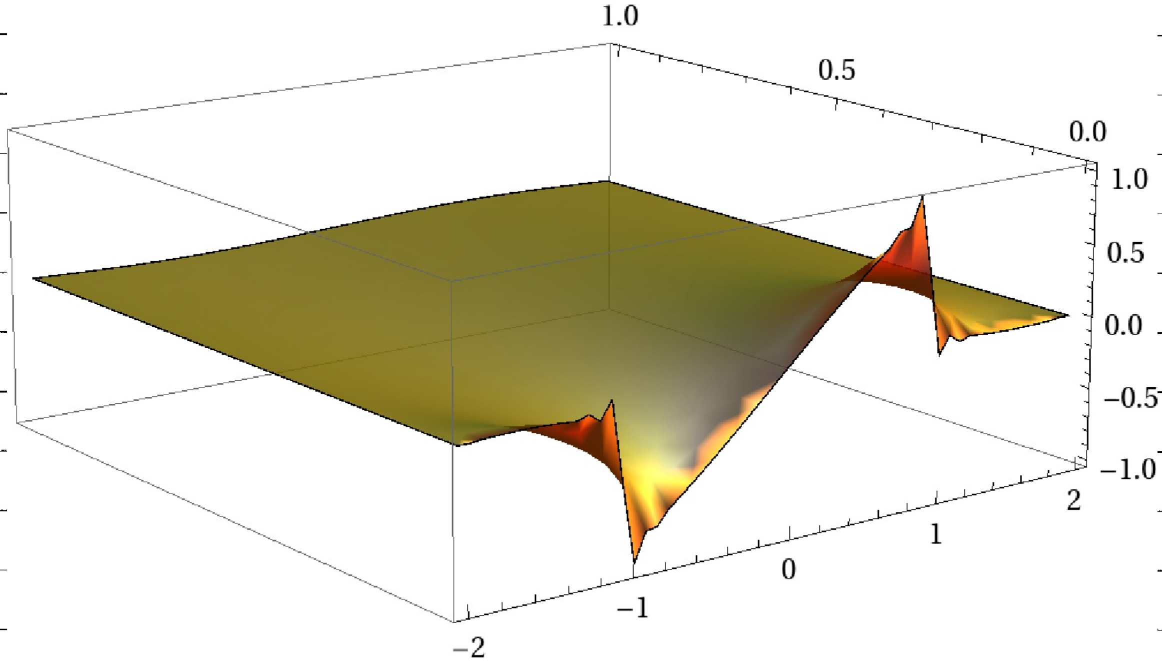
©NEXT

Αφού η $u(x,0)$ περιττή $A_n=0$, και

$$B_n=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=-\frac{2}{n^2\pi^2}\left(n\pi\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$







Άσκηση 4

a) Να δειχθεί ότι η χρονική παράγωγος $v = u_t$ κάθε λύσης της εξίσωσης της θερμότητας είναι επίσης λύση της ίδιας εξίσωσης.

b) Αν η $u(x,t)$ ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $u(X,0) = f(x)$ ποια αρχική δοσμένα κληρονομεί η $v(x,t)$;

Λύση

a) Αφού η $u(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση της θερμότητας έχουμε ότι

$$u_t = u_{xx} \Rightarrow \partial_t u_t = \partial_t u_{xx} \Rightarrow u_{tt} = u_{xxt} \Rightarrow$$
$$\partial_t (u_t) = \partial_{xx} (u_t) \Rightarrow v_t = v_{xx} \quad \text{αφού} \quad v = u_t.$$

Συνεπώς η v ικανοποιεί κι αυτή την εξίσωση της θερμότητας.

b) Έστω ότι $v = u_t(x,t)$ και $u(x,0) = f(x)$
Αφού η $u(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση της θερμότητας τότε

$$v(x,t) = u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \text{και}$$

$$v(x,0) = u_{xx}(x,0) = f''(x)$$

Άρα τη αρχική δοσμένη που κληρονομεί η $v(x,t)$ από την $u(x,t)$ με $u(x,0) = f(x)$ είναι

$$v(x,0) = f''(x).$$

©NEXT