Ασκήσεις 8/12/2015

Άσκηση 1 (κυματική - σειρές Fourier)

Να γραφεί η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών στη μορφή μιας σειράς Fourier

$$u_{tt}=u_{xx}, \quad 0<x<\pi, \quad u(0,t)=u(\pi,t)=0,$$

$$u(x,0)=\sin^3 x, \quad u_t(x,0)=0.$$

Λύση

Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η λύση με την μορφή μιας σειράς Fourier του παραπάνω προβλήματος με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet είναι

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos nt \sin nx + B_n \sin nt \sin nx\right)$$

όπου τα A_n, B_n προσδιορίζονται από τις σχέσεις

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad B_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx\, dx$$

όπου $f(x)=\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$, $g(x)=0$. άρα $\underline{\underline{B_n=0}}$

Παρατηρούμε ότι

$$u(x,0)=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx$$

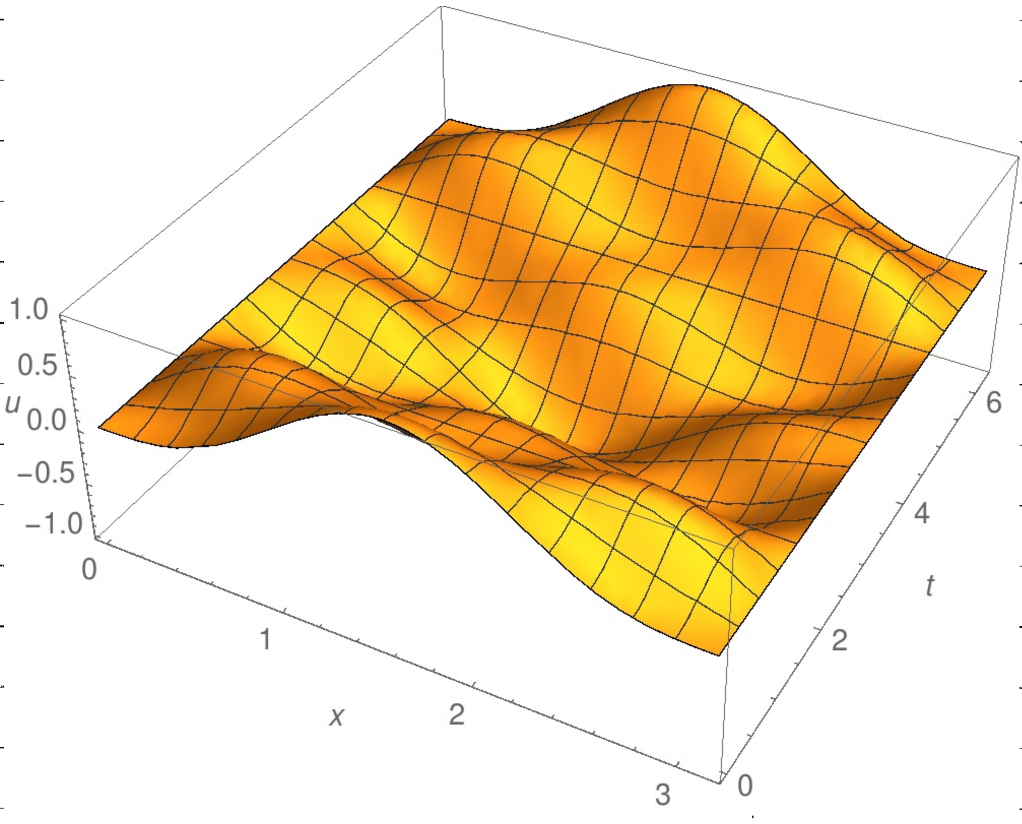
$$=\left(A_1\sin x+A_2\sin 2x+A_3\sin 3x+\dots\right)$$

άρα $A_1=\frac{3}{4}$, $A_3=-\frac{1}{4}$ και $A_n=0$ $\forall n$, $n\neq 1,3$

Άρα

$$u(x,t) = \frac{3}{4}\cos t \sin x - \frac{1}{4}\cos 3t \sin 3x$$

είναι η λύση του πρ. συνορ-αρχικών τιμών στη μορφή μιας σειράς Fourier.



MΔE

Ασκήσεις στον χωρισμό των μεταβλητών - Σειρές Fourier

Άσκηση 2 (κυματική εξίσωση).

Να δοθεί η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών στην μορφή μιας σειράς Fourier:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \qquad 0<x<\pi, \; t>0$$

$$u_x(0,t)=0, \quad u(\pi,t)=0, \quad t\geq 0$$

$$u(x,0)=x^2(x-\pi), \quad u_t(x,0)=0, \quad 0\leq x\leq \pi.$$

Λύση

Η συνοριακή συνθήκη στο άκρο $x=0$ είναι τύπου Neumann ενώ στο $x=\pi$ είναι τύπου Dirichlet.

Θεωρούμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης της μορφής των χωριζομένων μεταβλητών

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

Εισάγοντας στην κυμ. εξίσωση, όπως έχουμε δει η ΜΔΕ "σπάει" στις δυο ΣΔΕ.

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T''(t) - \lambda T(t) = 0,$$

όπου λ παράμετρος.

Οι συνοριακές συνθήκες μας δίνουν ότι

$$X'(0)=0, \qquad X(\pi)=0.$$

οπότε έχουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad X'(0)=X(\pi)=0.$$

1) $\lambda=0$

$X(x) = Ax+B,$

$X'(x) = A$, $\quad X'(0) = A = 0$, $X(\pi) = B = 0$ $\Big\}$ άρα δεν υπάρχουν ιδιοτιμές σε αυτή την περίπτωση που να οδηγούν σε μη-τετριμμένη λύση.

2) $\lambda = \omega^2 \quad (\omega > 0)$

$$X(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$$
$$X'(x) = \omega A e^{\omega x} - \omega B e^{-\omega x}$$

$X'(0) = \omega A - \omega B = 0 \Rightarrow A = B$ (αφού $\omega > 0$).

$X(\pi) = Ae^{\omega\pi} + Be^{-\omega\pi} = 0 \Rightarrow A(e^{\omega\pi} + e^{-\omega\pi}) = 0 \Rightarrow A = 0$.

Άρα ούτε σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν ιδιοτιμές που να οδηγούν σε μη-τετριμμένη λύση.

3) $\lambda = -\omega^2 \quad (\omega > 0)$.

$$X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

$$X'(x) = -\omega A \sin\omega x + \omega B\cos\omega x$$

$X'(0) = \omega B = 0 \Rightarrow \underline{B = 0}$.

$X(\pi) = A\cos\omega\pi = 0 \Rightarrow \cos\omega\pi = 0$ (αφού η περίπτωση $A=0$ μας οδηγεί στην τετριμμένη λύση).

άρα $\omega\pi = k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = k - \frac{1}{2} \quad k = 1, 2, \ldots$

Συνεπώς έχουμε τις ιδιοτιμές

$$\lambda_k = -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2$$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$X_k(x) = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x$$

Από την άλλη, αφού $\lambda_k = -\left(k-\frac{1}{2}\right)^2$, η $T''(t) - \lambda T(t) = 0$ μας δίνει ότι

$$T_k(t) = A_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)t + B_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t$$

και συνολικά οι ιδιολύσεις του ΠΑΣΤ είναι:

$$u_k(x,t) = A_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)t \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x + B_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x$$

Γράφουμε την λύση του ΠΑΣΤ σαν μια άπειρη σειρά των παραπάνω ιδιολύσεων:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)t \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x + B_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$$

όπου τα A_k, B_k υποθέτουμε ότι θα τα βρούμε από τις αρχικές συνθήκες. Έχουμε

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x = f(x) = x^2(x-\pi). \qquad (*)$$

και

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(k-\frac{1}{2}\right) B_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x = g(x) = 0. \qquad (**)$$

Οι σειρές $(*)$, $(**)$ δεν είναι στην μορφή σειράς Fourier όμως χρησιμοποιώντας κατάλληλες σχέσεις ορθογωνιότητας θα γράψουμε την λύση του ΠΑΣΤ στην μορφή μιας τέτοιας λίγο διαφορετικής σειράς.

Πολλ. την (*) με $\cos(n-\frac{1}{2})x$ και ολοκληρώνοντας στο $[-\pi,\pi]$ παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-\tfrac{1}{2})x \cdot \cos(k-\tfrac{1}{2})x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n-\tfrac{1}{2})x \, dx \quad (***)$$

Ισχύουν οι συνθήκες ορθογωνιότητας

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-\tfrac{1}{2})x \cos(k-\tfrac{1}{2})x \, dx = \begin{cases} 0 , & n \neq k \quad n,k \text{ θετ. ακέραιοι} \\ \pi , & n = k \end{cases}$$

Άρα το αριστερό μέλος της (***) είναι μη-μηδενικό μόνο όταν $k=n$ και είναι πA_n. Άρα η (***) γίνεται

$$\pi A_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(n-\tfrac{1}{2}) x \, dx \quad (****)$$

Η $\cos x$ είναι άρτια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[-\pi,\pi]$, συνεπώς θεωρούμε την άρτια επέκταση $\bar{f}(x)$ της $f(x)$ στο $[-\pi,0]$, δηλαδή

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} x^2(x-\pi) , & x \in [0,\pi] \\ -x^2(x+\pi) , & x \in [-\pi,0] \end{cases}$$

με $\bar{f}(x) = f(x)$ στο $[0,\pi]$, $\bar{f}(x) = f(-x)$ στο $[-\pi,0]$

Η (****) γίνεται

$$\pi A_n = 2 \int_0^{\pi} x^2(x-\pi) \cos(n-\tfrac{1}{2}) x \, dx \Rightarrow$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{32\,(3+(-1)^n(-1+2n)\pi)}{(1-2n)^4} \right) . \quad n = 1,2,\ldots$$

©NEXT

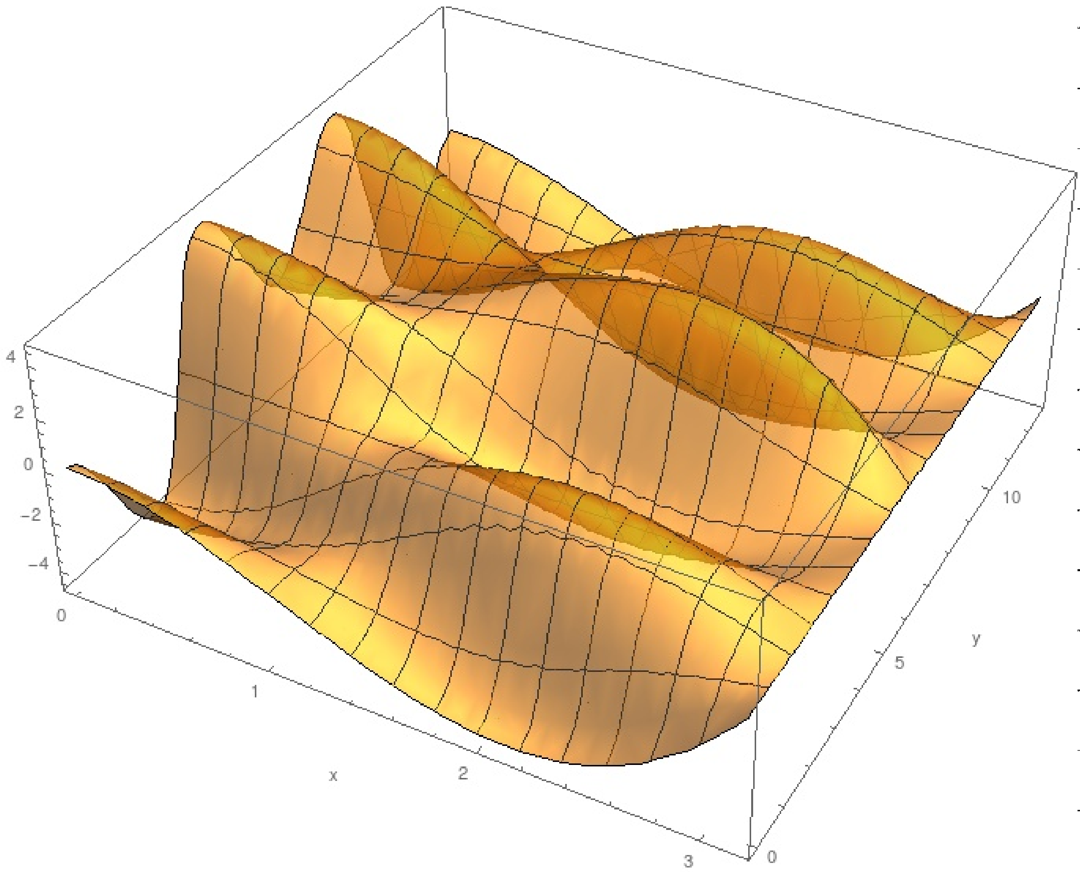
Επιστρέφοντας στην σχέση (**), και με βάση την προηγούμενη επιχειρηματολογία, έχουμε ότι

$$\left(n-\frac{1}{2}\right) B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 0 \cdot \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x \, dx = 0 \Rightarrow B_n = 0, \quad n=1,2,\ldots$$

οπότε η λύση του ΠΑΣΤ με την μορφή μιας σειράς Fourier είναι η

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)t \, \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x$$

$$A_n = \frac{64\left(3+(-1)^n(2n-1)\pi\right)}{(2n-1)^4\,\pi} \qquad n=1,2,3\ldots$$



Άσκηση 3

Να δοθεί η λύση του ΠΑΣΤ με την μορφή μιας σειράς Fourier

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0 \qquad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = x^2(x-\pi) \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Μέχρι ποιά τάξη ισχύουν οι συνθήκες συμβατότητας των αρχικών συνοριακών τιμών;

Λύση

Ακολουθώντας τα βήματα της προηγούμενης άσκησης (τα οποία να επαναληφθούν) βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_k = -\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

και οι ιδιοσυναρτήσεις

$$X_k(x) = \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Οπότε οι ιδιολύσεις είναι

$$u_k(x,t) = A_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)t \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x + B_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x.$$

Οπότε γράφουμε την λύση του ΠΑΣΤ σαν μια άπειρη σειρά γραμμικών συνδυασμών των ιδιολύσεων:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos\left(k-\frac{1}{2}\right)t \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x + B_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right]$$

όπου τα A_k, B_k θα προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες.

$$u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x = f(x)=0$$

και

$$u_t(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k\left(k-\frac{1}{2}\right)\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x = g(x)=x^2(x-\pi).$$

Με παρόμοια επιχειρήματα όπως στην προηγούμενη άσκηση $A_n=0$,

$$B_n=\frac{2}{\pi(n-1/2)}\int_0^{\pi} x^2(x-\pi)\sin(n-1/2)x\,dx \qquad (*)$$

$n=1,2,3,\ldots$

όπου χρησιμοποιούμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\,\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\,dx = \begin{cases} 0, & n\neq k,\ n,k \text{ θετικ.} \\ \pi, & n=k \end{cases}$$

και θεωρούμε αυτή τη φορά την περιττή επέκταση της $g(x)$ στο $[-\pi,0]$, αφού η συνάρτηση $\sin x$ είναι περιττή συνάρτηση.

Εκτελώντας την ολοκλήρωση στην $(*)$ παίρνουμε

$$B_k=-\frac{16\left(-24(-1)^n+(4-8n)\pi+(-1)^n(1-2n)^2\pi^2\right)}{(2n-1)^5\,\pi}$$

οπότε

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t\,\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x$$

Για τις συνθήκες συμβατότητας των αρχικών συνοριακών τιμών θα πρέπει

α) $u(0,t)\big|_{t=0} = u(x,0)\big|_{x=0}$ που ισχύει αφού $(0=0)$

β) $u_x(x,0)\big|_{x=\pi} = u_x(\pi,t)\big|_{t=0}$ που ισχύει $(0=0)$

$u_t(0,t)\big|_{t=0} = u_t(x,0)\big|_{x=0}$ που ισχύει $(0=0)$.

γ) Παρατηρούμε ότι

$$u_{xt}(\pi,t)=0 \qquad (**)$$

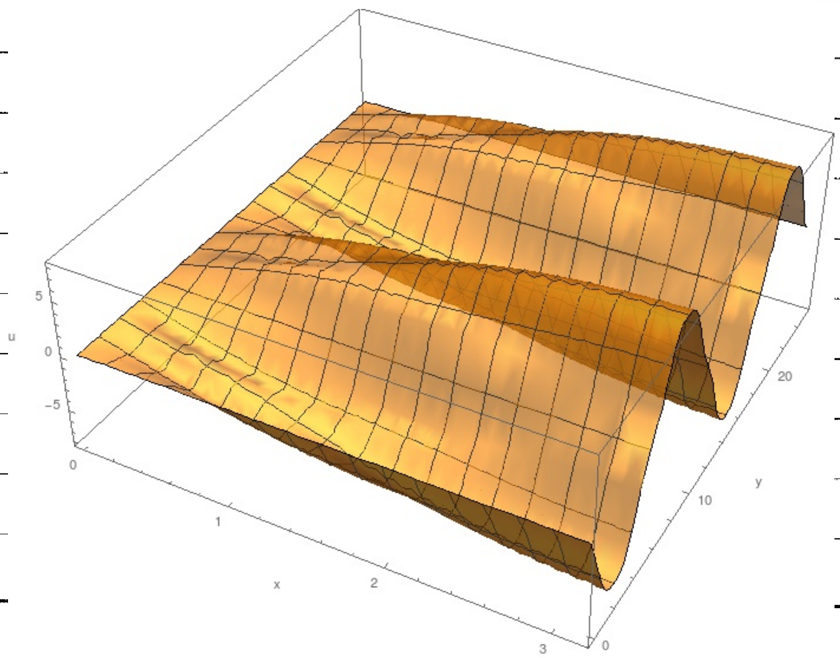
και

$$u_{tx}(x,0) = 2x(x-\pi)+x^2 \qquad (***)$$

υπολογίζοντας την $**$ στο $t=0$ και την $(***)$ στο $x=\pi$ έχουμε ότι

$$u_{xt}(\pi,0)=0 \neq \pi^2 = u_{tx}(\pi,0).$$

άρα οι συνθήκες συμβατότητας των αρχ. συν. συνθηκών ισχύουν μέχρι πρώτης τάξης παραγώγους.



©NEXT