Ασκήσεις 7/11/2012.

Άσκηση 1

Μπορεί η εξίσωση $x^3-12x=c$ να έχει δύο διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $[-2,2]$; Στο $(-\infty,-2]$; Στο $[2,+\infty)$;

Λύση

Έστω ότι η $f(x)=x^3-12x-c$ έχει 2 ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$ στο διάστημα $[-2,2]$ δηλαδή

$$-2\le \rho_1<\rho_2\le 2$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) και $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$ από το Θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τ.ω.

$$f'(\xi)=0$$

Όμως

$$f'(x)=3x^2-12$$ και

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3(x^2-4)=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

Άτοπο! γιατί θα έπρεπε οι ρίζες του x^2-4 να ανήκουν στο (ρ_1,ρ_2) ανοικτό! Άρα δεν μπορεί η εξίσωση να έχει δύο διαφορετικές λύσεις στο $[-2,2]$

Ομοίως και για τα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[2,+\infty)$.

Άσκηση 2

Θεωρούμε την συνάρτηση $y = 2 - \sqrt[5]{x^2}$ και παρατηρούμε ότι έχει την ίδια τιμή 1 για $x=1$ και $x=-1$. Υπάρχει κάποιος ξ στο διάστημα $(-1,1)$ στον οποίο να μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης;

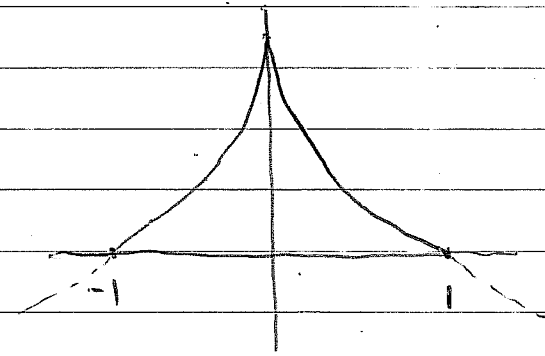
Λύση

Έστω η $f(x) = 2 - \sqrt[5]{x^2}$ με $D(f) = (-\infty, +\infty)$.
Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ με $f(-1) = f(1) = 1$.
Όμως δεν υπάρχει κάποιος $\xi \in (-1,1)$ στο οποίο να μηδενίζεται η $f'(x)$.

Αυτό συμβαίνει γιατί (από το Θ. Rolle) η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ αφού

$$f'(x) = -\frac{2}{5}\frac{1}{x^{3/5}} \quad \text{και} \quad f'(0^{+,-}) = +\infty$$

Δηλαδή τα $f'(0^{+})$ είναι $+\infty$ και σ' αυτή την περίπτωση δεν είναι παραγωγίσιμη!



Άσκηση 3

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = x\sin x + \cos x$ έχει ακριβώς δυο λύσεις. Να προσδιορίσετε την θέση των ριζών σε σχέση με το $x=0$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$

Η $f(x)$ είναι άρτια συνάρτηση γιατί

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x)\sin(-x) - \cos(-x) = x^2 - x\sin x - \cos x = f(x)$$

Άρα αν ρ είναι μια ρίζα της $f(x)=0$ ή $f(\rho)=0$ τότε και $f(-\rho) = f(\rho) = 0$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η $f(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[0,+\infty)$ κι επειδή $f(0) = -\cos 0 = -1 \neq 0$ στο $(0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = -1 < 0$ και $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$ και η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,\pi]$. Αφού $f(0)f(\pi) < 0$ από το Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η ρ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x)$ στο $(0,+\infty)$. Έστω ότι έχει δυο ρίζες (τουλάχιστον) στο $(0,+\infty)$ τις ρ_1, ρ_2 με $0 < \rho_1 < \rho_2$. Τότε:

Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$. Άρα από το Θεώρημα του Rolle υπάρχει $\xi \in (\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Όμως η παράγωγος της $f(x)$ είναι:

$$f'(x) = 2x - \cancel{\sin x} - x\cos x + \cancel{\sin x} = x(2-\cos x)$$

η οποία μηδενίζεται μόνο για $x=0$ (αφού $-1 \leq \cos x \leq 1$)!

Άτοπο! γιατί $0 < \rho_1 < \xi < \rho_2$, οπότε η f έχει μόνο μια ρίζα στο $(0,+\infty)$ την $\rho \in (0,\pi)$ και αφού η $f(x)$ άρτια συνάρτηση θα έχει και την $-\rho < 0$, δηλαδή ακριβώς 2 ρίζες.

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$ και παρατηρούμε ότι $f'(x) = e^x - 1 > 0 \quad \forall x > 0$ και

$f'(x) = e^x - 1 <$ για κάθε $x < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ άρα ισχύει $f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x \neq 0$.

ή ισοδύναμα $f(x) = e^x - x - 1 > f(0) = 0 \Rightarrow$

$e^x > x + 1$

Αν $x = 0$ τότε $f(0) = 0$ και ισχύει η ισότητα άρα

$$e^x \geq x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση 6

Εφαρμόζοντας το Θ. μέσης τιμής (Lagrange) να δειχθεί ότι

$$n b^{n-1} < \frac{a^n - b^n}{a-b} < n a^{n-1}$$

όπου a, b πραγματικοί με $0<b<a$ $n\in\mathbb{N}, n>1$.

Λύση

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=x^n$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα και στο $[b,a]$ $a>b>0$.
άρα η f ικανοποιεί στο $[b,a]$ το Θ. μέσης τιμής (Lagrange), άρα υπάρχει $\xi\in(b,a)$ με

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \Rightarrow n\xi^{n-1}=\frac{a^n-b^n}{a-b} \quad (1)$$

Αλλά $b<\xi<a \Rightarrow b^{n-1}<\xi^{n-1}<a^{n-1} \Rightarrow n b^{n-1}<n\xi^{n-1}<na^{n-1}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε ότι

$$n b^{n-1} < \frac{a^n-b^n}{a-b} < n a^{n-1} \quad \forall a,b\in\mathbb{R}^+ \text{ και } n\in\mathbb{N}-\{1\}$$

Άσκηση 8

Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} ax^2+x+1 & με \quad x\geq 1 \\ 2ax+1 & με \quad x<1 \end{cases}$

Για ποιές τιμές του $a\in\mathbb{R}$ η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$?

Λύση

Αν $x<1$, $f(x)=2ax+1$ και $f'(x)=2a$ άρα για να είναι η f γν. αύξουσα στο $(-\infty,1)$ αρκεί $a>0$

Αν $x\geq 1$ τότε $f(x)=ax^2+x+1$ και $f'(x)=2ax+1$ και αν $a>0$ ~~και~~ $x\geq 1$ τότε

$$x\geq 1 \Rightarrow ax\geq a \Rightarrow 2ax\geq 2a \Rightarrow 2ax+1\geq 2a+1>0$$

άρα αν $a>0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $[1,+\infty)$

Θα πρέπει όμως να ελέγξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\leq f(1) \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(2ax+1)\leq a+2 \Leftrightarrow 2a+1\leq a+2 \Leftrightarrow a\leq 1.$

Αν λοιπόν $0<a\leq 1$ τότε η f είναι γν αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 9

Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικών ακροτάτων στο πεδίο ορισμού καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις.

(i) $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$, (ii) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+4}$, (iii) $y=x^2e^{-x}$

Λύση

(i) $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ $\quad D(f)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Οπότε δεν υπάρχουν άκρα.

$$f'(x)=\frac{1}{3}\,\frac{(5x-2)}{x^{1/3}}$$

Η $f'(x)$ δεν υπάρχει για $x=0$ και είναι $f'(x)=0$ για $x=2/5$. Οπότε τα $x=0$, $x=2/5$ είναι πιθανά σημεία ακροτάτων.

	$-\infty$	0	$2/5$	$+\infty$
f'	+	−	+	
f	↗	↘	↗	

Άρα το $x=0$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου και το $x=2/5$ σημείο τοπικού ελαχίστου.

(ii) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+4}$ $\qquad D(f)=[0,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{4-x}{2\sqrt{x}\,(x+4)^2}$$

οπότε τα πιθανά σημεία ακροτάτων είναι τα
$x=0$ (άκρο του διαστήματος $[0,+\infty)$ και στο οποίο η $f'(x)$ δεν υπάρχει) και
$x=4$ $f'(x)=0$ για $x=4$.

	0		4		$+\infty$
f'		+		−	
f		↗		↘	

οπότε το $x=0$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου με $f(0)=0$, το $x=4$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Μάλιστα το $x=0$ και σημείο ολικού αφού

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+4/\sqrt{x}\right)} = 0$$

(iii) $f(x)= x^2 e^{-x}$ $\quad D(f)=(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

Δεν υπάρχουν άκρα συνεπώς θα ψάξουμε πιθανά ακρότατα εκεί που δεν ορίζεται η $f'(x)$ ή όπου $f'(x)=0$

$$f'(x) = -x(x-2)e^{-x}$$

που ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f'(x)=0$ για $x=0$, $x=2$

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
f		↘		↗		↘	

Το $x=0$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου και το $x=2$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Επειδή $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = 0$ και $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$.

το $x=0$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου ενώ δεν υπάρχει σημείο ολικού μεγίστου.