Ασκήσεις 10/10/2012

Άσκηση 1:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} |x-2| & \text{αν } x\geq 1 \\ 2x & \text{αν } 0\leq x<1 \\ -x & \text{αν } x<0 \end{cases}$$

Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια για $x=0$ και για $x=1$.

Λύση

α) Για $x=0$ έχουμε ότι $f(0)=2\cdot 0=0$. Για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to 0} f(x)$ θα πάρουμε πλευρικά όρια, αφού αριστερά και δεξιά του $x=0$ η f αλλάζει τύπο.

Αν $x\to 0^-$ τότε $x<0$ και $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$. (*)

Αν $x\to 0^+$ τότε το x θα είναι στην περιοχή της μορφής $(0,\varepsilon)$ οπότε μπορούμε να δεχτούμε ότι $0<x<1$. Οπότε

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x)=2\cdot 0=0 \quad (**)$$

Από (*), (**) έχουμε ότι $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

άρα $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$ άρα η f συνεχής στο 0 β) Για $x=1$ έχουμε $f(1)=|1-2|=1$.

Για τον υπολογισμό του $\lim_{x\to 1} f(x)$ θα πάρουμε πλευρικά όρια.

Αν $x\to 1^-$ μπορούμε να δεχτούμε ότι $0<x<1$ οπότε

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2$$ *

Αν $x\to 1^+$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} |x-2| = |1-2| = 1$$

Δηλαδή

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} f(x)$ συνεπώς η f είναι ασυνεχής στο $x=1$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha & \text{αν } x\geq 0 \\ \beta+2\sqrt{x^2+1} & \text{αν } x<0 \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα α,β άν γνωρίζουμε ότι $f(1)=2$ και ότι η f είναι συνεχής για $x=0$

Λύση

Αφού $f(1)=2 \Rightarrow 1^2+\alpha=2 \Rightarrow \underline{\alpha=1}$ (1)

Αφού η f είναι συνεχής για $x=0$ τότε

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} = f(0).$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2+\alpha) = \alpha$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\beta+2\sqrt{x^2+1}\right) = \beta+2$$ και

$f(0)=\alpha$

Άρα θα πρέπει $\alpha=\beta+2$ (1)

Από (1),(2) έχουμε $\alpha=1$, $\beta=-1$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{αν} \quad x>2 \\ \alpha & \text{αν} \quad x=2 \\ \beta+x^2 & \text{αν} \quad x<2. \end{cases}$$

Να προσδιορισθούν τα α, β αν γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής για $x=2$.

Λύση

Για να είναι η f συνεχής για $x=2$ πρέπει και αρκεί

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

Αλλά $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (\beta+x^2) = \beta+4 \quad \text{και}$$

$$f(2)=\alpha$$

Άρα θα πρέπει $\displaystyle\frac{2}{3} = \beta+4 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{3}, \ \beta = -\frac{10}{3}$

Άσκηση 4

Να δειχθεί ότι στο διάστημα $(0,1)$ η εξίσωση

$$x\,2^x = 1$$

έχει μια ρίζα (τουλάχιστον)

Λύση

Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x) = x\,2^x - 1$

Έχουμε $f(0) = -1$ και $f(1) = 1$ άρα $f(0)f(1) < 0$

και η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αφού

οι συναρτήσεις $y = x$ και $y = 2^x$ είναι συνεχείς στο $[0,1]$

Οπότε από το Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $f(x)$, δηλαδή

θα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τ.ω. $f(\xi) = 0 \Rightarrow \xi\,2^{\xi} = 1$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{αν } -2\leq x<0 \\ -x^2-2 & \text{αν } 0\leq x\leq 2. \end{cases}$$

Να εξετασθεί αν υπάρχει $x_0\in(-2,2)$ τ.ω. $f(x)=0$.

Λύση

Η f είναι ορισμένη στο $[-2,2]$ και

$f(-2)=6$, $f(2)=-6$ δηλαδή $f(-2)f(2)<0$

Παρόλα αυτά δεν υπάρχει $x_0\in(-2,2)$ έτσι ώστε $f(x_0)=0$. Πράγματι

Αν $x\in(-2,0)$ έχουμε $f(x)=x^2+2>2$

Αν $x\in[0,2)$ έχουμε $f(x)=-x^2-2<-2$

Δηλαδή $f(x)\neq 0 \ \forall x\in(-2,0)\cup[0,2)=(-2,2)$

Αυτό συμβαίνει γιατί από το Θ. Bolzano η f δεν είναι συνεχής στο $[-2,2]$. Πράγματι για $x=0$ έχουμε

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2-2)=-2$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2)=2$

άρα η f είναι ασυνεχής στο 0 αφού το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 6

Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους

$$f = x^2 \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{αν } x \geq 0 \\ x+1 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Να μελετηθεί η $f \circ g$ ως προς την συνέχεια.

Λύση

Επειδή $D(f) = \mathbb{R}$ ορίζεται η $f \circ g$ και $D(f \circ g) = D(g) = \mathbb{R}$

- Για κάθε $x \geq 0$ έχουμε $g(x) = x-1$ άρα

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

- Για κάθε $x < 0$ έχουμε $g(x) = x+1$ άρα

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$ Συνεπώς

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{αν } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

οπότε η $f \circ g$ είναι συνεχής $\forall x \in (0, +\infty)$ αφού είναι πολυωνυμική με τύπο $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 1$ και συνεχής $\forall x \in (-\infty, 0)$ αφού είναι πολυωνυμική με τύπο $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 1$.

Για $x = 0$ έχουμε $(f \circ g)(0) = 1$ και

$\lim_{x \to 0^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 2x + 1) = 1$ άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$\lim_{x \to 0^-} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 + 2x + 1) = 1$ άρα συνεχής στο $x = 0$ και συνεπώς σε όλο το $\mathbb{R}$.