Ασκήσεις 12/09/2012

Άσκηση 2

1) Έχουμε $x>0$ και $0<x^2-1\leq 2 \Rightarrow 1<x^2\leq 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1<x\leq\sqrt{3}$

Συνεπώς $\inf A=1\notin A$ και $\sup A=\sqrt{3}\in A$
άρα υπάρχει και το $\max A=\sqrt{3}=\sup A$
Το $\min A$ δεν υπάρχει γιατί $\inf A=1\notin A$.

2) Επειδή το $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ δεν υπάρχει το $\sup B$
$\inf B=1\notin B$ οπότε δεν υπάρχει $\min B$.

3) Το τριώνυμο x^2+x+1 είναι θετικό $\forall x\in\mathbb{R}$ οπότε $C=\mathbb{R}$ και το $\mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο οπότε δεν υπάρχουν $\sup C$, $\inf C$ και κατ' επέκταση $\max C$, $\min C$.

4) $D=\emptyset$ οπότε δεν ορίζονται $\sup D$, $\inf D$.

5) Οι δυο ρίζες του τριωνύμου $x^2+x-1=0$ είναι οι $\rho_1=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})$, $\rho_2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ $\rho_1<\rho_2$.
οπότε $x^2+x-1<0$ εντός των ριζών ή αλλιώς

$$x\in\mathbb{R} \text{ με } \rho_1<x<\rho_2$$

Αλλά επειδή θα πρέπει και $x<0$ στο E
και $\rho_2>0$, τότε $\rho_1<x<0$, οπότε

$\inf E=\rho_1\notin E$, $\sup E=0\notin E$ και δεν υπάρχουν τα $\min E$, $\max E$.

6) $(x-1)(x+\sqrt{2})<0$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ με

$-\sqrt{2}<x<1$. όμως $-\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ άρα δεν υπάρχει το $\inf F$.

Από την άλλη $\sup F = 1 \in \mathbb{Q}$ αλλά $1 \notin F$. Οπότε $\sup F = 1$ και δεν υπάρχει $\max F$.

Άσκηση 3

Θέλουμε να δείξουμε ότι για ένα μη-κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ισχύει

$$A = \{a\} \iff \sup A = \inf A.$$

Προφανώς, από το αξίωμα της πληρότητας τα $\sup A$, $\inf A$ υπάρχουν: $-\infty < \inf A \leq \sup A < +\infty$

($\Rightarrow$) Αφού $A = \{a\}$ το A είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$ οπότε $\sup A \in A$ και $\inf A \in A$ άρα $a = \sup A$ και $a = \inf A$ κι έτσι $\sup A = \inf A$.

($\Leftarrow$) (Με άτοπο) Έστω ότι το A έχει περισσότερα από ένα στοιχεία τότε υπάρχουν $a, b \in A$ με $a<b$ οπότε $\inf A \leq a < b \leq \sup A$ δηλαδή

$\inf A < \sup A$ Άτοπο! γιατί υποθέσαμε ότι $\inf A = \sup A$.

Άσκηση 5

(i) Είναι αδύνατον αφού $|a| \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$.

(ii) $|3x+2| = 5 \Rightarrow 3x+2 = \pm 5 \ldots \quad x = \begin{cases} 1 & (+) \\ -7/3 & (-) \end{cases}$

(iii) $\left| \dfrac{x-3}{x-4} \right| = 5$

Για να έχει νόημα ο πραγματικός $\dfrac{x-3}{x-4}$ θα πρέπει $x \neq 4$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{4\}$ έχουμε:

$$\left| \frac{x-3}{x-4} \right| = 5 \Rightarrow \frac{x-3}{x-4} = \pm 5 \ldots \quad x = \begin{cases} 17/4 & (+) \\ 23/6. & (-) \end{cases}$$

(iv) Δεν μπορεί ταυτόχρονα να έχουμε $|4x+5| = |8x-3| = 0$ αφού $-5/4 \neq 3/8$ οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $8x-3 \neq 0$ και έχουμε

$$|4x+5| = |8x-3| \Rightarrow \left| \frac{4x+5}{8x-3} \right| = 1 \Rightarrow \frac{4x+5}{8x-3} = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\ldots \quad x = \begin{cases} 2 & (+) \\ -1/6 & (-) \end{cases}$$

Άσκηση 4

i) Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $y<x$
Τότε επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{x-y}{2}$ έχουμε

$$x-(y+\varepsilon) = x-y-\varepsilon = x-y-\frac{x-y}{2} = \frac{x-y}{2} > 0$$

Δηλαδή $x > y+\varepsilon$. Άτοπο!

ii) με το ίδιο τρόπο όπως προηγουμένως.

iii) Θυμηθείτε ότι αν $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ $\varepsilon \geq 0$ τότε

$$|\alpha| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \alpha < \varepsilon$$

Από την υπόθεση $\forall \varepsilon > 0$ ισχύουν ότι

$$|x-y| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x-y \leq \varepsilon \iff$$

$$x \leq y+\varepsilon \quad \text{και} \quad y \leq x+\varepsilon$$

Από το (i) μέρος της άσκησης έχουμε ότι

$x \leq y$ και $y \geq x$. Άρα $x=y$.

Άσκηση 6

i) Για να έχει νόημα ο πραγματικός $\frac{3-2x}{x+2}$

θα πρέπει $x \neq -2$.

$$\left|\frac{3-2x}{x+2}\right| = \left|\frac{2x-3}{x+2}\right| = \left|\frac{2(x+2)-7}{x+2}\right| = \left|2-\frac{7}{x+2}\right| \leq 4$$

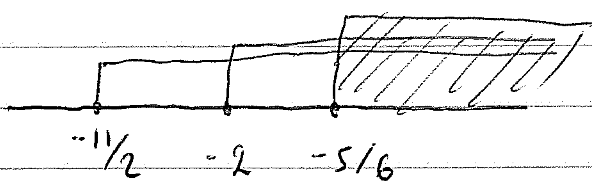
Άρα θα πρέπει

$$-4 \leq 2-\frac{7}{x+2} \leq 4 \Rightarrow -6 \leq -\frac{7}{x+2} \leq 2 \Rightarrow$$

$$-2 \leq \frac{7}{x+2} \leq 6 . \quad (*)$$

α) Αν $x > -2 \Rightarrow x+2 > 0$ και η ανισότητα $(*)$ είναι

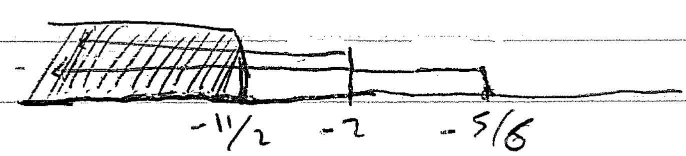
$6x+12 \geq 7$ και $-2x-4 \leq 7 \Rightarrow \dots \Rightarrow x \geq -5/6$ και $x \geq -\frac{11}{2}$



$\boxed{\text{άρα } x \geq -5/6}$

β) Αν $x < -2 \Rightarrow x+2 < 0$ και η ανισότητα $(*)$ είναι

$6x+12 \leq 7$ και $-2x-4 \geq 7 \Rightarrow \dots$ $x \leq -5/6$, $x \leq -11/2$



$\boxed{\text{άρα } x \leq -11/2}$

Συνεπώς

$\left|\dfrac{3-2x}{x+2}\right| \leq 4$ όταν $x \leq -11/2$ ή $x > -5/6$

ή αλλιώς $x \in (-\infty, -11/2] \cup [-5/6, +\infty)$.

(ii) $|3x+5| \geq 4 \Leftrightarrow 3x+5 \geq 4$ ή $3x+5 \leq -4$

... $x \geq -1/3$ ή $x \leq -3$ ή αλλιώς

$x \in (-\infty, -3] \cup [-1/3, +\infty)$

(iii) Για να έχουν νόημα οι παραστατικοί $\dfrac{1}{x-4}$, $\dfrac{1}{x+7}$

θα πρέπει $x \neq 4$ και $x \neq -7$.

$\dfrac{1}{|x-4|} - \dfrac{1}{|x+7|} < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{|x-4|} < \dfrac{1}{|x+7|} \Rightarrow |x-4| > |x+7| \Rightarrow$

$\left|\dfrac{x+7}{x-4}\right| < 1 \Rightarrow \left|\dfrac{x-4+11}{x-4}\right| < 1 \Rightarrow \left|1+\dfrac{11}{x-4}\right| < 1$ ή αλλιώς

$-1 < 1 + \dfrac{11}{x-4} < 1 \Rightarrow -2 < \dfrac{11}{x-4} < 0$. Άρα θα πρέπει $x < 4$

$x-4<0$

Οπότε

$-2(x-4) > 11 \Rightarrow \ldots x < -3/2 < 4$

Άρα θα πρέπει $x < -3/2$ ή αλλιώς $x \in (-\infty, -3/2)$.