Ασκήσεις 14/11/2012

Άσκηση 1

Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα και χαρακτηρίστε τα.

i) $y=(x-1)|x|$ στο $[-1,3]$, ii) $y=x+\frac{1}{x}$ στο $[1/3,3]$ και

iii) $y=e^{x}\sin x$ στο $[0,2\pi]$.

Λύση

i) $y=\begin{cases} -x(x-1) & x\leq 0 \\ x(x-1) & x>0 \end{cases}$ $\quad y'=\begin{cases} -2x+1 & x<0 \\ 2x-1 & x>0 \end{cases}$

και δεν υπάρχει η $f'(0)$ αφού $f'(0-0)=1\neq -1=f'(0+0)$.
οπότε τα πιθανά ακρότατα είναι τα

$x=-1$, $x=3$ άκρα του διαστήματος

$x=0$ σημείο που δεν υπάρχει η f'

$x=1/2$ σημείο που μηδενίζεται η f'

$x<0$ $\quad -2x+1>0 \Rightarrow f'(x)>0$

	-1	0	$1/2$	3
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Άρα $x=0$ τοπικό μέγιστο
$x=1/2$ τοπικό ελάχιστο.

$f(-1)=-2$, $f(0)=0$, $f(1/2)=-1/4$, $f(3)=6$.

$x=-1$ ολικό ελάχιστο, $x=3$ ολικό μέγιστο.

(ii) $y = x + \frac{1}{x}$ στο $[\frac{1}{3}, 3]$.

$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Άρα πιθανά ακρότατα $x = 1/3$, $x = 3$ άκρα διαστήματος

$x = 1$ εκεί που μηδενίζεται η y'

($x = 0$, $x = -1$ δεν ανήκουν στο $[1/3, 3]$)

	$1/3$		1		3
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα $x = 1$ ολικό ελάχιστο

$f(1/3) = \frac{1}{3} + 3$

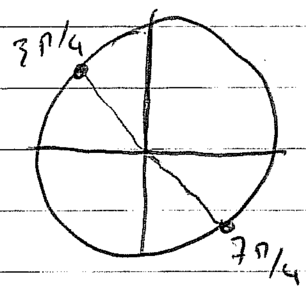
$\quad\quad\quad\quad ''$ και $x = 1/3$, $x = 3$ ολικά μέγιστα

$f(3) = 3 + \frac{1}{3}$

(iii) $y = e^x \sin x$ $\quad x \in [0, 2\pi]$.

$y' = e^x(\cos x + \sin x)$.

$\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = -\sin x \Rightarrow$



$x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$.

Άρα πιθανά ακρότατα $x = 0, 2\pi$ (άκρα)
$x = 3\pi/4$, $x = 7\pi/4$ (μηδ. η παράγωγος)

	0		$3\pi/4$		$7\pi/4$		2π
$f'(x)$		+		−		+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Άρα αφού $f(0) = f(2\pi) = 0$ και

$f(3\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{3\pi/4}$ $\quad f(7\pi/4) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{7\pi/4}$

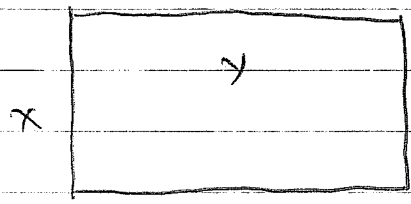
Το $x = 3\pi/4$ είναι ολικό μέγιστο
Το $x = 7\pi/4$ είναι » ελάχιστο.

Τα άκρα δεν είναι ακρότατα

Άσκηση 2

Να δειχθεί ότι απ' όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $2a$, το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

Λύση



$E = xy$ αλλά $2x+2y=2a \Rightarrow y=a-x$ (1)

$E(x) = x(a-x)$ $\quad 0 \leq x \leq a$

$E'(x) = a-x-x=0 \Rightarrow x=a/2$

$E''(x) = -2<0$

Άρα το $x=a/2$ είναι ολικό μέγιστο αφού $E(0)=E(a)=0$.

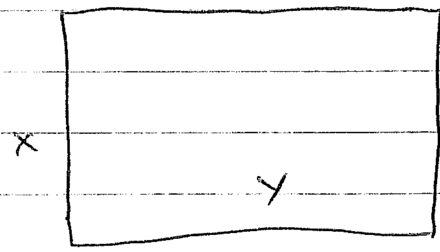
Αφού $x=a/2$ από (1) $y=a-a/2=a/2$

οπότε $x=y$ και έχουμε το τετράγωνο έχει μεγιστοποιήσει το εμβαδό.

Άσκηση 3

Να δειχθεί ότι απ' όλα τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό κ^2, το τετράγωνο ελαχιστοποιεί την περίμετρο.

Λύση



Ορίζουμε

$\Pi(x) = 2x + 2y$ όμως $x \cdot y = \kappa^2 \Rightarrow y = \kappa^2/x$

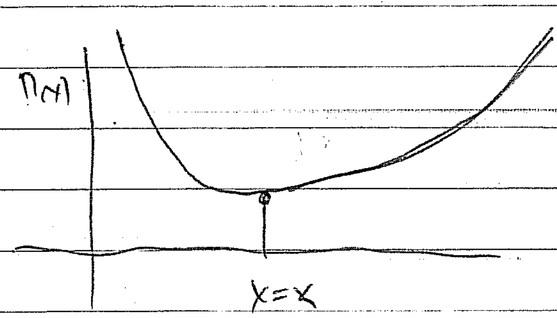
άρα

$\Pi(x) = 2x + 2\dfrac{\kappa^2}{x}$ $\quad x \in (0, +\infty)$.

$\Pi'(x) = 2 - 2\dfrac{\kappa^2}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \kappa$ ($x = -\kappa$ απορρίπτεται επειδή το x είναι μήκος),

$\Pi''(x) = 4\dfrac{\kappa^2}{x^3} > 0$ πάντα, οπότε $x = \kappa$ είναι ολικό ελάχιστο

γιατί $\lim_{x \to 0^+} \Pi(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \Pi(x) = +\infty$, $\Pi(\kappa) = 4\kappa$.



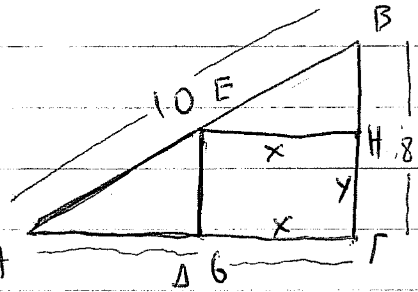
$x = \kappa \Rightarrow y = \dfrac{\kappa^2}{\kappa} = \kappa = x$.

άρα έχουμε τετράγωνο!

Άσκηση 4

Ορθογώνιο παραλ/μο εγγράφεται εντός ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές μήκους 6, 8, 10. Να βρεθούν οι διαστάσεις του τετραπλεύρου μεγίστου εμβαδού που εγγράφεται εντός του παραλ/μου.

Λύση



$E = xy$.

Από τα όμοια τρίγωνα ΕΒΗ, ΑΒΓ έχουμε

$$\frac{x}{6} = \frac{8-y}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{4}(8-y) \quad (1)$$

$$E(y) = \frac{3}{4}(8-y)\,y \qquad y \in [0,8]$$

$$E'(y) = \frac{3}{8}(8-2y) \Rightarrow y = 4$$

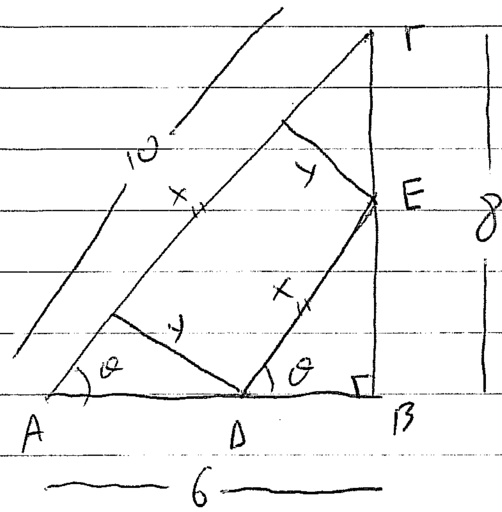
$E''(y) = -6/8 < 0$ άρα $y=4$ ολικό μέγιστο ($E(0)=E(8)=0$)

Για $y=4$ από (1) $x = \frac{3}{4}\cdot 4 = 3$.

Και $E(4) = \frac{3}{4}\, 4 \cdot 4 = 12$.

Άσκηση 5

Να βρεθούν οι διαστάσεις του ορθ. παρ/μου μεγίστου εμβαδού που εγγράφεται όπως παρακάτω:



ΔΕ // ΑΓ

Λύση

$E = xy$ και $\sin\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{5} = \frac{y}{A\Delta} \Rightarrow A\Delta = \frac{5}{4}y$

$\cos\theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \frac{\Delta B}{x} \Rightarrow \Delta B = 3/5\, x$

$A\Delta + \Delta B = 6$ οπότε

$5/4\, y + 3/5\, x = 6 \Rightarrow x = \frac{5}{3}\left(6 - 5/4\, y\right)$

$E(y) = \frac{5}{3}\left(6 - \frac{5}{4}y\right)y \qquad y \in \left(0, \frac{24}{5}\right)$

$E'(y) = 5/3\left[6 - 5/2\, y\right] = 0 \Rightarrow y = 12/5$

$E''(y) = -\frac{5}{3}\frac{5}{2} < 0 \Rightarrow y = 12/5$ ολικό μέγιστο.

μέγιστο εμβαδό $E(12/5) = 12$, $y = 12/5$ $x = 5/3\left[6 - \frac{5}{4}\frac{12}{5}\right] = 5$

Άσκηση 6

Να μελετηθεί και να γίνει η γραφική παράσταση της
$f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

Λύση

$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτος αφού
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

Για (πλάγια) ασύμπτωτη της μορφής $y = \lambda x + \mu$ έχουμε.

$\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x(x-2)} = 0$ και.

$\mu = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x-2} = 2$ άρα $y=2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτος.

$f'(x) = -\frac{7}{(x-2)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$ και $f''(x) = \frac{14}{(x-2)^3} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

με $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (2, +\infty)$ και $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 2)$
Άρα στο (μοναδικό) υποψήφιο τ. ακρ., το $x=2$
η f δεν αλλάζει μονοτονία είναι $f' < 0$ $f \downarrow$
και στο $(-\infty, 2)$ και στο $(2, +\infty)$.
και αφού $f'' \neq 0$ δεν έχει σημεία καμπής. (*)
Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2)$ $\cap$ και κυρτή $\cup$
στο $(2, +\infty)$

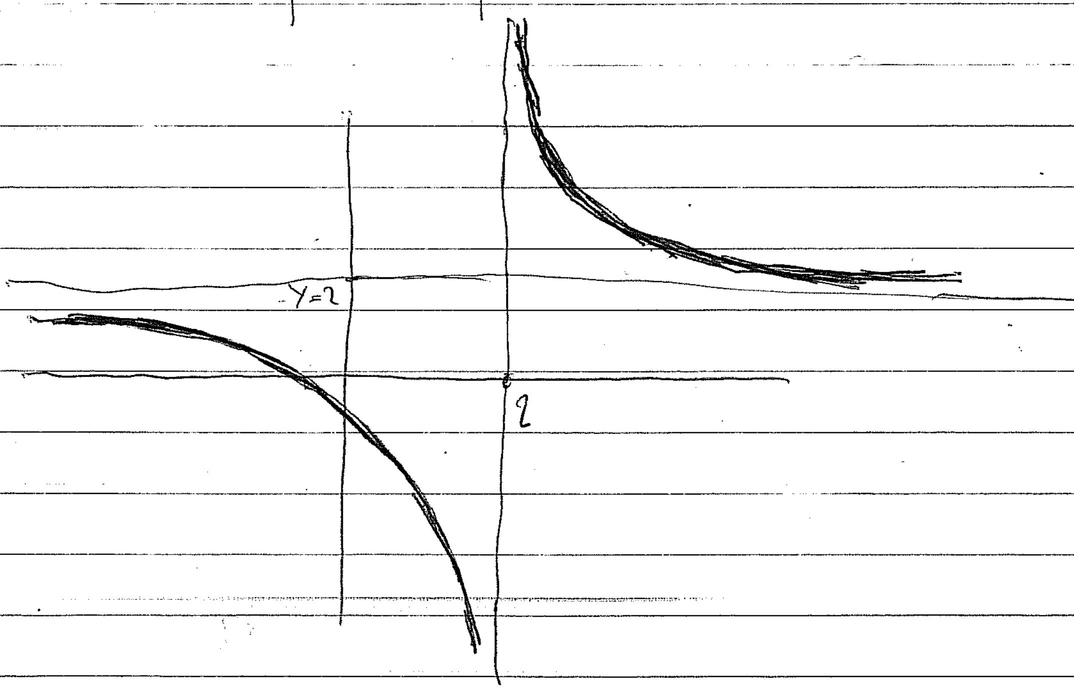
$f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x-2}=0 \Rightarrow x=-3/2$ και

$f(x)>0 \Leftrightarrow (2x+3)(x-2)>0 \Leftrightarrow x<-3/2,\ x>2.$

$f(x)<0 \Rightarrow -3/2<x<2$

οπότε έχουμε:

x	$-\infty$	$-3/2$		2		$+\infty$
f'	$-$		$-$	//	$-$	
f''	$-$		$-$	//	$+$	
f	$+$	0	$-$	//	$+$	
	↓ κοίλη		↓ κοίλη	//	↓ κυρτή	



*) Εδώ χρησιμοποιούμε το εξής: Αν η f έχει σημείο καμπής στο x_0, τότε $f''(x_0)=0$. Η αντιθετοαντιστροφή της πρότασης αυτής ισχύει και είναι: Αν $f''(x_0)\neq 0$ τότε το x_0 δεν είναι σημείο καμπής.