Ασκήσεις 17/10/2012

Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=|x-1|+2$ δεν έχει παράγωγο για $x=1$

Λύση

Ο τύπος της συνάρτησης παίρνει την μορφή

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{αν } x\geq 1 \\ -x+3 & \text{αν } x<1 \end{cases}$$

Δεξιά κι αριστερά του ένα ο τύπος της f αλλάζει μορφή επομένως για να υπολογίσουμε την $f'(1)$ πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια, οπότε έχουμε:

$$f'(1+0)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$f'(1-0)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x+3-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

Δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$, άρα η f δεν έχει παράγωγο για $x=1$.

Άσκηση 2

Αν $f(x)=|x^2-4x+3|$ να βρεθεί η $f'(0)$ και να εξεταστεί αν υπάρχει η $f'(3)$.

Λύση

$x^2-4x+3\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)\geq 0 \Leftrightarrow \quad x\leq 1$ ή $x\geq 3$

άρα

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{αν } x\leq 1 \text{ ή } x\geq 3 \\ -x^2+4x-3 & \text{αν } 1<x<3 \end{cases}$$

Κοντά στο $x=0$ ο τύπος της f είναι $f(x)=x^2-4x+3$ και $f(0)=3$. Συνεπώς

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+3-3}{x}=\lim_{x\to 0}(x-4)=-4$$

Για τον υπολογισμό του $f(3)$ παίρνουμε πλευρικά όρια γιατί στο $x=3$ αλλάζει τύπο η f

$$f'(3+0)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-4x+3-0}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{(x-3)}}=2$$

$$f'(3-0)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-x^2+4x-3-0}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{x-3}}=-2$$

Αφού $f'(3+0)\neq f'(3-0)$ δεν υπάρχει η $f'(3)$.

Άσκηση 3

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x|x|$. Να βρεθεί αν υπάρχει η $f'(0)$.

Λύση

Ο τύπος της f είναι

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x > 0 \\ -x^2 & \text{αν } x < 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Επειδή αλλάζει ο τύπος της f στο $x=0$ παίρνουμε πλευρικά όρια

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = f'(0+0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0 = f'(0-0)$$

Αφού $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

έχουμε ότι $f'(0) = 0$.

Άσκηση 4

Αν για την συνάρτηση f έχουμε:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 , & x\leq 2 \\ ax+b , & x>2 \end{cases}$$

να βρεθούν τα α, β ώστε να υπάρχει η $f'(2)$.

Λύση

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4=f'(2-0)$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{ax+b-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{ax+2a-2a-4+b}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{a(x-2)+2a-4+b}{x-2}=\lim\left[a+\frac{2a-4+b}{x-2}\right]$$

καθώς $x\to 2^+$, $\frac{1}{x-2}\to +\infty$ και για να υπάρχει

το $f'(2-0)$ θα πρέπει αναγκαστικά $2a-4+b=0$ (*)

οπότε $f'(2+0)=a=f'(2-a)=4 \Rightarrow \boxed{a=4}$

και από την (*) αφού $a=4$, $b=-4$

Άσκηση 5

Έστω η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+x+1 & , x\leq 0 \\ ax+b & , x\geq 0 \end{cases}$$

Βρείτε τα α, β ώστε να υπάρχει η $f'(0)$. και υπολογίστε την.

Λύση

$$f'(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2x^2+x+1-b}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\left[2x+1+\frac{1-b}{x}\right]=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1-b}{x}\right)+1=f'(0-0)$$

Αφού όταν $x\to 0^-$, $\frac{1}{x}\to -\infty$ θα πρέπει για να να υπάρχει η $f'(0-0)$ να ισχύει $1-b=0\Rightarrow \boxed{b=1}$

$$f'(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+\cancel{b}-\cancel{b}}{x}=a=f'(0+0)$$

Αφού $f'(0-0)=1$ και $f'(0+0)=a$ για να υπάρχει η $f'(0)$ θα πρέπει

$$f'(0-0)=f'(0+0)\Rightarrow \boxed{a=1}$$

και συνεπώς $f'(0)=1$

Άσκηση 6

Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τις παραγώγους καθώς και τις πλευρικές παραγώγους στο 0 των παρακάτω συναρτήσεων:

1) $f(x) = 2$, 2) $f(x) = 3x^2 - 5x + 3$ 3) $f(x) = \tan x$.

4) $f(x) = \begin{cases} -2\sqrt{-x} & x < 0 \\ \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \end{cases}$, 5) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 - x & x < 0. \end{cases}$

Λύση

1, 2, 3 απλή εφαρμογή του τύπου:

4)
$$f'(0-0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2\sqrt{-x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\sqrt{-x}}{(-x)} =$$
$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{\sqrt{-x}} = +\infty$$

$$f'(0+0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty$$

Άρα $f'(0-0) = f'(0+0) = f'(0) = +\infty$ και η παράγωγος της f απειρίζεται θετικά στο $x = 0$.

5) $f'(0-0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{0-1}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = +\infty$

$f'(0+0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0-1}{x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$

Αφού $f'(0-0) \neq f'(0+0)$ η $f'(0)$ δεν υπάρχει.

6) $f'(0-0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1-x-0}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \left(1+\frac{1}{x}\right)$

$= +\infty$

$f'(0+0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(-1+\frac{1}{x}\right)$

$= +\infty$

Άρα $f'(0) = +\infty$ αφού ~~lim~~ $f'(0-0) = f'(0+0) = +\infty$

και η πρώτη παράγωγος της f απειρίζεται θετικά.