2.3 Ασκήσεις – 19/09/2012

Άσκηση 1. Αν η συνάρτηση f έχει έναν από τους παρακάτω τύπους να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

$$a)\ f(x)=\sqrt{2\,|x-2|+x-5} \qquad b)\ f(x)=\sqrt{|x+1|+|x-2|-5}$$
$$c)\ f(x)=\frac{2\,\tan x}{1-\tan^2 x} \qquad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{\sin x}$$

Λύση

a) Παρατηρούμε ότι η ποσότητα που είναι κάτω από την ρίζα θα πρέπει να είναι μη αρνητικός αριθμός. Επιπλέον παρατηρούμε ότι υπάρχει ένας όρος που έχει απόλυτη τιμή και για αυτόν το όρο θα πρέπει να πάρουμε περιπτώσεις. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
D(f) &= \{x\in\mathbb{R}: 2\,|x-2|+x-5\geq 0\}\\
&= \left\{x\in\mathbb{R},\ \begin{matrix} x-2\geq 0\\ 2\,(x-2)+x-5\geq 0\end{matrix}\ \text{ή}\ \begin{matrix} x-2<0\\ -2\,(x-2)+x-5\geq 0\end{matrix}\right\}\\
&= \left\{x\in\mathbb{R},\ \begin{matrix} x\geq 2\\ 3x-9\geq 0\end{matrix}\ \text{ή}\ \begin{matrix} x<2\\ -x-1\geq 0\end{matrix}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R},\ \begin{matrix} x\geq 2\\ x\geq 3\end{matrix}\ \text{ή}\ \begin{matrix} x<2\\ x\leq -1\end{matrix}\right\}\\
&= \{x\in\mathbb{R}, x\geq 3\ \ \text{ή}\ \ x\leq -1\} = (-\infty,-1]\cup[3,+\infty).
\end{aligned}$$

b) Έχουμε παρόμοιες διαπιστώσεις όπως προηγουμένως αλλά όμως τώρα έχουμε δυο όρους με απόλυτα και έτσι θα πρέπει να διακρίνουμε 4 περιπτώσεις ανάλογα αν οι όροι μέσα στα απόλυτα είναι θετικοί ή μη θετικοί πραγματικοί:
1) $x-2\geq 0$ και $x+1\geq 0$ που συναληθεύουν $x\geq 2$.
2) $x-2<0$ και $x+1>0$ που συναληθεύουν για $-1<x<2$,
3) $x+1\leq 0$ και $x-2<0$ που συναληθεύουν όταν $x\leq -1$ και
4) $x-2>0$ και $x+1<0$ η οποία δεν ικανοποιείται για κανένα x, οπότε έχουμε μόνο τις 3 προηγούμενες περιπτώσεις.

1) Αν $x\geq 2$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1|+|x-2|-5\geq 0\Rightarrow x+1+x-2-5\geq 0\Rightarrow 2x\geq 6\Rightarrow x\geq 3$$

που συναληθεύουν για $x\geq 3$.
2) Αν $-1<x<2$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1|+|x-2|-5\geq 0\Rightarrow x+1-(x-2)-5\geq 0\Rightarrow 0>2$$

αδύνατον άρα δεν υπάρχουν x που να είναι στο πεδίο ορισμού στο διάστημα $(-1,2)$
3) Αν $x\leq -1$, θα πρέπει επιπλέον να ισχύει και

$$|x+1|+|x-2|-5\geq 0\Rightarrow -(x+1)-(x-2)-5\geq 0\Rightarrow 2x\leq 4\Rightarrow x\leq -2$$

που συναληθεύουν για $x \leq -2$.

Από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε ότι

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \geq 3 \quad ή \quad x \leq -2\} = (-\infty, -2] \cup [3, +\infty).$$

c) Η συνάρτηση

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

ορίζεται σε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ εκτός από αυτά που μηδενίζεται η συνάρτηση $\cos x$, δηλαδή για $x \neq k\,\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Οπότε για το πεδίο ορισμού της f θα πρέπει επιπλέον να μην μηδενίζεται και ο παρανομαστής $1 - \tan^2 x$. Ο παρανομαστής μηδενίζεται όταν $\tan x = \pm 1$ ή ισοδύναμα όταν $\cos x = \pm \sin x$. Το τελευταίο συμβαίνει όταν η γωνία x είναι $\pm\,45$ μοίρες ή $x = \pm\pi/4$ και προσαυξημένη κατά ακέραια πολλαπλάσια του π, δηλαδή όταν $x = k\,\pi \pm \pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$. Άρα συνολικά έχουμε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq k\,\pi + \pi/2 \quad \text{και} \quad x \neq k\,\pi \pm \pi/4 \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

d) Θα πρέπει και οι δυο ποσότητες που είναι κάτω από την ρίζα να είναι μη αρνητικοί πραγματικοί.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad 1 - x^2 \geq 0 \quad \text{και} \quad \sin x \geq 0\}$$

Η $\sin x$ είναι θετικός αριθμός όταν η γωνία x είναι ανάμεσα σε 0 και π καθώς και προσαυξημένη με πλήρεις περιστροφές κατά γωνία $2\,\pi$, δηλαδή $2\,k\,\pi \leq x \leq 2\,k\,\pi + \pi$ $k \in \mathbb{Z}$. Οπότε

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad 2\,k\,\pi \leq x \leq 2\,k\,\pi + \pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Όμως τα διαστήματα $[2\,k\,\pi, 2\,k\,\pi + \pi]$ για $k = \pm 1, \pm 2 \ldots$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο με το διάστημα $[-1, 1]$. Από την άλλη, για $k = 0$ το διάστημα $[0, \pi]$ έχει τομή (κοινά σημεία) με το $[-1, 1]$ το διάστημα $[0, 1]$.Άρα

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$$

Άσκηση 2. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$$

Λύση

Έχουμε μια ρητή συνάρτηση όπου ο παρανομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών της f έχουμε:

$$\begin{aligned} D(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad y = \frac{x^2 + 4}{x^2 + x + 1}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad y\,x^2 + y\,x + y = x^2 + 4\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad \exists x \in D(f) \quad \text{με} \quad (y - 1)\,x^2 + y\,x + (y - 4) = 0 \ (*)\} \end{aligned}$$

Αν $y = 1$ το τριώνυμο $(*)$ γίνεται $x = 3$, άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο η f να έχει τιμή 1, συνεπώς $1 \in R(f)$.
Για $y \neq 1$, το τριώνυμο $(*)$ ως προς x έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta \geq 0$. ή ισοδύναμα

$$y^2 - 4(y-1)(y-4) \geq 0 \Rightarrow 3\,y^2 - 20\,y + 16 \leq 0 \Rightarrow \frac{10-2\sqrt{13}}{3} \leq y \leq \frac{10+2\sqrt{13}}{3}$$

Επειδή $1 \in [\frac{10-2\sqrt{13}}{3}, \quad \frac{10+2\sqrt{13}}{3}]$ έχουμε τελικά ότι

$$R(f) = [\frac{10-2\sqrt{13}}{3}, \quad \frac{10+2\sqrt{13}}{3}]$$

Άσκηση 3. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες το πεδίο τιμών της $f(x)$ με τύπο

$$f(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}$$

είναι το διάστημα $[-\frac{1}{4}, 1]$.

Λύση

Έχουμε πρώτα απ'όλα ότι $D(f) = \mathbb{R}$. Για το πεδίο τιμών έχουμε

$$\begin{aligned} R(f) &= \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : \quad \text{με} \quad y = \frac{x+\lambda}{x^2+1}\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : \quad \text{με} \quad y\,x^2 - x + (y-\lambda) = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \quad 1 - 4\,y\,(y-\lambda) \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R} : \quad \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2} \leq y \leq \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2}\} \\ &= \left[\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2}\right] \end{aligned}$$

Για να είναι $R(f) = [-1/4, 1]$, αρκεί και πρέπει να υπάρχει λ τέτοιο που

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\lambda - \sqrt{\lambda^2+1}}{2} = -\dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + \dfrac{1}{2} = \sqrt{\lambda^2+1} \\[2ex] 2 - \lambda = \sqrt{\lambda^2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + \dfrac{1}{2} = 2 - \lambda \\[2ex] (2-\lambda)^2 = \lambda^2 + 1 \\[2ex] -\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{3}{4} \\[2ex] \frac{25}{16} = \frac{25}{16} \\[2ex] -\frac{1}{2} \leq \lambda = \frac{3}{4} \leq 2 \end{array}\right\}$$

Άρα για $\lambda = \frac{3}{4}$ η f έχει $R(f) = [-\frac{1}{4}, 1]$
Προσοχή!!! Είναι λάθος να απαιτήσουμε $-\frac{1}{4} \leq \frac{x+\lambda}{x^2+1} \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γιατί ναι μεν οι τιμές της f θα είναι στο $[-\frac{1}{4}, 1]$ όμως από μόνο της η απαίτηση αυτή δεν είναι αρκετή να μας εξασφαλίσει ότι το πεδίο τιμών της f είναι όλο το διάστημα $[-\frac{1}{4}, 1]$.

Άσκηση 4. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}, \qquad g(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

Να δειχθεί ότι $f \neq g$.

Λύση

Για να ισχύει $f=g$ θα πρέπει $D(f)=D(g)$ και $f(x)=g(x)$ για κάθε $x \in D(f)=D(g)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x\in\mathbb{R}: \quad \frac{x}{x-1}\geq 0 \quad \text{και} \quad x-1\neq 0\} = \{x\in\mathbb{R}: \quad x(x-1)\geq 0 \quad \text{και} \quad x\neq 1\} \\ &= \{x\in\mathbb{R}: \quad (x\leq 0 \quad \text{ή} \quad x\geq 1) \quad \text{και} \quad x\neq 1\} = \{x\in\mathbb{R}: \quad x\leq 0 \quad \text{ή} \quad x>1\} \\ &= (-\infty,0]\cup(1,+\infty) \end{aligned}$$

Για το πεδίο ορισμού της g έχουμε $D(g)=\{x\in\mathbb{R}: \quad x\geq 0 \quad \text{και} \quad x>1\}=\{x\in\mathbb{R}: \quad x>1\}=(1,+\infty)$. Αφού $D(f)\neq D(g)$, τότε $f\neq g$.

Παρατήρηση για επιπλέον ανάλυση: Παρατηρούμε ότι υπάρχει κοινό πεδίο ορισμού των f, g, το διάστημα $A=D(f)\cap D(g)=(1,+\infty)$. Για κάθε $x\in A$ έχουμε ότι $x>0$ και $x>1$, οπότε

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}=g(x) \qquad \forall x\in A$$

Οπότε αν περιορίσουμε τις τιμές του x στο διάστημα A έχουμε ότι $f=g$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

Άσκηση 5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού για κάθε μια από τις συναρτήσεις f, g, f/g, g/f και $f+g$.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα τα πεδία ορισμού των f, g καθώς και το κοινό πεδίο ορισμού τους. Έχουμε

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x\in\mathbb{R}: \quad 4-x^2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: \quad x^2-4\leq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: \quad -2\leq x\leq 2\}=[-2,2] \\ D(g) &= \{x\in\mathbb{R}: \quad x\geq 0\}=[0,+\infty). \end{aligned}$$

$$A=D(f)\cap D(g)=\{x\in\mathbb{R}: \quad -2\leq x\leq 2 \quad \text{και} \quad x\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: \quad 0\leq x\leq 2\}=[0,2]$$

$$\begin{aligned} D(f+g) &= A=[-2,2] \\ D(f/g) &= A-\{x\in\mathbb{R}: \quad g(x)=0\}=A-\{x\in\mathbb{R}: \quad x=0\}=[0,2]-\{0\}=(0,2]. \\ D(g/f) &= A-\{x\in\mathbb{R}: \quad f(x)=0\}=A-\{x\in\mathbb{R}: \quad x^2=4\}=[0,2]-\{-2,2\}=[0,2). \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{2\,a^2\,x+a}{x+1-a}, \qquad g(x)=\frac{(3\,a-1)\,x+a}{x+a}.$$

Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός a έτσι ώστε οι συναρτήσεις f, g να είναι ίσες.

Λύση

Αρχικά θα πρέπει $D(f)=D(g)$. Έχουμε

$$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: \quad x\neq a-1\} \qquad \text{και} \qquad D(g)=\{x\in\mathbb{R}: \quad x\neq -a\}$$

Για να είναι $D(f) = D(g)$ πρέπει και αρκεί $a - 1 = -a \Leftrightarrow a = 1/2$. Για $a = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{x+1}{2x+1} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{(\frac{3}{2} - 1)x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

άρα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

Έτσι για $a = \frac{1}{2}$ έχουμε $D(f) = D(g) = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, συνεπώς για $a = \frac{1}{2}$ οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.