Ασκήσεις 21/11/2012

Άσκηση 1

Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$ β) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$ γ) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

δ) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$ ε) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx$ στ) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

Λύση

α) Θέτουμε $\sin x = t$ ...

Απ: $3(\sin x)^{1/3} = 3\sqrt[3]{\sin x}$

β) Θέτουμε $\cos x = t$ ...

Απ. $\frac{1}{\cos x} + c$

γ) Θέτουμε $\sqrt{\ln x} = t$ Απ. $\frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + c$.

δ) Θέτουμε $e^x = t$ Απ. $\ln(1+e^x) + c$.

ε) Θέτουμε $e^{2x} = t$ Απ. $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + c$.

στ). Θέτουμε $\ln x = t$ Απ $\ln|\ln x| + c$.

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα

α) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$ β) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2}$ γ) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$

Λύση

α) $\displaystyle\frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ (με το γνωστό σας "σπάσιμο" με την θεωρία πολυωνύμων)

οπότε

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = -\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

β) Γενικά για

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + c & n \neq 1 \\ \ln|x-a| + c & n = 1 \end{cases}$$

οπότε $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)^2} = -\frac{1}{x+2} + c.$

γ) x^2+2x+3 δεν έχει πραγματικές ρίζες οπότε
$x^2+2x+3 = (x+1)^2 + (\sqrt{2})^2$

Θέτουμε $t = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$ και γίνεται $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2}\,dt}{2(t^2+1)}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1} t + c$

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα αόριστα ολοκληρώματα.

a) $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, b) $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Λύση

a) Θέτουμε $(1+x^2)^{1/2} = t - x \Rightarrow (1+x^2) = (t-x)^2 \Rightarrow$

$$1 + \cancel{x^2} = t^2 - 2tx + \cancel{x^2} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{2t}$$

οπότε:

$$\sqrt{1+x^2} = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{2t^2-t^2+1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

$dx = \frac{2(t^2+1)}{4t^2} dt$ άρα

$$I_1 = \int \frac{2t}{t^2+1} \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c \Rightarrow I_1 = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + c.$$

b) Ομοίως, $(x^2-1)^{1/2} = t - x$ ..... $x = (t^2+1)/(2t)$

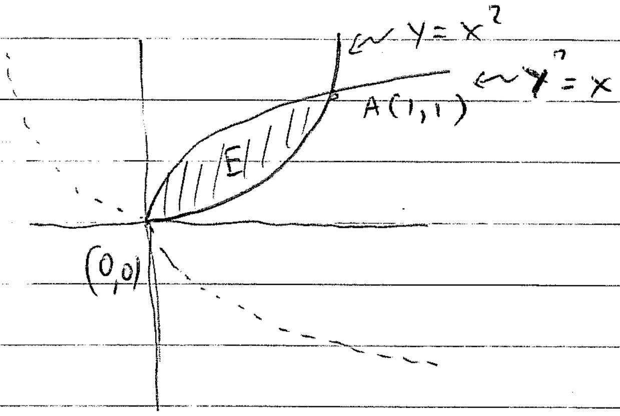
$dx = \frac{2(t^2-1)}{4t^2} dt$ και $\sqrt{x^2-1} = \frac{t^2-1}{2t}$.

$$I_2 = \int \frac{2t}{t^2-1} \frac{2(t^2-1)}{4t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + c.$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από τις παραβολές $y=x^2$, $y^2=x$.

Λύση



Το εμβαδό είναι στο χωρίο κάτω από την $g(x)=\sqrt{x}$ και πάνω από την $f(x)=x^2$.

Τα σημεία τομής των δύο καμπυλών βρίσκονται λύνοντας το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y^2=x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ x^4=x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ x(x^3-1)=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ x(x-1)(x^2+x+1)=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=0 \text{ ή } y=1 \\ x=0 \text{ ή } x=1 \end{array}$$

δηλαδή οι καμπύλες τέμνονται στα $(0,0)$, $(1,1)$.

$$|E|=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left[\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}$$

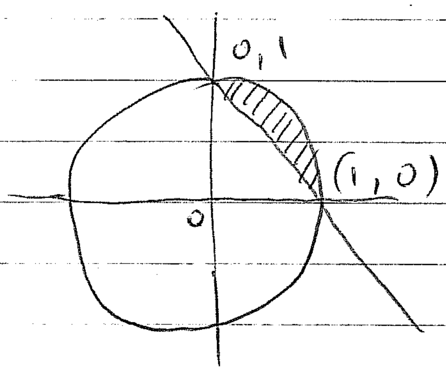
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο $x^2+y^2=1$ και την ευθεία $x+y=1$

Λύση

Το ζητούμενο εμβαδό περιορίζεται από την $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ και την $g(x)=1-x$ την ευθεία $x=0$ και $x=1$.



$$|E| = \int_0^1 \left|\sqrt{1-x^2} - (1-x)\right| dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x^2)^{1/2} dx - \int_0^1 (1-x)\, dx = I_1 + I_2$$

• Για το $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2} dx$ θέτουμε $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t\, dt$

και έχουμε $$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt$$

οπότε

$$E = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \left[\cancelto{0}{\frac{\sin 2t}{2}}\right]_0^{\pi/2} - \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left[1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 2}{4}$$

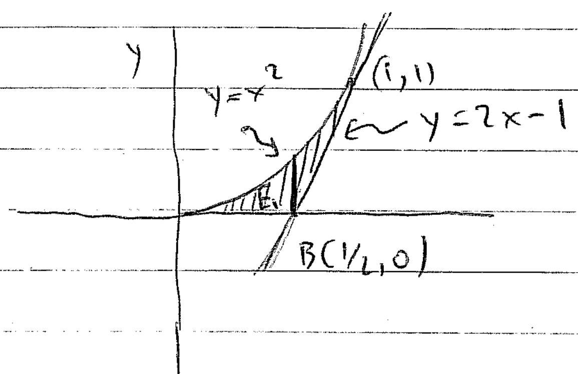
Άσκηση 6

Να βρεθεί το εμβαδό που περικλείεται από την παραβολή $y=x^2$, τον άξονα των x και την εφαπτομένη της παραβολής στο $A(1,1)$.

Λύση

Εξίσωση εφ. στο $(1,1)$ της $f(x)=x^2$:

$$(y-1) = f'(x)\big|_{x=1}(x-1) = y-1 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x-1$$



Το εμβαδό χωρίζεται σε δυο μέρη:

$$E = E_1 + E_2$$

$$E_1 = \int_0^{1/2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{3}\frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{24}$$

$$E_2 = \int_{1/2}^{1}\left(x^2 - (2x-1)\right)dx = \left[x^3 - x^2 + x\right]\Big|_{x=1/2}^{x=1}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(\frac{1}{3}\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right]$$

Άρα $E = E_1 + E_2 = \cancel{\frac{1}{24}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{24}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$