Ασκήσεις 24/10/2012

Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι η ευθεία $y=-x$ εφάπτεται στο διάγραμμα της $f(x)=x^2+3x+4$ και να βρεθεί το σημείο επαφής.

Λύση

Αν η ευθεία $y=-x$ εφάπτεται στο διάγραμμα της f θα πρέπει να υπάρχει σημείο $M(x_0,y_0)$ ώστε:

1) Η εφαπτομένη της f στο M να είναι παράλληλη προς την $y=-x$, δηλαδή να έχουν το ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Ο συντελεστής διεύθυνσης της $y=-x$ είναι -1 και ο συντ. διευθ. της εφαπτομένης της f είναι $f'(x_0)=2x_0+3$. Οπότε θα πρέπει $2x_0+3=-1$ (1)

και

2) Το $M(x_0,y_0)$ να βρίσκεται στο διάγραμμα της f και στην ευθεία $y=-x$ δηλ.

$y_0=-x_0$ (2) Από (1), (2) θα έχουμε:

$y_0=x_0^2+3x_0+4$ (3)

$x_0=-2$, $y_0=2$. Και θα πρέπει να ικανοποιείται και η σχέση (3)

$2=(-2)^2+3(-2)+4 \Rightarrow 2=4-6+4 \Rightarrow 2=2$ άρα αληθεύει η (3)

Οπότε το σημείο επαφής είναι το $M(-2,2)$.

Άσκηση 2

Να δειχθεί ότι στην παραβολή $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ η χορδή που περνά από τα σημεία με τετμημένες α και β είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της f στο σημείο $M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$

Λύση

Η χορδή που διέρχεται από τα σημεία με τετμημένες α, β έχει συντελεστή διευθ.

$$\lambda_x = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \ldots\ldots = \beta+2\alpha.$$

Η εφαπτομένη της f στο $M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$

έχει συντ. διευθ. την τιμή της $f'(x)$ στο $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$f'(x)=2x+\alpha \Rightarrow \quad \lambda_{\varepsilon\varphi} = 2\,\frac{\alpha+\beta}{2}+\alpha = \beta+2\alpha$

Θα πρέπει $\lambda_x=\lambda_\varepsilon$, που ισχύει.

Άσκηση 3

Αν $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ να δειχθεί ότι ισχύει

$$x y'' + \frac{1}{2} y' - \frac{1}{4} y = 0.$$

Λύση

$$y' = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \right)$$

$$y'' = \frac{1}{2} \left[\frac{\left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \right)' \sqrt{x} - \left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \right) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \right] =$$

$$= \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}} \left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}} \right) \cancel{\sqrt{x}} - \left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \right) \frac{1}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$= \frac{1}{4x} \underline{\left(e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}} \right)} - \frac{1}{4x} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} \right) \Rightarrow$$

$$x y'' = \frac{1}{4} y - \frac{1}{2} y' \Rightarrow$$

$$x y'' + \frac{1}{2} y' - \frac{1}{4} y = 0. \quad \text{άρα ισχύει.}$$

Άσκηση 4

Αν $f(x) = \sin x$, $g(t) = f(t^2-1)$ να υπολογισθεί η $g'(1)$.

Λύση

$f(t^2-1) = \sin(t^2-1)$ άρα $g(t) = \sin(t^2-1)$

$g'(t) = \cos(t^2-1)\,(2t)$ οπότε

$g'(1) = 2\cdot 1\cdot \cos 0 = 2.$

Άσκηση 5

Να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

α) $f(x) = x^x$, β) $f(x) = (x^2+1)^{x^2}$, γ) $f(x) = (\ln x)^x$

δ) $f(x) = 5^{\sin x}$.

Λύση

α) $f(x) = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x} \Rightarrow f'(x) = f(x)\,(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

β) $f'(x) = e^{\ln(x^2+1)^{x^2}} = e^{x^2\ln(x^2+1)} \Rightarrow f'(x) = f(x)\cdot 2x\left(\ln(x^2+1) + \frac{x^2}{x^2+1}\right)$

γ) με όμοιο τρόπο $f'(x) = (\ln x)^x\left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)$

δ) $f'(x) = 5^{\sin x}\ln 5\,.\,\cos x.$

Άσκηση 6

Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{x^2 e^x \cos x}{x+1}$$

Λύση

$$f'(x)=\frac{(x^2 e^x \cos x)'(x+1)-x^2 e^x \cos x\,(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(2x e^x \cos x + x^2 e^x \cos x - x^2 e^x \sin x)(x+1) - x^2 e^x \cos x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{((2x e^x + x^2 e^x)\cos x - x^2 e^x \sin x)(x+1) - x^2 e^x \cos x}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x e^x \cos x (x+1) + x^2 e^x \cos x (x+\cancel{1}) - x^2 e^x \sin x (x+1) \cancel{- x^2 e^x \cos x}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x e^x [(x^2+2x+2)\cos x - x(x+1)\sin x]}{(x+1)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}$.

Άσκηση 7

Να βρεθεί η παράγωγος για καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^3e^x$ β) $f(x)=\dfrac{x^2}{\ln x}$ γ) $f(x)=e^x\cos x$

δ) $f(x)=x^3\ln x-\frac{1}{3}x^3$, ε) $f(x)=(x-1)2^x$ στ) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$

Λύση

α) $f'(x)=(x^3e^x)'=3x^2e^x+x^3e^x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

β) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{\ln x}\right)'=\dfrac{2x\ln x-x^2\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}$ $x\in(0,+\infty)$

γ) $f'(x)=(e^x\cos x)'=e^x\cos x-e^x\sin x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

δ) $f'(x)=(x^3\ln x)'-\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=3x^2\ln x+\cancel{x^3\frac{1}{x}}-\cancel{x^2}=$

$=3x^2\ln x.$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ε) $f'(x)=(x-1)'2^x+(x-1)(2^x)'=2^x+(x-1)2^x\ln 2$ $\forall x\in\mathbb{R}$

στ) $f'(x)=\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)'=\dfrac{e^xx^2-e^x2x}{x^4}=\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$ $\forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$

Άσκηση 8

Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

Να βρεθεί η παράγωγος της f σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει.

Λύση

Για $x\neq 0$ έχουμε: $f'(x)=\left(\dfrac{x}{1+e^{1/x}}\right)'=\dfrac{1\,(1+e^{1/x})-x(1+e^{1/x})'}{(1+e^{1/x})^2}$

$$=\frac{1+e^{1/x}-x\,e^{1/x}\left(\frac{1}{x}\right)'}{(1+e^{1/x})^2}=\frac{1+e^{1/x}+\frac{1}{x}e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2}$$

Για $x=0$ έχουμε

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+e^{1/x}}$$

Όμως όταν $x\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x}\to +\infty \Rightarrow e^{1/x}\to +\infty \Rightarrow 1+e^{1/x}\to +\infty$
$\Rightarrow \frac{1}{1+e^{1/x}}\to 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{1/x}}=0.$

Όταν $x\to 0^- \Rightarrow \frac{1}{x}\to -\infty \Rightarrow e^{1/x}\to 0 \Rightarrow 1+e^{1/x}\to 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{1/x}}=1$

Άρα $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ άρα το $f'(0)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 9

Αν $y = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x)$ να δειχθεί ότι

$y'' + k^2 y = 0$

Λύση

$y' = -a\lambda\sin(\lambda x) + b\lambda\cos\lambda x$

$y'' = -a\lambda^2\cos(\lambda x) - b\lambda^2\sin(\lambda x)$

$= -\lambda^2(a\cos(\lambda x) + b\cos(\lambda x)) = -\lambda^2 y$

Άρα

$$y'' + \lambda^2 y = 0.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η καμπύλη $x^3 + y^3 = 3xy$ στο επίπεδο. Να βρεθεί η παράγωγος της $y = f(x)$ ως μια έκφραση των x, y και η εφαπτ. στο $(3/2, 3/2)$

Λύση

$(x^3+y^3)' = (3xy)' \Rightarrow \cancel{3}x^2 + \cancel{3}y^2y' = \cancel{3}y + \cancel{3}xy' \Rightarrow$

$\Rightarrow (y^2 - x)y' = y - x^2 \Rightarrow \quad y' = \dfrac{y-x^2}{y^2-x}.$

$y'(3/2, 3/2) = -1$ άρα $y - 3/2 = -(x - 3/2) \Rightarrow \boxed{y = -x + 3}$

Άσκηση 10

Να βρεθούν οι κλίσεις των εφαπτομένων της καμπύλης

$$y^2 - x + 1 = 0$$

στα σημεία $(2,-1)$, $(2,1)$

Λύση

Αν $y = f(x)$ τότε $f'(x) = y'$ είναι η κλίση της f με τον άξονα των x.

$$2yy' - 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y}$$

$$y'\Big|_{\substack{x=2\\y=-1}} = -1/2, \quad y'\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = 1/2$$

Άσκηση 11

Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος της $y = f(x)$ η οποία δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή ως $4x^2 - 2y^2 = 9$ σε συνάρτηση των (x,y).

Λύση

$$4x^2 - 2y^2 = 9 \Rightarrow 8x - 4yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x}{y}$$

$$y'' = \frac{2y - 2xy'}{y^2} = \frac{2y - 2x\left(2x/y\right)}{y^2} = \frac{2y^2 - 4x^2}{y^3} =$$

$= -9/y^3$ αν λάβουμε υπόψη την $4x^2 - 2y^2 = 9$.