Ασκήσεις 25/09/2019.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} \beta+(x-\alpha) & \text{αν } x\geq \alpha \\ \beta+\lambda(x-\alpha) & \text{αν } x<\alpha \end{cases}$$

Να προσδιοριστεί κατάλληλα το λ έτσι ώστε να υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρεθεί ο τύπος της f^{-1}.

Λύση

Για να υπάρχει η f^{-1}, η f πρέπει να είναι "1-1". Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) $\forall x_1,x_2\in[\alpha,+\infty)$ με $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$. Έχουμε $x_1\neq x_2 \Rightarrow x_1-\alpha\neq x_2-\alpha \Rightarrow \beta+(x_1-\alpha)\neq \beta+(x_2-\alpha)\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ και αυτό συμβαίνει ανεξάρτητα από το λ.

β) $\forall x_1,x_2\in(-\infty,\alpha)$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Έχουμε $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \beta+\lambda(x_1-\alpha)=\beta+\lambda(x_2-\alpha)\Rightarrow \lambda(x_1-x_2)=0$ και για να ισχύει $x_1=x_2$ θα πρέπει $\underline{\lambda\neq 0}$.

γ) $\forall x_1\in[\alpha,+\infty)$ και $\forall x_2\in(-\infty,\alpha)$ όπου $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$. Έχουμε $\beta+(x_1-\alpha)\neq \beta+\lambda(x_2-\alpha) \Leftrightarrow x-\alpha\neq \lambda(x_2-\alpha)$ κι επειδή $x_2\neq\alpha$ πρέπει $\lambda\neq \dfrac{x_1-\alpha}{x_2-\alpha}$ όπου $x_1\geq\alpha$, $x_2<\alpha$ δηλαδή $x_1-\alpha\geq 0$, $x_2-\alpha<0$

οπότε το $\underbrace{(x_1-\alpha)/(x_2-\alpha)}^{\leq 0}$ εκφράζει τον τυχαίο μη-θετικό αριθμό.

Συνεπώς για να είναι $\lambda \neq \frac{x_1-a}{x_2-a}$ πρέπει και αρκεί $\lambda>0$.

Από την παραπάνω ανάλυση έχουμε ότι με $\lambda>0$ η f είναι "1-1", άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Εύρεση του τύπου της f^{-1}:

$$\left.\begin{matrix} y=b+(x-a) \\ x\geq a \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x=a+(y-b) \\ a+(y-b)\geq a \end{matrix}\right\} \left. x\leftrightarrow y \right\} \begin{matrix} y=a+(x-b) \\ x\geq b. \end{matrix} \quad (1)$$

$$\left.\begin{matrix} y=b+\lambda(x-a) \\ x<a \\ \lambda>0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x=a+\frac{1}{\lambda}(y-b) \\ a+\frac{1}{\lambda}(y-b)<a \\ \lambda>0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x=a+\frac{1}{\lambda}(y-b) \\ y-b<0 \\ \lambda>0 \end{matrix}\right\} x\leftrightarrow y$$

$$\begin{matrix} y=a+\frac{1}{\lambda}(x-b) \\ x<b \\ \lambda>0. \end{matrix} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) έχουμε:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} a+(x-b) & \text{αν} \quad x\geq b \\ a+\frac{1}{\lambda}(x-b) & \text{αν} \quad x<b,\ \lambda>0. \end{cases}$$

Άσκηση 2 (σύνθεση)

Αν $f(2x+3)=x^2+1$ να βρεθεί ο τύπος της f.

Λύση

Έστω $g(x)=2x+3$ ή $t=2x+3$ τότε $D(g)=\mathbb{R}$, $R(g)=\mathbb{R}$ και η g είναι "1-1" άρα για κάθε $t\in\mathbb{R}$ υπάρχει ένα μόνο $x\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε $x=\frac{t-3}{2}$

Τότε η $f(2x+3)=x^2+1$ δίνει

$$f(t)=\left(\frac{t-3}{2}\right)^2+1 \Rightarrow f(t)=\frac{1}{4}(t^2-6t+13) \text{ ή }$$

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{13}{4} \quad \text{με} \quad D(f)=R(g)=\mathbb{R}.$$

Άσκηση 3

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $D(f)=[0,5]$
Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x^2-4)$.

Λύση

Θέτουμε $g(x)=x^2-4$ τότε $D(g)=\mathbb{R}$ και

$f(x^2-4)=f(g(x))=(f\circ g)(x)$.

Άρα $D(f\circ g)=\{x\in D(g):\ g(x)\in D(f)\}=\{x\in\mathbb{R}:\ g(x)\in[0,5]\}$.

Αλλά $g(x)\in[0,5] \Rightarrow 0\le x^2-4\le 5 \Rightarrow 4\le x^2\le 9 \Rightarrow$

$2\le |x|\le 3 \Rightarrow (2\le x\le 3$ ή $2\le -x\le 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow (2\le x\le 3$ ή $-3\le x\le -2)$.

Οπότε

$D(f\circ g)=\{x\in\mathbb{R}:\ 2\le x\le 3$ ή $-3\le x\le -2\}$ ή

$D(f\circ g)=[-3,-2]\cup[2,3]$.

Άσκηση 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{αν } x\le 3 \\ 5-x^2 & \text{αν } x>3 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} 7-x & \text{αν } x>2 \\ 2x+5 & \text{αν } x\le 2. \end{cases}$$

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f\circ g$.

Λύση

α) Αν $x>2$ τότε $g(x)=7-x$ οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις (α.1) και αν $g(x)\le 3 \Rightarrow 7-x<3 \Rightarrow x\ge 4$ τότε η συναλήθευση των $x>2$ και $x\ge 4$ δίνει $x\ge 4$. Άρα για $x\ge 4$ έχουμε

$$f\circ g(x)=f(g(x))=g(x)+1=7-x+1=8-x$$

(α.2) και αν $g(x)>3 \Rightarrow 7-x>3 \Rightarrow x<4$ τότε οι ανισότητες $x<4$ και $x>2$ συναληθεύουν $2<x<4$ κι έχουμε

$$f\circ g(x)=f(g(x))=5-g^2(x)=5-(7-x)^2=-x^2+14x-44.$$

β) Αν $x\le 2$ τότε $g(x)=2x+5$ οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις (β.2) και αν $g(x)\le 3 \Rightarrow 2x+5\le 3 \Rightarrow x\le -1$ τότε οι $x\le -1$ και $x\le 2$ δίνουν $x\le -1$. Άρα με $x\le -1$ έχουμε

$$f\circ g(x)=f(g(x))=g(x)+1=2x+5+1=2x+6.$$

(β.2) κι αν $g(x)>3 \Rightarrow 2x+5>3 \Rightarrow x>-1$ κι η συναλήθευση των $x\leq 2$ και $x>-1$ δίνει $-1<x\leq 2$ και άρα για $-1<x\leq 2$ έχουμε

$$f\circ g(x)=f(g(x))=5-g^2(x)=5-(2x+5)^2=-4x^2-20x-20$$

Οπότε συνολικά για τον τύπο της $f\circ g$ έχουμε:

$$f\circ g(x)=\begin{cases} 8-x & \text{αν } x\geq 4 \\ -x^2+14x-44 & \text{αν } 2<x<4 \\ 2x+6 & \text{αν } x\leq -1 \\ -4x^2-20x-20 & \text{αν } -1<x<2 \end{cases}$$

Άσκηση 5

Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

Λύση

i) Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow$

$$x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1 > x_2^2+1 \Rightarrow \frac{1}{x_1^2+1} < \frac{1}{x_2^2+1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα $f \nearrow$ στο $(-\infty, 0]$.

ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $0 \leq x_1 < x_2$ έχουμε

$$x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow x_1^2+1 < x_2^2+1 \Rightarrow \frac{1}{x_1^2+1} > \frac{1}{x_2^2+1} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

άρα η $f \searrow$ στο $[0, +\infty)$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f.

Λύση

Επειδή $D(f)=\mathbb{R}$ το πεδίο τιμών της f είναι

$$R(f)=\left\{y\in\mathbb{R}:\ \exists x\in\mathbb{R}:\ y=\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right\}=\{y\in\mathbb{R}:\ \exists x\in\mathbb{R}:$$

$$(y-1)x^2+(y+2)x+(y-1)=0 \quad (1)\ \}.$$

Αλλά για να υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ που να επαληθεύει την (1) θα πρέπει η Δ του τριωνύμου (1) να είναι ≥ 0 ή

$$(y+2)-4(y-1)\geq 0 \Rightarrow y(y-4)\leq 0 \Rightarrow 0\leq y\leq 4$$

Άρα η ελάχιστη τιμή της f είναι $y_{min}=0$, και η μέγιστη $y_{max}=4$.

Άσκηση 7

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν } |x|\leq 1 \\ 0 & \text{αν } |x|>1 \end{cases}, \quad g(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{αν } |x|\leq 2 \\ 2 & \text{αν } |x|>2. \end{cases}$$

Να βρεθεί ο τύπος για καθεμιά από τις συναρτήσεις $f\circ f$, $g\circ f$, $f\circ g$, $g\circ g$.

Λύση

α) Για την $(f\circ f)(x)=f(f(x))$ έχουμε ότι για κάθε x με $|x|\leq 1$ τότε $f(x)=1\in[-1,1]$ άρα $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=1$.

Για κάθε x με $|x|>1$ έχουμε $f(x)=0\in[-1,1]$ άρα $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(0)=1$. Συνεπώς

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $(f\circ f)(x)=1$.

β) Για την $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ έχουμε ότι για κάθε x με $|x|\leq 1$ τότε $f(x)=1$ δηλαδή $|f(x)|\leq 2$ άρα $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(1)=2-1^2=1$

Για κάθε x με $|x|>1 \Rightarrow f(x)=0$ άρα

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(0)=2-0^2=2$ οπότε

$$g\circ f=\begin{cases} 1 & \text{αν } |x|\leq 1 \\ 2 & \text{αν } |x|>1. \end{cases}$$

γ) Για την $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ έχουμε:

(γ₁) Αν $|x| \le 2$ τότε $g(x) = 2 - x^2$

Αν $|g(x)| \le 1 \Rightarrow |2-x^2| \le 1 \Rightarrow -1 \le 2 - x^2 \le 1 \Rightarrow \ldots 1 \le x^2 \le 3 \Rightarrow$

$1 \le |x| \le \sqrt{3}$. Οι ανισότητες

$|x| \le 2$ και $1 \le |x| \le \sqrt{3}$ συναληθεύουν

για $1 \le |x| \le \sqrt{3}$. Τότε $|g(x)| \le 1$ και η

$f(g(x))$ έχει τιμή 1.

Άρα

- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 1$ αν $1 \le |x| \le \sqrt{3}$.

Αν $|x| \le 2$ τότε $g(x) = 2 - x^2$. Αν $|g(x)| > 1 \Rightarrow$

$|2-x^2| > 1 \Rightarrow (2 - x^2 > 1$ ή $2 - x^2 < -1) \Rightarrow \ldots (|x| < 1$ ή $|x| > \sqrt{3})$

Η συναλήθευση των ανισοτήτων

$|x| \le 2$ με $(|x| < 1$ ή $|x| > \sqrt{3})$ δίνει

$(|x| < 1$ ή $\sqrt{3} \le |x| \le 2)$ όπου σε αυτό το διάστημα

$f(x) = 0$ άρα

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 0$ αν $|x| \le 1$ ή $\sqrt{3} < |x| \le 2$.

(γ2) Αν $|x|>2$ τότε $g(x)=2$.

Άρα $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2) = 0$.

Από (γ1), (γ2) έχουμε:

$$(f\circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 1\leq |x| \leq \sqrt{3} \\ 0 & \text{αν } |x|<1 \text{ ή } |x|>\sqrt{3} \end{cases}$$

δ) Με όμοιους συλλογισμούς όπως προηγουμένως

$$(g\circ f)(x) = \begin{cases} -x^4-4x^2-2 & \text{αν } |x|\leq 2 \\ -2 & \text{αν } |x|>2. \end{cases}$$