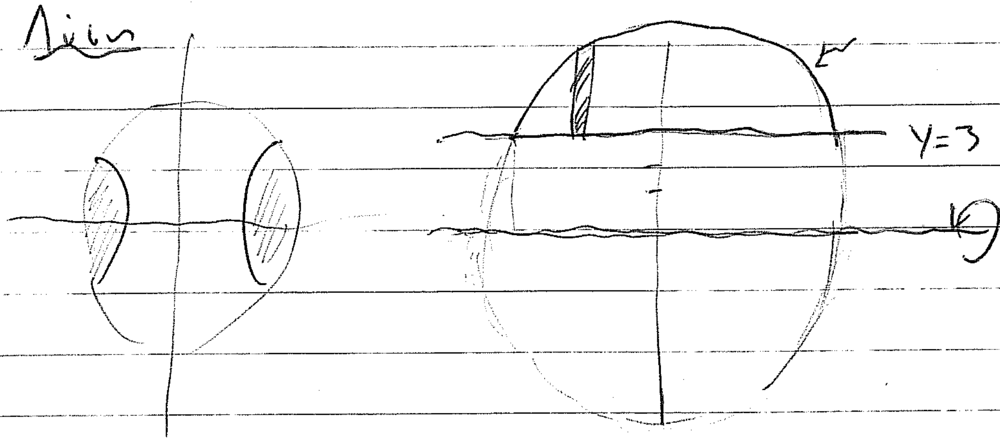
Άσκηση 1

Ένας κατασκευαστής ανοίγει μια οπή στο κέντρο μιας μεταλλικής σφαίρας ακτίνας 5 cm. Η οπή έχει ακτίνα 3 cm. Ποιος είναι ο όγκος του κομ. της σφαίρας που μένει?

Λύση



Το δακτυλίδι που παράγεται μπορεί να θεωρηθεί ότι γεννιέται από ένα κύκλο $x^2+y^2=25$ και την ευθεία $y=3$. Τα σημεία τομής είναι

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ y=3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x^2+9=25 \\ y=3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=\pm 4 \\ y=3 \end{array}\right\} \quad (-4,3),\ (4,3)$$

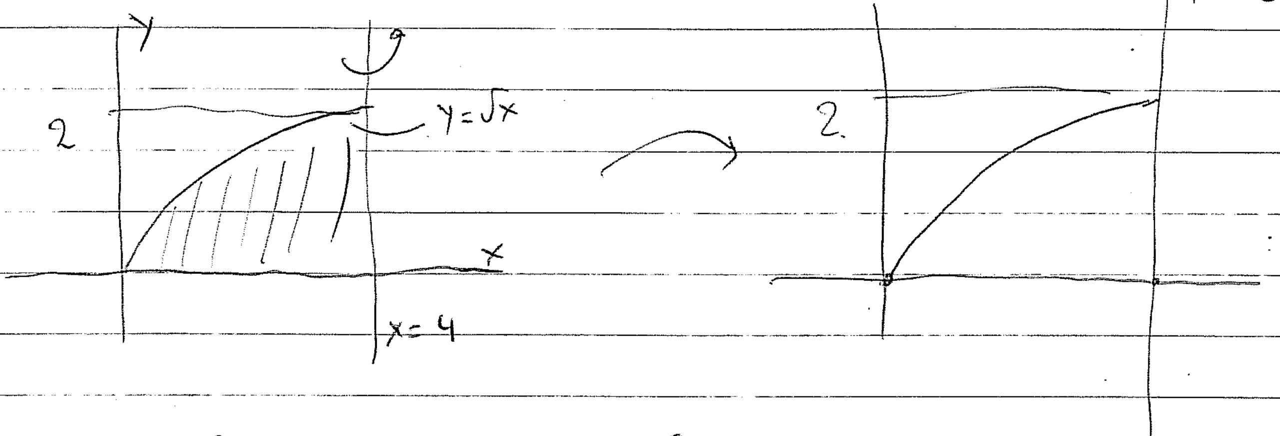
$$V=\pi\int_a^b \left(R^2(x)-r^2(x)\right)dx=\pi\int_{-4}^{4}\left((25-x^2)-3^2\right)dx=\pi\int_{-4}^{4}(16-x^2)\,dx$$

$$=\pi\left(16x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-4}^{4}=\frac{256\pi}{3}.$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο όγκος στερεού που παράγεται από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την $y=\sqrt{x}$, $x=4$ και $y=0$ γύρω από την ευθεία $x=4$.

Λύση

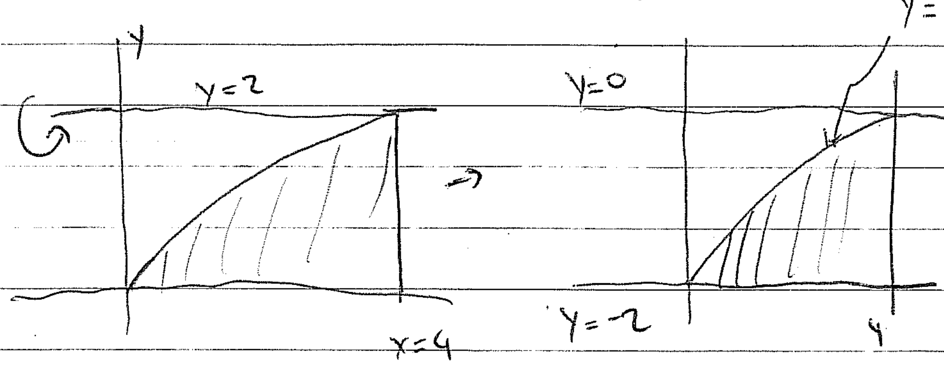


$$V=\pi\int_0^2 (y^2-4)^2\,dy=\pi\int_0^2 (y^4-8y^2+16)\cdot dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^5}{5}\Big|_0^2-\frac{8y^3}{3}\Big|_0^2+16x\Big|_0^2\right]=$$

$$=\dots\ \pi\,\frac{256}{15}$$

→ Γύρω από την ευθεία $y=2$.



$$V=\pi\int_0^4\left[(-2)^2-(\sqrt{x}-2)^2\right]dx$$

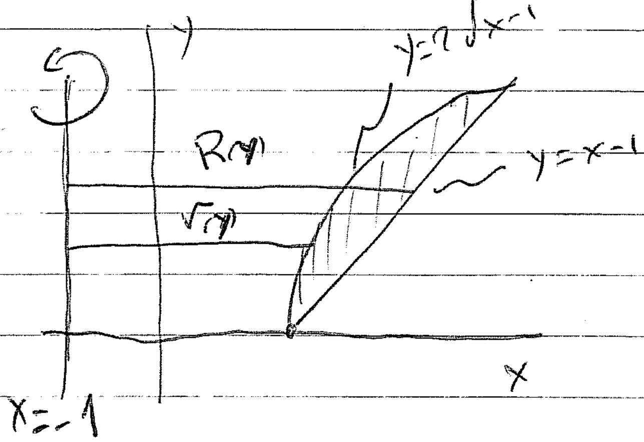
$$=\pi\int_0^4(\cancel{4}-x+4\sqrt{x}-\cancel{4})\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{8x^{3/2}}{3}\Big|_0^4-\frac{x^2}{2}\Big|_0^4\right]=\frac{40\pi}{3}$$

Άσκηση 3

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y=2\sqrt{x-1}$ και $y=x-1$ γύρω από την ευθεία $x=-1$.

Λύση



Σημεία τομής των καμπυλών:

$$\left.\begin{array}{l} y=2\sqrt{x-1} \\ y=x-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y^2=4(x-1) \\ y=x-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y^2=4y \\ y=x-1 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(y-4)=0 \\ x=y+1 \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} x=1,\ y=0 \\ x=5,\ y=4 \end{array}\right\}$$

Αφού η περιστροφή γίνεται γύρω από $x=-1$ λύνουμε τις εξισώσεις ως προς x. Άρα

$x=y+1$, $x=\dfrac{y^2}{4}+1$ και έχουμε για τις αποστάσεις από τον άξονα $x=-1$

$r(y)=y+1+1=y+2$

$R(y)=\dfrac{y^2}{4}+1+1=\dfrac{y^2}{4}+2$

Ο όγκος είναι:

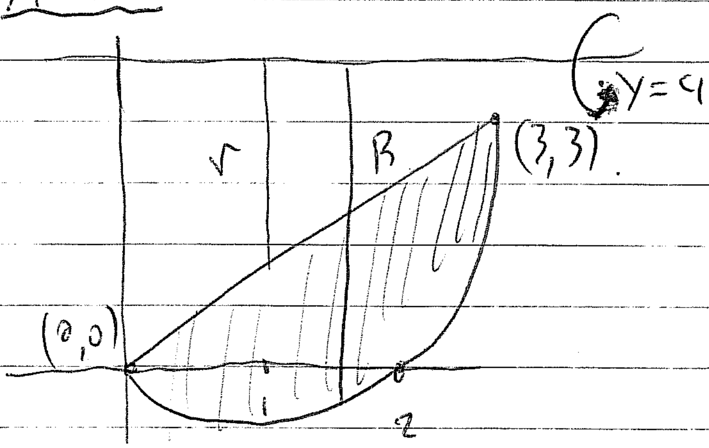
$$V=\int_0^4 \pi\left[(y+2)^2-\left(\frac{y^2}{4}+2\right)^2\right]dy$$

$$=\int_0^4 \pi\left(4y-\frac{y^4}{16}\right)dy=\pi\, 2y^2\Big|_0^4-\frac{1}{80}y^5\Big|_0^4=\frac{96\pi}{5}$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x^2-2x$ και $y=x$ γύρω από την ευθεία $y=4$

Λύση



Τα σημεία τομής είναι:

$$\begin{cases} y=x^2-2x \\ y=x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x=x \\ y=x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-3x=0 \\ y=x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-3)=0 \\ y=x \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0, & y=0 \\ x=3 & y=3 \end{matrix}$$

Αφού η περιστροφή γίνεται γύρω από την $y=4$ θα λύσουμε ως προς x (που είναι ήδη λυμένες)

Οι αποστάσεις $r(x)$, $R(x)$ είναι:

$$\begin{cases} r(x) = 4-y = 4-x \\ R(y) = 4-y = 4-x^2+2x \end{cases}$$

Ο όγκος είναι

$$V=\pi\int_0^3\left[(-x^2+2x+4)^2-(4-x)^2\right]dx$$

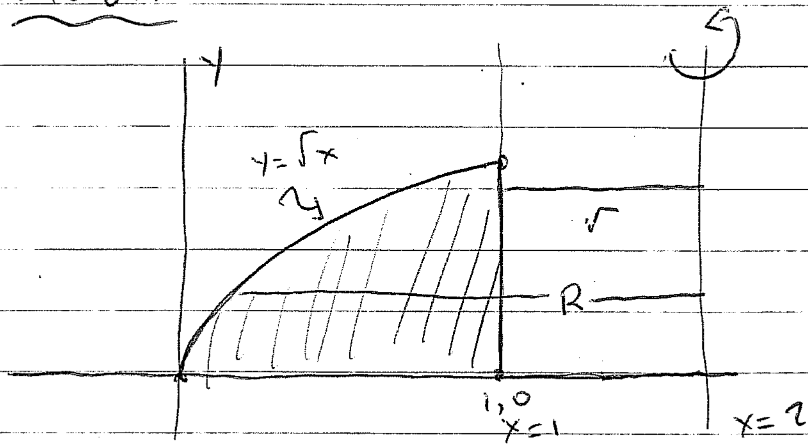
$$=\pi\int_0^3\left(x^4-4x^3-5x^2+24x\right)dy$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^3-x^4\Big|_0^3-\frac{5}{3}x^3\Big|_0^1+16x\Big|_0^3\right)=\frac{153\pi}{5}.$$

Άσκηση 5

Όπως προηγουμένως με χωρίο που ορίζεται από τις καμπύλες $y=\sqrt{x}$, $x=1$, $y=0$ γύρω από την ευθεία $x=2$

Λύση



Σημεία τομής
$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{x} \\ x=1 \\ y=0 \end{array}\right\} \quad (0,0),(1,0)(1,1)$$

Η περιστροφή γύρω από τον x οπότε λύνουμε τις εξισώσεις ως προς x. Άρα

$x=y^2$ και για τις αποστάσεις από το $x=2$
$x=1$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} r(y)=2-1=1 \\ R(y)=2-x=2-y^2 \end{array}\right\} \quad V=\int_0^1 \pi\left[(2-y^2)^2-1\right]=$$

$$=\ldots=\frac{28\pi}{15}.$$