Ασκήσεις 31/10/2012

Άσκηση 1

Να εξακριβώσετε ότι οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του 1ου ή 2ου κανόνα l'Hôpital ισχύουν και να βρεθούν με τον κατάλληλο κανόνα τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu^2 x}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x}$ γ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

δ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x}$ ε) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2}$ στ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\varepsilon\varphi(x) - x}{x - \eta\mu x}$

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to 0} \eta\mu^2 x = \lim\limits_{x\to} x = 0$ και στην περιοχή

$I=(a,0)\cup(0,b)$ έχουμε ότι $x\neq 0$ και $x' = 1 \neq 0$ για κάθε $x\in I$ και οι $\eta\mu^2 x$ και x είναι παραγωγίσιμες στο I. Εφαρμόζουμε τον 1ο κανόνα l'Hôpital κι έχουμε για τον λόγο των παραγώγων

$$\frac{(\eta\mu^2 x)'}{(x)'} = \frac{2\eta\mu x \cos x}{1} \xrightarrow{x\to 0} 0 \quad \text{Άρα}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\eta\mu^2 x)'}{(x)'} = 0.$$

β) Οι $\ln(\sigma\upsilon\nu x)$ και x ορίζονται σ' ένα διάστημα της μορφής $(a,0)\cup(0,b)$ και είναι παραγωγίσιμες στο I. Ακόμη $x\neq 0$ και $x' = 1 \neq 0$ $\forall x\in I$

Ακόμη

$$\lim_{x\to 0} \ln(\sigma\upsilon\nu x) = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Άρα μπορούμε και πάλι να εφαρμόσουμε τον 1ο κανόνα l'Hôpital κι έχουμε για τον λόγο των παραγώγων

$$\frac{(\ln(\sigma\upsilon\nu x))'}{x'} = \frac{-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{1} = -\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}{x} = \lim \frac{(\ln(\sigma\upsilon\nu x))'}{x'} = 1.$$

β) $(\log x)^2$, x παραγωγίσιμες σε διάστημα $I=(0,+\infty)$ $x\neq 0$ και $x'=1\neq 0$ $\forall x\in I$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\log x)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ οπότε θα εφαρμόσουμε τον δεύτερο κανόνα l'Hôpital, έχουμε

για τον λόγο των παραγώγων:

$$\frac{((\log x)^2)'}{x'} = \frac{2\log(x)\cdot\frac{1}{x}}{1} = \frac{2\log x}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{+\infty}{+\infty}$$

Αλλά οι $2\log x$ και x παραγωγίσιμες στο $I'=(0,+\infty)$ και $x\neq 0$, $x'=1\neq 0$ $\forall x\in I$ οπότε μπορούμε και πάλι να εφαρμόσουμε τον 2ο κανόνα l'Hôpital

$$\frac{(2\log x)'}{x'} = \frac{2\frac{1}{x}}{1} = \frac{2}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x}{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0.$$

δ) $\lim_{x\to 0}(e^x - \sigma\upsilon\nu x) = \lim_{x\to 0} \varepsilon\varphi x = 0$ Άρα $\frac{0}{0}$.

$I = (a,0)\cup(0,b)$ οι $e^x - \sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi x$ παραγωγίσιμες και $\varepsilon\varphi x \neq 0$ και $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ $\forall x \in I$

άρα θα εφαρμόσουμε τον 1º κανόνα l'Hôpital.

$$\frac{(e^x - \sigma\upsilon\nu x)'}{(\varepsilon\varphi x)'} = \frac{e^x + \eta\mu x}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = (e^x + \eta\mu x)\sigma\upsilon\nu^2 x \xrightarrow{x\to 0} 1$$

Άρα $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x} = 1$.

ε) Με παρόμοιο τρόπο $\left(\frac{0}{0}\right)$ 1ος καν. l'Hôpital.

$$\frac{(e^x + e^{-x} + 2)'}{(3x^2)'} = \frac{e^x - e^{-x}}{6x} \xrightarrow{x\to 0} \frac{0}{0}$$

Δεύτερη φορά εφαρμόζουμε l'Hôpital.

$$\frac{(e^x - e^{-x})'}{(6x)'} = \frac{e^x + e^{-x}}{6} \xrightarrow{x\to 0} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Άρα $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

στ). $\frac{0}{0}$ κι' εφαρμόζουμε 2º καν. l'Hôpital.

$$\frac{(\varepsilon\varphi x - x)'}{(x - \eta\mu x)'} = \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x(1 - \sigma\upsilon\nu x)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{0}{0}$$

$$\frac{(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x)'}{(\sigma\upsilon\nu^2 x(1 - \sigma\upsilon\nu x))'} = \frac{2}{-2 + 3\sigma\upsilon\nu x} \xrightarrow{x\to 0} \frac{2}{-2+3} = 2.$$

άρα $\lim_{x\to 0} \frac{\varepsilon\varphi x - x}{x - \eta\mu x} = 2$.

Άσκηση 2

Να υπολογισθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^4}$ β) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημ3x}{1-συν4x}$, γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^7-6x^6+x}{(x-1)^2}$

Λύση

α) $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ οπότε θα εφαρμόσουμε 2ο κανόνα l'Hopital.

$$\frac{(e^x)'}{(x^4)'} = \frac{e^x}{4x^3} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{(e^x)'}{(4x^3)'} = \frac{e^x}{12x^2} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\frac{(e^x)'}{(12x^2)'} = \frac{e^x}{24x} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{(e^x)'}{(24x)'} = \frac{e^x}{24} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^4} = +\infty$

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτέλεσμα ~~στο~~ που δείξαμε στην τάξη

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{a^x} = 0$ $b>0$, $a>1$ με $a=e$, $b=4$.

και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4}{e^x} = 0$ τότε $\lim \dfrac{e^x}{x^4} = +\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to} \dfrac{ημ3x}{1-συν4x} = \dfrac{0}{0}$

Οι $ημ3x$ και $1-συν4x$ παραγωγίσιμες στο $I=(α,0)\cup(0,β)$ και $1-συν4x \neq 0$ και $(1-συν4x)' = 4ημ4x \neq 0$ $\forall x\in I$ άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον 1ο καν. l'Hopital.

Αλλά!

$\dfrac{(ημ3x)'}{(1-συν4x)'} = \dfrac{3συν3x}{4ημ4x}$ όμως

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3συν3x}{4ημ4x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3συν3x}{4ημ4x} = -\infty$

οπότε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3συν3x}{4ημ4x}$ δεν υπάρχει!

Αλλά δεν μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι το αρχικό όριο δεν υπάρχει γιατί το αντίστροφο του καν. l'Hôpital δεν ισχύει. Το όριο πρέπει να υπολογισθεί αλλιώς...

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημ3x}{1-συν4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημ3x}{2ημ^2 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\frac{ημ3x}{3x}\right)3x}{2\left(\frac{ημ2x}{2x}\right)^2 4x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{8x} \cdot \dfrac{\frac{ημ3x}{3x}}{\left(\frac{ημ2x}{2x}\right)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{8x} \cdot \dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{ημ3x}{3x} \to 1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{ημ2x}{2x}\right)^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{8x}$

όμως γνωρίζουμε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

άρα το αρχικό όριο δεν υπάρχει.

γ). $\frac{0}{0}$ 1ος καν. l'Hôpital.

$$\frac{(5x^7-6x^6+x)'}{((x-1)^2)'} = \frac{35x^6-36x^5+1}{2(x-1)} \xrightarrow{x\to 1} \frac{0}{0}$$

$$\frac{(35x^6-36x^5+1)'}{(2(x-1))'} = \frac{210x^5-180x^4}{2} \xrightarrow{x\to 1} 15$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x^7-6x^6+x}{(x-1)^2} = 15$

Άσκηση 3

Να υπολογισθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^x - 5^x}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x+\ln x}$ γ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^{2x})}{x}$

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^x - 5^x}{x} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$

εφαρμόζουμε τον $1^{ο}$ καν. l'Hôpital. και ο λόγος των παραγώγων είναι:

$$\frac{(10^x - 5^x)'}{(x)'} = \frac{10^x \ln 10 - 5^x \ln 5}{1} \longrightarrow \ln 10 - \ln 5 = \ln \frac{10}{5}$$
$$= \ln 2.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{10^x - 5^x}{x} = \ln 2.$

β) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x+\ln x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. οπότε εφαρμ. $2^{ο}$ καν. l'Hôpital.

$$\frac{(e^x)'}{(x+\ln x)'} = \frac{e^x}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow{x\to +\infty} +\infty.$$

Άρα

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x+\ln x} = +\infty.$$

γ). $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{2x}) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και

$x \neq 0$ και $x' = 1 \neq 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον 2ο καν. l'Hôpital κι έχουμε για τον λόγο των παραγώγων:

$$\frac{\ln(1+e^{2x})'}{(x)'} = \frac{\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}}{1} = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{+\infty}{+\infty} \quad (*)$$

$$\frac{(2e^{2x})'}{(1+e^{2x})'} = \frac{4\cancel{e^{2x}}}{2\cancel{e^{2x}}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{2x})}{x} = 4.$

(*) στον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$

θα μπορούσες να κάνουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^{2x}}\,2}{\cancel{e^{2x}}(e^{-2x}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{(e^{-2x}+1)} = 2.$$

Άσκηση 4

Να υπολογισθούν τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2 e^{2x}}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$, γ) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \ln\dfrac{1}{x}\right)$

Λύση

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2 e^{2x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} . \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2 e^{2x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-2x}}{x^2}$ από 2ο κανον. l' Hôpital

$\dfrac{(e^{-2x})'}{(x^2)'} = \dfrac{-2e^{-2x}}{2x} = -\dfrac{e^{-2x}}{x} \xrightarrow{x\to-\infty} \dfrac{+\infty}{+\infty}$.

$\dfrac{(-e^{-2x})'}{(x)'} = \dfrac{2e^{-2x}}{1} = 2e^{-2x} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2 e^{2x}} = +\infty$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = (+\infty)^0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln x^{1/x}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x \ln x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\ln x = \dfrac{(+\infty)}{+\infty}$

$\dfrac{(\ln x)'}{x'} = \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \dfrac{1}{x} \xrightarrow{+\infty} 0$. άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x \ln x} = e^0 = 1$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$.

γ) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=(+\infty)-(+\infty)$

όμως:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\left[1-\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right]\right)$$

και το $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{+\infty}$

άρα θα εφαρμόσουμε τον 2ο καν. l'Hôpital μόνο στο όριο

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x\xrightarrow{x\to 0^+}0.$$

άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=0$ και έχουμε για το αρχικό όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\ln\frac{1}{x}\right)=\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right)\left(1-\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}(1-0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty.$$