

### 3.7 Ασκήσεις

**Άσκηση 1.** Αν υπάρχουν, να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια :

$$\begin{array}{llll} a) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{x}, & b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x}, & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}, & d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x}, \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & g) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}. \end{array}$$

**Απ.** a)  $2/\pi$ , b) 0, c) 0, d) 0, e) 0, f)  $+\infty$ , g) 1, h) 1.

**Άσκηση 2.** Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχουν τα όρια :

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}, \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}.$$

**Άσκηση 3.** Αν υπάρχουν, να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 1}, & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x + 3}, & c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^2 - 1}, \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{|x|(x - 1)}. \end{array}$$

**Απ.** a) 1, b)  $1/2$ , c) 0, d)  $-\infty$ .

**Άσκηση 4.** Αν υπάρχουν, να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x), \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x).$$

**Απ.** a)  $1/2$ , b) 0, c)  $+\infty$ .

**Άσκηση 5.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο

$$f = \begin{cases} x + 1 & \text{αν } x \leq -1, \\ x^2 + 1 & \text{αν } -1 < x < 0, \\ 1 - x & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα όρια: a)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ , b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , c)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

**Απ.** a) Δεν υπάρχει, b) 1, c)  $-3$ .

**Άσκηση 6.** Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός  $a$ , έτσι ώστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax),$$

να είναι πραγματικός αριθμός.

**Απ.** Για  $a = 1$  το όριο είναι  $1/2$ .