ΜΔΕ

Ασκήσεις 21/11/2014

Άσκηση 1

Να βρεθούν οι σειρές Fourier των ακόλουθων συναρτήσεων:

α) $\text{sign}(x)$ β) $x\cos x$ γ) $\begin{cases} 1, & |x|<\pi/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 1, & \pi/2<|x|<\pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ ε) $\begin{cases} 1, & \pi/2<x<\pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

στ) $\begin{cases} x & |x|<\pi/2 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$ ζ) $\begin{cases} \cos x & |x|<\pi/2 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$

Λύση

Η σειρά Fourier μιας συνάρτησης στο $[-\pi,\pi]$ δίνεται από τους παρακάτω τύπους

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad \text{όπου}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx.$$

όπου οι συντελεστές τις σειράς ενδέχεται να μηδενίζονται αν η συνάρτηση είναι άρτια, περιττή ....

2

α)

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}1 & x>1\\ -1 & x<1\end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι περιττή οπότε $a_0=a_k=0$ και

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign}(x)\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx=\frac{2}{k\pi}\left(1+(-1)^{k+1}\right)$$

οπότε

$$\operatorname{sign}(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}\left(1+(-1)^{k+1}\right)\sin kx=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$$

β) Η συνάρτηση $f(x)=x\cos x$ είναι περιττή, οπότε $a_0=a_k=0$ και

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\cos kx\,dx=\begin{cases}-1/2 & k=1\\ \dfrac{2(-1)^k k}{k^2-1} & k>1 \text{ θετικός ακέραιος}\end{cases}$$

οπότε

$$x\cos x\sim-\frac{\sin x}{2}+2\left(\frac{2\sin 2x}{3}-\frac{3\sin 3x}{8}+\frac{4}{15}\sin 4x-\cdots\right)$$

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\pi/2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$ είναι άρτια

οπότε $b_k=0$ και

©NEXT

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx = 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos kx\,dx = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ \dfrac{2(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)\pi}, & k=2\ell+1 \text{ περιττός θετ. ακέραιος} \end{cases}$$

Άρα

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \cdots\right)$$

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & \pi/2 < |x| < \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ είναι άρτια

οπότε $b_k = 0$ και

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} dx = 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos kx\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & k \text{ άρτιος} \\ -\dfrac{2(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)\pi} & k=2\ell+1 \text{ περιττός θετ. ακέραιος.} \end{cases}$$

Ένας πιο εύκολος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι

$f_\delta(x) = 1 - f_\gamma(x)$ δηλαδή η $f(x)$ του (δ) υποερωτήματος είναι $1-f(x)$ της $f(x)$ του (γ) υποερωτήματος οπότε

$$f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right).$$

ε) Η $f(x)$ δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια στο $[-\pi, \pi)$ οπότε θα υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές Fourier κι έχουμε:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos kx\,dx = \begin{cases} 0 & k \text{ άρτιος} \\ \dfrac{(-1)^{\ell+1}}{(2\ell+1)\pi} & k = 2\ell+1 \text{ περ. θετ. ακέραιος} \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin kx\,dx = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\ell}-1}{2\ell\pi} & k = 2\ell \text{ άρτιος} > 0 \\ \dfrac{1}{(2\ell+1)\pi} & k = 2\ell+1 \text{ περιττός} > 0. \end{cases}$$

οπότε

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\left(-\cos x + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 5x}{5} + \dots \right) + \frac{1}{\pi}\left(\sin x - \sin 2x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 6x}{3} - \dots \right)$$

στ). Η συνάρτηση είναι περιττή στο $[-\pi,\pi]$ οπότε
$a_0 = a_k = 0$ και

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin kx\,dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k} & k \text{ άρτιος} > 0 \\ \dfrac{2(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)^2\pi} & k = 2\ell+1 \text{ περιττός} > 0. \end{cases}$$

οπότε

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} - \dots\right) + \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots\right)$$

ζ) Η συνάρτηση είναι άρτια οπότε $b_k = 0$ και

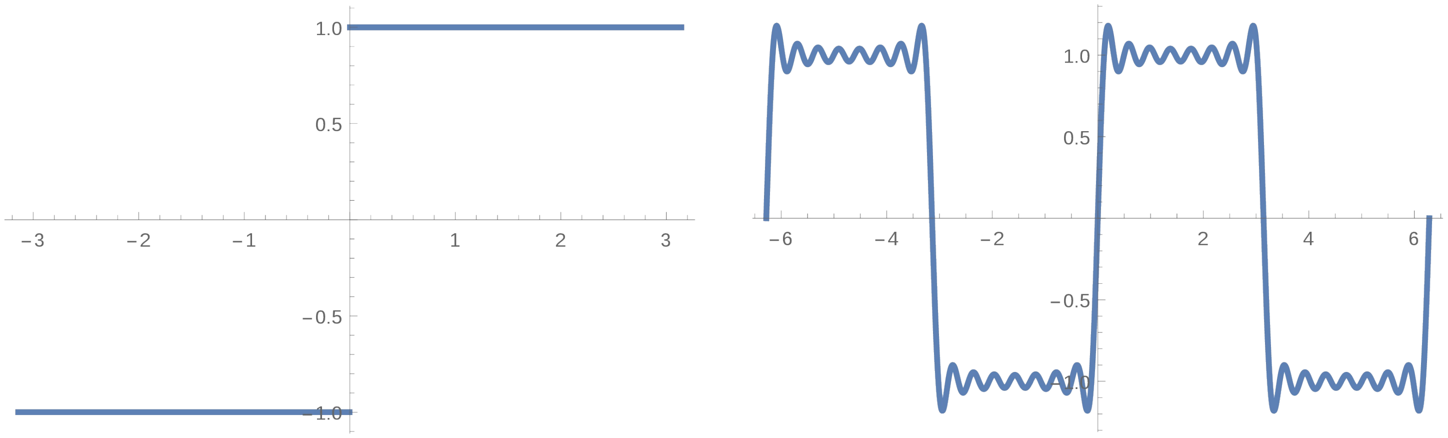
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\sin x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos kx\,dx =$$

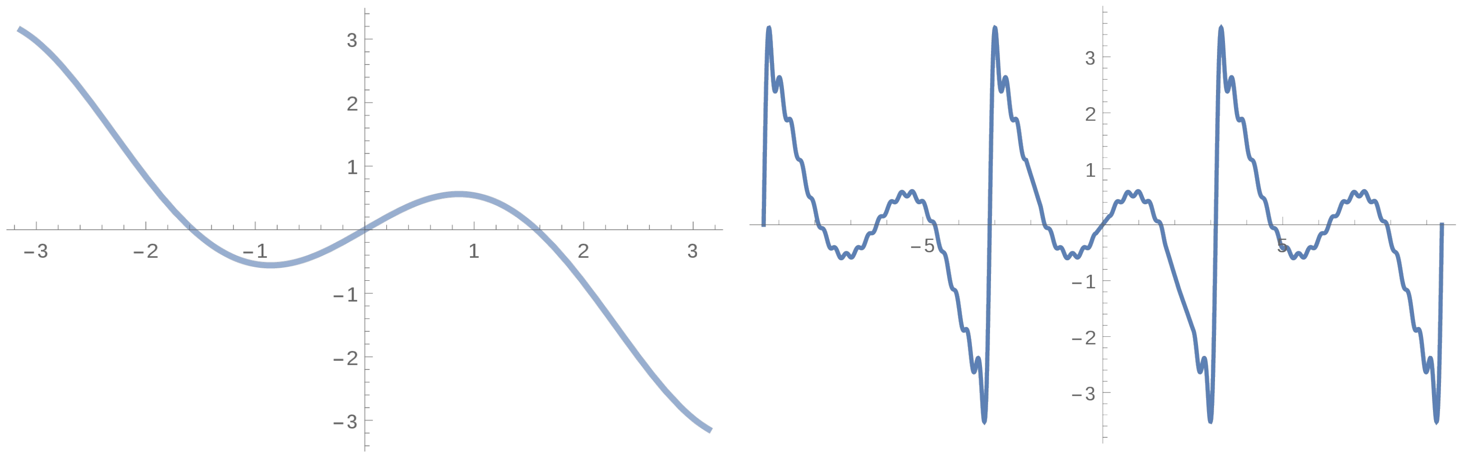
$$= \begin{cases} 1/2 & \text{αν } k=1 \\ 0 & \text{αν } k \text{ περιττός αλ.} \\ \dfrac{2(-1)^{\ell+1}}{(4\ell^2-1)\pi} & \text{αν } k=2\ell \text{ άρτιος}, \ell=1,2,\dots \end{cases}$$ άρα

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{\cos x}{2} + \frac{2\cos 2x}{3\pi} - \frac{2\cos 4x}{15\pi} + \dots$$

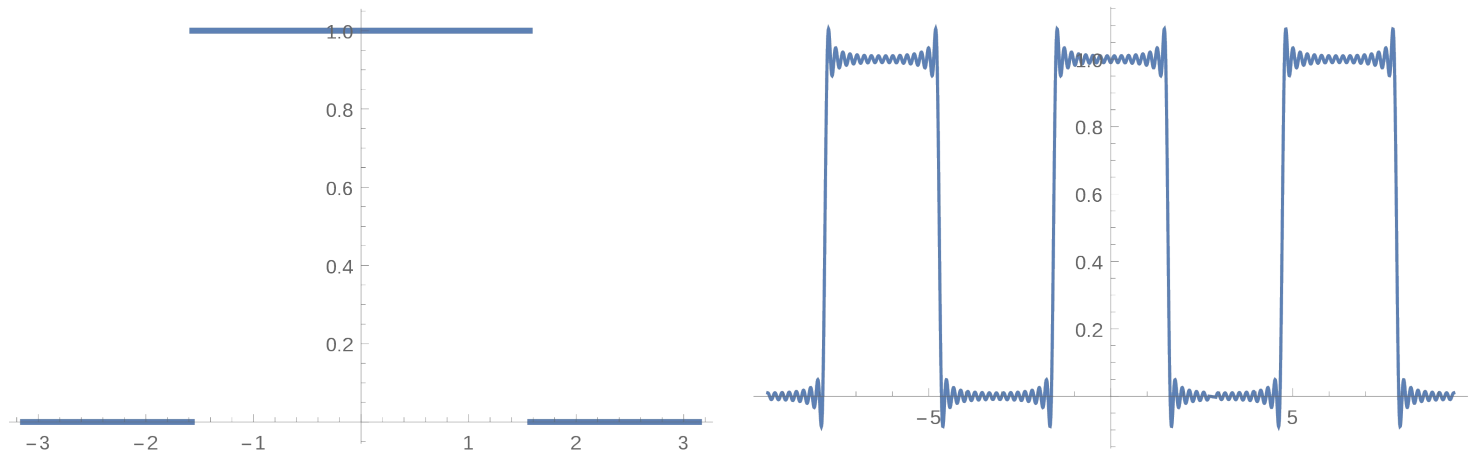
Άσκηση 1, (α)



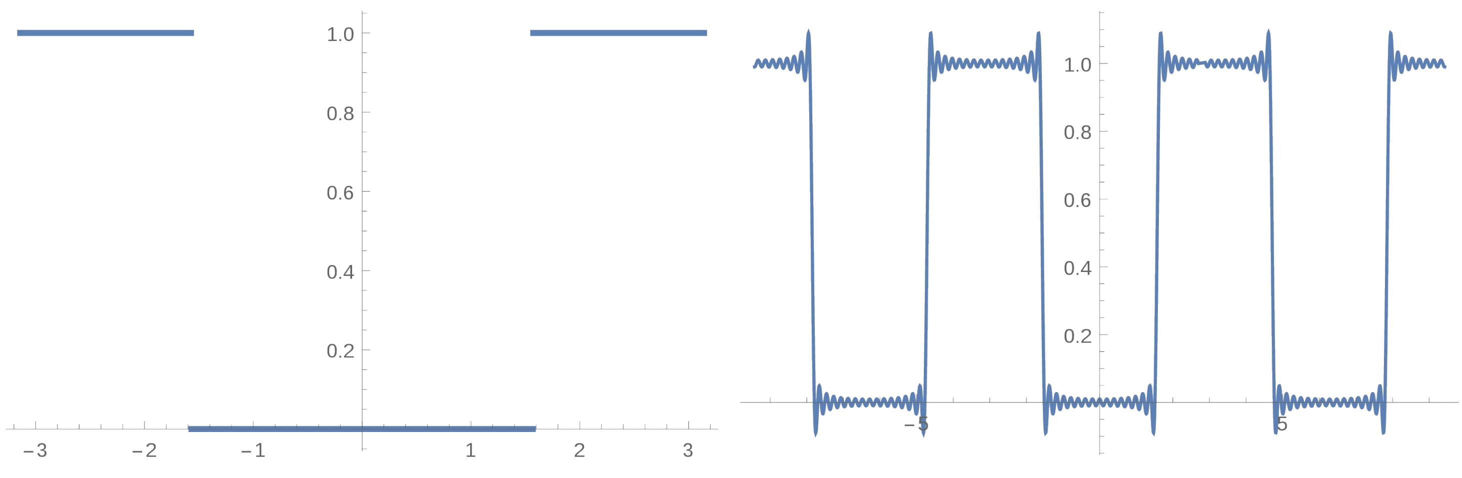
Άσκηση 1, (β)



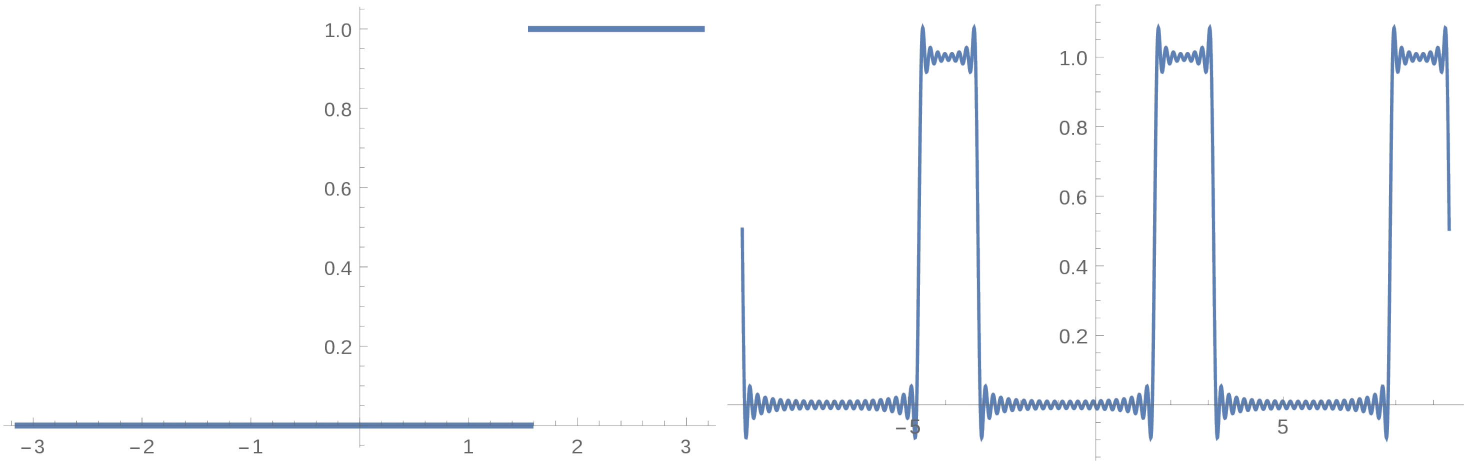
Άσκηση 1, (γ)



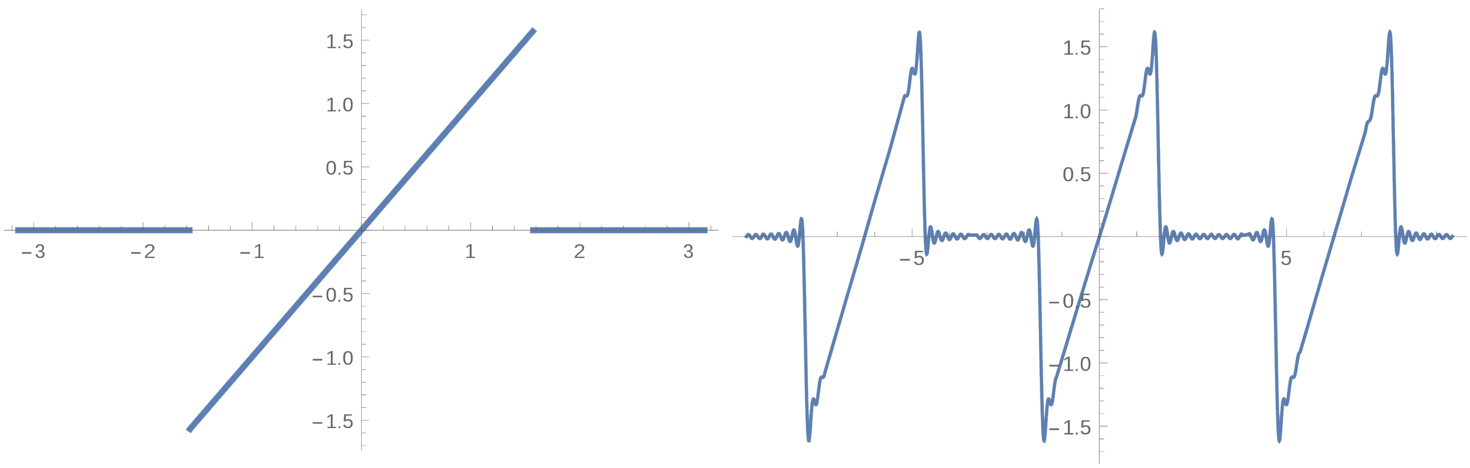
Άσκηση 1, (δ)



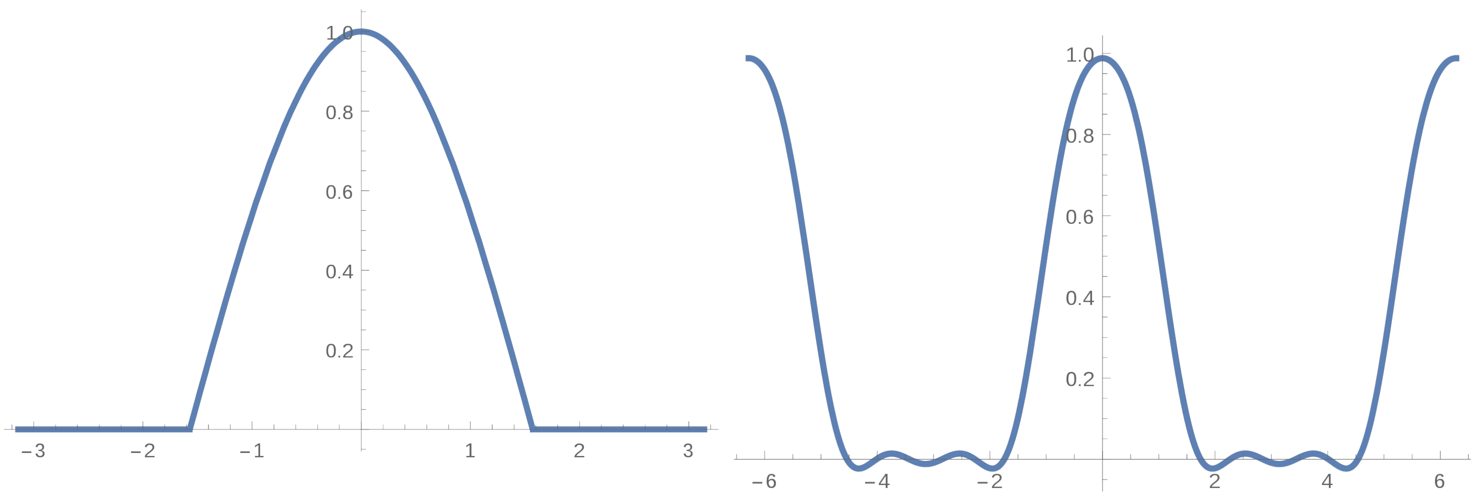
Άσκηση 1, (ε)



Άσκηση 1, (στ)



Άσκηση 1, (ζ)



Άσκηση 2

Να βρεθούν οι σειρές Fourier των παρακάτω συναρτήσεων δίχως να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier.
(Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τριγωνομετρικές ταυτότητες).

a) $\sin x \cos x$, b) $\sin^2 x$, c) $\cos^2 x$.

Λύση

a) $\sin x \cos x$. Είναι γνώριμο άρτιας επί περιττή συνάρτηση στο $[-\pi,\pi]$ οπότε η συνάρτηση $f(x)=\sin x\cos x$ είναι περιττή, οπότε αναζητούμε μια τριγ. ταυτότητα που να έχει στα δεξιά της μόνο ημίτονα. Πράγματι

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

άρα $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ είναι η σειρά Fourier!

Ομοίως:

b) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ οπότε

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

c) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Άσκηση 3:

Έστω ότι η $f(x)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο ℓ και ολοκληρώσιμη. Να δειχθεί ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$

a) $\displaystyle\int_a^{a+\ell} f(x)\,dx = \int_0^{\ell} f(x)\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^{\ell} f(x+a)\,dx = \int_0^{\ell} f(x)\,dx$

Λύση

a)

$$\int_0^{\ell} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\ell} f(x)\,dx =$$

(ισχύει $\forall a \in \mathbb{R}$ από ιδιότητες ολοκλήρωσης Riemann)

$$= \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{a+\ell} f(x)\,dx + \int_{a+\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{a+\ell} f(x)\,dx - \int_{\ell}^{a+\ell} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{a+\ell} f(x)\,dx - \int_0^{\ell} f(t+\ell)\,dt$$

(αλλαγή μεταβλητής στο 3ο ολοκλ.) $t = x - \ell$

$$= \cancel{\int_0^{a} f(x)\,dx} + \int_a^{a+\ell} f(x)\,dx - \cancel{\int_0^{\ell} f(t)\,dt}$$

$$= \int_a^{a+\ell} f(x)\,dx$$

b) Με αλλαγή μεταβλητής $x = y + a$ έχουμε για το a) μέρος

$$\int_a^{a+\ell} f(x)\,dx = \int_0^{\ell} f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^{\ell} f(y+a)\,dy = \int_0^{\ell} f(x)\,dx$$